RAMSEYEVA TEORIJA

JAN PANTNER

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

05D10

Članek obravnava osnovne pojme Ramseyeve teorije kot so Ramseyeva števila, grafovska Ramseyeva števila, Schurova števila in "The Happy End Problem". Med drugim, dokaže Ramseyev izrek in nekaj zgornjih ter spodnjih mej za Ramseyevo število $R(r,s)$.

RAMSEY THEORY

The article discusses the basic concepts of Ramsey theory, such as Ramsey numbers, graph Ramsey numbers, Schur numbers, and The Happy End Problem. Among other results, it proves Ramsey's theorem and presents some upper and lower bounds for the Ramsey number $R(r,s)$.

1. Uvod

Ramseyeva teorija govori o particijah velikih struktur. Tipičen rezultat nam pove, da se mora v neki particiji dovolj velike strukture pojaviti neka specifična podstruktura. Na primer, če povezave dovolj velikega polnega grafa pobarvamo z nekaj barvami, mora nujno obstajati monokromatičen trikotnik (v tem primeru imamo particijo povezav na različne barve, osnovna struktura so povezave grafa, iskana podstruktura pa monokromatičen trikotnik).

Da zgornje res drži, nam zagotovi Ramseyev izrek, ki je nekakšna "večdimenzionalna" posplošitev Dirichletovega principa, ki tudi sam preučuje particije struktur (na primer razdelitev golobov v golobnjake).

Bolj filozofsko, Ramseyeva teorija pove, da bodo ne gleda na to, kako kaotičen je nek sistem, znotraj sistema vedno obstajali urejeni deli.

Rezultati v članku so večinoma povzeti po [4] in [5]. V [4] je predstavljeno tudi zgodovinsko ozadje razvoja Ramseyeve teorije.

2. Osnovni rezultati

Zgled 1. Ali med poljubnimi šestimi ljudmi vedno obstajajo trije, ki se med seboj poznajo, ali trije, ki se med seboj ne poznajo?

Poglejmo enega izmed teh ljudi. Brez škode za splošnost po Dirichletovem principu med ostalimi petimi obstajajo trije, ki jih pozna. Če se poljubna dva med temi tremi poznata, imamo tri ljudi, ki se med seboj poznajo. Sicer se ti trije med seboj ne poznajo, odgovor je torej v obeh primerih pritrdilen.

Zgornji zgled je eden izmed enostavnejših rezultatov Ramseyeve teorije, vendar v nadaljevanju, za lažje razumevanje, izjave raje formuliramo v jeziku teorije grafov in ne socialne interakcije.

Kot zanimivost lahko omenimo, da se Ramsey v resnici ni ukvarjal niti z grafi niti s socialnimi interakcijami, temveč z logiko. Izrek, po katerem je najbolj znan, je dokazal kot manjšo lemo na poti k popolnoma drugačnim rezultatom. Več o Ramseyu se nahaja v [4, poglavje 30]. Večina zgodnjega razvoja Ramseyeve teorije se je zgodila šele po njegovi smrti pri ranih 26-tih letih. Za zgodnji razvoj je med drugimi v veliki meri zaslužen eden najznamenitejših matematikov 20. stoletja Paul Erdős.

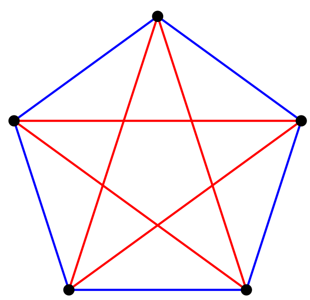
Izrek 1 (Ramsey). *Za poljubni naravni števili r in s obstaja najmanjše takšno naravno število $n = R(r, s)$, da velja naslednje: Če povezave polnega grafa K_n pobarvamo z dvema barvama, zagotovo obstaja poln podgraf moči r, v katerem so vse povezave prve barve, ali pa poln podgraf moči s, v katerem so vse povezave druge barve.*

Številu $R(r, s)$ pravimo *Ramseyevo število.* Iz definicije takoj sledi $R(r, s) = R(s, r)$ in $R(2, n) = n$.

