Vaje iz teorije mere

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

17. januar 2026

Kazalo

Uvod **3**

1 Merljive množice **3**
1.1 σ-algebre . . . 3
1.2 Pozitivne mere . . . 5
1.3 Zunanje mere . . . 10
1.4 Polalgebre in razširitve mer . . . 12
1.5 Lebesgue-Stieltjesove mere . . . 12

2 Integral **14**
2.1 Merljive preslikave . . . 14
2.2 Načini konvergence . . . 18
2.3 Integral nenegativne merljive funkcije . . . 22
2.4 Integriranje funkcijskih vrst . . . 27
2.5 Integral kompleksne merljive funkcije . . . 28
2.6 Produktna mera . . . 31

3 Kompleksne mere **36**
3.1 Primeri in totalna variacija . . . 36
3.2 Realne mere . . . 39
3.3 Lebesgue-Radon-Nikodymov izrek . . . 42
3.4 L^p prostori . . . 45

Uvod

V tem dokumentu so zbrane rešitve nekaterih nalog iz vaj pri Teoriji mere na UL FMF v šolskem letu 2025/26. Na začetku vsakega poglavja je povzetek pomemnih definicij in dejstev. Bralec lahko večino nalog (in še mnogo drugih) najde v [1].

Dokument zagotovo vsebuje veliko napak – bralcu v izziv je prepuščeno, da jih najde.

1 Merljive množice

1.1 σ-algebre

- Naj bo X neprazna množica. Družina $\mathcal{A}$ podmnožic X je *σ-algebra*, če ima naslednje lastnosti:

  (i) Velja $X \in \mathcal{A}$.

  (ii) Če je $A \in \mathcal{A}$, je tudi $A^c \in \mathcal{A}$.

  (iii) Če je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, je tudi
  $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

  Pravimo, da je $(X, \mathcal{A})$ *merljiv prostor*, množicam $\mathcal{A}$ pa *merljive množice.*

- Velja še:

  ⋆ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

  ⋆ Zaprtost za končne preseke.

  ⋆ Poljuben presek σ-algeber je σ-algebra.

  ⋆ Najmanjšo σ-algebro, ki vsebuje $B \subseteq X$, označimo s $\sigma(B)$.

Naloga 1.1

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Za množico $E \in \mathcal{A}$ definiramo
$$\mathcal{A}_E := \{E \cap F \mid F \subseteq E\}.$$
Dokažite, da je $\mathcal{A}_E$ σ-algebra na E.

Rešitev. **(i)**: Velja $E = E \cap E \in \mathcal{A}_E$.

(ii): Naj bo $A = E \cap F \in \mathcal{A}$. Tedaj je $A^c = E \setminus A = E \cap A^{\tilde{c}}$, kjer je A^c komlement A v E, $A^{\tilde{c}}$ pa komplement A v X. Sledi, da je $A^c \in \mathcal{A}_E$.

(iii): Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Tedaj

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \cap F_i) = E \cap \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) \in \mathcal{A}_E,$$

saj je $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i \in \mathcal{A}$. □

Naloga 1.2

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\mathcal{A}_n = \sigma\left(\{1\}, \ldots, \{n\}\right) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

(a) Dokažite, da je $\mathcal{A}_n = \left\{E \subseteq \mathbb{N} \;\middle|\; E \subseteq [n] \text{ ali } E^C \subseteq [n]\right\}$,

(b) Dokažite, da je $\mathcal{A}_n$ prava podmnožica v $\mathcal{A}_m$ za $m < n$.

(c) Dokažite, da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ ni σ-algebra.

Rešitev. **(a):** Označimo $\mathcal{B}_n = \left\{E \subseteq \mathbb{N} \;\middle|\; E \subseteq [n] \text{ ali } E^C \subseteq [n]\right\}$. Najprej pokažimo, da je $\mathcal{B}_n$ σ-algebra.

(i): Ker je $\mathbb{N}^c \subseteq [n]$, je $\mathbb{N} \in \mathcal{B}$.

(ii): Zaprtost za komplemente velja zaradi simetričnosti definicije.

(iii): Naj bo $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$. Če so vsi $B_i \subseteq [n]$, potem je tudi njihova unija vsebovana v $[n]$. Podobno, če so vsi B_i^c vsebovani v $[n]$. Če pa je $B_i \subseteq [n]$ in $B_j^c \subseteq [n]$, pa je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \mathbb{N}$.

Očitno $\mathcal{B}_n$ vsebuje vse generatorje $\mathcal{A}_n$, torej $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}_n$. Obratno, če je $B \in \mathcal{B}$ vsebovan v $[n]$, je unija singletonov, torej je $B \in \mathcal{A}$. Podobno, če je $B^c \subseteq [n]$. Zato je tudi $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n$ oziroma skupaj $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n$.

(b): Če je $n < m$, potem $\{m\} \nsubseteq [n]$ in $\{m\}^c \nsubseteq [n]$, torej $m \notin \mathcal{A}_n$.

(c): Če bi unija bila σ-algebra, bi bila potenčna σ-algebra saj vsebuje vse singletone. Po drugi strani pa je to družina množic, ki so končne ali pa imajo končne komplemente. Tako na primer $2\mathbb{N} \notin \mathcal{A}_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in tudi ni v uniji, kar je protislovje. □

Naloga 1.3

Naj bo X neštevna množica in

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X \mid E \text{ je števna ali } E^c \text{ je števna}\}.$$

(a) Dokažite, da je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X.

(b) Dokažite, da je $\mathcal{A} = \sigma(\{\{x\} \mid x \in X\})$.

Rešitev. **(i)**: Ker je $X^c = \emptyset$ števna množica, je $X \in \mathcal{A}$.

(ii): Zaprtost za komplemente velja zaradi simetrije definicije $\mathcal{A}$.

(iii): Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Če so vsi A_i števni, je števna tudi njihova unija (števna unija števnih množic je števna). Recimo, da je $A_j \in \mathcal{A}$ neštevna (in A_j^c števna) množica. Tedaj

$$A_j \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \Longrightarrow \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c \subseteq A_j^c,$$

torej je komplement unije števen.

Označimo $\mathcal{B} = \sigma(\{\{x\} \mid x \in X\})$. Očitno $\mathcal{A}$ vsebuje vse generatorje $\mathcal{B}$, torej $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Če je $A \in \mathcal{A}$ števna množica, je števna unija singletonov, torej je vsebovana v $\mathcal{B}$. Podobno velja, če je A^c števna množica, torej je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Skupaj smo dokazali $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. □

Naloga 1.4

Naj bo $\mathcal{A}$ neskončna σ-algebra.

(a) Dokažite, da v $\mathcal{A}$ obstaja neskončno strogo padajoče zaporedje paroma različnih množic.

(b) Dokažite, da je kardinalnost neskončne σ-algebra vsaj kontinuum.

Rešitev. **(a):** Poiščimo pravo merljivo podmnožico, ki ima neskončno merljivih podmnožic. Naj bo $\emptyset \neq E \neq X$ merljiva podmnožica. Pokažimo, da ima ena od množic E in E^c iskano lastnost. Če je $F \in \mathcal{A}$, potem sta $F \cap E$ in $F \cap E^c$ merljivi množici za kateri velja $F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c)$. Če ima E m merljivih podmnožic, E^c pa n, potem dobimo največ $m \cdot n$ možnih $F \in \mathcal{A}$, kar je v protislovju z neskončnostjo $\mathcal{A}$.

Naj bo $E_0 = X$ in E_1 tista od množic E in E^c, ki ima neskončno merljivih podmnožic. Tedaj je $\mathcal{A}_{E_1}$ neskončna σ-algebra. Nadaljujemo induktivno in dobimo strogo padajoče zaporedje $(E_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b): Naj bo $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathcal{A}$ preslikava podana z $S \mapsto \bigcup_{i\in S}(E_i \setminus E_{i+1})$. Pokažimo, da je injektivna. Množica $F_i := E_i \setminus E_{i+1} \neq \emptyset$ so paroma disjunktne, saj E_i strogo padajo. Če sta S in T različni podmnožici $\mathbb{N}$, brez škode za splošnost obstaja $x \in S \setminus T$. Tedaj je $F_x \subseteq f(S)$ in $F_x \nsubseteq f(T)$, torej $f(S) \neq f(T)$. Sledi $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathcal{A}|$. □

1.2 Pozitivne mere

- *Pozitivna mera* na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ je preslikava $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$, ki zadošča:

  (i) $\mu(\emptyset) = 0$,

  (ii) Če so $A_1, A_2, \ldots$ paroma disjunktne množice iz $\mathcal{A}$, potem je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

- Mera je *končna*, če je $\mu(X) < \infty$.

- Velja še:

- ⋆ Monotonost: $\mu(A) \leq \mu(B)$ za $A \subseteq B$.
- ⋆ Za poljubne množice $A_1, A_2, \ldots$ iz $\mathcal{A}$ velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

- Naj bo $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ končna aditivna funkcija, kjer je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Tedaj je μ mera natanko tedaj, kadar za vsako naraščajoče zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ množic velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

- Iz splošnega zaporedja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lahko tvorimo naraščajoče zaporedje

$$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

- Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje množic v $\mathcal{A}$. Če je $\mu(A_1) < \infty$, potem je

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

- Lastnost $\mathcal{L}$ velja za *skoraj vse* $x \in X$, če je $\mu(\{x \mid \mathcal{L} \text{ ne velja za } x\}) = 0$.
- Mera μ na X je *σ-končna*, če lahko zapišemo X kot števno unijo (paroma disjunktnih) množic s končno mero.
- Mera μ na X je *semi-končna*, če ima vsaka množica z neskončno mero podmnožico s končno pozitivno (neničelno) mero.

