

Algebra 3

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

21. oktober 2024

Kazalo

A Naloge

3

A Naloge

Vaje 1

Opomba: Če je polje K razširitev polja F (tj. $F \subseteq K$), včasih pišemo K/F . Tako lahko npr. namesto “ K je algebraična razširitev F ” pišemo “ K/F je algebraična razširitev”.

7. oktober 2024

1. Dokaži, da je število $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ algebraično. Poišči njegov minimalni polinom.
2. Določi $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}]$ in $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$.
3. Naj bo K/\mathbb{Q} kvadratična razširitev (tj. razširitev stopnje 2). Dokaži, da obstaja enolično določeno celo število $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 1$, brez kvadratov, za katerega je $K \cong \mathbb{Q}(\sqrt{a})$.
4. Naj bo $p \in \mathbb{N}$ praštevilo in $\zeta = e^{2\pi i/p}$ primitivni p -ti koren enote. Dokaži, da je ζ algebraično število, in določi stopnjo $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$.

Vaje 2

1. Naj bosta a in b algebraična elementa nad poljem F . Denimo, da sta stopnji $[F(a) : F]$ in $[F(b) : F]$ tuji si števili. Dokaži, da je

$$[F(a, b) : F] = [F(a) : F][F(b) : F].$$

14. oktober 2024

2. Določi razpadno polje K polinoma $x^5 - 2$ in izračunaj $[K : \mathbb{Q}]$.
3. Poišči primitiven element za razširitev $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.
4. Izračunaj $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$.
5. Naj bo ω transcendenten element nad \mathbb{Z}_2 . Dokaži, da je polinom $f(x) = x^2 - \omega$ nerazcepen nad $\mathbb{Z}_2(\omega)$, a ima dvakratno ničlo.
6. Naj bo p neko praštevilo. Dokaži, da razširitev $\mathbb{Z}_p(X, Y)/\mathbb{Z}_p(X^p, Y^p)$ ni enostavna.

Vaje 3

- 1.

21. oktober 2024