Alternativna formulacija zgornjega izreka bi bila, da vsak graf na n točkah vsebuje bodisi kliko moči r bodisi antikliko moči s. Dokaz te verzije izreka izpustimo, izrek 2 je splošnejši.

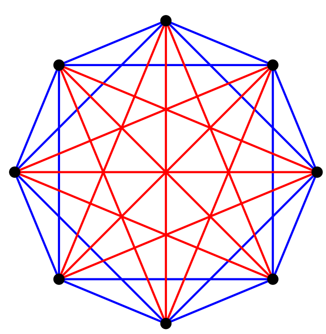
Zgled 2. Določimo $R(3, 3)$ in $R(3, 4)$.

Pokazali smo že, da velja $R(3, 3) \leq 6$ (ljudi predstavimo z vozlišči, poznanstva pa z barvo povezave). Za dokaz spodnje meje si poglejmo sliko 1. Opazimo, da barvanje nima monokromatičnega trikotnika, torej $R(3, 3) > 5$. Skupaj smo dokazali $R(3, 3) = 6$.



Slika 1. Barvanje K_5 z dvema barvama, ki ne vsebuje monokromatičnega trikotnika.

Slika 2 prikazuje barvanje K_8 z rdečo in modro barvo, ki nima rdečih trikotnikov in nima modrih klik velikosti 4. Sledi $R(3, 4) > 8$.



Slika 2. Barvanje K_8 z dvema barvama, ki ne vsebuje rdečega trikotnika ali modre klike moči štiri.

Pokažimo, da velja $R(3, 4) = 9$. Recimo, da imamo barvanje K_9 z rdečo in modro barvo, ki ne vsebuje rdečega trikotnika in ne vsebuje modre klike moči štiri. Poglejmo si neko vozlišče v_0.

- Recimo, da je vozlišče v_0 vsebovano v vsaj šestih modrih povezavah. Zaradi prejšnjega dela zgleda lahko med temi šestimi vozlišči najdemo tri vozlišča, ki tvorijo mmonokromatičen trikotnik. Če je slednji moder, skupaj z vozliščem v_0 tvori modro kliko moči štiri, sicer pa imamo rdeč trikotnik.

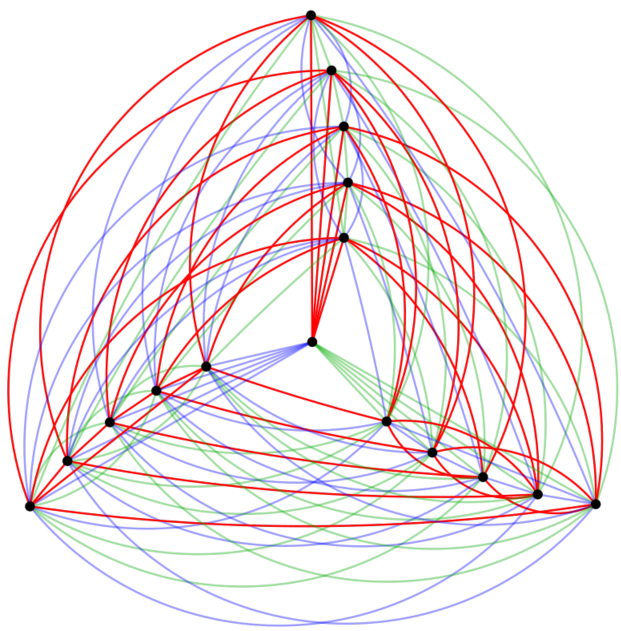
- Recimo, da je vozlišče v_0 vsebovano v vsaj štirih rdečih povezavah. Če med temi štirimi vozlišči (ki so z v_0 povezana z rdečo povezavo) ni nobene rdeče povezave, tvorijo modro kliko moči štiri. Če obstajata med njimi vozlišči, ki sta povezani z rdečo povezavo, tedaj skupaj z v_0 tvorita rdeč trikotnik.

Edina preostala možnost je, da je vsako vozlišče vsebovano v natanko treh rdečih povezavah. V tem primeru podgraf, vpet na rdečih povezavah, krši lemo o rokovanju.