Naloga 1.5

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero. Dokažite, da za merljivi podmnožici $A, B \in \mathcal{A}$ velja

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Rešitev. Ker je

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

unija disjunktnih množic, velja

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + 2\mu(A \cap B)\\ &= \mu((A \setminus B) \cup (A \cap B)) + \mu((B \setminus A) \cup (A \cap B))\\ &= \mu(A) + \mu(B).\end{aligned}$$

□

Naloga 1.6

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s končno mero. Recimo, da je mera merljive množice $A \in \mathcal{A}$ enaka $\mu(X)$. Dokažite, da za poljubno množico $B \in \mathcal{A}$ velja $\mu(B) = \mu(A \cap B)$.

Rešitev. Upoštevamo monotonost mere in dobimo

$$\mu(A) \leq \mu(A \cup B) \leq \mu(X) = \mu(A),$$

kar pomeni, da je $\mu(A) = \mu(A \cup B)$. Iz prejšnje naloge vemo, da je

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(a \cup B) + \mu(B).$$

Ker je mera μ končna, lahko krajšamo in dobimo $\mu(B) = \mu(A \cap B)$. □

Rešitev. Iz $\mu(A) = \mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$ sledi $\mu(A^c) = 0$. Torej je

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B \cap A^c) \leq \mu(A^c) = 0$$

oziroma

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B).$$ □

Naloga 1.7

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje množic iz $\mathcal{A}$.

(a) Dokažite, da velja

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leq \liminf_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

(b) Dokažite, da je množica

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n$$

enaka množici vseh $x \in X$, ki so vsebovani v vseh razen v končno mnogo množicah E_n.

(c) Če je $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, dokažite, da je skoraj vsak $x \in X$ vsebovan v končno mnogo množicah E_n.

Spomnimo se definicije: $\liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (\inf_{m \geq n} x_m)$.

Rešitev. **(a):** Definiramo naraščajoče zaporedje $\tilde{E}_n := \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m$. Tedaj je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_m\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\tilde{E}_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\right).$$

Preostane še

$$\mu\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} E_m\right) \leq \inf_{m \geq n} \mu(E_m).$$

Za vsak $m \geq n$ je

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \subseteq E_m,$$

torej po monotonosti

$$\mu\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \mu(E_m).$$

Sedaj na obeh straneh neenakosti uporabimo inf, upoštevamo, da je leva stran neodvisna od m in dobimo, kar smo želeli.

(b): To množico označimo z N. Naj bo $x \in N$. Potem obstaja takšen n_0, da za vsak $k \geq n_0$ velja $x \in E_k$. Torej je $x \in \cap_{n=n_0}^{\infty} E_n$ oziroma $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n$.

Obratno, če je $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n$, potem obstaja takšen m, da je $x \in \cap_{n=m}^{\infty} E_n$, torej za vsaj $i \geq m$ velja $x \in E_i$, kar pomeni, da je $x \in N$.

(c): TO DO

□

Naloga 1.8

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor z neskončno mero.

(a) Dokažite, da je vsaka σ-končna mera semi-končna.

(b) Če je μ semi-končna mera, dokažite, da za vsak $c > 0$ obstaja takšen $E \in \mathcal{A}$, da je $c < \mu(E) < \infty$.

(c) Če je μ σ-končna, dokažite, da za vsak $c > 0$ obstaja takšen $E \in \mathcal{A}$, da je $c < \mu(E) < \infty$.

Rešitev. **(a):** Naj bo $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kjer so X_n paroma disjunktne množice s končnimi merami, in A množica z neskončno mero. Tedaj je

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap A)$$

unija paroma disjunktnih množic in velja

$$\infty = \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n \cap A) \neq 0.$$

To pomeni, da obstaja takšen $n \in \mathbb{N}$, da je $\mu(X_n \cap A) \neq 0$. Po drugi strani pa je $\mu(X_n \cap A) \leq \mu(X_n) < \infty$, torej je mera $X_n \cap A$ končna, kar pomeni, da je μ semi-končna.

(b): Naj bo

$$C := \sup\{\mu(X') \mid X' \in \mathcal{A}, \mu(X') < \infty\}$$

Dokazati želimo, da je $C = \infty$. Recimo, da je $C < \infty$. Tedaj obstaja takšno zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da je $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = C$. Sedaj tvorimo naraščajoče zaporedje

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

za katerega velja $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i$. Torej je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Ker je

$$\mu(B_n) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) < \infty,$$

iz definicije C sledi $\mu(B_n) \leq C$. Po drugi strani pa, ker je za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \geq \mu(A_n),$$

sledi

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \geq C,$$

iz česar skupaj dobimo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = C.$$

Ker je $\mu(X) = \infty$, to pomeni, da je

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)^c\right) = \infty.$$

Ker je μ semi-končna, torej obstaja takšna množica $E \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)^c$, da je $0 < \mu(E) < \infty$. Sledi

$$\infty > \mu\left(E \cup \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right) = \mu(E) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) > C,$$

kar pa je v protislovju z definicijo C.

(c): Sledi iz točk (a) in (b). □

Naloga 1.9

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ. Za poljubno množico $E \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\mu_0(E) = \sup\left\{\mu(F) \mid \mu(F) < \infty, F \subseteq E, F \in \mathcal{A}\right\}.$$

Dokažite, da je μ_0 pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.

Rešitev. TO DO □

Naloga 1.10

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj bodo $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takšne merljive množice, da velja $\mu(E_n \cap E_m) = 1$ za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$. Izračunajte

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty E_n\right).$$

Rešitev. TO DO □

Naloga 1.11

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ verjetnostni[a] prostor in naj bo $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takšno zaporedje merljivih množic, da je 1 stekališče zaporedja $(\mu(E_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Dokažite, da za vsak $0 < \varepsilon < 1$ obstaja takšno podzaporedje $(E_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da velja

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) > \varepsilon.$$

[a] $\mu(X) = 1$

Rešitev. TO DO □

1.3 Zunanje mere

- *Zunanja mera* na X je preslikava $\xi\colon \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to [0, \infty]$, ki zadošča:
  - ⋆ $\xi(\emptyset) = 0$.
  - ⋆ $\xi(B) \leq \xi(A)$ za $B \subseteq A$.
  - ⋆ Za vsako zaporedje (A_n) velja
  $$\xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n).$$

  Množica $A \subseteq X$ je ξ-*merljiva*, če je
  $$\xi(Y) = \xi(A \cap Y) + \xi(A^c \cap Y)$$
  za vse $Y \subseteq X$. Množico vseh ξ-merljivih množic označimo z $\mathcal{A}_\xi$.
- Ekvivalentno je množica $A \subseteq X$ ξ-merljiva, če je
  $$\xi(Y) \geq \xi(A \cap Y) + \xi(A^c \cap Y)$$
  za vse $Y \subseteq X$, $\xi(Y) < \infty$.
- *Carathéodory*: Če je ξ zunanja mera na X, je $\mathcal{A}_\xi$ σ-algebra, $\xi|_{\mathcal{A}_\xi}$ mera in $(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$ poln prostor z mero.

Naloga 1.12

Naj bo ξ zunanja mera na potenčni množici neprazne množice X in $A \subseteq X$ poljubna množica. Naj za množico $B \subseteq X$ velja $\xi(B) = 0$. Dokažite, da je B ξ-merljiva in izračunaj $\xi(A \cup B)$.

Rešitev. Zaradi monotonosti velja

$$\xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c) \leq \xi(B) + \xi(Y) = \xi(Y),$$

torej je B ξ-merljiva. Iz

$$\xi(A) \leq \xi(A \cup B) \leq \xi(A) + \xi(B) = \xi(A)$$

sledi $\xi(A \cup B) = \xi(A)$. □

Naloga 1.13

Naj bo ξ zunanja mera na potenčni množici neprazne množice X in $E \subseteq X$ poljubna ξ-merljiva množica v X. Dokažite, da za poljubno podmnožico $A \subseteq X$ velja

$$\xi(A \cup E) + \xi(A \cap E) = \xi(A) + \xi(E).$$

Rešitev. Ker je $E \in \mathcal{A}_\xi$, velja

$$\xi(A \cup E) = \xi((A \cup E) \cap E) + \xi((A \cup E) \cap E^c) = \xi(E) + \xi(A \setminus E).$$

Sledi

$$\begin{aligned} \xi(A \cup E) + \xi(A \cap E) &= \xi(E) + \xi(A \setminus E) + \xi(A \cap E) \\ &= \xi(E) + \xi(A \cap E^c) + \xi(A \cap E) \\ &= \xi(E) + \xi(A). \end{aligned}$$

□

Naloga 1.14

Naj bo ξ zunanja mera na potencni množici neprazne množice X in naj bo A poljubna podmnožica v X. Naj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka ξ-merljiva podmnožica $E \subseteq A$, da je $\xi(A \setminus E) < \varepsilon$. Dokažite, da je A ξ-merljiva.

Rešitev. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja takšna ξ-merljiva množica $E_n \subseteq A$, da je $\xi(A \setminus E_n) < \frac{1}{n}$. Množica

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq A$$

je ξ-merljiva po Carathéodoryjevem izreku. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\xi(A \setminus E) \leq \xi(A \setminus E_n) < \frac{1}{n},$$

zato je $\xi(A \setminus E) = 0$, kar po zgornji nalogi pomeni, da je $A \setminus E \in A_\xi$. Ker je A_ξ σ-algebra, je $A = (A \setminus E) \cup E \in \mathcal{A}_\xi$. □

1.4 Polalgebre in razširitve mer

- TO DO

Naloga 1.15

Naj bo $\mathcal{S}$ polalgebra na X in $\mathcal{A}$ algebra na X, generirana s $\mathcal{S}$. Naj bo μ polmera na $\mathcal{S}$. Za $A \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j),$$

kjer je $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ neka končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{S}$. Dokažite, da je $\tilde{\mu}$ dobro definirana mera na algebri $\mathcal{A}$, ki razširja polmero μ.

