

6. Mere na lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostorih

(Radonove mere in Rieszov reprezentacijski izrek)

Motivacija: $C_c(X)$, ℓ pozitiven funkcional na $C_c(X)$
 $\ell \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(f) \geq 0$ za $\forall f \in C_c(X)$ nenegativnih

Rieszov izrek: $\varphi \geq 0 \Leftrightarrow \exists \mu$ pozitivna Izredno lepa mera, da je
 $\varphi(f) = \int_X f d\mu.$

6.1. Pojmi in orodja

X bo vedno lokalno kompakten Hausdorffov prostor (T_2)

$f \in C_c(X) \dots f$ zvezna in $\text{supp } f$ kompakten

$$\text{supp } f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

$K^{\text{komp.}} \subseteq X$ in $K \subseteq V^{\text{odp}} \subseteq X$, za $f \in C_c(X)$ pišemo
 $K \leq f \leq U,$

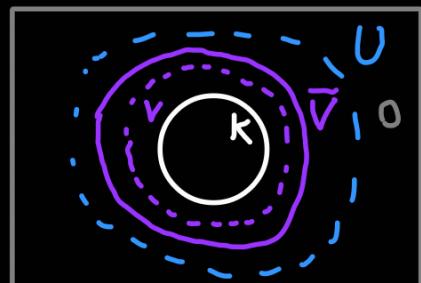
če $f: X \rightarrow [0, 1]$, $f|_K \equiv 1$ in $\text{supp } f \subseteq U$.

(K je podrejena f in f je podrejena U)

13. januar 2026

Izrek: Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov prostor, $K \subseteq X$ kompaktna, $K \subseteq V^{\text{odp}}$. Tedaj se da vsaka zvezna funkcija $f: K \rightarrow [0, 1]$ razširiti v $F \in C_c(X)$, da je $\text{supp } F \subseteq V$ in $F: X \rightarrow [0, 1]$

Dokaz: Po izreku iz splošne topologije,
zaradi lokalne kompaktnosti in Hausdorffnosti
 $\exists V^{\text{odp}}, \bar{V}$ kompaktna $\Rightarrow K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$



Oglejmo si $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U \subseteq X^+ \leftarrow$ kompaktifikacija X z eno točko
 Definirajmo $\tilde{F}: K \cup (X^+ \setminus V) \longrightarrow [0, 1]$

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} f(x); & x \in K \\ 0; & x \in X^+ \setminus V \end{cases}$$

Ker je $K \cup (X^+ \setminus V)$ zaprta v X^+ , uporabimo Tietzejev izrek za normalne prostore in dobimo razširitev $\tilde{F}: X^+ \longrightarrow [0, 1]$ funkcije \tilde{F} .

$$\Rightarrow F := \tilde{F}|_X, F \text{ je zvezna, } F: X \rightarrow [0, 1], F|_K \equiv f$$

in $\text{supp } F \subseteq \bar{V} \subseteq U$
 \subseteq kompakt

□

Lema [Urison]: Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov in $K \subseteq U$, K kompaktna, U odkrita. Tedaj $\exists f \in C_c(X)$, da je $K \leq f \leq U$. ($f: X \rightarrow [0, 1] \in C_c(X)$; $f|_K = 1$ in $\text{supp } f \subseteq U$)

Brez dokaza.

6.2 Pozitivni linearni Funkcionali na $C_c(X)$

Definicija: Linearni funkcional $\varphi \in C_c(X)$ je pozitiven, če velja: $f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$.

Lema: φ pozitiven $\Leftrightarrow (f \geq g \Rightarrow \varphi(f) \geq \varphi(g))$

Dokaz: (\Rightarrow): $f \geq g \Rightarrow f - g \geq 0, \varphi(f-g) = \varphi(f) - \varphi(g) \geq 0$
 $\Rightarrow \varphi(f) \geq \varphi(g)$

(\Leftarrow): $g = 0: f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq \varphi(0) = 0$

□

Izrek: Naj bo K kompakten Hausdorffov prostor in $\varphi: C(K) \rightarrow \mathbb{C}$ pozitiven funkcional. Tedaj je f omejen (zvezzen).