Eden izmed načinov, kako posplošiti Ramseyev izrek, je, da dodamo več barv. To prikazuje naslednji zgled.

Zgled 3. Določimo $R(3,3,3)$. Enostavno je pokazati $R(3,3,3) < 17$. Poglejmo vozlišče v_0. Brez škode za splošnost je vsebovano v vsaj šestih povezavah rdeče barve. Če je med temi šestimi vozlišči kakšna povezava rdeče barve, smo končali, sicer pa upoštevamo $R(3,3) = 6$.

Izkaže se, da velja enakost, torej $R(3,3,3) = 17$. Še več, obstajata natanko dve neizomorfni barvanji grafa K_{16}, ki ne vsebujeta monokromatičnega trikotnika. Slika 3 prikazuje enega od njiju.



Slika 3. Barvanje K_{16} s tremi barvanji, ki ne vsebuje monokromatičnega trikotnika. Vir: [7]

3. Dokaz Ramseyevega izreka

Izrek 2 (Ramsey). *Naj bo $r \geq 1$ in $a_1, a_2 \geq r$. Tedaj obstaja najmanjše takšno naravno število $R(a_1, a_2; r)$, da velja naslednje: Če v množici S moči $n \geq R(a_1, a_2; r)$ vse r-podmnožice pobarvamo z barvo 1 ali 2, potem obstaja takšna a_1-podmnožica, da so vse njene r-podmnožice barve 1, ali pa obstaja takšna a_2-podmnožica, da so vse njene r-podmnožice barve 2.*

Dokaz. Uporabimo dvojno indukcijo, po r in še po $a_1 + a_2$. V primeru $r = 1$ velja $R(a_1, a_2; 1) = a_1 + a_2 - 1$. Recimo, da je $a_1 \geq a_2$. Potem je $R(a_1, a_2; a_2) = a_1$. Sedaj predpostavimo, da izrek velja za $r - 1$ in ga dokažimo za r. Naj bo

$$a_1' := R(a_1 - 1, a_2; r),$$
$$a_2' := R(a_1, a_2 - 1; r).$$

Naj bo S množica moči več kot $R(a_1', a_2'; r-1) + 1$. Vse podmnožice S pobarvamo z barvo 1 ali barvo 2. Naj bo $a \in S$ in $S' := S \setminus \{a\}$. Barvanje S' je usklajeno z barvanjem S tako, da je barva $X \subseteq S'$ enaka barvi $X \cap \{a\}$ v S.

Ker velja $|S'| \geq R(a'_1, a'_2; r-1)$, brez škode za splošnost obstaja a'_1-podmnožica A množice S', v kateri so vse $(r-1)$-podmnožice barve 1. Velja $|A| = a' = R(a_1 - 1, a_2; r)$. Sedaj ločimo dva primera.

- Recimo, da v A obstaja a_2-podmnožica, v kateri so vse r-podmnožice barve 2.
- Recimo, da v A obstaja $(a_1 - 1)$-podmnožica A', v kateri so vse r-podmnožice barve 1. Tedaj definiramo

$$A'' := A' \cap \{a\}\,.$$

  Velja $|A''| = a_1$. Ker je barvanje $S' \supseteq A'$ usklajeno z barvanjem $S \supseteq A$, so vse r podmnožice v A'' barve 1.

V obeh primerih smo izpolnili zahtevan pogoj, torej izrek velja tudi za r. ■

V posebnem primeru $r = 2$ se izrek 2 zreducira na izrek 1.

Naslednja trditev je zanimiv geometrijski rezultat, ki ga lahko dokažemo s pomočjo izreka 2.

Izrek 3 (Erdős-Szekeres). *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tako število $N(n)$, da velja: Če imamo v ravnini $N \geq N(n)$ točk v splošni legi, potem med njimi obstaja n točk, ki določajo konveksen n-kotnik.*

Najprej dokažimo naslednjo geometrijsko lemo.