Rešitev. TO DO □

1.5 Lebesgue-Stieltjesove mere

Naloga 1.16

Naj bo E podmnožica $[0, 1]$ z Lebesgueovo mero 1. Dokažite, da je E gosta v $[0, 1]$.

Rešitev. Recimo, da E ni gosta v E. Tedaj obstaja takšen $a \in [0, 1]$ in $\varepsilon > 0$, da je $E \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \emptyset$. Tedaj velja

$$\mu(E) \leq [0, 1] \setminus (a - \varepsilon, a + \varepsilon) < 1,$$

kar je protislovje. □

Naloga 1.17

Racionalna števila razvrstimo v zaporedje $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in definiramo

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2} \right].$$

Ali je $A = \mathbb{R}$?

Rešitev. Iz

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

sledi $A \neq \mathbb{R}$. □

Enakost $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ je znana tudi kot Baselski problem.

Naloga 1.18

Za poljuben $\varepsilon > 0$ poiščite takšno neprazno gosto podmnožico $E \subset \mathbb{R}$, da velja $m(E) < \varepsilon$.

Rešitev. Iz prejšnje naloge sledi, da je ustrezna množica

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[r_n - \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 n^2}, r_n + \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 n^2} \right]. \qquad \square$$

Množica A je gosta, saj vsebuje vsa racionalna števila.

Naloga 1.19

Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naraščajoča levozvezna funkcija in μ_f njena pripadajoča Lebesgue-Stieltjesova mera. Izračunajte μ_f od $[a,b]$, $\{a\}$, $(a,b]$ in (a,b). Kdaj je $\mu_f(\{a\}) = 0$?

Rešitev. Ker je

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, a + \frac{1}{n} \right)$$

presek padajočega zaporedja, je

$$\begin{aligned}
\mu_f(\{a\}) &= \lim_{n\to\infty} \mu_f \left(\left[a, a + \frac{1}{n} \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} f\left(a + \frac{1}{n} \right) - f(a) \\
&= \lim_{x \downarrow a} f(x) - f(a) \\
&= f(a^+) - f(a).
\end{aligned}$$

Ker je f naraščajoča, limita $f(a^+)$ obstaja. Sledi, da je $\mu_f(\{a\}) = 0$ natanko tedaj, kadar je f zvezna v a.

Dobljeno upoštevamo pri izračunu preostalih mer:

$$\begin{aligned}
\mu_f([a,b]) &= \mu_f([a,b)) + \mu_f(\{b\}) = f(b) - f(a) + f(b^+) - f(b) = f(b^+) - f(a), \\
\mu_f((a,b]) &= \mu_f([a,b]) - \mu_f\{a\} = f(b^+) - f(a) - f(a^+) + f(a) = f(b^+) - f(a^+), \\
\mu_f((a,b)) &= \mu_f([a,b)) - \mu_f\{a\} = f(b) - f(a) - f(a^+) + f(a) = f(b) - f(a^+). \qquad \square
\end{aligned}$$

Pomembna opazka je, da imamo opravka s končnimi količinami, torej je odštevanje res dobro definirano.

Naloga 1.20

Realno os opremimo z Lebesgueovo mero m. Naj bo K neprazna kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}$. Dokažite naslednji trditvi.

(a) Velja $\mu(K) < \infty$.

(b) Če je $0 < \lambda < m(K)$, potem obstaja taka kompaktna podmnožica L v K, da je $m(L) = \lambda$.

Rešitev. **(a):** Kompaktne podmnožice $\mathbb{R}$ so omejene, torej obstaja takšen $M > 0$, da je $M \subseteq [-M, M]$. Sledi $\mu(K) \leq \mu([-M, M]) = 2M < \infty$.

(b): Naj bo M takšen kot zgoraj in $f\colon [-M, M] \to [0, \infty]$ funkcija, definira z $t \mapsto m([-M, t] \cap K)$. Velja $f(-M) = 0$ in $f(M) = m(K)$. Če je f zvezna, nam izrek o vmesni vrednosti pove, da zavzame vse vrednosti na intervalu $[0, m(K)]$.

Pokažimo, da je f zvezna. Naj bo $\epsilon > 0$ in $t, s \in [-M, M]$, kjer je $t < s$. Tedaj velja

$$\begin{aligned}|f(s) - f(t)| &= |m([-M, s] \cap K) - m([-M, t] \cap K)| \\ &= |m(([-M, t] \cap K) \cup ((t, s] \cap K)) - m([-M, t] \cap K)| \\ &= |m([-M, t] \cap K) + m((t, s] \cap K) - m([-M, t] \cap K)| \\ &= m((t, s]) \cap K \\ &\leq s - t.\end{aligned}$$

Sledi, da je f (Lipshitzevo) zvezna, torej obstaja takšen $t_0 \in [-M, M]$, da je $m([-M, t_0] \cap K) = \lambda$. Množica $L := [M, t_0] \cap K$ je zaprta in omejena, torej je kompaktna. □

2 Integral

2.1 Merljive preslikave

- Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora. Preslikava $f\colon X \to Y$ je *merljiva*, če je praslika vsake merljive množice merljiva.
- Če je $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, potem zadošča, da preverimo, da so praslike elementov $\mathcal{F}$ merljive. V posebnem je $f\colon X \to \mathbb{R}$ (Borelovo) merljiva, če je $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ za vse $a \in \mathbb{R}$ (ekvivalentno lahko imamo tudi intervale drugačne oblike: $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$).
- Velja, da je $f\colon X \to \mathbb{C}$ Borelova natanko tedaj, kadar sta $\operatorname{Re} f$ in $\operatorname{Im} f$ Borelovi.
- Preslikava $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ je merljiva natanko tedaj, kadar so merljivi vse praslike intervalov oblike $[-\infty, a]$, tj. $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ za vse $a \in \mathbb{R}$.

Naloga 2.1

Dokažite, da je funkcija $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}; & z \neq 0 \\ 0; & z = 0 \end{cases}$$

Borelovo merljiva.

Rešitev. Prerimo na generatorjih. Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ odprta množica. Dokažimo, da je $\operatorname{sgn}^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

- Če $0 \notin U$, potem je sgn zvezna. Torej je $\operatorname{sgn}^{-1}(U)$ odprta in zato merljiva.

- Če je $0 \in U$, potem je $\operatorname{sgn}^{-1}(U) = \{0\} \cup \operatorname{sgn}^{-1}(U \setminus \{0\})$. Množica $\{0\}$ je zaprta, množica $\operatorname{sgn}^{-1}(U \setminus \{0\})$ pa zaprta (zaradi zveznosti), torej sta obe merljivi, kar pomeni, da je merljiva tudi njuna unija. $\square$

Naloga 2.2

Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ trivialna σ-algebra na X. Poiščite vse merljive preslikave $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Rešitev. Recimo, da je $f\colon X \to \mathbb{R}$ merljiva. Ker je X neprazna množica, obstaja $a \in f(X)$, torej je praslika merljive množice $\{a\}$ neprazna merljiva množica, kar pomeni, da je $f^{-1}(a) = X$.

Sledi, da so konstante preslikave edine merljive preslikave iz X v $\mathbb{R}$. $\square$

Naloga 2.3

Dokažite, da lahko vsako kompleksno merljivo funkcijo zapišemo kot linearno kombinacijo štirih nenegativnih merljivih funkcij.

Rešitev. Funkcijo $f\colon X \to \mathbb{C}$ lahko zapišemo kot

$$f = \operatorname{Re} f + \operatorname{Im} f = R^+ + R^- + i(I^+ - I^-),$$

kjer je $R^\pm(x) = \max\{0, \pm \operatorname{Re} f(x)\}$ in podobno $I^\pm \max\{0, \pm \operatorname{Im} f(x)\}$.

Velja

$$\mathbb{R}^+ = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Re}(f) + |\operatorname{Re}(f)|\right),$$

Ker je Re merljiva in $|\cdot|$ zvezna, je $\mathbb{R}^+$ merljiva. Podobno velja za R^-, I^+ in I^i. $\square$

Zgoraj smo upoštevali tudi, da so linearne kombinacije merljivih preslikav z vrednostmi v $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ merljive.

Naloga 2.4

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ poln merljiv prostor in $g\colon X \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija. Recimo, da funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ enaka funkciji g skoraj povsod. Dokažite, da je f merljiva.

Rešitev. Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}$ odprta množica in $B = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$, kjer vemo, da je $\mu(B) = 0$. Zapišemo lahko

$$f^{-1}(U) = (f^{-1}(U) \cap B) \cup (f^{-1}(U) \setminus B).$$

Pokažimo, da imamo unijo dveh merljivih množic.

- Za množico $f^{-1}(U) \cap B$ velja $\mu(f^{-1}(U) \cap B) \leq \mu(B) = 0$. Torej je $f^{-1}(U) \cap B$ merljiva, saj je X poln merljiv prostor.

- Množica $f^{-1}(U) \setminus B$ je presek dveh merljivih množic:

$$f^{-1}(U) \setminus B = \{x \in X \mid f(x) = g(x) \in U\} = g^{-1}(U) \cap B^c.$$

Torej je $f^{-1}(U)$ merljiva. $\square$

Naloga 2.5

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f\colon X \to \mathbb{R}$ funkcija.

(a) Naj ima f števno zalogo vrednosti. Pokažite, da je f merljiva natanko tedaj, kadar ja za vsak $x \in \mathbb{R}$ množica $f^{-1}(x)$ merljiva v X.