Primer: Če... vsa zaporedja, ki so od nekod naprej konstantna enaka 0

$$C_0 = \{ (x_n)_n \mid \exists k \in \mathbb{N}. x_n = 0 \quad \forall n \geq k \}$$

$$\varphi: C_0 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi((x_n)_n) := \sum_{n=1}^{\infty} n x_n$$

$$\varphi(e_n) = n \longrightarrow \infty \Rightarrow \text{ni omejen}$$

Primer: Naj bo X Hausdorffov prostor in μ Borelova mera na X , ki je končna na vseh kompaktnih podmnožicah v X .

$$\varphi: C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}; \quad \varphi(f) := \int_X f d\mu = \int_{\text{supp } f} f d\mu.$$

Ker je $f \in L^1(\mu)$ je $\varphi(f)$ dobro definiran linearni funkcional na $C_c(X)$.

$$f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0 \Rightarrow \varphi \text{ je tudi pozitiven}$$

Definicija: Pozitivna Borelova mera μ je zunanje regularna, če $\forall A \in X$ Borelova velja

$$\mu(A) = \inf \{ \mu(U) \mid A \subseteq U^{\text{odpr}} \}.$$

Pozitivna Borelova mera μ je notranje regularna za množico A , če je $\mu(A) = \sup \{ \mu(K) \mid K^{\text{komp}} \subseteq A \}$.

Borelova mera μ je notranje regularna, če je notranje regularna pri vseh Borelovih množicah.

Regularnost = notranja + zunanja regularnost za Borelove množice

Definicija: Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov prostor in μ Borelova mera. Mera μ je radonska mera, če izpolnjuje naslednje pogoje:

(i) μ je zunanje regularna

(ii) μ je notranje regularna pri vseh odprtih množicah

(iii) $\mu(K) < \infty \quad \forall K \text{ kompakt.}$

Izrek [Rieszov reprezentacijski izrek, izrek Riesz - Markova]:

Naj bo X lokalno kompakten Hausdorffov prostor. Tedaj za vsak pozitiven funkcional φ na $C_c(X)$ obstaja natanko ena Radonova mera μ , da je $\varphi(f) = \int_X f d\mu$.

Dodatno velja $\mu(U) = \sup \{ \varphi(F) \mid F \leq U \} \quad \forall U^{\text{odp}}$ in $\mu(K) = \inf \{ \varphi(F) \mid K \leq F \} \quad \forall K^{\text{komp}}$.

$(f : X \rightarrow [0, 1], f \in C_c(X), \dots)$.

Opomba: „Ne posten“ način kako dobiti Lebesgueovo mero:

$f \in C_c(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \Rightarrow \varphi$ je pozitiven linearen funkcional na $C_c(\mathbb{R})$

\Rightarrow Po Rieszovem izreku $\exists!$ Radonova mera m , da je $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f dm$.

Mero m imenujemo Lebesgueova mera.

Domača naloga: Izpelji lastnosti mere m .

Lema: Radonova mera je enolično določena z vrednostmi na kompaktnih množicah.

Dokaz: Naj bo E Borelova $\Rightarrow \mu(E) = \inf \{ \mu(U) \mid E^{\text{odp}} \subseteq U \}$
po zunanji regularnosti

$$\mu(U) = \sup \{ \mu(K) \mid K^{\text{komp}} \subseteq U \}$$

□

Lema: Naj bo μ Radonova mera na lokalno kompaktnem Hausdorffovem prostoru X . Naj bo $\varphi : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitiven funkcional, parjen z mero μ . Tedaj velja

$$\mu(U) = \sup \{ \varphi(F) \mid F \leq U \} \quad \forall U^{\text{odp}} \subseteq X. \quad (*)$$

Dokaz: Naj bo s supremum iz leme in $f \leq U$. Tedaj

$$f \leq \chi_U \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X \chi_U d\mu = \mu(U).$$

$$\Rightarrow s \leq \mu(U)$$

$$\underline{\mu}(U) \leq s: \text{Naj bo } K^{\text{komp}} \subseteq U \Rightarrow \exists f. K \not\subseteq f \leq U \\ \Rightarrow \chi_K \leq f \leq \chi_U$$

$$\Rightarrow \int \text{in} \text{ dobimo} \quad \underline{\mu}(K) \leq \int_X f d\mu \leq \mu(U).$$

