Uvod v funkcionalno analizo

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

3. oktober 2024

Kazalo

1 Normirani in Banachovi prostori

1.1 Definicije in primeri

2. oktober 2024

Definicija 1.1.1. Naj bo X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikava $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ je ***norma***, če velja

(a) $\forall x \in X.\ ||x|| \geq 0$,

(b) $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$,

(c) $\forall \lambda \in \mathbb{F}.\ \forall x \in X.\ ||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$,

(d) $\forall x, y \in X.\ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (trikotniška neenakost).

Definicija 1.1.2. Če $p \colon X \to \mathbb{R}$ zadošča lasnostim (a), (c) in (d) iz zgornje definicije, je p ***polnorma*** na X.

Definicija 1.1.3. Prostor X skupaj z normo $||\cdot||$ je ***normiran prostor***.

Lema 1.1.4. V normiranem prostoru velja

$$\left| ||x|| - ||y|| \right| \leq ||x - y|| .$$

Dokaz. Iz

$$||x|| = ||x - y + y|| \leq ||x - y|| + ||y||$$

sledi

$$||x|| - ||y|| \leq ||x - y|| .$$

Podobno dobimo $||y|| - ||x|| \leq ||x - y||$. □

Če pišemo $f(x) = ||x||$, sledi, da je f zvezna in Lipshitzeva s konstanto 1.

Naj bo X normiran prostor. Vpeljemo metriko

$$d \colon X \to \mathbb{R},$$
$$d(x, y) = ||x - y|| .$$

Omenimo še dve lastnosti metrike d:

- d je translacijsko invariantna:

$$d(x + y, y + a) = ||(x + a) - (y + a)|| = ||x - y|| = d(x, y),$$

- d je pozitivno homogena:

$$d(\lambda x, \lambda y) = ||\lambda x - \lambda y|| = |\lambda|\, ||x - y|| = |\lambda|\, d(x, y).$$

Definicija 1.1.5. Normiran prostor X je ***Banachov***, če je (X, d) poln.

Trditev 1.1.6. Seštevanje vektorjev in množenje vektorjev s skalarjem sta zvezni operaciji v normiranem prostoru.

Domeni seštevanja in množenja sta zaporedoma $X \times X$ in $\mathbb{F} \times X$. Tu mislimo zveznost v smislu produktne metrike/topologije.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če velja $||x - x'|| < \varepsilon/2$ in $||y - y'|| < \varepsilon/2$, potem

$$||(x' + y') - (x + y)|| = ||(x' - x) - (y' + y)|| \leq ||x' - x|| + ||y' - y|| < \varepsilon.$$

Naj bodo $\varepsilon > 0$, $x \in X$ in $\lambda \in \mathbb{F}$. Velja

$$\begin{aligned} ||\lambda' x' - \lambda x|| &= ||\lambda' x' - \lambda x' + \lambda x' - \lambda x|| \\ &\leq |\lambda' - \lambda| \, ||x'|| + |\lambda| \, ||x' - x|| \, . \end{aligned}$$

Naj bo[1] $||x' - x|| \leq \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{|\lambda|+1}$. Tedaj velja

$$||x'|| = ||x' - x + x|| \leq ||x' - x|| + ||x|| \leq \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{|\lambda| + 1} + ||x|| \, .$$

Če velja še

$$||\lambda' - \lambda|| < \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{|\lambda| + 1} + ||x|| \right)^{-1} ,$$

dobimo $||(x' + y') - (x + y)|| < \epsilon$. $\square$

[1] V imenovalcu dodamo $+1$ zato, da ne potrebujemo ločeno obravnavati primera $\lambda = 0$.

Stvarno kazalo