(b) Naj ima X kardinalnost kontinuuma. Poišči primer σ-algebre na X in nemerljive funkcije $f\colon X \to \mathbb{R}$, za katero je množica $f^{-1}(x)$ merljiva za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Rešitev. **(a):** ($\Rightarrow$): Singletoni so zaprti, zato je $f^{-1}(x) \in \mathcal{A}$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$): Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}$ odprta množica. Tedaj je

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\underbrace{U \cap f(X)}_{\text{števna}}) = f^{-1}\left(\bigcup_{y \in U \cap f(X)} \{y\}\right) = \bigcup_{y \in U \cap f(X)} f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A},$$

saj imamo števno unijo merljivih množic $f^{-1}(\{y\})$.

(b): Naj bo

$$\mathcal{A} := \{E \subseteq X \mid E \text{ je števna ali } E^c \text{ je števna}\}.$$

V prejšnjem poglavju smo pokazali, da je to res σ-algebra. Naj bo $f\colon X \to \mathbb{R}$ bijektivna funkcija. Tedaj so praslike singletonov singletoni, po drugi strani pa $f^{-1}([0,1])$ ni števna, niti ni števen njen komplement, torej ni merljiva. $\square$

Produktna σ-algebra

- Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora. *Produktna σ-algebra* na $X \times Y$ je najmanjša σ-algebra, za katero sta projekciji $p\colon X \times Y \to X$ in $q\colon X \times Y \to Y$ merljivi.

- Generirana je z merljivi pravokotniki:

  $$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

  Če je $A = \sigma(\mathcal{F})$ in $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$, potem je

  $$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \sigma\left(\{F \times Y \mid Y \in \mathcal{F}\} \cup \{X \times G \mid G \in \mathcal{G}\}\right).$$

- Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij $X \to [-\infty, \infty]$. Če $f_n \to f$ po točkah, potem je f merljiva.

- Naj bo $f\colon X \to [0, \infty]$ merljiva funkcija. Tedaj obstaja takšno naraščajoče zaporedje $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stopničastih merljivih funkcij, da $s_n \to f$ po točkah. Konvergenca je enakomerna na vsaki množici na kateri je f omejena.

Naloga 2.6

Naj bodo $(X_j, \mathcal{A}_j)$, kjer je $1 \leq j \leq n$, merljivi prostori in $f_j \colon X_j \to \mathbb{R}$ merljive preslikave. Dokažite, da je preslikava $F \colon X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n),$$

merljiva gleda na produktno σ-algebro $\mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n$.

Rešitev. Naj bo $g_j \colon X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ definirana z predpisom $g_j = f_j \circ \pi_j$, kjer je π_j projekcija na j-to komponento. Ker je g_j kompozitum merljivih preslikav, je merljiv. Tedaj je

$$f = \prod_{j=1}^{n} g_j$$

produkt merljivih funkcij, torej je f merljiva. □

Naloga 2.7

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $(X, \overline{\mathcal{A}}, \mu)$ njegova napolnitev. Dokažite, da za $\mathcal{A}$-merljivo funkcijo f obstaja taka $\overline{\mathcal{A}}$-merljiva funkcija g, da je $f = g$ skoraj povsod glede na mero μ.

Rešitev. TO DO □

Naloga 2.8

Naj bo $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $(f_n \colon X \to \mathbb{F})_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij. Dokažite, da je množica vseh $x \in X$, za katere zaporedje $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira, merljiva.

Rešitev. Ker je $\mathbb{F}$ poln metrični prostor so konvergentna zaporedja natanko Cauchyjeva zaporedja. Torej velja

$$\begin{aligned}
A := & \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists L_x \in \mathbb{F}.\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = L_x \right\} \\
&= \{x \in X \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ je Cauchyjevo zaporedje}\} \\
&= \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n, m \geq n_0.\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\} \\
&= \{x \in X \mid \forall k \in \mathbb{N}.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n, m \geq n_0.\ |f_n(x) - f_m(x)| < 1/k\} \\
&= \underbrace{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq n_0} \bigcap_{m\geq n_0}}_{\text{števno}} \underbrace{\left(|f_n - f_m|^{-1}\right)[0, 1/k)}_{\textit{merljivo}} \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

□

Naloga 2.9

Naj bo f odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}$. Dokažite, da je odvod f' Lebesgueovo merljiva funkcija.

Rešitev. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definiramo
$$f_n(x) := \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right).$$
To so zvezne preslikave, torej so tudi merljive. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja
$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$
Zaporedje merljivih funkcij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ torej konvergira po točkah proti $f'(x)$, kar pomeni, da je f' merljiva funkcija. □

2.2 Načini konvergence

- Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij na X. Tedaj:
  - ⋆ $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ *skoraj povsod*, če je $\mu\left(\{x \in X \mid f_n(x) \nrightarrow f(x)\}\right) = 0$.
  - ⋆ $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ *skoraj enakomerno*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšna merljiva množica A, z mero $\mu(A^c) < \varepsilon$, da $f_n|_A \to f|_A$ enakomerno na A.
  - ⋆ $f_n \xrightarrow{n \to \infty} f$ *po meri*, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja
  $$\mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$
- Veljajo naslednje lastnosti:
  - ⋆ Če $f_n \to f$ skoraj enakomerno, potem $f_n \to f$ skoraj povsod.
  - ⋆ Če $f_n \to f$ skoraj enakomerno, potem $f_n \to f$ po meri.
  - ⋆ (Jegorov) Naj bo $\mu(X) < \infty$. Če $f_n \to f$ skoraj povsod, potem $f_n \to f$ skoraj enakomerno.

Dokaz. Dokažimo drugo lastnost. Naj bo $\varepsilon > 0$ in
$$A_n = \left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right).$$
Recimo, da $f_n \to f$ skoraj enakomerno. Tedaj za vsak $\delta > 0$ obstaja takšen $A \in \mathcal{A}$, z $\mu(A^c) < \delta$, da $f_n \to f$ enakomerno na A. Zapišemo lahko
$$A_n = (A_n \cap A) \cup (A_n \cap A^c).$$
Ker $f_n \to f$ enakomerno na A, obstaja takšen $N \in \mathbb{N}$, da za $n \geq N$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. To pomeni, da za vsak $x \in A$ velja $A_n \cap A = \emptyset$. Velja še $\mu(A_n \cap A^c) \leq \mu(A^c) < \delta$.

Če združimo zgornji dejstvi, dobimo, da za vsak $n \geq N$ velja
$$\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \cap A^c) < \delta,$$
kar pomeni, da je
$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0.$$
□

Naloga 2.10

Merljiv prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero štetja točk μ.

(a) Dokaži, da zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti funkciji f natanko takrat, ko konvergira povsod.

(b) Dokaži, da zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoraj enakomerno proti funkciji f natanko takrat, ko konvergira enakomerno.

(c) Dokaži, da zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po meri proti funkciji f natanko takrat, ko konvergira enakomerno.

Rešitev. **(a):** Prazna množica ima mero 0, torej konvergenca povsod implicira konvergence skoraj povsod. Recimo, da $f_n \to f$ skoraj povsod. Torej

$$\mu\{x \in \mathbb{N} \mid f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0.$$

Edina podmnožica $\mathbb{N}$ z mero 0 je $\emptyset$, torej

$$\{x \in \mathbb{N} \mid f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = \emptyset,$$

kar pomeni, da imamo konvergenco povsod.

(b): Enakomerna konvergenca očitno implicira skoraj enakomerno konvergenco. Recimo, da $f_n \to f$ skoraj enakomerno. Potem za $\epsilon = 1/2$ obstaja takšna merljiva množica A, z mero $\mu(A^c) < 1/2$, da $f_n|_A \to f|_A$ enakomerno na A. Edina merljiva množica z mero manjšo od $1/2$ je prazna množica, torej je $A^c = \emptyset$ oziroma $A = \mathbb{N}$. Torej f_n konvergira enakomerno proti f na $\mathbb{N}$.

(c): Zgornja trditev nam pove, da skoraj enakomerna konvergenca implicira konvergenco po meri. Recimo, da $f_n \to f$ po meri. Tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ velja

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{N} \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

To pomeni, da obstaja takšen $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{N} \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) < 1$$

oziroma

$$\{x \in \mathbb{N} \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \emptyset.$$

Sledi, da za $n \geq N$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vsak $x \in X$, torej imamo enakomerno konvergenco. □

Naloga 2.11

Merljiv prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero štetja točk μ. Definiramo

$$f_n := \chi_{\{m\in\mathbb{N} \mid m\geq n\}}.$$

Ali $(f_n)\, n \in \mathbb{N}$ konvergira po točkah/po meri/skoraj enakomerno?

Rešitev. Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Velja

$$f_n(k) = \begin{cases} 1; & k \geq n \\ 0; & k < n \end{cases},$$

torej $f_n(k) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, kar pomeni, da f_n konvergira po točkah proti 0.

Iz prejšnje naloge vemo, da so skoraj enakomerna konvergenca, enakomerna konvergenca in konvergenca po meri na tem prostoru ekvivalentne. Pokažimo, da nimamo enakomerne konvergence.

Recimo, da imamo enakomerno konvegenco. Tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ in vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $|f_n(k)| < \varepsilon$. To je v našem primeru ekvivaletno temu, da obstaja takšen $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ in vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $f_n(k) = 0$. Slednje ne drži, saj velja $f_N(N_0 + 1) = 1$. □

S tem smo pokazali, da konvergenca po točkah ne implicira skoraj enakomerne konvergence oziroma konvergence po meri.

Naloga 2.12

Naj bo podano zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih števil. Za vsako naravno število n definiramo funkcijo $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f_n(x) = a_n\, \chi_{[-n,n]}(x).$$

(a) Poiščite potreben in zadosten pogoj, da zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkah proti ničelni funkciji.

