Uvod v funkcionalno analizo

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

7. oktober 2024

Kazalo

1 Normirani in Banachovi prostori

1.1 Definicije in primeri

2. oktober 2024

Definicija 1.1.1. Naj bo X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikava $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ je ***norma***, če velja

(i) $\forall x \in X.\ ||x|| \geq 0$,

(ii) $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$,

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{F}.\ \forall x \in X.\ ||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$,

(iv) $\forall x, y \in X.\ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (trikotniška neenakost).

Definicija 1.1.2. Če $p \colon X \to \mathbb{R}$ zadošča lasnostim (a), (c) in (d) iz zgornje definicije, je p ***polnorma*** na X.

Definicija 1.1.3. Prostor X skupaj z normo $||\cdot||$ je ***normiran prostor***.

Lema 1.1.4. V normiranem prostoru velja

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x - y|| .$$

Dokaz. Iz

$$||x|| = ||x - y + y|| \leq ||x - y|| + ||y||$$

sledi

$$||x|| - ||y|| \leq ||x - y|| .$$

Podobno dobimo $||y|| - ||x|| \leq ||x - y||$. □

Če pišemo $f(x) = ||x||$, sledi, da je f zvezna in Lipshitzeva s konstanto 1.

Naj bo X normiran prostor. Vpeljemo metriko

$$d \colon X \to \mathbb{R},$$
$$d(x, y) = ||x - y|| .$$

Omenimo še dve lastnosti metrike d:

- d je translacijsko invariantna:

$$d(x + y, y + a) = ||(x + a) - (y + a)|| = ||x - y|| = d(x, y),$$

- d je pozitivno homogena:

$$d(\lambda x, \lambda y) = ||\lambda x - \lambda y|| = |\lambda|\, ||x - y|| = |\lambda|\, d(x, y).$$

Definicija 1.1.5. Normiran prostor X je ***Banachov***, če je (X, d) poln.

Trditev 1.1.6. Seštevanje vektorjev in množenje vektorjev s skalarjem sta zvezni operaciji v normiranem prostoru.

Domeni seštevanja in množenja sta zaporedoma $X \times X$ in $\mathbb{F} \times X$. Tu mislimo zveznost v smislu produktne metrike/topologije.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če velja $||x - x'|| < \varepsilon/2$ in $||y - y'|| < \varepsilon/2$, potem

$$||(x' + y') - (x + y)|| = ||(x' - x) - (y' + y)|| \leq ||x' - x|| + ||y' - y|| < \varepsilon.$$

Naj bodo $\varepsilon > 0$, $x \in X$ in $\lambda \in \mathbb{F}$. Velja

$$\begin{aligned} ||\lambda' x' - \lambda x|| &= ||\lambda' x' - \lambda x' + \lambda x' - \lambda x|| \\ &\leq |\lambda' - \lambda| \, ||x'|| + |\lambda| \, ||x' - x|| \,. \end{aligned}$$

Naj bo[1] $||x' - x|| \leq \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{|\lambda|+1}$. Tedaj velja

$$||x'|| = ||x' - x + x|| \leq ||x' - x|| + ||x|| \leq \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{|\lambda| + 1} + ||x|| \,.$$

Če velja še

$$||\lambda' - \lambda|| < \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{|\lambda| + 1} + ||x|| \right)^{-1},$$

dobimo $||(x' + y') - (x + y)|| < \epsilon$. $\square$

Primer 1.1.6.1. Poglejmo $(\mathbb{F}^n, ||\cdot||_p)$, kjer je $1 \leq p \leq \infty$.

7. oktober 2024

Za $1 \leq p < \infty$ in $x = (x_1, \ldots, x_n)$ definiramo

$$\begin{aligned} ||x||_p &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right)^{1/p}, \\ ||x||_\infty &= \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \,. \end{aligned}$$

Velja, da so $(\mathbb{F}^n, ||\cdot||_p)$ Banachovi prostori (dokazali smo na vajah).

Vse odprte krogle $B(x, r)$ in zaprte krogle so vedno konveksne (DN, v primeru $0 < p < 1$ to ni res, zato $||\cdot||$ ni norma na F^n za $0 < p < 1$).

Definicija 1.1.7. Množica A nad $\mathbb{F}$ je ***algebra***, če velja

(i) $(A, +, \cdot)$ je kolobar.

(ii) A je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

(iii) $\forall x, y \in A.\ \forall \lambda \in \mathbb{F}.\ \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$.

Če ima A enoto, je A ***unitalnaunitalna algebra***. Če je A tudi normiran prostor, potem je normirana algebra, če velja ***submultiplikativnost***

$$||xy|| \leq ||x|| \cdot ||y|| \,.$$

Če ima normirana algebra enoto e, potem zahtevamo, da je $||e|| = 1$.

[1] V imenovalcu dodamo $+1$ zato, da ne potrebujemo ločeno obravnavati primera $\lambda = 0$.

Trditev 1.1.8. V normirani algebri je množenje zvezna operacija.