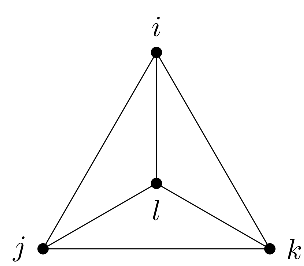
Lema 4. *Množica n točk v ravnini tvori konveksen n-kotnik natanko tedaj, kadar vsaka podmnožica štirih točk tvori konveksen 4-kotnik.*

Dokaz. Poglejmo konveksno ogrinjačo točk. Če točke tvorijo konveksen n-kotnik, potem vsake štiri tvorijo konveksen štirikotnik. Nasprotno, recimo, da točke ne tvorijo konveksnega n-kotnika. Potem obstaja točka znotraj ogrinjače. Če ogrinjačo trianguliramo, bo ta točka znotraj nekega trikotnika in skupaj z oglišči trikotnika ne bo tvorila konveksnega 4-kotnika. ■

Dokaz trditve. Naj bo $N \geq N(n) := R(n, n; 3)$. Točke označimo z $1, 2, \ldots, N$. Poglejmo poljuben trikotnik in njegova oglišča označimo z i, j, k tako, da $i < j < k$. Če je trikotnik ijk pozitivno orientiran, ga pobarvamo s prvo barvo, sicer z drugo.

Ker je $N \geq R(n, n; 3)$, brez škode za splošnost obstaja n-podmnožica, v kateri so vsi trikotniki prve barve. Dokažimo, da ta množica tvori konveksen n-kotnik. Predpostavimo nasportno in uporabimo lemo. Torej obstajajo štiri točke, ki ne tvorijo konveksnega štirikotnika.

Naj bodo te štiri točke i, j, k in l – kot jih prikazuje slika 4. Brez škode za splošnost naj velja $i < j < k$. Ker so vsi trikotniki prve barve, nam trikotnik ijk pove $i < l < k$. Zaradi trikotnika ijl sledi $i < j < l$ ali $l < i < j$. Slednja možnost je v protislovju z $i < l < k$, torej velja $i < j < l$. Skupaj smo dobili $i < j < l < k$, to pa je v protislovju z barvo trikotnika ljk. ■



Slika 4. Štiri točke, ki ne tvorijo konveksnega štirikotnika.

Izrek 3 je osnovni rezultat, povezan s problemom, znanim kot “The Happy End Problem”. Več o tem se nahaja v [4, poglavje 29].

4. Meje za Ramseyeva števila

V tem razdelku dokažemo nekaj zgornjih in spodnjih mej za Ramseyeva števila.

Trditev 5. *Naj bosta $a_1, a_2 \geq 2$. Velja*

$$R(a_1, a_2; 2) \leq \binom{a_1 + a_2 - 2}{a_1 - 1}.$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo. Velja

$$R(a_1, 2; 2) = a_1 = \binom{a_1 + 2 - 2}{a_1 - 1}$$

in podobno za $R(2, a_2; 2)$. Direktno iz dokaza izreka 2 sledi

$$R(a_1, a_2; r) \leq R(R(a_1 - 1, a_2; r), R(a_1, a_2 - 1; r); r - 1) + 1. \tag{1}$$

Za dokaz indukcijskega koraka nazadnje upoštevamo še $R(a_1, a_2; 1) = a_1 + a_2 - 1$ in dobimo

$$\begin{aligned} R(a_1, a_2; 2) &\overset{(1)}{\leq} R(R(a_1 - 1, a_2; 2), R(a_1, a_2 - 1; 2); 1) + 1 \\ &= (R(a_1 - 1, a_2; 2) + R(a_1, a_2 - 1; 2) - 1) + 1 \\ &\overset{\text{IP}}{\leq} \binom{a_1 + a_2 - 3}{a_1 - 2} + \binom{a_1 + a_2 - 3}{a_1 - 1} \\ &= \binom{a_1 + a_2 - 2}{a_1 - 1}, \end{aligned}$$

kjer zadnja enakost velja zaradi rekurzivne formule za binomski koeficient. ■

Izrek 6. *Naj bosta k in n takšni naravni števili, da velja $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Potem velja $R(k, k) > n$.*

Dokaz. Zadošča dokazati, da obstaja barvanje povezav K_n z dvema barvama brez monokromatičnega K_k.