(b) Poiščite potreben in zadosten pogoj, da zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po Lebesgueovi meri proti ničelni funkciji.

Rešitev. **(a):** Če $f_n \to 0$ po točkah, potem je $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Recimo, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Opazimo, da za poljuben $x \in \mathbb{R}$ obstaja takšen $M \in \mathbb{N}$, da je $x \in [-M, M]$. Torej velja

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n+M}(x) = \lim_{n\to\infty} a_{n+M} = 0.$$

S tem smo pokazali, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ potreben in zadosten pogoj.

(b): Velja

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| \geq \varepsilon\} = \begin{cases} [-n, n]; & |a_n| \geq \varepsilon \\ 0; & |a_n| < \varepsilon \end{cases},$$

torej je

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) = \begin{cases} 2n; & |a_n| \geq \varepsilon \\ 0; & |a_n| < \varepsilon \end{cases}$$

Sledi, da

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

natanko tedaj, kadar $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Naloga 2.13

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj zaporedji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ merljivih funkcij zaporedoma konvergirata po meri proti f in g.

(a) Dokažite, da zaporedje $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po meri proti $f + g$.

(b) Recimo, da je $f = g = 0$. Dokažite, da zaporedje $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po meri proti ničelni funkciji.

(c) Ali velja: če je $f = 0$, tedaj zaporedje $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po meri proti ničelni funkciji.

Rešitev. **(a):** Naj bo $\varepsilon > 0$. Vemo, da velja

$$\begin{aligned} F &:= \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{in} \\ G &:= \mu\left(\{x \in X \mid |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon/2\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Iz

$$|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|,$$

sledi

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\} \cup \\ \{x \in X \mid |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon/2\}. \end{aligned}$$

Torej je

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}\right) \leq F + G \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(b): Ker velja

$$\{x \in X \mid |f_n(x) g_n(x)|\} \subseteq \left\{x \in X \;\middle|\; |f_n(x)| \geq \sqrt{\varepsilon}\right\} \cup \left\{x \in X \;\middle|\; |g_n(x)| \geq \sqrt{\varepsilon}\right\},$$

iz

$$\begin{aligned} F' &:= \mu\left(\left\{x \in X \;\middle|\; |f_n(x)| \geq \sqrt{\varepsilon}\right\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{in} \\ G' &:= \mu\left(\left\{x \in X \;\middle|\; |g_n(x)| \geq \sqrt{\varepsilon}\right\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

sledi

$$0 \leq \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) g_n(x)|\}\right) \leq F' + G' \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(c): Ne. Protiprimer je $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = \frac{1}{n}$ in $g_n(x) = x$, saj velja

$$m(\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) g_n(x) \geq \varepsilon\}) = m\left((-\infty, -\varepsilon \cdot n] \cup [\varepsilon \cdot n, \infty]\right) = \infty. \qquad \square$$

Naloga 2.14

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij na X. Recimo, da sta f in g takšni merljivi funkciji, da je $f_n \to f$ po meri in $g_n \to g$ po meri. Dokažite, da je $f \equiv g$ skoraj povsod.

Rešitev. Naj bo $\varepsilon > 0$. Vemo, da velja

$$\begin{aligned} F &:= \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \text{in} \\ G &:= \mu\left(\{x \in X \mid |g_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0. \end{aligned}$$

Dokažimo, da velja $\mu\left(\{x \in X \mid |f(x) - g(x)| \neq 0\}\right) = 0$. Najprej opazimo

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|, \end{aligned}$$

torej je

$$\begin{aligned} \{x \in X \mid |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \leq &\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\} + \\ &+ \{x \in X \mid |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon/2\} \end{aligned}$$

Sledi

$$\{x \in X \mid |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \leq F + \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

kar pomeni, da je

$$A_n := \{x \in X \mid |f(x) - g(x)| \neq 0\}$$

naraščajoče zaporedje, za katerega velja $\mu(A_n) = 0$ za vsak 0. Če definiramo

$$A = \{x \in X \mid f(x) - g(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

dobimo

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0.$$

□

2.3 Integral nenegativne merljive funkcije

- Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Za stopničasto funkcijo

  $$s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i},$$

  kjer je $(A_i)_{i=1}^n$ pokritje (Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da so te množice paroma disjunktne. V tem primeru pravimo, da imamo zapis v *kanonični obliki.*) množice X, definiramo

  $$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_j \mu(A_j)$$

  Za nenegativno merljivo funkcijo $f \colon X \to [0, \infty]$ definiramo

  $$\int_X f \, d\mu = \sup\left\{\int_X s \, d\mu \;\middle|\; 0 \leq s \leq f,\ s \text{ stopničasta funkcija}\right\}.$$

- *LMK, Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci* Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje merljivih funkcij. Tedaj je
$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\,d\mu.$$
- Spomnimo se, da je funkcija f absolutno Riemannovo integrabilna na (a,b), če velja
$$\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty.$$
- Če je f Riemannovo integrabilna na $[a,b]$, potem je
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f\,dm,$$
kjer je m Lebesgueova mera.
- Če je f absolutno Riemannovo integrabilna na (a,b), kjer je $-\infty \le a < b \le \infty$, potem je
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{(a,b)} f\,dm,$$

Naloga 2.15

Naj bo f nenegativna funkcija na merljivem prostoru $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, opremljenem z mero štetja točk μ. Po definiciji izračunajte
$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu.$$

Rešitev. Naj bo $s=\sum_{i=1}^n c_i\chi_{A_i}$ stopničasta funckija. Tedaj je
$$\int_{\mathbb{N}} s\,d\mu = \sum_{i=1}^n c_i\,|A_i| = \sum_{i=1}^\infty s(n).$$
Pokažimo, da enakost velja tudi za splošno nenegativno funkcijo.

($\le$): Za vsako tako stopničasto funkcijo, da je $0\le s\le f$, velja
$$\sum_{n=1}^\infty s(n) \le \sum_{n=1}^\infty f(n),$$
torej je
$$\int_X f\,d\mu = \sup_{0\le s\le f}\sum_{n=1}^\infty s(n) \le \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

($\ge$): Defiramo nenegativne stopničaste funckije $s_n := f\chi_{[n]}$. Ker je $0\le s_n\le f$, sledi
$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu \ge \int_{\mathbb{N}} s_n\,d\mu = \sum_{i=1}^n f(i)$$
za vsak $n\in\mathbb{N}$, torej je
$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu \ge \sum_{n=1}^\infty f(n).$$ □

Naloga 2.16

Izračunajte
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{n^2\cos^2\left(\frac{x}{n}\right)}{n^2x^2+2nx+n^2+1}\,dx.$$

Rešitev. Imamo zaporedje merljivih funkcij
$$f_n(x)=\frac{\cos^2\left(\frac{x}{n}\right)}{x^2+2\frac{x}{n}+1+\frac{1}{n^2}}\cdot\chi_{[1,n]}(x),$$
ki je naraščajoče, saj je $\cos^2$ padajoča funkcija na $[0,1]$, torej narašča z n, imenovalec ulomka pada z n in χ narašča z n. Torej po LMK sledi
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)} f_n\,dm &= \int_{[1,\infty)}\lim_{n\to\infty} f_n\,dm\\ &= \int_{[1,\infty)}\frac{1}{1+x^2}\,dm\end{aligned}$$
Velja
$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x\Big|_1^\infty=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$
torej je
$$\int_{[1,\infty)}\frac{1}{1+x^2}\,dm=\int_1^\infty\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$
Upoštemo še
$$\int_1^n \frac{n^2\cos^2\left(\frac{x}{n}\right)}{n^2x^2+2nx+n^2+1}\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)} f_n\,dm,$$
kjer vemo, da Riemannov integral obstaja, ker integriramo zvezno funkcijo na končem intervalu. □

Naloga 2.17

Izračunajte
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n^2}}^n (n^2x-1)e^{-n^2x^2}\,dx,$$

Če bi poskusili narediti enako kot pri prejšnji nalogi,
$$f_n(x)=\left(n^2x-1\right)e^{-n^2x^2}\chi_{[1/n^2,n]},$$
ne dobimo naraščajočega zaporedja. Potreben je drugačen pristop.

Rešitev. Vpeljemo novo spremeljivko $y=nx$ in dobimo
$$\int_{\frac{1}{n^2}}^n (n^2x-1)e^{-n^2x^2}\,dx=\int_{\frac{1}{n}}^{n^2}\left(y-\tfrac{1}{n}\right)e^{-y^2}\,dy.$$

Sedaj definiramo naraščajoče zaporedje pozitivnih merljivih funkcij

$$f_n(y) := \left(y - \tfrac{1}{n}\right) e^{-y^2} \chi_{[1/n,m^2]}(y)$$

Funkcije f_n so (absolutno) Riemannovo integrabilne (integral zvezna funkcija na končnem intervalu), torej je

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n^2} \left(y - \tfrac{1}{n}\right) e^{-y^2}\, dy = \int_{[0,\infty)} \left(y - \tfrac{1}{n}\right) e^{-y^2} \chi_{[1/n,m^2]}\, dm.$$

Po LMK dobimo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(y - \tfrac{1}{n}\right) e^{-y^2} \chi_{[1/n,m^2]}\, dm &= \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} \left(y - \tfrac{1}{n}\right) e^{-y^2} \chi_{[1/n,m^2]}\, dm \\ &= \int_{[0,\infty)} y e^{-y^2}\, dm. \end{aligned}$$

Ker je ye^{-y^2} nenegativna in Riemannovo integrabilna, velja

$$\int_{[0,\infty)} y e^{-y^2}\, dm = \int_0^\infty y e^{-y^2}\, dy = -\tfrac{1}{2} e^{-y^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

□

Naloga 2.18

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ in naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje realnih merljivih funkcij na X.