Dokaz. Podobno kot pri zveznosti množenja s skalarjem. □

Primer 1.1.8.1. Naj bo X Hausdorffov topološki prostor in

$$C_b(X) = \{\text{zvezne omejene funkcije iz } X \text{ v } \mathbb{F}\}.$$

Operacije definiramo po točkah:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x),\\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x),\\ (f \cdot g)(x) &= f(x)g(x).\end{aligned}$$

Sledi, da je $C_b(X)$ algebra. Dokažimo, da je normirana algebra in hkrati Banachov prostor, torej ***Banachova algebra*** glede na normo

$$||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Dokažimo, da je to res norma. Ker so funkcije omejene je supremum dobro definiran, torej drži (i). Očitno držita tudi (ii) in (iii).

Naj bo $x \in X$. Velja

$$\begin{aligned}|f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |(g(x))|\\ &\leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.\end{aligned}$$

Sledi

$$||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.$$

Torej je $||\cdot||_\infty$ norma. Dokažimo, da je prostor Banachov. Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje v $C_b(X)$. Tedaj velja

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists N_\varepsilon.\ \forall n, m \geq n_\varepsilon.\ ||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon.$$

Torej za $n, m \geq n_\varepsilon$ velja

$$\forall x \in X.\, |f_n(x) - f_m(x)|_\infty < \varepsilon.$$

Dobimo, da je $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo v $\mathbb{F}$. Naj bo

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

torej $f\colon X \to \mathbb{F}$. To je edini kandidat za limito. Preveriti moramo

$$f \in C_b(X) \quad \text{in} \quad f_n \to f \text{ glede na } ||\cdot||_\infty$$

Velja

$$\forall x \in X. \forall n, m \geq n_\varepsilon.\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Sledi (ko gre $n \to \infty$):

$$\forall x \in X. \forall m \geq n_\varepsilon.\ \in X.\ |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon- \tag{1}$$

Torej je $f - f_m$ omejena in zato je tudi $f = (f - f_m) + f_m$ omejena.

Pokažimo, da je f zvezna. Izberimo $m \geq n_\varepsilon$. Dokažimo, da je f zvezna v $x \in X$.

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f_m(y) + f_m(y) - f_m(x) + f_m(x) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \varepsilon + |f_m(y) - f_m(x)| + \varepsilon \end{aligned}$$

Ker je f_m zvezna, obstaja odprta okolica U za x, na kateri

$$|f_m(y) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Torej je f zvezna.

Za $m \geq n_\varepsilon$ v $\star$ naredimo supremum po $x \in X$.

$$||f - f_m||_\infty \leq \varepsilon$$

Sledi, da $f_n \to f$ v $C_b(X)$ oziroma $C_b(X)$ je Banachov.

Dokazati moramo, da je norma submultiplikativna in $||1||_\infty = 1$. Velja

$$\forall x \in X.\ |f(x)g(x)| \leq ||f||_\infty \, ||g||_\infty \, ,$$

torej

$$||fg|| \leq ||f|| \cdot ||g|| \, .$$

Velja tudi

$$||1||_\infty = \sup_{x \in X} |1(x)| = \sup_{x \in X} 1 = 1.$$

Opomba 1.1.8.2. V resnici Hausdorffovosti v zgornjem primeru ne potrebujemo. Včasih jo vseeno predpostavimo, sploh ko imamo opravka z lokalno kompaktnostjo, da ne pride do nesoglasij glede definicije.

Posledica 1.1.8.3. Če je X kompakten Hausdorffov prostor, potem je $C(X)$ Banachova algebra.

Dokaz. Velja $C(X) = C_b(C)$. □

Primer 1.1.8.4. Prostor $X = \mathbb{N}$ opremimo z diskretno topologijo. Funkcije so v tem primeru kar zaporedja:

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{F}, \\ f \leftrightarrow (f(1), f(2), \dots). \end{aligned}$$

Podobno priredimo

$$\begin{aligned} C(\mathbb{N}) &\leftrightarrow \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \\ C_b(\mathbb{N}) &\leftrightarrow l^\infty \end{aligned}$$

Tu je l^∞ prostor omejenih zaporedij za normo

$$||(x_1, x_2, \dots)|| = \sup_{x \in X} |x_n| \, .$$

Trditev 1.1.9. Naj bo X normiran prostor in Y podprostor v X.

1. Če je Y poln, je Y zaprt v X.
2. Če je X Banachov, potem je Y Banachov natanko tedaj, ko je zaprt.

Opomba 1.1.9.1. Podprostore normiranega prostora X vedno opremimo z normo definirano na X. Topologija je relativna.

Dokaz. (i): Naj bo $y \in \overline{Y}$. Dokažimo $y \in Y$. Obstaja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v Y, da $y_n \to y$. Sledi, da je (y_n) Cauchyjevo v Y. Ker je prostore poln, konvergira proti y' v Y. Zaradi enoličnosti limite,[2] sledi $y = y' \in Y$.

