

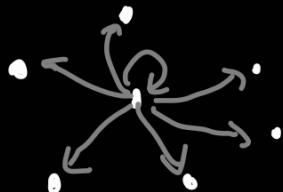
# Verjetnost 2

Predavatelj: Martin Raič

pisni izpit —→ ustni izpit

## 1. UVOD in OSVEŽITEV TEORIJE VERJETNOSTI

6. oktober 2025



Markovska lastnost:

$$\begin{aligned} & \Pr(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \\ & \qquad \qquad \qquad \text{predhodna stanje} \\ & \qquad \qquad \qquad \nearrow \qquad \qquad \qquad \searrow \\ & \qquad \qquad \qquad \text{naslednje stanje} \qquad \qquad \qquad \text{trenutno stanje} \end{aligned}$$

Andrej Andrejevič Markov (1856-1922)

Časovno homogena različica:

$$\Pr(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = p_{x_n, x_{n+1}}$$

Vrednici iz 2. različice sledi 1.

Primer: model vremena

- 1: pretežno jasno
- 2: pretežno oblago, a suho
- 3: deževno

		1	2	3	vse vrstic morajo biti enake 1
		x	y		
x	1	0.7	0.2	0.1	
	2	0.2	0.6	0.2	
3	0.2	0.3	0.5		

Recimo, da je danes pretežno jasno. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo pojutrišnjem dež?

$$\Pr(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = ?$$

Trditev 1.1: Če je  $B$  fiksen dogodek s  $P(B) > 0$  in definiramo  $P^B(A) := P(B|A)$ , je  $P^B$  spet verjetnostna mera in jo lahko gledamo na kateremkoli zoženem prostoru  $\Omega'$ , kjer je  $\Omega' \subseteq \Omega$  dogodek in  $B \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$ .

Dokaz: DN.

Trditev 1.2: Naj bodo  $A, B$  in  $C$  dogodki na istem verjetnostnem prostoru. Tedaj je  $P(B) > 0$  in  $P^B(C) > 0$  natanko tedaj, ko je  $P(B \cap C) > 0$ . Če je slednje res velja tvdi  $P^B(A|C) = P(A|B \cap C)$ .

Dokaz: DN.

$$P(X_2=3 | X_0=1) = P^{X_0=1}(X_2=3)$$

trditev 1.1,  
izrek o popolni  
verjetnosti

$$= \sum_{i=1}^3 P^{X_0=1}(X_1=i) P^{X_0=1}(X_2=3 | X_1=i)$$

trditev 1.2

$$= \sum_{i=1}^3 P(X_1=i | X_0=1) P(X_2=3 | X_0=1, X_1=i)$$

časovno homogen  
markovska lastnost

$$= p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33}$$

$$= 0.7 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.16$$

Kaj pa  $P(X_3=3 | X_0=1)$ ?

$$P(X_3=3 | X_0=1) = \sum_{i=1}^3 P(X_2=i | X_0=1) P(X_3=3 | X_0=1, X_2=i)$$

$$P(X_2=1 | X_0=1) = p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} = 0.55$$

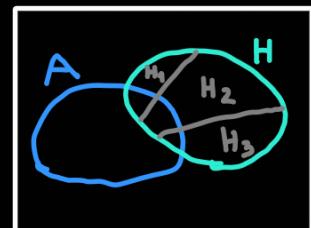
$$P(X_2=3 | X_0=1) = 0.16 \text{ od prej}$$

$$P(X_2=2 | X_0=1) = 0.29 \quad (= 1 - 0.55 - 0.16)$$

Trditve 1.3: Če je  $0 < p \leq 1$ ,  $(H_k)_{k \in K}$  števna družina paroma disjunktnih dogodkov z unijo  $H$  s  $P(H) > 0$  ter A tak dogodek, da je  $P(A|H_k) = p$ , brž ko je  $P(H_k) > 0$ , je tvrdi  $P(A|H) = p$ .

Dokaz:  $K^+ := \{k \in K \mid P(H_k) > 0\}$

$$P(A|H) = P^H(A) = \sum_{k \in K^+} P^H(H_k) \underbrace{P^H(A|H_k)}_{=p}$$



$$P(A|H_k \cap H) = P(A|H_k) = p$$

$$= p \sum_{k \in K^+} P^H(H_k) = p P^H(H) = p.$$

□

Iz trditve sledi:

$$\begin{aligned} P(X_3 = 3 \mid X_0 = 1) &= \sum_{i=1}^3 P(X_2 = i \mid X_0 = 1) P(X_3 = 3 \mid X_0 = 1, X_2 = i) \\ &= \sum_{i=1}^3 P(X_2 = i \mid X_0 = 1) p_{i,3} \\ &= 0.55 \cdot 0.1 + 0.29 \cdot 0.2 + 0.16 \cdot 0.5 = 0.193 \end{aligned}$$

Se nekaj vprašanj:

\*  $P(X_n = 3 \mid X_0 = 1) = ?$

\* Je to zaporedje konvergentno?

Če je, kam konvergira?

\* Ali je limitno obnašanje verjetnosti  $P(X_n = y \mid X_0 = x)$ , ko gre  $n \rightarrow \infty$ , odvisno od  $x$ ?

\*  $P(\exists n \in \mathbb{N}. X_n = y \mid X_0 = x) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X_n = y\} \mid X_0 = x) = ?$

Izrek 1.4 [enoličnost verjetnosti]: Naj bo  $\mathcal{A}$  družina podmnožic množice  $\Omega$ , ki je zaprta za končne preseke,  $\mathcal{F}$  pa naj bo  $\Omega$  algebra generirana z  $\mathcal{A}$ . Tedaj, če se verjetnostni meri  $P_1$  in  $P_2$  ujemata na  $\mathcal{A}$ , se ujemata tudi na  $\mathcal{F}$ .

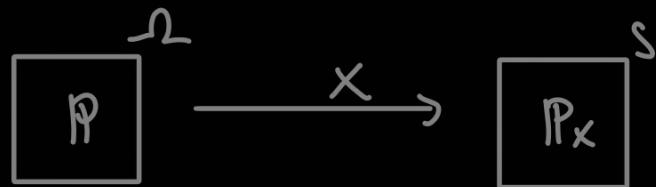
Rezultat sledi iz Dynkinove leme, znane tudi kot izrek  $\pi$ - $\lambda$ .

Definicija: Slučajni element na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je vrednosti v množici  $S$ , opremljeni s  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{G}$  (merljivem prostoru  $(S, \mathcal{G})$ ), je  $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ -merljiva preslikava  $X: \Omega \rightarrow S$ , tj. za vsako množico  $C \in \mathcal{G}$  velja  $X^{-1}(C) = \{X \in C\} = \{w \in \Omega \mid X(w) \in C\} \in \mathcal{F}$ .

O diskretnem slučajnem elementu govorimo, če je  $S$  števna in  $\mathcal{G} = 2^S$ .

Za merljivost je tedaj dovolj, da so vse množice  $\{X=x\}$  dogodki.

Definicija: Porazdelitev slučajnega elementa  $X$ , definiranega kot zgoraj je potisk/slika mere  $P$  vzdolž  $X$ , torej verjetnostna mera  $P_X = X_*P$ , definirana po predpisu  $P_X(C) := P(X \in C)$ .



Poznati porazdelitev pomeni poznati verjetnosti  $P(X \in C)$  za vse  $C \in \mathcal{G}$ . V resnici jih je treba le za  $C \in \mathcal{A}$ , kjer je  $\mathcal{A}$  družina končne preseke in generira  $\mathcal{G}$ .

Denimo, če je  $(S, \mathcal{G}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , je za  $\mathcal{A}$  dovolj vzeti družino vseh poltrakov  $(-\infty, x]$ , torej je dovolj poznati  $P(X \leq x)$  za vse  $x \in \mathbb{R}$ .

Borelova  $\sigma$ -algebra  
↓

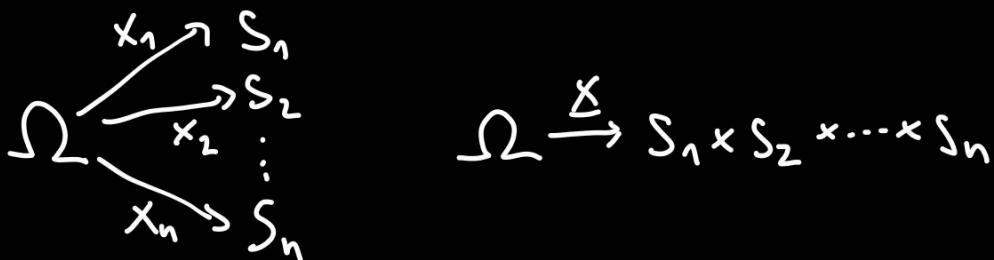
Če je  $X$  diskreten slučajni element, je še lažje: tedaj je dovolj poznati  $P(X=x)$  za vse  $x \in S$ .

Definicija: Slučajni vektor je

(1) končen nabor  $(X_1, \dots, X_n)$  slučajnih elementov na istem verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , a z vrednostmi v meritljivih prostorih  $(S_1, \mathcal{Y}_1), \dots, (S_n, \mathcal{Y}_n)$ , ki pa so lahko različni.

ALI EKVIVALENTNO

(2) slučajni element  $\underline{X}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  z vrednostmi v  $(\prod_{i=1}^n S_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{Y}_i) = (S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, \mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{Y}_n)$ , kjer je  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{Y}_i$   $\sigma$ -algebra, generirana z množicami oblike  $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$ , kjer je  $C_i \in \mathcal{Y}_i$  za  $i = 1, 2, \dots, n$ .