(a) Če je $\int_X f_1\, d\mu \in \mathbb{R}$, dokažite

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu.$$

(b) Ali trditev iz (a) velja, če je

$$\int_X f_n\, d\mu = \infty$$

za vse $n \in \mathbb{N}$?

Rešitev. **(a):** Zaporedje $g_n = f_1 - f_n$ je zaporedje merljivi nenegativnih naraščajočih funkcij. Torej po LMK velja

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_X (f_1 - f_n)\, d\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} (f_1 - f_n)\, d\mu \\ &= \int_X (f_1 - \lim_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \\ &= \int_X f_1\, d\mu - \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu, \end{aligned}$$

kjer smo pri zadnji enakosti upoštevali $f_n \geq f_1$ in končnost integralov. Iz enakega razloga velja tudi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_X (f_1 - f_n)\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_1\, d\mu - \int_X f_n\, d\mu\right) \\ &= \int_X f_1\, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu. \end{aligned}$$

Ker je $\int_X f_1 \, d\mu \in \mathbb{R}$, sledi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

(b): Trditev ne drži. Naj bo $g_n(x) = \frac{1}{n}$. Tedaj je $\int_\mathbb{R} g_n \, dm = \infty$ za vsak m. To pomeni, da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} g_n \, dm = \infty,$$

po drugi strani pa je

$$\int_\mathbb{R} \lim_{n\to\infty} g_n \, dm = \int_\mathbb{R} 0 \, dm = 0.$$

□

Naloga 2.19

Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(\frac{n}{n+x}\right)^n dx.$$

Rešitev. Definiramo

$$f_n(x) := \left(\frac{n}{n+x}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}.$$

Če je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje, upoštevamo, da velja

$$\int_0^\infty f_2(x) \, dx = \int_0^\infty \left(\frac{2}{2+x}\right)^2 dx = 4\int_2^\infty t^{-2} \, dt = -4t^{-1}\Big|_2^\infty = 2 \in \mathbb{R},$$

in lahko uporabimo padajočo verzijo LMK (prejšnja naloga):

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(\frac{n}{n+x}\right)^n dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

Prehod med Riemannovim in Lebesgueovim integralom smo lahko naredili, ker so funkcije f_n za $n \geq 2$ absolutno integrabilne.

Preverimo še, da je zgordnje zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ res padajoče. Označimo $f(y) = (1+y)^{1/y}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left(\exp\left(\frac{1}{y}\ln(1+y)\right)\right)' \\ &= (1+y)^{1/y}\left(\frac{1}{y(y+1)} - \frac{\ln(1+y)}{y^2}\right), \end{aligned}$$

kar je negativno za pozitivne y. □

V zgornjem primeru integral funkcije f_1 ni končen, je pa končen integral funkcije f_2. To zadošča za uporabo padajoče verzije LMK (pomembno je samo, da so integrali končni od nekje naprej, saj nas zanima limitno obnašanje).

2.4 Integriranje funkcijskih vrst

- Naj bodo $f_n\colon X \to [0,\infty]$ merljive funkcije. Tedaj je

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

- Za $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty]$ velja

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

Naloga 2.20

Merljiv prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero štetja točk μ. Dokažite, da za nenegativno funkcijo f na $\mathbb{N}$ velja

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Rešitev. Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Tedaj je

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot \chi_{\{k\}}(k) = f(k),$$

torej velja

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot \chi_{\{n\}}.$$

S tem smo f zapisali kot vsoto merljivih funkcij. Iz prejšnje trditve zato sledi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu &= \int_{\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot \chi_{\{n\}} \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f(n) \cdot \chi_{\{n\}} \, d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\mu(\{n\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(n).
\end{aligned}$$

□

Naloga 2.21

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in naj bo $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih mer na $(X, \mathcal{A})$. Dokažite, da je preslikava $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$, definirana s predpisom

$$\mu(E) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E), \qquad E \in \mathcal{A},$$

pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.

Rešitev. Očitno velja $\mu(\emptyset) = 0$. Naj bodo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktne merljive množice. Tedaj je

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_m(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

□

2.5 Integral kompleksne merljive funkcije

- Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s pozitivno mero. Definiramo

$$L^1(\mu) = \left\{ [f] \;\middle|\; f\colon X \to \mathbb{C}, \int_X |f| \, d\mu < \infty \right\},$$

  kjer je $f \sim g$ natanko tedaj, kadar je $f \equiv g$ skoraj povsod glede na mero μ.

- Prostor $L^1(\mu)$ je Banachov glede na normo

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu.$$

- Če je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(\mu)$ in za neko preslikavo $f \in L^1(\mu)$ velja $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, tedaj obstaja podzaporedje, ki konvergira proti f skoraj povsod.

- *LDK, Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci*: Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funckij. Recimo, da obstaja takšen $f \in L^1(\mu)$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|f_n| \leq |f|$. Tedaj je

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Naloga 2.22

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje skoraj povsod nenegativnih merljivih funkcij iz $L^1(\mu)$, ki v $\|\cdot\|_1$-normi konvergira proti funkciji f. Dokažite, da je f skoraj povsod nenegativna funkcija.

Rešitev. Velja

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

Vemo, da obstaja takšno podzaporedje (f_{n_k}), da $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f$ skoraj povsod. Naj bo

$$A := \{x \in X \mid f(x) < 0\} \quad \text{in} \quad B := \{x \in X \mid \exists n.\ f_n(x) < 0\}.$$

Sledi, da je $\mu(B) = 0$, saj je B števna unija množic z mero 0. Naj bo

$$C := \{x \in X \mid f_{n_k}(x) \nrightarrow f(x)\}.$$

Velja $\mu(C)$, kar pomeni, da za $x \in B^c \cap C^c$ velja $f(x) \geq 0$. Iz $x \in B^c$ sledi, da za vsak k velja $f_{n_k} \geq 0$, torej je

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \geq 0,$$

kjer enakost velja, saj je $x \in C^c$. Pokazali smo, da je $B^c \cap C^c \subseteq A^c$ oziroma $A \subseteq B \cup C$. Sledi

$$\mu(A) \leq \mu(B \cup C) \leq \mu(B) + \mu(C) = 0. \qquad \square$$

Naloga 2.23

Naj bo $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ takšna funkcija, da je $\int_a^\infty |f(x)|\, dx < \infty$. Tedaj je

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \int_{[a,\infty)} f\, dm.$$

Rešitev. Vemo že, da je

$$\int_{[a,a+n]} f\, dm = \int_a^{a+n} f(x)\, dx$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$. Sledi

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty f(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} f(x)\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,a+n]} f\, dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,\infty)} f \cdot \chi_{[a,a+n]}\, dm \\
&= \int_{[a,\infty)} \lim_{n\to\infty} f \cdot \chi_{[a,a+n]}\, dm \\
&= \int_{[a,\infty)} f\, dm,
\end{aligned}$$

kjer predzadnja enakost sledi po LDK, če je $f \in L^1([a,\infty))$ in $\left|f \cdot \chi_{[a,a+n]}\right| \leq |f|$.

Dokažimo še, da je $f \in L^1([a,\infty))$. To sledi iz

$$\begin{aligned}
\infty > \int_a^\infty |f(x)|\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} |f(x)|\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,a+n]} |f|\, dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,\infty)} |f| \cdot \chi_{[a,a+n]}\, dm \\
&= \int_{[a,\infty)} \lim_{n\to\infty} |f| \cdot \chi_{[a,a+n]}\, dm \\
&= \int_{[a,\infty)} |f|\, dm,
\end{aligned}$$

kjer smo za predzadnjo enakost uporabili LMK. $\square$

Naloga 2.24

Izračunajte

$$I := \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x^n}\, dx.$$

Rešitev. Velja

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} e^{-x^n}\, dx \\ &= \lim_{[0,\infty)} \int_{[0,\infty)} e^{-x^n} \cdot \chi_{[0,n]}\, dm \end{aligned}$$

Želimo uporabiti LDK, vendar naravna izbira $g(x) := e^{-x}$ ne ustreza (problem je na intervalu $[0, 1)$). To popravimo tako, da definiramo

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} 1; & 0 \le x \le 1, \\ e^{-x}; & x > 1. \end{cases}$$

Sedaj je očitno $\left|e^{-x^n} \cdot \chi_{[0,n]}\right| \le \left|g(\tilde{x})\right|$. Preverimo še, da je $\tilde{g}(x) \in L^1([0, \infty))$. Prešnja naloga nam pove, da zadošča, da je $\tilde{g}(x)$ Riemannovo integrabilna:

$$\int_{[0,\infty)} |g|\, dm = \int_0^\infty |g(x)|\, dx = 1 + \int_1^\infty e^{-x}\, dx = 1 + e^{-1} < \infty.$$

Torej lahko uporabimo LDK:

$$I = \int_{[0,\infty)} \lim_{[0,\infty)} e^{-x^n} \cdot \chi_{[0,n]}\, dm = \int_{[0,\infty)} h\, dm = 1,$$

kjer je

$$h(x) := \begin{cases} 0; & x > 1 \\ e^{-1}; & x = 1 \\ 1; & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

stopničasta funkcija. □

Naloga 2.25

Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{n^2x^2 - 1}{n^2x + 1} \exp\left(-\frac{nx^3 + 2x}{nx}\right) dx.$$

Najprej poskusimo pokazati, da je zaporedje funkcij naraščajoče. Ker nam to ne uspe, verjetno ne moremo uporabiti LMK.

