RAMSEYEVA TEORIJA

JAN PANTNER

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

05D10

Povzetek v slovenščini

RAMSEY THEORY

Povzetek v angleščini.

1. Uvod

Ramseyeva teorija govori o particijah velikih struktur. Tipičen rezultat nam pove, da se mora v neki particiji dovolj velike strukture pojaviti neka specifična podstruktura. Na primer, če povezave dovolj velikega polnega grafa pobarvamo z nekaj barvami, mora nujno obstajati monokromatičen trikotnik (v tem primeru imamo particijo povezav na različne barve, osnovna struktura so povezave grafa, iskana podstruktura pa monokromatičen trikotnik).

Da zgornje res drži, nam zagotovi Ramseyev izrek, ki je nekakšna "večdimenzionalna" posplošitev Dirichletovega principa, ki tudi sam preučuje particije struktur (na primer razdelitev golobov v golobnjake).

Bolj filozofsko, Ramseyeva teorija pove da ne gleda na to, kako kaotičen je nek sistem, bodo znotraj sistema vedno obstajali urejeni deli.

2. Osnovni rezultati

Zgled 1. Ali med poljubnimi šestimi ljudmi vedno obstajajo trije, ki se med seboj poznajo, ali trije, ki se med seboj ne poznajo?

Poglejmo enega izmed teh ljudi. Brez škode za splošnost po Dirichletovem principu med ostalimi petimi obstajajo trije, ki jih pozna. Če se poljubna dva med temi tremi poznata, imamo tri ljudi, ki se med seboj poznajo. Sicer se ti trije med seboj ne poznajo, odgovor je torej v obeh primerih pritrdilen.

Zgornji zgled je eden izmed enostavnejših rezultatov Ramseyeve teorije, vendar v nadaljevanju, za lažje razumevanje, izjave raje formuliramo v jeziku teorije grafov in ne socialne interakcije.

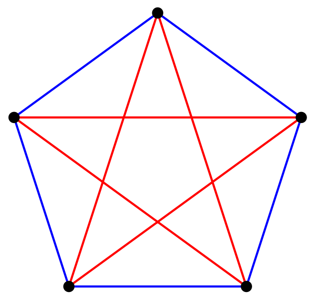
Kot zanimivost lahko omenimo, da se Ramsey v resnici ni ukvarjal niti z grafi niti s socialnimi interakcijami, temveč z logiko. Izrek, po katerem je najbolj znan, je dokazal kot manjšo lemo na poti k popolnoma drugačnim rezultatom. Večina zgodnjega razvoja Ramseyeve teorije se je zgodila šele po njegovi smrti pri ranih 26-tih letih. Za zgodnji razvoj je med drugimi v veliki meri zaslužen eden najznamenitejših matematikov 20. stoletja Paul Erdős.

Izrek 1 (Ramsey). *Za poljubni naravni števili r in s obstaja najmanjše takšno naravno število $n = R(r,s)$, da velja naslednje: Če povezave polnega grafa K_n pobarvamo z dvema barvama, zagotovo obstaja poln podgraf moči r, v katerem so vse povezave prve barve ali pa poln podgraf moči s, v katerem so vse povezave druge barve.*

Številu $R(r,s)$ pravimo *Ramseyevo število.* Alternativna formulacija zgornjega izreka bi bila, da vsak graf na n točkah vsebuje bodisi kliko moči r bodisi antikliko moči s. Dokaz te verzije izreka izpustimo, izrek !!!! predstavlja splošnejšo verzijo.

Zgled 2. Določimo $R(3,3)$ in $R(3,4)$.

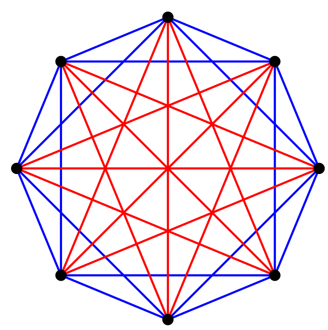
Pokazali smo že, da velja $R(3,3) \leq 6$ (ljudi predstavimo z vozlišči, poznanstva pa z barvo povezave). Za dokaz spodnje meje si poglejmo sliko 1. Opazimo, da barvanje nima monokromatičnega



Slika 1. Barvanje K_5 z dvema barvama.

trikotnika, torej $R(3,3) > 5$. Skupaj smo dokazali $R(3,3) = 6$.