Ekvivalenco določa zvezca

$$\underline{X}(w) = (X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w)).$$

Prek (2) definiramo porazdelitev slučajnega vektora.

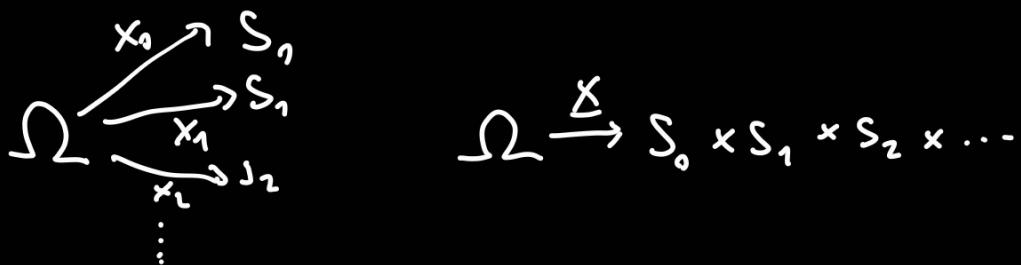
Opozka 1.5: Porazdelitev slučajnega vektora  $(X_1, \dots, X_n)$  torej predstavlja verjetnosti  $P(X_1 \in C_1, X_2 \in C_2, \dots, X_n \in C_n) \in \mathbb{C}$ , dovolj pa je poznati verjetnosti

$$P(\underbrace{X_1 \in C_1, X_2 \in C_2, \dots, X_n \in C_n}_{(X_1, \dots, X_n) \in C_1 \times \dots \times C_n}; C_i \in \mathcal{Y}_i, i = 1, \dots, n).$$

Opozka 1.6: Če so  $X_1, X_2, \dots, X_n$  diskretni slučajni elementi, je to tudi slučajni vektor  $(X_1, \dots, X_n)$ . Za njegovo porazdelitev je dovolj poznati verjetnosti  $P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n)$ , kjer je  $x_i \in S_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

Definicija: Slučajni proces v diskretnem času z enostransko neskončnostjo je:

- (1) Zaporedje  $X_0, X_1, X_2, \dots$  slučajnih elementov na istem verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , a z vrednostmi v merljivih prostorih prostorih  $(S_0, \mathcal{F}_0), (S_1, \mathcal{F}_1), (S_2, \mathcal{F}_2), \dots$  ki so lahko različni.
- (2) Slučajni element  $\underline{X}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  z vrednostmi v  $(\prod_{i=0}^{\infty} S_i, \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i) = (S_0 \times S_1 \times S_2, \dots, \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots)$ , kjer je  $\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$   $\sigma$ -algebra, generirana z množicami oblike  $C_0 \times C_1 \times C_2 \times \dots$ , kjer je  $C_i \in \mathcal{F}_i$  za  $i=0, 1, 2, \dots$



Ekvivalenca določa zvezca

$$\underline{X}(w) = (X_0(w), X_1(w), X_2(w), \dots).$$

Prek (2) definiramo porazdelitev slučajnega procesa.

Opozka 1.7: Brš ko imam neskončno množic  $S_i$  več kot en element, je produkt  $\prod_{i=0}^{\infty} S_i$  nešteven. Slučajni proces v neskončnem času torej tipično ni diskreten slučajni element.

Opozka 1.8:  $\sigma$ -algebra  $\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{Y}_i$  generira že produkti oblike  $C_0 \times C_1 \times \dots \times C_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times \dots$ . Družina teh produktov je zaprta za končne preseke. Za parazdelitev slvčajnega procesa je torej dovolj poznati verjetnosti  $P(X_0 \in C_0, X_1 \in C_1, \dots, X_n \in C_n)$ ;  $C_i \in \mathcal{Y}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Če so  $S_i$  števne in  $\mathcal{Y}_i = 2^{S_i}$ , pa je dovolj poznati verjetnosti  $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ ;  $x_i \in S_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$

POZOR! Ni pa dovolj poznati verjetnosti  $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots)$ . (te verjetnosti so lahko vse enake 0) recimo, če mečemo pošten kavanec

Izrek 1.9: Naj bodo  $(S_0, \mathcal{Y}_0), (S_1, \mathcal{Y}_1), \dots$  merljivi prostori, na produktih  $(S_0, \mathcal{Y}_0), (S_0 \times S_1, \mathcal{Y}_0 \otimes \mathcal{Y}_1), \dots$  pa definirane verjetnostne mere  $P_0, P_1, \dots$ , ki naj bodo konsistentne v smislu, da, če je  $(X_0, X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) \sim P_{n+1}$ , je tudi  $(X_0, X_1, \dots, X_n) \sim P_n$ . Tedaj obstaja (natančno ena) verjetnostna mera  $P_\infty$  na  $(\prod_{i=1}^{\infty} S_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{Y}_i)$  z lastnostjo, da če je  $(X_0, X_1, \dots) \sim P_\infty$ , je za vse  $n$  tudi  $(X_0, X_1, \dots, X_n) \sim P_n$ .

Dokaz opuščamo. (Daniell, Kolmogorov – poseben primer)

# 2. MARKOVSKIE VERIGE S FIKSNO ZAČETNO PORAZDELITVJO

## 2.1. Osnovni pojmi

13. oktober 2025

Definicija: Časovna homogeno markovsko verigo v diskretnem času in na diskretni množici stanj s fiksno porazdelitvijo sestavlja:

- števna množica  $S$  - prostor stanj;
- verjetnosti prostor  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ;
- slučajne spremenljivke  $X_0, X_1, X_2, \dots$  na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  in z vrednostmi v  $(S, 2^S)$
- prehodne verjetnosti  $p_{x,y}$ ;  $x, y \in S$ , pri čemer zahtevamo,  $p_{x,y} \geq 0$  za vse  $x, y \in S$ ;  
 $P(X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p_{x_n, y}$ ,  
brž ko je  $P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0$ .
- $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$  za vse  $x \in S$ .

Porazdelitvi slučajne spremenljivke  $X_0$  pravimo začetna porazdelitev.

Prehodna matrika:  $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$

Za matriko  $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$  za katero je  $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$  za vse  $x \in S$ , pravimo, da je stošastična.

Opazka 2.1: Skupna porazdelitev procesa je natančno določena z začetno določeno z začetno porazdelitvijo in prehodnimi verjetnostmi, saj je [izrek 1.4, opazka 1.8]  
 $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n) = P(X_0 = x_0) = p_{x_0, x_1} p_{x_1, x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}$ .

Opozka 2.2: Za vsako verjetnostno mero  $\pi$  na  $(S, 2^S)$  in za vsako stočustično matriko  $P \in [0, 1]^{S \times S}$  obstaja taka verjetnostna mera na  $(S^{\mathbb{N}_0}, (2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0})$ , da je slučajni proces  $X_0, X_1, \dots$  porazdeljen <sup>produktna</sup>  <sup>$\sigma$ -algebra</sup> skladno s to mero, markovska veriga z začetno porazdelitvijo  $\pi$  in prehodno matriko  $P$ .

Uporabimo namreč izrek 1.9: če je  $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$  najprej definiramo končnorazsežne porazdelitve  $P_n$  na  $(S^{n+1}, (2^S)^{\otimes n+1})$  po predpisu:

$$P_n(\{(x_0, x_1, \dots, x_n)\}) := \pi(\{x_0\}) p_{x_0, x_1} p_{x_1, x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}.$$

Le-te so konsistentne (DV), torej obstaja ustrezena mera  $P_\infty$  na  $(S^{\mathbb{N}_0}, (2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0})$ . Domuča vaja = DV.

Opozka 2.3: Iz trditve 1.3 sledi, da za vsak  $x \in S$  in vsak  $D \subseteq S^n$  velja

$$P(X_{n+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \in D, X_n = x}_{\text{disjunktna unija dogodkov oblike}}) = p_{x,y}.$$

$$\{(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)\}$$

Med drugim je  $P(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = p_{x,y}$ . Nadalje trdi za vsako množico  $D \subseteq S^{n+1}$  velja:

$$P(X_{n+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D, X_n = x}_{\text{disjunktna unija dogodkov oblike}}) = p_{x,y}.$$

$$\{(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)\}$$

## Trditev 2.4. [razširitev lastnosti Markova na cel proces]:

Pogojno na poljuben dogodek oblike  $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\}$  z neničelno verjetnostjo je  $X_n, X_{n+1}, \dots$  spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi, njena začetna porazdelitev pa se seveda ujema s pogojno porazdelitvijo slvčajne spremenljivke  $X_n$  glede na  $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\}$ .

Dokaz:

$$\begin{aligned} & P^{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D} (X_{n+m+1} = y \mid X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m) \\ (1.2) \quad &= P(X_{n+m+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D, X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m}_{(X_0, X_1, \dots, X_{n+m+1}) \in D'}) \\ &\stackrel{\text{prejšnja opazka}}{=} P_{x_m, y}. \end{aligned}$$

□

Opomba: Pri pogojevanju lahko  $\Omega$  zožimo na poljuben dogodek  $\Omega'$ , za katerega je  $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\} \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$ .

Posledica 2.5: Če s  $\pi_n$  označimo n-to robno porazdelitev, tj. porazdelitev slvčajne spremenljivke  $X_n$ , je  $X_n, X_{n+1}, \dots$  (brez pogojno) spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in začetno porazdelitvijo  $\pi_n$ .