Rešitev. Ker LMK ne moremo uporabiti, poskusimo z LDK. Opazimo, da je $\exp(x^2 - 2/n) \le e^{-x^2}$ in

$$\left|\frac{x^2 - 1/n^2}{x + 1/n^2}\right| \le \begin{cases} x; & x > 1, \\ 1; & x \in [0, 1], \end{cases}$$

zato definiramo

$$g(x) := \begin{cases} e^{-x^2}; & x \in [0,1] \\ xe^{-x^2}; & x > 1. \end{cases} \geq 0$$

Ker $g(x)$ zadošča vsem predpostavkam, lahko uporabimo LDK:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{n^2x^2-1}{n^2x+1} \exp\left(-\frac{nx^3+2x}{nx}\right) dx &= \int_0^n \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2-1}{n^2x+1} \exp\left(-\frac{nx^3+2x}{nx}\right) dx \\ &= \int_0^\infty x \cdot e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-u}\, du = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Naloga 2.26

Ali obstajata taki omejeni zaporedji (a_n) in (b_n) kompleksnih števil, da zaporedje funkcij (f_n) definirano s predpisom

$$f_n(x) = a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx),$$

konvergira proti funkciji 1 skoraj povsod na intervalu $[0, 2\pi]$.

Rešitev. Recimo, da taki zaporedji obstajata, torej, da velja

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$$

za skoraj vsak x. Velja $|f_n(x)| \leq |a_n| + |b_n| \leq M \in L^1$, zato lahko uporabimo LMK. Dobimo

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_{[0,2\pi]} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,2\pi]} f_n(x)\, dm \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} (a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

kar je protislovje. S tem smo pokazali, da taki zaporedji ne obstajata. □

2.6 Produktna mera

- *Tonelli*: Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ σ-končna merljiva prostora. Za vsako merljivo funkcijo $f : X \times Y \to [0, \infty]$ velja

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} f(x,y) d(\mu\times\lambda)(x,y) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\lambda(y)\right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x)\right) d\lambda(y). \end{aligned}$$

- Če za $f\colon [a,\infty) \to [0,\infty)$ velja $\int_a^\infty f\,dx \in [0,\infty]$, tedaj je
$$\int_a^\infty f\,dx = \int_{[a,\infty)} f\,dm.$$
- *Fubini*: Naj bosta $(X,\mathcal{A},\mu)$ in $(Y,\mathcal{B},\lambda)$ σ-končna merljiva prostora. Za vsako funkcijo $f \in L^1(\mu\times\lambda)$, je $f_x \in L^1(\lambda)$ za skoraj vsak $x \in X$ in $f^y \in L^1(\mu)$ za skoraj vsak $y \in Y$ ter velja
$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\lambda)(x,y) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\lambda(y)\right) d\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\lambda(y).\end{aligned}$$
Enak zaključek velja, če predpostavko $f \in L^1(\mu\times\lambda)$ zamenjamo s predpostavko, da je f merljiva in je vsaj eden od integralov
$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\,d\lambda(y)\right) d\mu(x) \quad \text{in} \quad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x)\right) d\lambda(y)$$
končen.

Naloga 2.27

Naj bo $a \geq 1$. Izračunajte integral
$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{a^2x^2+1}{x^2+1}\right) dx.$$

Rešitev. Velja
$$\begin{aligned}I &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2}(\ln(a^2x^2+1) - \ln(x^2+1))\,dx\\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2}\ln(y^2x^2+1)\Big|_1^a\right) dx\end{aligned}$$
Notranji izraz odvajamo po y
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2}\ln(y^2x^2+1)\right) &= \frac{2yx^2}{x^2(y^2x^2+1)}\\ &= \frac{2y}{y^2x^2+1}\end{aligned}$$
in dobimo
$$I = \int_0^\infty \left(\int_1^a \frac{2y}{y^2x^2+1}\,dy\right) dx$$
Funkcija
$$f(x,y) = \frac{2y}{y^2x^2+1}$$

je zvezna (torej merljiva) in na območju integriranja nenegativna. Zato sta Riemannova in Lebesgueova integrala enaka in lahko uporabimo Tonellijev izrek. Dobimo

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^a \left(\int_0^\infty \frac{2y}{y^2x^2+1} \right) dy \\
&= \int_1^a 2y dy \int_0^\infty \frac{1}{y^2x^2+1} dx \\
&= \int_1^a 2y dy \int_0^\infty \frac{1}{u^2+1}\frac{1}{y} du \\
&= \int_1^a \pi dy \\
&= \pi(a-1).
\end{aligned}$$

□

Naloga 2.28

Naj bo $0 < a < b < 1$. Dokažite zvezo

$$\int_a^b \frac{\arcsin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\arcsin(bx) - \arcsin(ax)}{x} dx.$$

Rešitev. Velja

$$I := \int_0^1 \frac{\arcsin(bx) - \arcsin(ax)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\arcsin(yx)}{x}\Big|_a^b$$

Odvajamo po y in dobimo

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\arcsin(yx)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2x^2}},$$

iz česar sledi

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-y^2x^2}} dy \right) dx.$$

Ker je $x^2y^2 < 1$ na območju integriranja, je funkcija $1/\sqrt{1-y^2x^2}$ nenegativna in zvezna, kar pomeni, da imamo enakost med Riemannovim in Lebesgueovim integralom in lahko uporabimo Tonellijev izrek. Dobimo

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2x^2}} dx \right) dy \\
&= \int_a^b \frac{1}{y} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \right) dy \\
&= \int_a^b \frac{\arcsin y}{y} dy.
\end{aligned}$$

□

Naloga 2.29

S pomočjo enakosti
$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy}\, dy$$
za $x > 0$ izračunajte
$$I =: \lim_{n\to\infty} \int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Rešitev. Ker vemo, da je integral $\int_0^\infty e^{-xy}\, dy$ končen, je enak Lebesgueovemu, torej velja

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2n\pi} \sin x \left(\int_0^\infty e^{-xy}\, dy \right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,2n\pi]} \sin x \left(\int_{[0,\infty)} e^{-xy}\, dm(y) \right) dm(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,2n\pi]} \left(\int_{[0,\infty)} (\sin x) e^{-xy}\, dm(y) \right) dm(x)
\end{aligned}$$

Želimo uporabiti Fubinije izrek. Opazimo, da velja
$$\int_0^{2n\pi} \left(\int_0^\infty \left| e^{-xy} \sin x \right| dy \right) dx = \int_0^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx < \infty,$$
kjer smo upoštevali, da je
$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} = 1.$$
S tem smo dokazali, da je izpolnjena alternativna predpostavka v Fubinijevem izreku, torej sledi

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(\int_{[0,2n\pi]} (\sin x) e^{-xy}\, dm(x) \right) dm(y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(\int_0^{2n\pi} (\sin x) e^{-xy}\, dx \right) dm(y)
\end{aligned}$$

Dvakrat integriramo per partes in dobimo

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} e^{-xy} \left(\frac{-1}{1+y^2} \cos x - \frac{y}{1-y^2 \sin x} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=2n\pi} dm(y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} e^{-2n\pi y} \left(\frac{-1}{1+y^2} \right) + \frac{1}{1+y^2} dm(y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+y^2} \left(1 - e^{-2n\pi y} \right) dm(y).
\end{aligned}$$

Imamo zaporedje zveznih naraščajočij funkcij, zato lahko uporabimo LMK in dobimo

$$\begin{aligned}
&= \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+y^2} \left(1 - e^{-2n\pi y} \right) dm(y) \\
&= \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+y^2}\, dm(y).
\end{aligned}$$

Ker je to zvezna nenegativna funkcija, je

$$= \int_0^\infty \frac{1}{y^2}\, dy = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

Naloga 2.30

Naj bo $(a_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}$ takšno dvojno kompleksno zaporedje, da velja vsaj eden od naslednjih pogojev:

(a) $a_{m,n} \geq 0$ za vsak $m, n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| < \infty$.

Dokažite, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}.$$

Rešitev. Naj bo $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $(m,n) \mapsto a_{m,n}$ in μ mera štetja točk na $\mathbb{N}$. Velja

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\},$$

in $\mu(\{m\}) = 1$ za vsak $m \in \mathbb{N}$, torej je μ σ-končna.

(a): Ker je $f(m,n) \geq 0$, lahko uporabimo Tonellijev izrek:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} &= \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(n)\right) d\mu(m) \\
&= \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\mu(m)\right) d\mu(n) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}.
\end{aligned}$$

(b): Predpostavka se prevede na to, da je integral

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} |f(m,n)|\, d\mu(n)\right) d\mu(m)$$

končen, torej lahko uporabimo Fubinijev izrek. $\square$

Naloga 2.31

Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ σ-končna merljiva prostora. Za funkciji $f \in L^1(\mu)$ in $g \in L^1(\lambda)$ definiramo funkcijo $h\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$h(x,y) = f(x)g(y).$$

Dokažite, da $h \in L^1(\mu \times \lambda)$ in da velja

$$\int_{X\times Y} h\, d(\mu\times\nu) = \left(\int_X f\, d\mu\right)\left(\int_Y g\, d\lambda\right).$$

Rešitev. Ker velja
$$h(x,y) = (f \circ \pi_1)(x,y) \cdot (g \circ \pi_2)(x,y),$$
je h meljiva preslikava (saj je produkt kompozitumov merljivih funkcij). Sledi, da je $|h| \geq 0$ merljiva in lahko uporabimo Tonellijev izrek:
$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} |h| \, d(\mu \times \lambda) &= \int_X |f(x)| \left(\int_Y |g(y)| \, d\lambda(y)\right) d\mu(x) \\ &= \left(\int_X |f(x)| \, d\mu\right)\left(\int_Y |g(y)| \, d\lambda\right) \\ &= \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} < \infty.\end{aligned}$$
S tem smo pokazali, da je $h \in L^1(\mu, \lambda)$.