Ker je μ Radonova, je $\sup\{\underline{\mu}(K) | K^{\text{komp}} \subseteq U\} = \mu(U)$.

$$\text{Ker je } \mu(K) = \int_X f d\mu \leq \mu(U) \Rightarrow \mu(U) \leq s.$$



Lema: Naj bo φ pozitiven funkcional na $C_c(X)$ in μ zunanje regularna Borelova mera, ki zadovšča (*). Tedaj velja

$$\mu(K) = \inf\{\varphi(f) | K \not\subseteq f\} \quad \forall K^{\text{komp}}$$

V posebnem primeru je $\mu(K) < \infty \quad \forall K^{\text{komp}} \subseteq X$.

Dokaz: Naj bo $\varepsilon > 0$, $K^{\text{komp}} \subseteq X$ in $f \in C_c(X)$, da je $K \not\subseteq f$.

$$U = \{x \in X | f(x) > 1 - \varepsilon\} \text{ je odprta in } K \subseteq U$$

$$\sim g \not\subseteq U \Rightarrow g \leq \frac{f}{1-\varepsilon} \quad (g=0 \text{ izven } U \text{ na } U \text{ pa } < 1, f \text{ pa } > 1 - \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \varphi(f) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \varphi(g). \text{ Zaradi (*) sledi } \underline{\mu}(U) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \varphi(f)$$

$$\Rightarrow \varepsilon \downarrow 0 \Rightarrow \mu(K) \leq \varphi(f) \quad \forall f; K \not\subseteq f \quad \underline{\mu}(K)$$

Torej je $\mu(K) \leq \inf\{\varphi(f) | K \not\subseteq f\}$

To tudi pokazuje, da je mera $\mu(K) < \infty$.

Dokažimo še obratno neenakost.

Naj bo $\varepsilon > 0$ in poiščimo odprt množico $U \ni K$, da velja $\mu(K) \geq \underline{\mu}(U) - \varepsilon$. Po izreku obstaja $f \in C_c(X)$, da je $K \not\subseteq f \leq U$.

Tedaj velja $\mu(K) \geq \underline{\mu}(U) - \varepsilon \geq \varphi(f) - \varepsilon$.

\Rightarrow Velja tudi obratna neenakost



Skicu dokaza [Riesz-Markov]:

• Recimo, da imamo dve Radonovi meri, ki zadovščata izreku.

$$\Rightarrow \forall K^{\text{komp}} : \mu_1(K) = \inf\{\varphi(f) | K \not\subseteq f\} = \mu_2(K)$$

Radonova mera je enolično določena s vrednostmi na kompaktnih množicah, zato je $\mu_1 = \mu_2$.

• Mero μ definiramo na naslednji način:

$$V^{\text{odp}} \subseteq X. \quad \mu(V) := \sup \{ \varphi(f) \mid f \leq V \}.$$

Če je $Y \subseteq X$ poljubna: $\mu^* := \inf \{ \mu(V) \mid V^{\text{odp}} \subseteq Y \}$. (**)

Če $V^{\text{odp}} \Rightarrow \mu(V) = \mu^*(V)$.

Da se dokazati, da je μ^* zunanjja mera, itd. μ^* pa vsebuje vse odprte množice in zato vse Borelove množice.

Iz pogaja (**) dobimo zunanjjo regularnost.

• Ostane "sama" še notranja regularnost pri odprtih množicah, $\mu(K) < \infty \quad \forall K$ kompaktno in $\int_X f d\mu = \varphi(f) \quad \forall f \in C_c(X)$. \square

6.3 Regularnost Radonovih mer

14. januar 2026

Trditve: Radonova mera je notranje regularna pri vsaki σ -končni množici.



Dokaz: Najprej primer $\mu(Y) < \infty$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je μ Radonova, $\exists V^{\text{odp}} \subseteq Y$, da je $\mu(V \setminus Y) < \varepsilon$. Ker je μ pri V notranje regularna, $\exists K^{\text{komp}} \subseteq V$, da je $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Ker velja $\mu(V \setminus Y) < \varepsilon$, $\exists V^{\text{odp}} \supseteq V \setminus Y$, da je $\mu(V) < \varepsilon$.