□

Opazka 2.6:  $\pi_1(\{y_1\}) = P(X_1 = y)$

$$\begin{aligned} \pi_0 \left[ \begin{array}{c|c} y & \pi_1(y) \\ \hline p & \end{array} \right] &= \sum_{\substack{x \in S \\ P(X_0=x) > 0}} P(X_0=x) P(X_1=y \mid X_0=x) \\ &= \sum_{\substack{x \in S \\ \pi_0(x) > 0}} \pi_0(x) p_{x,y} \end{aligned}$$

Če torej prehodne verjetnosti uvrstimo v matriko  
 $P = [P_{x,y}]_{x,y \in S}$ , robne porazdelitve pa identificiramo z  
 vrstičnimi vektorji, velja  $\Pi_1 = \Pi_0 \cdot P$ . Po posledici 2.5  
 pa je tudi  $\Pi_{n+1} = \Pi_n P$ . Z indukcijo sledi  $\Pi_n = \Pi_0 P^n$ .

Primer: vreme od prejšnjic:

$$P = \begin{bmatrix} \text{pre.} & \text{pne.} & \text{dež} \\ \text{jaz.} & \text{ob} & \text{dež} \\ \text{pretežno} & & \\ \text{jasno} & & \\ \text{pretežno} & & \\ \text{oblačno} & & \\ \text{dež} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_0 := [1, 0, 0]$$

$$\Pi_1 = [1, 0, 0] P = [0.7 \quad 0.2 \quad 0.1]$$

$$\Pi_2 = [0.7 \quad 0.2 \quad 0.1] P = [0.55 \quad 0.29 \quad 0.16]$$

Primer: slučajni sprehod na  $\mathbb{Z}$ ,  $p \in [0, 1]$

$$P_{k,k+1} := p, \quad P_{k,k-1} := 1-p, \quad X_0 = 0$$

$$\begin{aligned} X_n &= \text{št. pomikov navzgor} - \text{št. pomikov navzdol} \\ &= 2 \cdot (\text{št. pomikov navzgor}) - n \end{aligned}$$

$$\text{št. pomikov navzgor} \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$\frac{X_n + n}{2} \Rightarrow P(X_n = -n + 2k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\text{Primer: }} \Pi_0 := \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad P := \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_0 P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Sledi  $\Pi_n = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$  za vse  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Definicija: Markovska veriga s fiksno začetno porazdelitvijo je **stacionarna**, če so vse robne porazdelitve enake.

Ekvivalentno:  $\Pi_1 = \Pi_0$ .  $\left( \begin{array}{l} \Pi_0 \text{ je levi lastni vektor} \\ \text{za lastno vrednost } 1 \end{array} \right)$

## 2.2. Časi ustavljanja

Definicija: Slučajna spremenljivka  $T$  z vrednostmi v  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$  je **čas ustavljanja** glede na slučajni proces  $X_0, X_1, \dots$ , če za vsak  $n \in \mathbb{N}_0$  velja, da je dogodek  $\{T = n\}$  natančno določen z  $X_0, X_1, \dots, X_n$ , t.j. če obstaja takšna merljiva množica  $D_n$ , da je  $\{T_n\} = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D_n\}$ . ↪ če ima  $X_k$  vrednosti v  $(S_k, \mathcal{F}_k)$  zahtevamo  $D_n \in \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$ .

Primera in protiprimer:

1) Čas zadetju množice  $C \in \mathcal{F}$ , t.j.  $T_C := \min \{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in C\}$  ob dogovoru  $\min \emptyset := \infty$ , je čas ustavljanja.

$$\begin{aligned} \{T = n\} &= \{X_0 \notin C, X_1 \notin C, \dots, X_n \notin C, X_{n+1} \in C\} \\ &= \{(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) \in (C^c)^n \times C\} \end{aligned}$$

2) Naj bo  $(S, \mathcal{F}) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Borelova  $\sigma$ -algebra

$T := \min \{n \in \mathbb{N} \mid X_n > X_{n-1}\}$  je čas vstavljanja

$$\{T = n\} = \{X_0 > X_1 > X_2 > \dots > X_{n-1} < X_n\}$$

3)  $(S, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$T := \min \{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_{n+1} > X_n\}$  tipično ni čas vstavljanja (razen, če gre npr. za konstanten proces)

$\{T = n\}$  je odvisno od  $X_{n+1}$

Opozka 2.7: Če so  $h_0, h_1, \dots$  injektivne in ohranjajo merljivost (tj. A merljiva  $\Leftrightarrow h_n(A)$  merljiva), se časi vstavljanja glede na  $X_0, X_1, X_2, \dots$  ujemajo s časi vstavljanja glede na  $h_0(X_0), h_1(X_1), \dots$  (DV-malo težje)

Definicija: Filtracija (v diskretnem času z naraščanjem v nedogled) na merljivem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$  je zaporedje  $\sigma$ -algeber  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ .

Definicija: Slučajna spremenljivka  $T \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  je čas vstavljanja glede na filtracijo  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , velja  $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ .

Definicija: Za vsak slučajni proces  $X_0, X_1, \dots$ , kjer ima  $X_n$  vrednosti v  $(S_n, \mathcal{F}_n)$ , definiramo njegovo naravno Filtracijo:

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D_n; D_n \in \mathcal{F}_0 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n\}.$$

DV: utemelji, da je to res filtracija.

Opozka 2.8: Časi ustavljanja glede na določen slučajni proces se ujemajo s časi ustavljanja glede na naravno filtracijo.

Irditev 2.9: Če je  $T$  čas ustavljanja in  $k \in \mathbb{N}_0$ , je  $T+k$  prav tako čas ustavljanja.

Dokaz: Za  $n=0, 1, \dots, k-1$  je  $\{T+k=n\} = \{T=n-k\} = \emptyset$ .  
Za  $n=k, k+1, \dots$  pa velja

$$\{T+k=n\} = \{T=n-k\} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{n-k} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_n$$

□

Irditev 2.10: Naj bo  $T$  slučajna spremenljivka z vrednostmi v  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  in  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  filtracija. Naslednje trditve so ekvivalentne:

(1)  $T$  je čas ustavljanja glede na  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

(2)  $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  za vse  $n \in \mathbb{N}_0$

(3)  $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$  za vse  $n \in \mathbb{N}_0$

Dokaz: (2)  $\Leftrightarrow$  (3): ocitno, saj sta si dogodka  $\{T \leq n\}$  in  $\{T > n\}$  naspratna

$$(1) \Rightarrow (2): \quad \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \underbrace{\{T=k\}}_{\in \tilde{\mathcal{F}}_k} \in \mathcal{F}_n \quad \begin{matrix} \sigma\text{-alg. zaprite za unije} \\ \in \mathcal{F}_n \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_n \end{matrix}$$

$$(2) \Rightarrow (1): \quad \{T=n\} = \underbrace{\{T \leq n\}}_{\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}} \setminus \underbrace{\{T \leq n-1\}}_{\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_n} \in \mathcal{F}_n$$

□

Irditev 2.11: Če sta  $T$  in  $S$  časa ustavljanje glede na določeno filtracijo, so to tudi  $T+S$ ,  $T \vee S := \max \{T, S\}$  in  $T \wedge S := \min \{T, S\}$ .

$$\text{Dokaz: } \{T+S=n\} = \bigcup_{k=0}^n \{T=k\} \cap \{S=n-k\}$$

$$\{T \vee S \leq n\} = \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}$$

$$\{T \wedge S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\}$$

Opozka 2.8½ (zadnjiji izpuštili)

Konstante iz  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  so tudi časi ustavljanja.

Izrek 2.12 [krepka lastnost Markova]: Naj bo:

- $X_0, X_1, \dots$  časovna homogena markovska veriga na števni množici stanj  $S$  prehodnimi verjetnostmi  $P_{X,Y}$ ,  $X, Y \in S$ , in fiksno začetno porazdelitvijo
- $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  naravna filtracija tega procesa;
- $T$  čas ustavljanja glede na to filtracijo (ekvivalentno glede na proces  $X_0, X_1, \dots$ )
- $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{T=n\} \cap B_n)$ , kjer je  $B_n \in \mathcal{F}_n$ , in  $P(B) > 0$

Pogojno na  $B$  (in v verjetnostnem prostoru, ki je zavzet prvočnega na poljuben dogodek  $\Omega'$ , za katerega je  $B \subseteq \Omega' \subseteq \{T < \infty\}$ ) je tedaj slučajni proces  $X_T, X_{T+1}, \dots$ , spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in fiksno začetno porazdelitvijo, ki je pogoju porazdelitev slučajne spremenljivke  $X_T$  glede na  $B$ .

Opozka 2.13: Med pomembnimi legitimnimi dogodki  $B$  so dogodki  $\{T \in K\}$ , kjer je  $K \subseteq \mathbb{N}_0$ .

Dokaz izreka 2.12: Preveriti je treba:

$$\mathbb{P}^B(X_{T+m+1} = y \mid X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m) = p_{x_m, y}. \quad \text{|| trditve 1.2}$$

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\})$$

brž ko je  $\mathbb{P}^B(X_T = x_0, X_{T+1} = x_1, \dots, X_{T+m} = x_m) > 0$ .

