Algebra 3

Vaje 1

Naloga 1. Dokaži, da je število $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ algebraično. Poišči njegov minimalni polinom.

Naloga 2. Določi $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}]$ in $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$.

Če je polje K razširitev polja F (tj. $F \subseteq K$), včasih pišemo K/F. Tako lahko npr. namesto "K je algebraična razširitev F" pišemo "K/F je algebraična razširitev".

Naloga 3. Naj bo $K/\mathbb{Q}$ kvadratična razširitev (tj. razširitev stopnje 2). Dokaži, da obstaja enolično določeno celo število $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 1$, brez kvadratov, za katerega je $K \cong \mathbb{Q}(\sqrt{a})$.

Naloga 4. Naj bo $p \in \mathbb{N}$ praštevilo in $\zeta = e^{2\pi i/p}$ primitivni p-ti koren enote. Dokaži, da je ζ algebraično število in določi stopnjo $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$.