

Uvod v funkcionalno analizo

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

3. oktober 2024

1 Normirani in Banachovi prostori

1.1 Definicije in primeri

Definicija 1.1.1. Naj bo X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Preslikava $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ je **norma**, če velja

- (a) $\forall x \in X. \|x\| \geq 0$,
- (b) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- (c) $\forall \lambda \in \mathbb{F}. \forall x \in X. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- (d) $\forall x, y \in X. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trikotniška neenakost).

Definicija 1.1.2. Če $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ zadošča lastnostim (a), (c) in (d) iz zgornje definicije, je p **polnorma** na X .

Definicija 1.1.3. Prostor X skupaj z normo $\|\cdot\|$ je **normiran prostor**.

Lema 1.1.4. V normiranem prostoru velja

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Dokaz. Iz

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

sledi

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Podobno dobimo $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. □

Če pišemo $f(x) = \|x\|$, sledi, da je f zvezna in Lipshitzeva s konstanto 1.

Naj bo X normiran prostor. Vpeljemo metriko

$$\begin{aligned} d : X &\rightarrow \mathbb{R}, \\ d(x, y) &= \|x - y\|. \end{aligned}$$

Omenimo še dve lastnosti metrike d :

- d je translacijsko invariantna:

$$d(x + y, y + a) = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y),$$

- d je pozitivno homogena:

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d(x, y).$$

Definicija 1.1.5. Normiran prostor X je **Banachov**, če je (X, d) poln.

Trditev 1.1.6. Seštevanje vektorjev in množenje vektorjev s skalarjem sta zvezni operaciji v normiranem prostoru.

Domeni seštevanja in množenja sta zaporedoma $X \times X$ in $\mathbb{F} \times X$. Tu mislimo zveznost v smislu produktne metrike/topologije.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če velja $\|x - x'\| < \varepsilon/2$ in $\|y - y'\| < \varepsilon/2$, potem

$$\|(x' + y') - (x + y)\| = \|(x' - x) - (y' - y)\| \leq \|x' - x\| + \|y' - y\| < \varepsilon.$$

Naj bodo $\varepsilon > 0$, $x \in X$ in $\lambda \in \mathbb{F}$. Velja

$$\begin{aligned} \|\lambda'x' - \lambda x\| &= \|\lambda'x' - \lambda x' + \lambda x' - \lambda x\| \\ &\leq |\lambda' - \lambda| \|x'\| + |\lambda| \|x' - x\|. \end{aligned}$$

Naj bo¹ $\|x' - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|\lambda|+1}$. Teda velja

$$\|x'\| = \|x' - x + x\| \leq \|x' - x\| + \|x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|\lambda|+1} + \|x\|.$$

Če velja še

$$\|\lambda' - \lambda\| < \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|\lambda|+1} + \|x\| \right)^{-1},$$

dobimo $\|(x' + y') - (x + y)\| < \varepsilon$. □

¹V imenovalcu dodamo +1 zato, da ne potrebujemo ločeno obravnavati primera $\lambda = 0$.

Stvarno kazalo

Banachov prostor, [2](#)

norma, [2](#)

normiran prostor, [2](#)

polnorma, [2](#)