$\Updownarrow$

$$\mathbb{P}(B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}) > 0$$

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B_n \cap \{T = n, X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\})$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+m+1} = y \mid \underbrace{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in D_n}_{B_n}, \underbrace{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in D_n^{-1}}_{T=n}, x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \dots, x_{n+m} = x_m)$$

$$= p_{x_m, y} \quad (\text{Opozka 2.3})$$

Dogodek  $B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}$  pa je števna disjunktna unija dogodkov  $B_n \cap \{T = n, X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}$ . Po trditvi 1.3 mora biti tudi

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}) = p_{x_m, y}. \quad \blacksquare$$

# 3. MARKOVSKIE VERIGE S PROSTIM ZAČETNIM STANJEM

## 3.1. Osnovni pojmi

Definicija: Časovno homogeno markovsko verigo v diskretnem času in na števni množici stanj s prostim začetnim stanjem sestavlja:

- števna množica  $S$  - množica stanj;
- merljiv prostor  $(\Omega, \mathcal{F})$ ;
- na tem merljivem prostoru verjetnostne mere  $P_x; x \in S$ ;
- $\mathcal{F}/2^S$  merljive preslikave  $X_0, X_1, \dots : \Omega \rightarrow S$
- prehodne verjetnosti  $p_{x,y}; x, y \in S$ , pri čemer zahtevamo  $p_{x,y} \geq 0$  za vse  $x, y \in S$  in  $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$  za vse  $x \in S$ .
- slučajne spremenljivke  $X_0, X_1, \dots$  pri vsaki od verjetnostnih mer  $P_x$  tvorijo markovsko verigo na  $S$  s prehodnimi verjetnostmi  $p_{x,y}; x, y \in S$ , njena začetna porazdelitev pa je določena s  $P_x(X_0=x) = 1$ .

Opozka 3.1: Iz opazke 2.2 sledi, da za vsako stošasticno matriko  $P \in [0, 1]^{S \times S}$  obstaja markovska veriga s prostim začetnim stanjem in prehodno matriko  $P$  ( $X_0, X_1, \dots$  definiramo na kanoničnem merljivem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}) := (S^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{G}^{\otimes \mathbb{N}_0})$  produktna  $\sigma$ -algebra).

Iz opazke 2.1 pa sledi, da je porazdelitev procesa  $X_0, X_1, \dots$  pri  $P_x$  natančno določena z  $x$  in prehodno matriko  $P$ .

## Primer [kockarjev bankrot/propad]:

Kockar ima na začetku premoženje velikosti  $a \in \mathbb{N}$ , želi pa imati premoženje  $b > a$ . Dokler ima premoženje  $k \in \{1, \dots, b-1\}$ , stavi eno enoto. Ž verjetnostjo  $p$  pridobi,  $\geq$  verjetnostjo  $1-p$  pa izgubi eno enoto. Kolikšna je verjetnost, da dobi željeno premoženje  $b$ ?

To modeliramo z markovsko verigo na  $S := \{0, 1, \dots, b\}$ ,  
ki jo definirajo prehodne verjetnosti:  
absorbiращe stanje

$$p_{0,0} = 1, p_{b,b} = 1$$

20. oktober 2025

$$p_{k,k+1} = p, \quad p_{k,k-1} = 1-p \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, b-1$$

$$T_b := \min \{k \in \mathbb{N}_0 \mid X_n = k\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

$$w_a := P_a(T_b < \infty) = ? \quad w_0 = 0, \quad w_b = 1$$

$$a = 1, \dots, 2, \dots, b-1:$$

$$w_a = P_a(X_1 = a+1) P_a(T_b < \infty \mid X_1 = a+1) + P_a(X_1 = a-1) P_a(T_b < \infty, X_1 = a-1)$$

$$\cancel{P_a(X_0 = a, X_1 = a+1)} = \underbrace{P(X_0 = a)}_1 \cdot \underbrace{P_{a,a+1}}_p$$

$$w_a = p P_a(\cancel{X_0 = b} \text{ ali } X_1 = b \text{ ali } X_2 = b \text{ ali } \dots \mid X_1 = a+1) \\ + (1-p) P_a(\cancel{X_0 = b} \text{ ali } X_1 = b \text{ ali } \dots \mid X_1 = a-1)$$

Po trditvi 2.4. je pogojno na dogodek  $\{X_1 = a+1\}$  ali na dogodek  $\{X_1 = a-1\}$ , proces  $X_1, X_2, \dots$  spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in začetno porazdelitvijo skoncentrirano  $a+1$  ozziroma  $a-1$ .

To pa je tudi proces  $X_0, X_1, X_2, \dots$  pri verjetnostni meri  $P_{a+1}$  oz  $P_{a-1}$ .

Iz enoličnosti (opazka 2.1) pa sledi, da se pogojna porazdelitev procesa  $X_1, X_2, \dots$  glede na  $\{X_1=a+1\}$  oz.  $\{X_1=a-1\}$  (pri  $P_a$ ) ujema z brezpogojno porazdelitvijo procesa  $X_0, X_1, \dots$  pri  $P_{a+1}$  oz.  $P_{a-1}$ .

$$\begin{aligned} w_a &= p \cdot P_{a+1}(X_0=b \text{ ali } X_1=b, \dots) + (1-p) P_{a-1}(X_0=b \text{ ali } X_1=b \text{ ali } \dots) \\ &= p P_{a+1}(T_b < \infty) + (1-p) P_{a-1}(T_b < \infty) \\ &= p w_{a+1} + (1-p) w_{a-1} \end{aligned}$$

Zvezca je očitna, vendar je v ozadju veliko teorije. To je lahko vprašanje na ustnem izpitu.

V izogib računanja, se umejimo na  $p = 1/2$ .

$$w_0 = 1, \quad w_b = 1, \quad w_a = \frac{1}{2} (w_{a+1} - w_{a-1}) \quad \text{za } a=1, \dots, b-1$$

$$w_{a+1} - w_a = w_a - w_{a-1}$$

$w_0, w_1, w_2, \dots$  je torej aritmetično zaporedje  $\Rightarrow w_a = \frac{a}{b}$

Na vujah: izračun za splošni  $p$ .

Podobno za verjetnost bankrata  $r_a := P_a(T_0 < \infty)$  dobimo  $r_0 = 1, r_b = 0, r_{a+1} - r_a = r_a - r_{a-1}$ . Sledi  $r_a = \frac{b-a}{b}$ .

Opazimo, da je  $r_a + w_a = 1$ .

$$P_a(T_0 < \infty) + P_a(T_b < \infty) = 1$$

Vemo še, da je  $P_a(T_0 < \infty \text{ in } T_b < \infty) = 0$ . Sledi  $P_a(T_0 < \infty \text{ ali } T_b < \infty) = 1$ .

$\Pi(X) \equiv \Pi(\{X\})$ , zloruba notacije, naredimo identifikacijo  $\Pi \equiv [\Pi(s_1), \Pi(s_2), \dots, \Pi(s_m)]$

Iz markovske verige s prostim začetnim stanjem in verjetnostne mere  $\Pi$  na  $S$  dobimo slučajni proces

$X_0, X_1, \dots \in \mathcal{X}$ , če privzememo verjetnostno mero:

$$P_\pi(A) := \sum_{x \in S} \pi(x) P_x(A).$$

DV: to je spet verjetnostna mera (zamenjuva vrstnega reda seštevanja).

Porazdelitev tega procesa pri  $P_\pi$  je enolično določena s  $\pi$  in prehodnimi verjetnostmi  $p_{x,y}$ , saj je porazdelitev procesa pri  $P_x$  določena že z  $x$  in prehodnimi verjetnostmi (opazka 3.1).

Lema 3.2: Naj bodo verjetnostne mere  $P_x$  in  $P_\pi$  podane tako kot zgoraj. Če sta  $A$  in  $B$  dogodka,  $g \geq 0$  in  $P_x(A) = g \cdot P_x(B)$  za vse  $x \in S$ , je tudi  $P_\pi(A) = g \cdot P_\pi(B)$ .

Dokaz:  $P_\pi(A) = \sum_{x \in S} \pi(x) P_x(A) = \sum_{x \in S} \pi(x) g P_x(B) = g \sum_{x \in S} \pi(x) P_x(B) = g \cdot P_\pi(B)$ . □

Posledica 3.3: Pod zgornjimi pogoji je  $X_0, X_1, \dots$  pri  $P_\pi$  prav tako markovska veriga, in sicer s fiksno začetno porazdelitvijo  $\pi$  in istimi prehodnimi verjetnostmi  $p_{x,y}$ .

Dokaz:  $P_x(X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_{n+1}=x_{n+1}) = P_x(X_0=x_0, \dots, X_n=x_n) \cdot p_{x_n, x_{n+1}}$   
 $\hookrightarrow$  lahko zamenjemo s  $\pi$  (lema 3.2) □

Primer: vreme

pretežno jasno		$1$	$2$	$3$		pretežno oblačno
pretežno oblačno		$1$	$2$	$3$		
dež		$2$	$3$	$1$		

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] P \\ [0 \ 1 \ 0] P \\ [0 \ 0 \ 1] P \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.29 & 0.16 \\ 0.3 & 0.46 & 0.24 \\ 0.3 & 0.37 & 0.33 \end{bmatrix} \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0.475 & 0.332 & 0.193 \\ 0.35 & 0.408 & 0.243 \\ 0.35 & 0.381 & 0.269 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.400586 & 0.371135 & 0.228279 \\ 0.399609 & 0.371626 & 0.228764 \\ 0.399609 & 0.371621 & 0.228770 \end{bmatrix}$$

Opozka 3.4: Robne porazdelitve  $\pi_n$  so pri vsaki meri  $P_\pi$  enolično določene s prehodno matriko - velja  $\pi_n = \pi P^n$ . Pravimo jim **inducirane porazdelitve**.