Povezave grafa K_n pobarvamo naključno. Vsako povezavo neodvisno, z verjetnostjo $1/2$ pobarvamo s prvo barvo in verjetnostjo $1/2$ z drugo barvo.

V K_n imamo $\binom{n}{k}$ kopij K_k. Naj bo A_i dogodek, da je i-ti K_k monokromatičen. Velja

$$\mathbb{P}(A_i) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Torej je verjetnost, da obstaja monokromatičen K_k, enaka

$$\mathbb{P}\left(\cup_i A_i\right) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Če velja $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, je verjetnost, da v takšnem poljubnem barvanju ni monokromatičnega K_k, večja od 0. Torej obstaja barvanje povezav K_n z dvema barvama brez monokromatičnega K_k. ■

Posledica 7. *Naj bo $k \geq 3$. Potem velja $R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$.*

Dokaz. Naj bo $k \geq 3$. Definiramo $n := \lfloor 2^{k/2} \rfloor$. Potem

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} \leq \left(2^{k/2}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot 2^{1-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}} = \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!}.$$

Ker za $k \geq 3$ velja $\frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} < 1$, sledi $R(k, k) > 2^{k/2}$. ■

Ta rezultat je Erdős v [2] predstavil že leta 1947.

Kljub obstoju tudi boljših ocen od zgornjih, iskanje točnih vrednosti Ramseyevih števil hitro postane zelo zahtevno in nedosegljivo današnji tehnologiji. Tabela 1 prikazuje trenutne znane vrednosti in meje za Ramseyeva števila $R(r, s)$. Razširjeno tabelo bralec najde v [8].

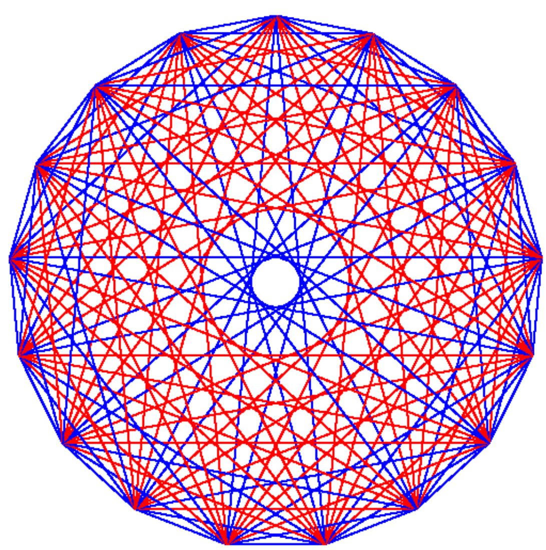
$R(r,s)$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40-41
4		18	25	36-40	49-58	59-79	73-105	92-135
5			43-46	59-85	80-133	101-193	133-282	149-381

Tabela 1. Znane vrednosti/meje za Ramseyeva števila $R(r, s)$.

Najnovejša sprememba v tabeli se je zgodila decembra leta 2023, ko je bil objavljen članek, v katerem je pokazano $R(3, 10) \leq 41$. O tem rezultatu govori [1].

Vidimo, da je v resnici znanih zelo malo Ramseyevih števil. Če želimo dokazati, da je $R(s, t) = N$, moramo najti ustrezno barvanje povezav grafa K_{N-1} in pokazati, da vsa barvanja povezav grafa K_N ustrezajo nekemu pogoju. V teoriji bi lahko uporabili računalnik in preverili vsa možna barvanja za zaporedne n, dokler ne najdemo prvega N, pri katerem vsako barvanje zadošča zahtevanemu pogoju. Že v primeru dveh barv postane število barvanj zelo hitro nepredstavljivo veliko. V primeru, ko imamo več kot dve barvi ali pa v primeru $R(s, t; r)$, kjer $r > 2$, je znanega še veliko manj.

Primer 1. Slika 5 prikazuje barvanje, ki določi strogo spodnjo mejo za $R(4, 4)$.