Definiramo $H := K \setminus V$. H je kompaktna, saj je $H = K \cup V^c$ zaprta v k.

$$\begin{aligned} \mu(H) &= \mu(K \setminus V) = \mu(K) - \mu(K \cap V) > \mu(V) - \varepsilon - \mu(K \cap V) \\ &\geq \mu(V) - \varepsilon - \mu(V) = \mu(V) - 2\varepsilon \geq \mu(Y) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Če je $\mu(Y) = \infty$, potem obstaja takšna zaporedje $(Y_n)_n$ množic s končno mero, da je $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ in $Y_n \subseteq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Po pravkar dokazanem, za vsak $n \in \mathbb{N}$ najdemo kompaktno

$$\text{množico } K_n \subseteq Y_n, \text{ da je } \mu_{\infty}^{\downarrow}(K_n) \geq \mu(Y_n) - \frac{1}{n}$$

$$K_n \subseteq Y_n \subseteq Y$$

$$\mu(Y) \text{ sa } \mu(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(Y_n)$$
□

Opomba: Lebesgueova mera na \mathbb{R} je Radonova.

Lebesgueova mera je zunanj in notranje regularna in še $\mu(K) < \infty \quad \forall K^{\text{komp}} \subseteq \mathbb{R}$.

Posledica: Naj bo μ Radonova mera na X .

i) Če je μ σ -končna, potem je notranje regularna.

ii) Če je X σ -kompakten, potem je μ notranje regularna.

Dokaz: i) Vsaka Borelova množica je σ -končna $\Rightarrow \mu$ je notranje regularna pri vsaki Borelovi množici
 ii) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, K_n kompakti, μ Radonova $\Rightarrow \mu(K_n) < \infty$. Uporabimo i) □

6.4 Aproximacija z zveznimi funkcijami

Irditev: Naj bo μ Radonova mera na X . Tedaj je $C_c(X)$ gost v $L^p(\mu)$ za vsak $1 \leq p < \infty$.

Dokaz: Vemo že, da je množica stopničastih funkcij iz $L^p(\mu)$ gost v $L^p(\mu)$. Zato je dovolj dokazati, da se dci vsako stopničasto funkcijo aproksimirati s funkcijami iz $C_c(X)$.
 $S = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \chi_{E_k} \Rightarrow$ zadušča dokazati, da se dci vsake χ_E , kjer je $\mu(E) < \infty$, aproksimirati s $C_c(X)$ funkcijami.

$\forall \varepsilon > 0. \exists K^{\text{komp}}, U^{\text{odp}}. K \subseteq E \subseteq U \text{ in } \mu(U \setminus K) < \varepsilon^p$.

Naj bo $F \in C_c(X)$ poljubna, da velja $K \leq F \leq U$.

$$\|\chi_E - F\|_p^p = \int_{U \setminus K} |\chi_E - F|^p d\mu \leq \int_{U \setminus K} 1 d\mu = \mu(U \setminus K) < \varepsilon^p$$

$$\Rightarrow \|\chi_E - F\|_p < \varepsilon$$
□

Opoomba: X lokalno kompaktnen Hausdorffov.

$C_c(X) \subseteq C_0(X)$ je gostu

Napolnitvev od $C_c(X)$ je $C_0(X)$. \downarrow omejene zvezne preslikave

$$C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X) \subset L^\infty(\mu)$$

Ni veliko vpanja, da je $C_c(X)$ gost v $L^\infty(\mu)$.

Posledica: $C_c(\mathbb{R})$ je gost v $L^p(m)$, kjer je $1 \leq p < \infty$ in m

Lebesgueova mera na \mathbb{R} .

(Mišljena je gostota glede na p -to normo.)

Dare se dokazati, da je $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tudi gost v $L^p(m) \forall 1 \leq p < \infty$.

Izrek [Luzin]: Naj bo μ Radonova mera na X in $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ merljiva in neničelna na množici s končno mero. Tedaj $\forall \epsilon > 0$ $\exists g \in C_c(X)$, da je $\mu(\{x \in X \mid g(x) \neq f(x)\}) < \epsilon$ in $\sup_{x \in X} |g(x)| < \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Brez dokaza.