Definicija: Porazdelitev  $\pi^*$  je **stacionarna** ali **invariantna** za markovsko verigo s prostim začetnim stanjem, če se z njo ujemajo vse pripadajoče inducirane porazdelitve. Ekvivalentno, če je  $\pi^* P = \pi^*$  oziroma, če je  $\pi^*$  levi lastni vektor matrike  $P$  za lastno vrednost 1.

Opozka 3.5: Število 1 je lastna vrednost vsake matrike, saj ima desni lastni vektor  $1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Primer:  $\pi^* = [p_1^*, p_2^*, p_3^*]$   
(vreme)

$$\pi^* (P - I) = 0$$

$$P - I = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$p_2^* = \frac{13}{8} p_3^*$$

Imamo sistem treh enačb  $\rightsquigarrow$

$$p_1^* = \frac{7}{4} p_3^*$$

Če želimo, da je  $\pi^*$  verjetnostna mera, mora biti  $\pi^* \cdot 1 = 1$ .  
 $p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \Rightarrow p_3^* = \frac{8}{35}$

$$\pi^* = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{14}{35} & \frac{13}{35} & \frac{8}{35} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 0.4 & 0.371429 & 0.228571 \end{array} \right]$$

↑ podobno vrsticam matrike  $P^{10}$

Kaže torej, da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \left[ \begin{array}{ccc} \pi^* & \pi^* & \pi^* \end{array} \right]$  oziroma  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi P^n = \pi^*$

za vsako začetno porazdelitev  $\pi$ .

$$\det(P - I - \lambda I) = \det(P - (\lambda + 1)I)$$

$$= \begin{vmatrix} -0.3 - \lambda & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 - \lambda & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & -0.5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0.2 & 0.1 \\ -\lambda & -0.4 - \lambda & 0.2 \\ -\lambda & 0.3 & -0.5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & -0.4 - \lambda & 0.2 \\ 1 & 0.3 & -0.5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.6 - \lambda & 0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.6 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left[ (\lambda + 0.6)^2 - 0.1^2 \right] =$$

$$= -\lambda(\lambda + 0.5)(\lambda + 0.7)$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_1 = -0.5, \lambda_2 = 0.7$$

Lastne vrednosti matrike  $P$ :  $1, 0.5, 0.3$

Naj bosta  $v_2$  in  $v_3$  leva lastna vektorja za lastni vrednosti  $\lambda_2 + 1$  in  $\lambda_3 + 1$ .

$$V := \text{Lin}(v_2, v_3)$$

Za vsak  $v \in V$ , je spet  $vP \in V$  in velja

$$\|vP\| \leq 0.5 \|v\|$$

Poleg tega pa za vsak  $v \in V$  velja  $v1 = 0$ .

Vemo:  $P1 = 1$

$$v_2 1 = v_2 P1 = 0.5 v_2 1 \Rightarrow v_2 1 = 0.$$

Podobno  $v_3 1 = 0 \Rightarrow \forall v \in V. v1 = 0$ .

Če je  $\pi$  verjetnostna porazdelitev na  $S = \{1, 2, 3\}$ , obstajata tak  $a \in \mathbb{R}$  in tak  $v \in V$ , da je  $\pi = a \cdot \pi^* + v$ .

$$\underbrace{\pi}_1 = a \underbrace{\pi^*}_1 + \underbrace{v}_0$$

$$\Rightarrow a = 0, \pi = \pi^* + v$$

$$\begin{aligned} \pi P^n &= \pi^* P^n + v P^n \\ &= \pi^* + v P^n \end{aligned}$$

$$\|v P^n\| \leq 0.5 \cdot \|v\|$$

$$\text{Torej je } \lim_{n \rightarrow \infty} \pi P^n = \pi^*.$$

Takemu obnašanju pravimo ergodičnost.

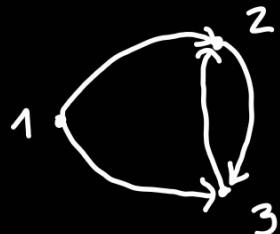
Primer:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P - I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} p_1^* = 0 \quad \cancel{\frac{1}{4} p_1^* - \frac{1}{4} p_2^* + \frac{1}{2} p_3^* = 0}$$

$$\cancel{\frac{1}{4} p_1^* + \frac{1}{4} p_2^* - \frac{1}{2} p_3^* = 0}$$



$$\Rightarrow p_2^* = 2p_3^* \Rightarrow \pi^* = \left[ 0 \ 2/3 \ 1/3 \right]$$

Dejstvo, da je  $p_1^* = 0$ , je posledica minljivosti stanja 1:

$$\begin{aligned} P_1(T_1^+ = \infty) &= P_1(\min\{n=1,2,3,\dots; X_n=1\} = \infty) \\ &= P_1(X_n \neq 1 \text{ za vse } n=1,2,3,\dots) > 0 \end{aligned}$$

Izrek 3.6: Vsaka markovska veriga na končni množici stanj ima stacionarno porazdelitev.

Vemo: 1 je lastna vrednost prehodne matrike  $P$ , torej obstaja levi lastni vektor; obstaja tak  $\pi^*$ , da je  $\pi^* P = \pi^*$ .

Če je  $\pi^* 1 \neq 0$ , lahko  $\pi^*$  izberemo tako, da bo  $\pi^* 1 = 1$ . Ni pa rečeno, da so vse komponente vrstičnega vektora nenegativne! (To želimo dokazati.)

Perron-Frobeniusov izrek: Vsaka matrika z nenegativnimi komponentami ima tako realno lastno vrednost  $r$ , da za poljubno lastno vrednost  $\lambda$  velja  $|\lambda| \leq r$ .

Nadalje za lastno vrednost r obstaja lastni vektor z nenegativnimi komponentami.

Dokaz oprščamo. Zgornje bomo dokazali z verjetnostnimi metodami.

Primer: enostavni slučajni sprehod na  $S := \mathbb{Z}$

$$p_{k,k+1} = p_{k,k-1} = 1/2$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi_i^* p_{ij} = \pi_j^*$$

$$\pi_j^* = \frac{1}{2} (\pi_{j+1}^* + \pi_{j-1}^*)$$

Števila  $\pi_j^*$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , torej tvorijo aritmetično zaporedje.

Če želimo, da je  $\pi_j^* > 0$  za vsi  $j \in \mathbb{Z}$ , morajo biti vsa števila  $\pi_j^*$  enaka. Nikoli se ne sestujejo v 1.

$\Rightarrow$  Invariantna porazdelitev ne obstaja.

$\pi P$  pa lahko izračunamo za kateri koli vrstični vektor z vrednostmi v  $[0, \infty]$ .

"posplošeni"

Matriku  $P$  predstavlja operotor na množici pozitivnih mer na  $S$ .

$$\pi \mapsto \pi P$$

Vsaki pozitivni meri  $\pi$  lahko privedemo inducirane mere  $\pi_n = \pi P^n$ . Pozitivna mera  $\pi$  je invariantna, (<sup>ne upravljujoč</sup> stacionarna)

če je  $\pi^* P = \pi^*$ .

Enostavni slučajni sprehod ima invariantne mere  $\pi^{*(k)} = a$  za vsi  $k$ , kjer je  $a \in [0, \infty]$  fiksen.

Od zadnjic:

$\pi$ : vrstični vektor  $\equiv$  (verjetnostna) mera na  $S$

$\pi P =$  porazdelitev sl. sprem.  $X_1$  pri verj. meri  $P_\pi$

oz. pri  $X_0 \sim \pi$  (Opazka 3.4)

$$\delta_x \equiv [0 \dots 0 \underset{x}{\uparrow} 1 0 \dots 0]$$

$\delta_x P =$  porazdelitev slučajne spr.  $X_1$  pri  $P_x$

Kaj pa pomeni  $P_h$ ?  $P_h = ?$

Opazka 3.7:  $\pi h$  ustreza pričakovani vrednosti  $E[h(X)]$ , kjer  $X \sim \pi$ .  $h$  preizkusna funkcija

$P_h$  je stolpčni vektor iz  $E_x[h(X_1)]$  za vsa možne  $x \in S$ .

$$\delta_x P_h \equiv E_x[h(X_1)]$$

↑ pričakovana vrednost pri  $P_x$

$$\underbrace{(\delta_x P)}_X h$$

$$\delta_x(P_h) ?$$

### 3.2. Krepka lastnost Markova

sledi iz izreka 2.12  
in posledice 3.3

Izrek 3.8 [krepka lastnost Markova]:

Naj bo:

- $X_0, X_1, \dots$  markovska veriga na množici  $S$  s prostim začetnim stanjem in prehodnimi verjetnostmi  $p_{x,y}$
- $\pi$  verjetnostna mera na  $S$
- $T$  čas ustavljanja za  $X_0, X_1, \dots$  oz. pripadajočo naravna filtracija  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2, \dots$
- $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T=n\} \cap B_n$ , kjer je  $B_n \in \mathcal{F}_n$
- $p$  pogojna porazdelitev sl. sprem.  $X_T$  glede na  $B$  pri  $P_\pi$  (strago gledano, sl. sprem.  $Y$ , ki je na dogodku  $\{T < \infty\}$  enaka  $X_T$ )  
in zožena na ...