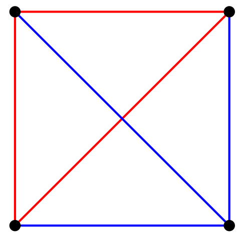
Slika 5. Barvanje K_{17} z dvema barvama, ki ne vsebuje monokromatičnega K_4. Vir: [6]

5. Grafovska Ramseyeva števila

Definicija 1. Naj bodo $G_1, \ldots, G_k$ enostavni grafi. *Grafovsko Ramseyevo število* $R(G_1, G_2, \ldots, G_k)$ je najmanjše naravno število n, za katerega velja, da vsako barvanje s k barvami povezav K_n vsebuje G_i barve i za nek i.

Obstoj Grafovskega Ramseyevega števila sledi direktno iz izreka 2.

Zgled 4. Določimo $R(P_4, C_4)$. Slika 6 prikazuje barvanje, ki ne vsebuje niti C_4 rdeče barve niti P_4 modre barve. Sledi $R(P_4, C_4) > 4$.



Slika 6. Barvanje K_4 z dvema barvama, ki ne vsebuje niti C_4 rdeče barve niti P_4 modre barve.

Pokažimo, da je $R(P_4, C_4) \leq 5$. Naj bodo $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ vozlišča K_5, katerega povezave pobarvamo z rdečo in modro barvo.

- Recimo, da je v_0 v vsaj dveh povezavah modre barve – v_0v_1 in v_0v_2. Če je katera od povezav $v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4$ modra, imamo P_4 modre barve. Sicer imamo rdeč C_4.
- Recimo, da je v_0 v vsaj treh povezavah rdeče barve. Naj bodo to v_0v_1, v_0v_2 in v_0v_3. Če sta vsaj dve povezavi med v_1, v_2 in v_3 rdeči, imamo rdeč C_4. Recimo, da je kvečjemu ena rdeča in brez škode za splošnost v_1v_2 in v_2v_3 modri. Če je v_1v_4 ali v_1v_4 modra, imamo moder P_4, sicer imamo rdeč C_4.

Dokazali smo, da velja $R(P_4, C_4) = R(P_4, P_4) = 5$.

Naslednji izrek je leta 1977 dokazal Chvátal.

Izrek 8 (Chvátal). *Naj bo T drevo na m vozliščih. Dokažite, da je $R(T, K_n) = (m-1)(n-1)+1$.*

Dokaz. Za dokaz spodnje meje pobarvamo graf $K_{(m-1)(n-1)}$ tako, da bo rdeč del enak $(n-1)K_{m-1}$ (torej imamo $n-1$ disjunktnih rdečih grafov K_{m-1}). Rdeče povezane komponente bodo tedaj velikosti $m-1$, torej graf ne vsebuje rdečega drevesa velikosti m. Poln moder podgraf lahko vsebuje kvečjemu eno povezavo iz vsakega disjunktnega K_{m-1}, torej je velikosti kvečjemu $n-1$.

Zgornjo mejo dokažemo z indukcijo na n, pri čemer si pomagamo z naslednjo znano lemo.

Lema 9. *Naj bo $m \geq 2$. Če je H graf z minimalno stopnjo vsaj $m-1$, potem vsebuje vsako drevo na m vozliščih.*

Dokaz. Lemo dokažemo s pomočjo indukcije na m. V primeru $m = 2$ je pogoj izpolnjen. Naj bo T drevo na $m > 2$ vozliščih in predpostavimo, da lema velja za $m-1$. Naj bo H graf z minimalno stopnjo vsaj $m-1$ in T drevo na m vozliščih. Naj bo v list drevesa. Tedaj H vsebuje $S = T - u$. Velja $|S| = m-1$, torej je vsako vozlišče $v \in S$ povezano s kakšnim vozliščem, ki ni vsebovano v S. Posledično lahko priključimo takšno vozlišče, da dobimo T. ■

Naj bo $n = 1$. Potem za moder K_1 ne potrebujemo nobene povezave in je pogoj izpolnjen. Naj bo sedaj $n > 1$. Predpostavimo, da pogoj naloge velja za $n-1$. Recimo, da imamo neko barvanje povezav grafa $K_{(m-1)(n-1)+1}$ z dvema barvama.