(ii): Naj bo Y zaprt v X. Pokažimo, da je Banachov. Naj bo (y_n) Cauchyjevo v Y. Torej je Cauchyjevo v X. Torej konvergira proti $y \in X$, saj je X poln. Ker je Y zaprt, je $y \in Y$, torej $y_n \to y$ in Y. $\square$

Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov prostor. Definiramo

$$C_0(X) := \left\{ f \in C(X) \;\middle|\; \forall \varepsilon > 0.\ \exists K^{\text{komp.}} \subseteq X.\ \forall x \in X \setminus K.\ |f(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Tedaj $f \in C_0(X)$ pomeni vse zvezne funkcije, ki gredo proti 0 v "neskončnosti".

Primer 1.1.9.2. Na realni premici se to prevede v

$$f \in C_0(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0.$$

Pri naravnih številih, $C_0(\mathbb{N})$, pa dobimo

$$c_0 := \left\{ (x_1, x_2, \dots) \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

Dokažimo, da je $C_0(X)$ zaprt dvostranski ideal v $C_b(X)$. Dokažimo, da je $C_0(X)$ zaprt podprostor.

(i) Naj bosta $f, g \in C_0(X)$. Potem $f + g \in C_0(X)$ in velja

$$\forall \varepsilon > 0. \exists K_1, K_2 \text{ kompaktna. } |f(x)| < \varepsilon/2$$

za $x \in X \setminus K_1$ in

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

za $x \in X \setminus K_2$. Za $x \in X \setminus (K_1 \cup K_2)$ je

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pokazali smo $f + g \in X_0(X)$.

Dokažimo $\lambda f \in C_0(X)$.

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists K^{komp.}.\ |f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}$$

[2] To sledi iz Hausdorffovosti.

za vse $x \in X \setminus K$. Torej za $x \in X \setminus K$

$$|\lambda f(x)| = |\lambda|\,|f(x)| < \frac{|\lambda|}{|\lambda|+1} \cdot \varepsilon < \varepsilon,$$

oziroma $\lambda f \in C_0(X)$.

Dokažimo, da je $C_0(X)$ zaprt v $C_b(X)$. Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $C_0(X)$ in $f_n \to f$ v $C_b(X)$. Dokažimo $f \in C_0(X)$. Imamo

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists n_\varepsilon.\ \forall n \geq n_\varepsilon.\ ||f - f_n||_\infty < \varepsilon.$$

V posebnem torej

$$||f - f_{n_\varepsilon}|| < \varepsilon.$$

Ker je $f_{n_\varepsilon} \in C_0(X)$, obstaja $K^{\text{komp.}} \subseteq X$, da je

$$\forall x \in X \setminus K.\ |f_{n_\varepsilon}(x)| < \varepsilon.$$

Za $x \in X \setminus K$ velja

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Torej $f \in C_0(X)$.

Pripomnimp še zakaj je $C_0 \subseteq C_b(X)$. Torej zakaj je $f \in C_0(X)$ vedno omejena. Po definiciji je izven nekega kompakta omejena. Na kompaktu pa je f omejena zaradi zveznosti.

Preostane še, da je $C_0(X)$ dvostranski ideal v $C_b(X)$. Ker je algebra $C_b(X)$ komutativna, preverimo, da je levi ideal. Naj bo $f \in C_b(X)$ in $g \in C_0(X)$. Naj bo $\varepsilon > 0$.

Ker je $g \in C_0(X)$, obstaja kompakt K v X, da je

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{||f||_\infty + 1}$$

za $x \in X \setminus K$. Torej za $x \in X \setminus K$ velja

$$|f(x)g(x)| < |f(x)| \frac{\varepsilon}{||f||_\infty + 1} \leq \frac{||f||_\infty}{||f||_\infty + 1}\varepsilon < \varepsilon$$

Sledi, da je $C_0(X)$ Banachova algebra, ki nima nujno enice, saj velja

$$C_0(X) \text{ ima enoto} \Leftrightarrow X \text{ je kompakt.}$$

Primer 1.1.9.3. Prostor vseh zaporedij, ki konvergirajo proti 0, c_0, je Banachov prostor oziroma celo Banachova algebra.

Opomba 1.1.9.4. Prostor l^p, kjer $1 \leq p < \infty$, definiramo kot

$$l^p := \left\{ (x_1, x_2, \dots) \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x|^p < \infty \right\}.$$

Tega prostora ne dobimo iz zveznih funkcij. Dobimo ga iz teorije mere. Velja, da je $(l_p, ||\cdot||_\infty)$ je Banachov za

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Primer 1.1.9.5. Naj bo

$$c = \{(x_1, x_2, \dots) \mid \text{limita } x_n \text{ obstaja}\}$$

in $||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Sledi, da je $(c, ||\cdot||_\infty)$ Banachov.

Definiramo še

$$c_{00} = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_n = 0 \text{ od nekod dalje}\}.$$

Velja $c_{00} \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq l^\infty$ in $c_{00} \subseteq l^p$ za $1 \leq p < \infty$. Več o teh prostorih smo povedali na vajah.

1.2 Napolnitve normiranih prostorov

Naj bo X normiran prostor. Ali obstaja Banachov prostor $\hat{X}$, da je $X \subseteq \hat{X}$. Izkaže se, da ja, $\hat{X}$ lahko celo izberemo tako, da bo X gost v $\hat{X}$.

9. oktober 2024

Stvarno kazalo