Pogojno na  $B$  je tedaj  $X_T, X_{T+1}, \dots$  markovska veriga z začetno porazdelitvijo  $P$  in istimi prehodnimi verjetnostmi za poljubno množico  $D \subseteq (2^S)^{\mathbb{N}_0}$  velja:

$$P_\pi^B [(X_T, X_{T+1}, \dots) \in D] = P_p [(X_0, X_1, \dots) \in D].$$

Dokaz: sledi iz izreka 2.12 in posledice 3.3. □

$$P(X \in D) \underset{\substack{\text{nehalo} \\ \text{osmuno}}}{\underset{\text{ekvivalentna}}{\approx}} \mathbb{E}[h(X)] \quad \left. \begin{array}{l} \text{raci bi rezulta v} \\ \text{desni objekti,} \end{array} \right\} \text{bolj fleksibilna}$$

"Standardna mašinerija:"

$$P(X \in D) = \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(X)], \text{ kjer je } \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(x) = \mathbb{1}(x \in D) = \begin{cases} 1; & x \in D \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Z uporabo linearnosti posplošimo z indikatorjev na enostavne funkcije  $h$ :



enostavne  $\leftrightarrow$  stopničaste

teorija mere

Z uporabo izreka o monotoni/kombinirani konvergenci posplošimo na želeni razred funkcij  $h$ .

Opozka 3.9: Če je  $P_{\pi}(A) = \sum_{x \in S} \pi(x) P_{\pi}(A)$ , tudi za poljubno omejeno slvčajno spremenljivko  $Y$  velja

$$E_{\pi}(Y) = \sum_{x \in S} \pi(x) E_x(Y).$$

Med drugim je:  $\pi P h = E_{\pi}[h(X_1)]$ .

Izrek 3.10: Pod predpostavkami izreka 3.8 za poljubno omejeno in  $(2^S)^{\sigma\text{-algebro}}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljivo funkcijo  $h$  velja zvezda:

$$E_{\pi}^B[h(X_T, X_{T+1}, \dots)] = E_{\rho}[h(X_0, X_1, \dots)]$$

Dokaz: "Standardna mašinerija" teorije mere.

Opozka 3.11: Če je vselej  $T < \infty$ , dogodki oblike  $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{T=n\} \wedge B_n$ , kjer je  $B_n \in \mathcal{F}_n$ , tvorijo  $\sigma$ -algebri. (DV)

V splošnem pa to velja za dogodke oblike

$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \{T=n\} \wedge B_n$ , kjer je  $B_n \in \mathcal{F}_n$ , za  $\mathcal{F}_{\infty}$  pa lahko

vzamemo poljubno  $\sigma$ -algebri, ki vsebuje vse  $\mathcal{F}_n$ .

[Če je  $T=\infty$ , ni zupnosti za komplemente v 1. primeru].

Definicija: Za merljiv prostor  $(\Omega, \mathcal{F})$ , filtracijo  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  na  $(\Omega, \mathcal{F})$  in čas ustavljanja  $T$  glede na to filtracijo označimo z  $\mathcal{F}_T$   $\sigma$ -algebri dogodkov oblike

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \{T_n=n\} \wedge B_n,$$

kjer je  $B_n \in \mathcal{F}_n$  za vsa  $n \in \mathbb{N}$ , in  $B_{\infty} \in \mathcal{F}$ .

Opozka 3.12: Če je  $T$  konstanten ( $T = n < \infty$ ), se definiciji vjemata.

Irditev 3.13:  $\mathcal{F}_T = \left\{ A \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0. A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \right\}$

$$= \left\{ A \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0. A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \right\}$$

Dokaz: Če je  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \{T = n\} \cap B_n$ , je

$$A \cap \{T = n\} = B_n \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$$

$$\subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T = n\} \cap B_n$$

Če za vsa  $n \in \mathbb{N}_0$  velja  $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ , lahko postavimo  
 $B_n := A \cap \{T = n\}$ ,  $B_\infty := A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ .

$$\subseteq \{T = \infty\}$$

Nadalje je:  $A \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \underbrace{(A \cap \{T = k\})}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n}$

$A \cap \{T = n\} = (\underbrace{A \cap \{T \leq n\}}_{\mathcal{F}_n \in} \setminus \underbrace{(A \cap \{T \leq n-1\})}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n \text{ za } n=1,2,\dots})$

$$= \emptyset \in \mathcal{F}_n \text{ za } n=0$$

□

Irditev 3.14: Če je  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  naravna filtracija za slučajni proces  $X_0, X_1, \dots$  z vrednostmi v merljivem prostoru  $(S, \mathcal{G})$  in  $T$  čas vstavljanja za to filtracijo oz. proces, je slučajna spremenljivka

$$X^* = \begin{cases} X_T; & T < \infty \\ \text{karakter } \mathcal{F}/\mathcal{G} \text{ merljivega; sicer} \end{cases}$$

$\mathcal{F}_T/S$  merljiva.

Dokaz: Za vsak  $C \in \mathcal{F}$  moramo dokazati, da je  $\{X^* \in C\} = \{w \in \Omega \mid X^*(w) \in C\} = (X^*)^{-1}(C) \in \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{T})$ .

Ekvivalentno,  $\{X^* \in C\} \in \tilde{\mathcal{F}}$  in  $\{X^* \in C, T=n\} \in \tilde{\mathcal{F}}_n$  za vsi  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Za vsak  $n \in \mathbb{N}_0$  je

$$\{X^* \in C, T=n\} = \{X_n \in C, T=n\} \in \tilde{\mathcal{F}}_n \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$$

Nadaljuje je

$$\underbrace{\{X^* \in C, T=\infty\}}_{\in \tilde{\mathcal{F}}} \in \tilde{\mathcal{F}}$$

$$\{X^* \in C\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \{X^* \in C, T=n\} \in \tilde{\mathcal{F}}$$



27. oktober 2025

Iz trditve 3.13 sledi

Izrek 3.10: Pod predpostavkami izreka 3.8 za vsako omejeno in  $(2^s)^{\mathbb{N}_0}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljivo funkcijo  $h$  in vsak  $B \in \tilde{\mathcal{F}}_{T_1}$ , za katerega je  $P(B) > 0$ , velja zvezca:

Sprememba  
od 3.10

$$\mathbb{E}_{\pi}^B[h(X_T, X_{T+1}, \dots)] = \mathbb{E}_{\rho}^B[h(X_0, X_1, \dots)],$$

kjer je  $\pi$  porazdelitev slvč. sprem.  $X_T$  pri  $P_{\pi}^B$ .

Definicija: Za dogodek  $B$  s  $P(B) > 0$  in slvčajno spremenljivko  $X$  z  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$  definirajmo:

- $\mathbb{E}^B(X)$  := pričakovana vrednost slvčajne spremenljivke  $X$  pri  $P^B$
- $\mathbb{E}(X|B) := \frac{\mathbb{E}[X 1_B]}{P(B)}$

Trditev 3.15: Brš ko je  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ , je tvdi  $\mathbb{E}^B(|X|) < \infty$  in velja  $\mathbb{E}^B(X) = \mathbb{E}(X|B)$ .

Dokaz: „Standardna mašinerija“; Naredimo le 1. korak.

$$X = \mathbb{1}_A : \quad \mathbb{E}^B(X) = \mathbb{E}^B(\mathbb{1}_A) = P^B(A) = P(A | B)$$

$$\mathbb{E}(X | B) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)}{P(B)} = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A \cap B})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \cap B)$$

Nadaljevanje: domaća vaja. □

Definicija: Naj bo  $X$   $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljiva slučajna spremenljivka z  $E(|X|) < \infty$ . Za  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$  definirajmo  $\mathbb{E}(X | \mathcal{H})$  kot  $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljivo slučajno spremenljivko  $Z$  z lastnostjo, da za vsak dogodek  $B \in \mathcal{H}$  velja:  $\mathbb{E}[Z \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]$ .

Slučajni spremenljivki  $Z$  pravimo pogojna pričakovana vrednost slučajne spremenljivke  $X$  glede na  $\mathcal{H}$ .

Opazka 3.16: Pogojna pričakovana vrednost  $Z$  je le skoraj natančno določena: če sta  $Z_1$  in  $Z_2$  pogojni pričakovani vrednosti slučajne spremenljivke  $X$  glede na  $\mathcal{H}$ , velja  $P(Z_1 = Z_2) = 1$ : postavimo  $B_1 := Z_1 > Z_2$ ,  $B_2 := Z_2 > Z_1$  (DV).

$\rightarrow Z = \mathbb{E}(X | \mathcal{H})$  je v resnici ekvivalentni razred, gre za zlorabo notacije

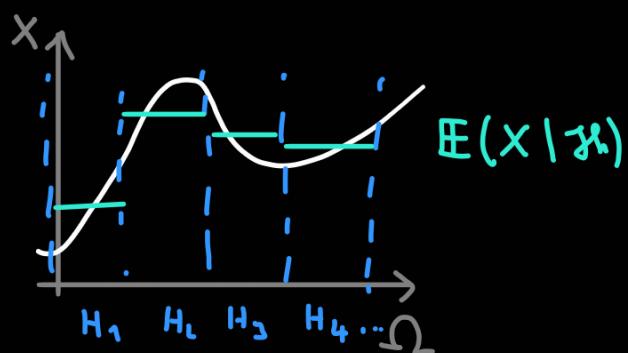
Opazka 3.17: Če je  $X$  že  $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljiva,  $\mathbb{E}(X | \mathcal{H}) = X$ .