Slika 2 prikazuje barvanje K_8 z rdečo in modro barvo, ki nima rdečih trikotnikov in nima modrih klik velikosti 4. Sledi $R(3,4) > 8$.



Slika 2. Barvanje K_8 z dvema barvama.

Pokažimo, da velja $R(3,4) = 9$. Recimo, da imamo barvanje K_9 z rdečo in modro barvo, ki ne vsebuje rdečega trikotnika in ne vsebuje modre klike moči 4. Poglejmo si neko vozlišče v_0.

- Recimo, da je vozlišče v_0 vsebovano v vsaj šestih modrih povezavah. Zaradi prejšnjega dela naloge lahko med temi šestimi vozlišči najdemo tri vozlišča, ki tvorijo moder trikotnik. Skupaj z vozliščem v_0 tedaj tvorijo modro kliko moči 4.

- Recimo, da je vozlišče v_0 vsebovano v vsaj štirih rdečih povezavah. Če med temi štirimi vozlišči (ki so z v_0 povezana z rdečo povezavo) ni nobene rdeče povezave, tvorijo modro kliko moči 4. Če obstajata med njimi vozlišči, ki sta povezani z rdečo povezavo, tedaj skupaj z v_0 tvorita rdeč trikotnik.

Edina preostala možnost je, da je vsako vozlišče vsebovano v natanko treh rdečih povezavah. V tem primeru podgraf, vpet na rdečih povezavah, krši lemo o rokovanju.

3. Dokaz Ramseyevega izreka

Izrek 2 (Ramsey). *Naj bo $r \geq 1$ in $a_1, a_2 \geq r$. Tedaj obstaja najmanjše takšno naravno število $N(a_1, a_2; r)$, da velja naslednje: Če v množici S moči $n \geq N(a_1, a_2; r)$ vse r-podmnožice pobarvamo z barvo 1 ali 2, potem obstaja takšna a_1-podmnožica, da so vse njene r-podmnožice barve 1, ali pa obstaja takšna a_2-podmnožica, da so vse njene r-podmnožice barve 2.*

Dokaz. Uporabimo dvojno indukcijo, po r in še po $a_1 + a_2$. V primeru $r = 1$ velja $N(a_1, a_2; 1) = a_1 + a_2 - 1$. Recimo, da je $a_1 \geq a_2$. Potem je $N(a_1, a_2; a_2) = a_1$. Sedaj predpostavimo, da izrek velja za $r - 1$ in ga dokažimo za r. Naj bo

$$\begin{aligned} a_1' &:= N(a_1 - 1, a_2; r), \\ a_2' &:= N(a_1, a_2 - 1; 4). \end{aligned}$$

V obeh primerih smo izpolnili zahtevan pogoj, torej izrek velja tudi za r. ■

Naslednja trditev je zanimiv geometrijski rezultat, katerega dokaz temelji na posplošeni verziji Ramseyevega izreka.

Trditev 3 (Erdős-Szekeres 1935). *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tako število $N(n)$, da velja: Če imamo v ravnini $N \geq N(n)$ točk v splošni legi, potem med njimi obstaja n točk, ki določajo konveksen n-kotnik.*

Najprej dokažimo naslednjo geometrijsko lemo.

Lema 4. *Množica n točk v ravnini tvori konveksen n-kotnik natanko tedaj, kadar vsaka podmnožica štirih točk tvori konveksen 4-kotnik.*

Dokaz. Poglejmo konveksno ogrinjačo točk. Če točke tvorijo konveksen n-kotnik, potem vsake štiri tvorijo konveksen štirikotnik. Nasprotno, recimo, da točke ne tvorijo konveksnega n-kotnika. Potem obstaja točka znotraj ogrinjače. Če ogrinjačo trianguliramo, bo ta točka znotraj nekega trikotnika in skupaj z oglišči trikotnika ne bo tvorila konveksnega 4-kotnika. ■

Dokaz trditve. Naj bo $N \geq N(n) := R(n, n; 3)$. Točke označimo z $1, 2, \ldots, N$. Poglejmo poljuben trikotnik in njegova oglišča označimo z i, j, k tako, da $i < j < k$. Če je trikotnik IJK pozitivno orientiran, ga pobarvamo s prvo barvo, sicer z drugo.