- Naj bo v poljubno vozlišče. Če ima v več kot $(m-1)(n-2)$ modrih povezav, potem med temi sosedi po indukcijski predpostavki obstaja bodisi rdeč T bodisi moder K_{n-1}. V slednjem primeru skupaj z vozliščem v dobimo K_n, sicer pa že imamo rdeč T.

- Recimo, da ima vsako vozlišče kvečjemu $(m-1)(n-2)$ modrih povezav in posledično vsaj $m-1$ rdečih povezav. V tem primeru nam zgornja lema zagotovi rdeč T. Pri tem moramo paziti samo na primer $m=1$, vendar v tem primeru ponovno ne potrebujemo nobene povezave, da je pogoj izpolnjen.

Zagotovo se bo zgodila ena od teh dveh možnosti, torej smo končali. ■

6. Schurova števila

Izrek 10 (Schur). *Za vsako naravno število k obstaja takšno naravno število n, da za vsako k-barvanje elementov množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ obstajajo števila x, y in z iz $\{1, 2, \ldots, n\}$ iste barve z lastnostjo $x + y = z$.*

Dokaz. Naj bo k naravno število in $n = R_k(3, \ldots, 3) := R(\underbrace{3, \ldots, 3}_{k\text{-krat}})$.

Naj bo množica $\{1, 2, \ldots, n\}$ pobarvana s k barvami. Torej imamo particijo

$$\{1, 2, \ldots, n\} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k,$$

kjer S_i vsebuje natanko tiste elemente, ki so pobarvani z i-to barvo.

Konstruirajmo poln graf G na $n+1$ vozliščih, ki jih označimo z $1, 2, \ldots, n+1$. Naj bo povezava, ki vsebuje i in j, takšne barve r, da velja $|i-j| \in S_r$.

Ker velja $n + 1 > n = R_k(3, \ldots, 3)$, graf G vsebuje monokromatičen trikotnik. Torej obstajajo $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, za katere velja, da so $|i-j|$, $|j-k|$ in $|k-i|$ iste barve. Brez škode za splošnost naj bo $i > j > k$. Naj bo $x = |i-j|$, $y = |j-k|$ in $z = k - i$. Res velja

$$x + y = i - j + j - k = |k - i| = z,$$

kjer so x, y in z iz $\{1, 2, \ldots, n\}$. ■

Definicija 2. Naj bo k naravno število. Najmanjše takšno število n, ki zadošča pogoju iz izreka 10, se imenuje k-to *Schurovo število.*

Trenutno je znanih samo prvih pet Schurovih števil. Zaporedoma so 2, 5, 14, 45 in 161. Dokaz, da je $S(5) = 161$ iz leta 2017 je znan največji matematični dokaz v smislu porabljenega prostora – potrebna sta bila kar dva petabajta podatkov. Problem je bil odprt več kot stoletje, več o dokazu pa se nahaja v [3].

7. Zaključek

Ramseyeva teorija je še vedno zelo aktualno področje, v katerem letno prihaja do novih spoznanj. V članku smo predstavili nekaj osnovnih pojmov in rezultatov.

LITERATURA

[1] V. Angeltveit, *R(3,10) <= 41*, 2024, arXiv:2401.00392 [math.CO].

[2] P. Erdös. *Some Remarks on the Theory of Graphs*. Bulletin of the American Mathematical Society, 53(4):292-294, 1947.

[3] M. J. H. Heule, *Schur Number Five*, 2017, arXiv:1711.08076 [cs.LO].

[4] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators*, Springer, 2009.

[5] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2001.

[6] *Breakthrough in Ramsey theory*, Spletna stran: https://anthonybonato.com/breakthrough-in-ramsey-theory, ogled 17. 3. 2025.

[7] *Clebsch graph*, Wikipedia, Spletna stran: https://en.wikipedia.org/wiki/Clebsch_graph, ogled 29. 1. 2025.

[8] *Ramsey's theorem*, Wipedia, Spletna stran: https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem, ogled: 28. 1. 2025.