Trditev 3.18: Če je  $\mathcal{H}$   $\sigma$ -algebra, generirana z števno particijo  $(H_k)_{k \in K}$  prostora  $\Omega$ , tj. družino vseh možnih unij množic  $H_k$ , in  $Z$  slučajna spremenljivka, velja:

(1)  $Z$  je  $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljiva  $\Leftrightarrow Z$  je na vsakem dogodku  $H_k$  konstantna

(2)  $Z = \mathbb{E}(X | \mathcal{H}) \Leftrightarrow Z$  je  $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$  merljiva in na vsakem dogodku  $H_k$  s  $P(H_k) > 0$  enaka  $\mathbb{E}(X | H_k)$ .

Dokaz: DV.



Posledica 3.1g: Za  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$  je  $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$ .

Izrek 3.20 [različica krepke lastnosti Markova za pogojno pričakovana vrednost]: Pod pogoji izreka 3.8 za vsako omejeno in  $(2^s)^{\mathbb{N}_0}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljivo funkcijo  $h: \mathbb{S}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbb{R}$  na dogodku  $\{T < \infty\}$  velja:

$$E_{\pi}[h(X_T, X_{T+1}, \dots) | \mathcal{F}_T] = E_{X_T}[h(X_0, X_1, \dots)].$$

Opomba: Glede na to, da so  $X_T, X_{T+1}, \dots$  nedefinirane na  $\{T = \infty\}$ , bi morali  $h(X_T, X_{T+1}, \dots)$  zamenjati s slučajno spremenljivko  $Y$ , ki se na dogodku  $\{T < \infty\}$  ujema s  $h(X_0, X_1, \dots)$ .

Opomba: Pri  $E_{X_T}[h(X_0, X_1, \dots)]$  gre za dve ločeni manifestaciji slučajnega procesa  $\underbrace{X_0, X_1, \dots}_{w \mapsto E_{X_{T(w)}}(w)[h(X_0, X_1, \dots)]}$

$$\begin{aligned} w &\mapsto E_{X_{T(w)}}[h(X_0, X_1, \dots)] \\ &= \int h(X_0(w'), X_1(w'), \dots) dP_{X_{T(w)}}(w') \end{aligned}$$

Nauč: imamo dve Omega.

Podoben primer od prej:  $F_X(x) = P(X \leq x)$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1$$

Nauč: pri zbrabi notacije moramo biti previdni

$$w \mapsto F_X(X(w)) = P(\{w' | X(w') \leq X(w)\})$$

Dokaz izreka 3.20: Spomnimo se izreka 3.10':

$$\mathbb{E}_\pi[h(X_T, X_{T+1}, \dots) | B] = \mathbb{E}_\pi[h(X_0, X_1, \dots)].$$

||  $\mathcal{F}_T, B \subseteq \{T < \infty\}$

$$\frac{1}{P_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi \left[ h(X_T, X_{T+1}, \dots) \mathbf{1}_B \right]$$

↳ strago gledano:  $Y$  od prej

Za poljubno omejeno slvčajno spremenljivko  $W$  velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi(W) &\stackrel{3.9}{=} \sum_{x \in S} p(x) \mathbb{E}_x(W) = \sum_{x \in S} P_\pi^B(X_T = x) \mathbb{E}_x(W) \\ &= \mathbb{E}_\pi^B[\mathbb{E}_{X_T}(W)] \\ &\stackrel{3.15}{=} \frac{1}{P_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi[\mathbb{E}_{X_T}(W) \cdot \mathbf{1}_B] \end{aligned}$$

Sledi, da za poljuben  $B \in \mathcal{F}_T$  s  $P_\pi(B) > 0$  velja:

$$\frac{1}{P_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi[h(X_T, X_{T+1}, \dots) \mathbf{1}_B] = \frac{1}{P_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi[\mathbb{E}_{X_T}[h(X_0, X_1, \dots)] \mathbf{1}_B]$$

### 3.3 Dosegljivost stanj

Popravek terminologije:

Definicija: Čas zadetja vstopa v množico  $A$ :

$$T_A := \min \{n=0,1,2,\dots \mid X_n \in A\}$$

Čas zadetja množice  $A$ :  $T_A^{(1)} := \min \{n=1,2,3,\dots \mid X_n \in A\}$ .

Opozka 3.21: Tudi  $T_A^{(1)}$  je čas ustavljanja:

$$\{T_A^{(1)} = n\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}.$$

Opozka 3.22: Če je  $x \notin A$ , je  $P_x(T_A^{(1)} = T_A) = 1$ .

Definicija:  $T_y := T_{\{y\}}, T_y^{(1)} := T_{\{y\}}^{(1)}$

Definicija: Verjetnost dosega stanja  $y$  iz stanja  $x$  je:

$$P_{x,y} := P_x(T_y^{(1)} < \infty) = P_x(X_1=y \text{ ali } X_2=y \text{ ali } \dots)$$

Stanje  $y$  je dosegljivo iz stanja  $x$ , če je  $P_{x,y} > 0$ .

Pišemo  $x \rightarrow y$ .  $x \rightarrow x$  ni nujno res.

Opozka 3.23: Za poljubne dogodke  $A_1, A_2, \dots$  velju:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) > 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}. P(A_n) > 0$$

Torej je  $x \rightarrow y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}. P_x(X_n=y) > 0$ .

Irditev 3.24: Če je  $x \rightarrow y$  in  $y \rightarrow z$ , je tudi  $x \rightarrow z$ .

Dokaz: Obstaja tak  $m \in \mathbb{N}$ , da je  $P_x(X_m=y) > 0$ , in tak  $n \in \mathbb{N}$ , da je  $P_y(X_n=z) > 0$ . Po lastnosti Markovcev (izrek 3.8) pa je  $P_x(X_{m+n}=z | X_m=y) = P_y(X_n=z)$ .  
 $\Rightarrow P_x(X_{m+n}=z) \geq P_x(X_n=y, X_{m+n}=z) = P_x(X_m=y)P_y(X_n=z) > 0$ .  $\blacksquare$

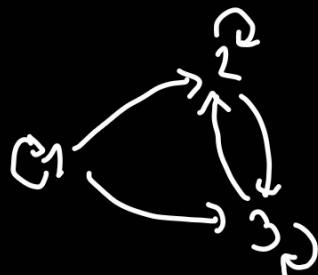
Opomba:  $P^m = [P_x(X_m=y)]_{x,y} \quad p^{m+n} = p^m \cdot p^n$

Sledi:  $P_x(X_{m+n}=z) = \sum_y P_x(X_m=y) P_y(X_n=z)$

Definicija: Stanje  $x$  je minljivo (angl. transient), če je  $p_{x,x} < 1$ , in povrnljivo (angl. recurrent), če je  $P_{x,x} = 1$ .

Primer:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Stanje 1 je minljivo, saj je  $P_{1,1} = 1/2$ .

Stanji 2 in 3 sta povrnljivi:

$$\left. \begin{array}{l} p_{2,2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} p_{3,2} \\ p_{3,2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_{3,2} \end{array} \Rightarrow p_{3,2} = 1 \right\} \Rightarrow p_{2,2} = 1$$

Podobno za  $p_{3,3}$ .

Lema 3.25: Naj bo  $x \rightarrow y$ , tj.  $p(x,y) > 0$ . Če je  $p_{y,x} < 1$ , je stanje  $x$  minljivo.

$x \rightsquigarrow y$  nikoši  $x$  več

Dokaz: BSS  $x \neq y$ .  $\exists m \in \mathbb{N}. P_x(X_m=y) > 0$  in  $\forall n < m. P_x(X_n=y) = 0$

$$\begin{aligned} P_x(X_n=x, X_m=y) &= P_x(X_n=x) \cdot P_x(X_m=y | X_n=x) \\ &= P_x(X_n=x) \underbrace{P_x(X_{m-n}=y)}_0 = 0 \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$

$x \rightsquigarrow y$

$x$   
krajšja pot

$\Rightarrow$  Za vsak  $n \in \{1, 2, \dots, m-1\}$  je torej  $P_x(X_n=x, X_m=y) = 0$ .

3. november 2025

To bi šlo, vendar bomo naredili drugače (dokaz kasneje)  
(trditev 3.29)

Trditev 3.26: Neenakost  $P_x(X_n=y) > 0$  velja natanko tedaj, ko obstaja takšna veriga stanj  $x = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = y$ , da je  $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$  za vse  $k = 1, 2, \dots, n$ . Torej je  $x \rightarrow z$  natanko tedaj, kadar obstaja takšen  $n$  in takšni  $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$ , da je  $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$  za vse  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Dokaz:  $P_x(X_n=y) = \sum_{z_0, \dots, z_{n-1} \in S} p_{z_0, z_1} p_{z_1, z_2} \cdots p_{z_{n-1}, z_n}$ , kjer je  $z_0 = x$  in  $z_n = y$ .

Vsota na desni je večja od 0 natanko tedaj, ko obstojajojo takšni  $z_1, \dots, z_{n-1}$  da je  $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$  za vse  $k = 1, \dots, n$ .