Ker je $N \geq N(n, n; 3)$, brez škode za splošnost obstaja n-podmnožica, v kateri so vsi trikotniki prve barve. Dokažimo, da ta množica tvori konveksen n-kotnik. Predpostavimo nasportno in uporabimo lemo. Torej obstajajo štiri točke, ki ne tvorijo konveksnega štirikotnika. Če pogledamo orientacije trikotnikov na teh štirih vozliščih, pridemo do protislovja s tem, da so vsi trikotniki iste barve. ■

4. O računski zahtevnosti

Iskanje točnih vrednosti Ramseyevih števil hitro postane zelo zahtevno in nedosegljivo današnji tehnologiji. Tabela 1 prikazuje trenutne znane vrednosti in meje za Ramseyeva števila $R(r, s)$.

$R(r,s)$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40-41
4		18	25	36-40	49-58	59-79	73-105	92-135
5			43-46	59-85	80-133	101-193	133-282	149-381

Tabela 1. Znane vrednosti/meje za Ramseyeva števila $R(r, s)$.

Najnovejša sprememba v tabeli se je zgodila decembra leta 2023, ko je bil objavljen članek, v katerem je pokazano $R(3, 10) \leq 41$. O tem rezultatu govori [1].

Vidimo, da je v resnici znanih zelo malo Ramseyevih števil. Če želimo dokazati, da je $R(s, t) = N$, moramo najti ustrezno barvanje povezav grafa K_{N-1} in pokazati, da vsa barvanja povezav grafa

K_N ustrezajo nekemu pogoju. V teoriji bi lahko uporabili računalnik in preverili vsa možna barvanja za zaporedne n, dokler ne najdemo prvega N, pri katerem vsako barvanje zadošča zahtevanemu pogoju. Že v primeru dveh barv postane število barvanj zelo hitro nepredstavljivo veliko. V primeru, ko imamo več kot dve barvi ali pa v primeru $R(s,t;r)$, kjer $r > 2$, je znanega še veliko manj.

5. Zgornje in spodnje meje

V tem razdelku dokažemo nekaj zgornjih in spodnjih mej za Ramseyeva števila.

Trditev 5. *Naj bosta $a_1, a_2 \geq 2$. Velja*

$$N(a_1, a_2; 2) \leq \binom{a_1 + a_2 - 2}{a_1 - 1}.$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo. Velja

$$N(a_1, 2; 2) = a_1 = \binom{a_1 + 2 - 2}{a_1 - 1}$$

in podobno za $N(2, a_2; 2)$. Direktno iz dokaza Ramseyevega izreka sledi

$$R(a_1, a_2; r) \leq N(N(a_1 - 1, a_2; r), N(a_1, a_2 - 1; r); r - 1) + 1. \tag{1}$$

Za dokaz indukcijskega koraka nazadnje upoštevamo še $N(a_1, a_2; 1) = a_1 + a_2 - 1$ in dobimo

$$\begin{aligned} N(a_1, a_2; 2) &\overset{(1)}{\leq} N(N(a_1 - 1, a_2; 2), N(a_1, a_2 - 1; 2); 1) + 1 \\ &= (N(a_1 - 1, a_2; 2) + N(a_1, a_2 - 1; 2) - 1) + 1 \\ &\overset{\text{IP}}{\leq} \binom{a_1 + a_2 - 3}{a_1 - 2} + \binom{a_1 + a_2 - 3}{a_1 - 1} \\ &= \binom{a_1 + a_2 - 2}{a_1 - 1}, \end{aligned}$$

kjer zadnja enakost velja zaradi rekurzivne formule za binomski koeficient. ■

Izrek 6 (Erdős).

Dokaz. ■

LITERATURA

[1] V. Angeltveit, *R(3,10) <= 41*, 2024, arXiv: 2401.00392 [math.CO].

[2] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2001.

[3] *Ramsey's theorem*, Wipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem, Pridobljeno: 28. 1. 2025