Drugi del sledi iz opazke 3.23:

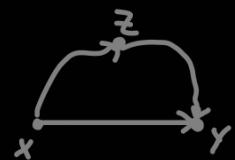
$$x \rightarrow y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}. P_x(X_n=y) > 0$$

$\Updownarrow \text{def}$

$$P_x(\exists n \in \mathbb{N}. X_n > y) > 0$$

□

Trditve 3.27:  $\beta_{x,y} = p_{x,y} + \sum_{z: z \neq y} p_{x,z} \beta_{z,y}$ .



$$\begin{aligned}
 \text{Dokaz: } \beta_{x,y} &= P_x(\{X_1=y\} \cup \{X_2=y\} \cup \dots) \\
 &= P_x(X_1=y) + \sum_{z: z \neq y} P_x(\{X_1=z\} \wedge (\{X_2=y\} \cup \{X_3=y\} \cup \dots)) \\
 &= P_x(X_1=y) + \sum_{\substack{z: z \neq y \\ P_x(X_1=z) > 0}} P_x(\{X_1=z\} \cup \{X_2=y\} \cup \dots | X_1=z) \\
 &= p_{x,y} + \sum_{z: z \neq y} p_{x,z} \beta_{z,y} \quad \square
 \end{aligned}$$

Definicija: Stanje  $y$  je skoraj gotovo dosegljivo iz  $x$ , če je  $\beta_{x,y} = 1$ ; pišemo  $x \xrightarrow{\text{ }} y$ .  
 $\uparrow$  ni standardna oznaka

Stanje  $x$  je torej povrnljivo  $\Leftrightarrow x \xrightarrow{\text{ }} x$ .

Trditve 3.28: Če je  $x \xrightarrow{\text{ }} z$ ,  $y \neq z$  in  $p_{x,y} > 0$ , je tudi  $y \xrightarrow{\text{ }} z$ .



Dokaz: Po trditvi 3.27 je

$$\beta_{x,z} = p_{x,z} + \sum_{w: w \neq z} p_{x,w} \beta_{w,z}.$$

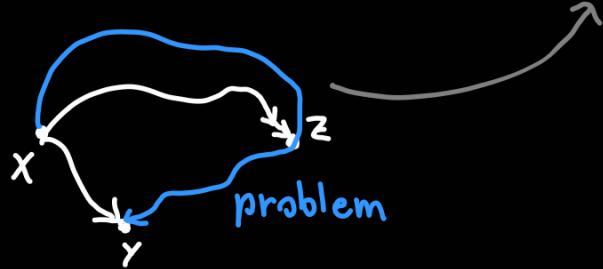
$$1 = p_{x,z} + \sum_{w: w \neq z} p_{x,w}$$

$$\Rightarrow 1 - \beta_{x,z} = \sum_{\substack{w: w \neq z \\ \parallel \\ 0}} p_{x,w} (1 - \beta_{w,z})$$

Torej za vse  $w \neq z$  velja  $p_{x,w} (1 - \beta_{w,z}) = 0$ .

Ker je  $p_{x,y} > 0$  in  $y \neq z$ , mora biti  $1 - \beta_{w,z} = 0$ , t.j.  $\beta_{y,z} = 1$ .  $\square$

Trditve 3.29:  $x \rightarrow\!\!\! \rightarrow z$ ,  $x \rightarrow y$ ,  $y \neq z \Rightarrow y \rightarrow\!\!\! \rightarrow z$



Trditve 3.29: Če je  $x$  povrnljivo in  $x \rightarrow y$ , je  $y \rightarrow\!\!\! \rightarrow x$ .

Dokaz: Po trditvi 3.26 obstaja takšna veriga stanj  $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$ , da je  $p_{z_{k-1} z_k} > 0$  za vse  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . Privzamemo lahko, da so  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  vsi različni od  $x$ . Iz prejšnje trditve z indukcijo dobimo, da je  $z_k \rightarrow\!\!\! \rightarrow x$  za vse  $k = 0, 1, \dots, n$ . □

$$(z_k \rightarrow\!\!\! \rightarrow x, z_k \rightarrow z_{k+1}, z_{k+1} \neq x \Rightarrow z_{k+1} \rightarrow\!\!\! \rightarrow x)$$



Velja: Trditve 3.29  $\Leftrightarrow$  Lema 3.25, torej smo dokazali lemo 3.25.

Definicija: Za  $k = 1, 2, \dots$  rekurzivno definiramo čas  $k$ -tega obiska množice  $A \subseteq S$  s predpisom:

$$T_A^{(k+1)} := \begin{cases} \min \{n = T_A^{(k)} + 1, T_A^{(k)} + 2, \dots \mid x_n \in A\}; T_A^{(k)} < \infty \\ \infty \quad \quad \quad ; T_A^{(k)} = \infty \end{cases}$$

kjer je  $T_A^{(1)}$  že definiran. Število obiskov množice  $A$  je:

$$\begin{aligned} N(A) &:= |\{n = 1, 2, 3, \dots \mid x_n \in A\}| \\ &= \max \{k = 1, 2, \dots; T_A^{(k)} < \infty\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_A^{(k)} < \infty) \end{aligned}$$

Če je  $N(A) = \infty$ , dobimo  $T_A^{(1)} < T_A^{(2)} < \dots < \infty$ , če je  $N(A) < \infty$ , pa dobimo  $T_A^{(1)} < T_A^{(2)} < \dots < T_A^{(N(A))} < \infty = T_A^{(N(A)+1)} = \dots$ .

Označimo  $T_Y^{(k)} := T_{\{y\}}^{(k)}$  in  $N(y) := N(\{y\})$ .

Opozka 3.30:  $\{T_A^{(k)} < \infty\} = \{N(A) \geq k\}$

Spomnimo se:  $P_x(T_Y^{(1)} < \infty) = s_{x,y}$

$$\begin{aligned} P_x(T_Y^{(k+1)} < \infty) &= P_x(T_Y^{(k)} < \infty, T_Y^{(k+1)} < \infty) \\ &= \underbrace{P_x(T_Y^{(1)} < \infty)}_{\text{če je to } > 0} \cdot P_x^{T_Y^{(1)} < \infty}(T_Y^{(k+1)} < \infty) \\ &= s_{x,y} \cdot P_x^{T_Y^{(1)} < \infty} \left( \exists \text{ vsaj } k \text{ časov } n, \text{ za } \begin{array}{l} \text{katere je } X_{T_Y^{(1)}+n} = y \end{array} \right) \\ \left. \begin{array}{l} \text{krepka lastnost Markova} \\ X_{T_Y^{(1)}} = y \end{array} \right\} &\quad = s_{x,y} P_y \left( \exists \text{ vsaj } k \text{ časov } n, \text{ za } \begin{array}{l} \text{katere je } X_n = y \end{array} \right) \\ &= s_{x,y} P_y(T_Y^{(k)} < \infty) \end{aligned}$$

Med drugim je  $P_y(T^{(k+1)} < \infty) = s_{y,y} P_y(T^{(k)} < \infty)$ , torej z indukcijo dobimo:  $P_x(T_Y^{(k+1)} < \infty) = s_{x,y} \cdot s_{y,y}^k$ .

Dokazali smo:

Irditev 3.31:  $P_x(T_Y^{(k)} < \infty) = P_x(N(y) \geq k) = s_{x,y} \cdot s_{y,y}^{k-1}$  (za  $k=1, 2, \dots$ ).

Opozka 3.32 [razločitev]: Velja  $P_x(N(y) = 0) = 1 - s_{x,y}$  in nadalje:

\* Če je stanje  $y$  minljivo ali  $s_{x,y} = 0$ , je:

$$\begin{aligned} P_x(N(y) = k) &= P_x(N(y) \geq k) - P_x(N(y) \geq k+1) \\ &= s_{x,y} \cdot s_{y,y}^{k-1} (1 - s_{y,y}); \quad k=1, 2, \dots \\ &\quad (\text{ob dogovoru } 0^0 := 1) \end{aligned}$$

Velja  $P_x(N(y) = \infty) = 0$

\* Če je stanje  $y$  povrnljivo in  $\beta_{x,y} > 0$ , pa je  $P_x(N(y)=k) = 0$  za  $k=1,2,3,\dots$ ; in  $P(N(y)=\infty) = \beta_{x,y}$ .

Ponovimo:

Za slučajno spremenljivko  $N \geq$  vrednostmi v  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  velja:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}(N>k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}(N \geq k).$$

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N>k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N \geq k)$$

Opozka 3.33:  $\mathbb{E}_{\pi}[N(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\pi}(X_n \in A) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P_{\pi}(T_A^{(k)} < \infty)$

Opozka 3.34:  $\mathbb{E}_x[N(y)] = \begin{cases} \frac{\beta_{x,y}}{1-\beta_{x,y}} ; & y \text{ minljivo} \\ 0 ; & \beta_{x,y} = 0 \\ \infty ; & y \text{ povrnljivo in } \beta_{x,y} > 0 \end{cases}$

$P_x(T_y^{(k)} < \infty) = \beta_{y,y} \beta_{x,y}^{k-1}$   
(geo. vrsta)

Torej je bodisi  $\mathbb{E}_x[N(y)] < \infty$  bodisi  $P_x(N(y) = \infty) > 0$ .

Opozka 3.35: \* Če je stanje  $x$  minljivo, je:

pravljena  
geometrijska  
porazdelitev

$$P_x(N(x)=k) = \beta_{x,x}^k (1-\beta_{x,x}); \quad k=0,1,2,\dots \quad 0^0 = 1$$

$$P_x(N(x)=\infty) = 0$$

Torej je  $N(x)+1 \sim \text{Geom}(\beta_{x,x})$  in  $\mathbb{E}_x[N(x)] = \frac{\beta_{x,x}}{1-\beta_{x,x}}$ .

\* Če je stanje  $x$  povrnljivo, pa je:  $P_x(N(x)=\infty) = 1$ .