Ker je $h \in L^1(\mu \times \lambda)$, lahko uporabimo Fubinijev izrek in na enak način kot zgoraj dobimo
$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} h \, d(\mu \times \lambda) &= \int_X \left(\int_Y h_x \, d\lambda(y)\right) d\mu(x) \\ &= \left(\int_X f \, d\mu\right)\left(\int_Y g \, d\lambda\right).\end{aligned}$$
□

Naloga 2.32

Naj bo m_2 Lebesgueova mera na $\mathbb{R}^2$, t.j. polna mera na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, za katero je
$$m_2([a,b) \times [c,d)) = (b-a)(d-c),$$
in m_1 Lebesgueova mera na $\mathbb{R}$. Dokažite, da $m_2 \neq m_1 \times m_1$.

Rešitev. Ideja je, da dokažemo, da $m_1 \times m_1$ ni polna mera – poiščimo množico v $\mathbb{R}^2$ z mero 0, ki premore podmnožico, ki ni merljiva.

Opazovali bomo podmnožice $A := \mathbb{R} \times \{0\}$. Naj bo V Vitelijava nemerljiva množica in $B := V \times \{0\}$. Velja
$$(m_1 \times m_1)(A) = m_1(\mathbb{R}) \cdot m_1(\{0\}) = \infty \cdot 0 = 0.$$
Recimo, da je B merljiva množica glede na $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Tedaj je nemerljiva množica V prerez merljive množice $V \times \{0\}$, kar pa je protislovje. Torej je B nemerljiva podmnožica množice A z mero 0, kar pomeni, da mera $m_1 \times m_1$ ni polna. □

Opomba: Napolnitev produktne mere $m_1 \times m_1$ je ravno mera m_2.

3 Kompleksne mere

3.1 Primeri in totalna variacija

- Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. *Kompleksne mera* je števno aditivna preslikava $\lambda\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, torej preslikava, ki zadošča
$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

za paroma disjunktne množice $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Iz definicije dobimo $\lambda(\emptyset) = 0$.
- Končne pozitivne mere so primer kompleksnih mer. Vsaki kompleksni meri lahko priredimo končno pozitivno mero – totalno variacijo.
- Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in λ kompleksna mera. *Totalno variacijo* mere λ označimo z $|\lambda|$ in definiramo z

$$|\lambda|(E) = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| \;\middle|\; (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ razbitje } E,\, E_n \in \mathcal{A}\right\}$$

- Za vsako merljivo množico E velja $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$.
- Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in λ kompleksna mera. Normo mere λ definiramo kot $\|\lambda\| := |\lambda|(X)$.

Naloga 3.1

Za kompleksno mero λ na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ definiramo preslikavo $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty)$ s predpisom

$$\mu(E) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\lambda(E_i)| \;\middle|\; (E_i)_{i=1}^{n} \text{ končno razbitje } E\right\}.$$

Dokažite, da je $\mu = |\lambda|$.

Rešitev. Ker je $\mu(E)$ supremum po manjši množici kot $|\lambda|(E)$, velja $\mu \leq |\lambda|$. Dokažimo še obratno neenakost. Naj bo $E \in \mathcal{A}$ in $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ njeno razbitje. Tedaj je z $F_i = E_i$, $i \in [N-1]$, $F_N = \cup_{n=N}^{\infty} E_n$ končno razbitje množice E z merljivi množicami. Za vsak $N \in \mathbb{N}$ torej velja

$$\begin{aligned}
\mu(E) &\geq \sum_{n=1}^{N+1} |\lambda(E_n)| \\
&= |\lambda(F_{N+1})| + \sum_{n=1}^{N} |\lambda(E_n)| \\
&= \sum_{n=1}^{N} |\lambda(E_n)| + \left|\lambda\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} E_n\right)\right| \\
&= \sum_{n=1}^{N} |\lambda(E_n)| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(E_n)\right|.
\end{aligned}$$

V limiti $N \to \infty$ torej dobimo $\mu(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)|$. Ker je to res za poljubno razbitje, dobimo $\mu \geq |\lambda|$. $\square$

Naloga 3.2

Dokažite, da za kompleksni meri μ in λ na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ velja

$$\Big| |\mu| - |\lambda| \Big| \leq |\mu + \lambda| \leq |\mu| + |\lambda| .$$

Opomba: Ker sta vsota kompleksnih mer in razlika pozitivnih končnih mer tudi kompleksni meri, so pojmi dobro definirani.

Rešitev. Naj bo $E \in \mathcal{A}$ in $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ njeno razbitje. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |(\lambda + \mu)(E_n)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n) + \mu(E_n)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda| (E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu| (E_n) \\
&= |\lambda| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) + |\mu| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \\
&= |\lambda| (E) + |\mu| (E),
\end{aligned}$$

kjer predzadnja enakost sledi, ker so (E_n) disjunktne množice, $|\lambda|$ pa pozitivna mera. S tem smo dokazali $|\mu + \lambda| \leq |\mu| + |\lambda|$.

Dokažimo še levo neenakost. Iz ravnokar dokazanega sledi

$$|\lambda| (E_n) = |\lambda + \mu - \mu| (E_n) \leq |\lambda + \mu| (E_n) + |\mu| (E_n)$$

oziroma

$$|\lambda| (E_n) - |\mu| (E_n) \leq |\lambda + \mu| (E_n)$$

in podobno

$$|\mu| (E_n) - |\lambda| (E_n) \leq |\lambda + \mu| (E_n),$$

kar skupaj pomeni

$$\Big| |\lambda| (E_n) - |\mu| (E_n) \Big| \leq |\lambda + \mu| (E_n).$$

Torej je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \Big| (|\lambda| - |\mu|) (E_n) \Big| &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big| |\lambda| (E_n) - |\mu| (E_n) \Big| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda + \mu| (E_n) \\
&= |\lambda + \mu| \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \\
&\leq |\lambda + \mu| (E)
\end{aligned}$$

□

3.2 Realne mere

- *Realna mera* je kompleksna mera, ki ima realne vrednosti.
- Naj bo λ realna mera na $(X, \mathcal{A})$. Množica $P \in \mathcal{A}$ je λ-*pozitivna*, če za vsako merljivo množico $B \subseteq P$ velja $\lambda(B) \geq 0$. Podobno definiramo λ-*negativne* in λ-*ničelne* množice.
- Množica je λ-ničelna natanko tedaj, kadar je $|\lambda| = 0$.
- Naj bo λ realna mera. Tedaj vsaka merljiva množica A vsebuje λ-pozitivno P množico za katero velja $\lambda(P) \geq \lambda(A)$.
- Za vsako realno mero λ na $(X, \mathcal{A})$ obstaja takšna λ-pozitivna množica P in λ-negativna množica N, da velja $P \cup N = X$ in $P \cap N = \emptyset$. Takšnemu paru (P, N) pravimo *Hahnov razcep* realne mere λ. Če je $(\tilde{P}, \tilde{N})$ še en par takih množic sta simetrični razliki $\tilde{P} \triangle P$ in $\tilde{N} \triangle N$ λ-ničelni množici.
- Mera μ je *skoncentrirana* na množici A, če velja $\mu(E) = \mu(E \cap A)$ za vsako merljivo množico A.
- Kompleksni ali pozitivni meri λ in μ sta *vzajemno singularni*, če obstajata takšni disjunktni merljivi množici A in B, da je λ skoncentrirana na A in μ skoncentrirana na B. Oznaka: $\mu \perp \lambda$.
- Meri λ in μ sta vzajemno singularni natanko tedaj, kadar obstaja takšna merljiva množica E, da je $|\lambda|(E) = 0$ in $|\mu|(E^c) = 0$.
- Naj bo λ realna mera. Tedaj lahko zapišemo $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, kjer sta λ^+ in λ^- enolično določeni pozitivni meri, za kateri velja $\lambda^+ \perp \lambda^-$. To je *Jordanov razcep*.

Naloga 3.3

Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih števil. Za poljubno podmnožico $E \subseteq \mathbb{N}$ definiramo

$$\lambda(E) = \sum_{n\in E} a_n.$$

(a) Določite potreben in zadosten pogoj, da je λ kompleksna oziroma realna mera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

(b) Naj bo λ kompleksna mera. Določite $|\lambda|$.

(c) Določite kak Hahnov razcep mere v primeru, ko je λ realna mera.

(d) Kdaj je Hahnov razcep enolično določen?

Rešitev. **(a):** Recimo, da je λ kompleksna mera. Iz

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{C}$$

sledi, da mora vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergirati. V zgornji vsoti lahko imamo poljubni vrstni red, zato mora biti konvergenca absolutna.

Vedno velja $\lambda(\emptyset) = 0$. Predpostavimo sedaj, da je zgornja vrsta absolutno konvergentna. Naj bodo $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktne množice. Tedaj je

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{n\in\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} a_n \in \mathbb{C}$$

dobro definirana, saj je vrsta absolutno konvergentna:

$$\sum_{n\in\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} |a_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty.$$

Sledi

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n\in E_i} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i),$$

torej je λ kompleksna mera.

Dodatno, kompleksna mera λ je realna, če je $a_n \in \mathbb{R}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(b): Naj bo $E \subseteq \mathbb{N}$. Tedaj je

$$|\lambda|(E) = |\lambda| = \sum_{n\in E} |\lambda|(\{n\}) = \sum_{n\in E} |a_n|,$$

kjer druga enakost velja, ker je $|\lambda|$ pozitivna mera.

(c): Naj bo $P = \{n \mid a_n \geq 0\}$ in $N = \{n \mid a_n < 0\}$. To sta merljivi množici, ki ustrezata $P \cup N = \mathbb{N}$ in $P \cap N = \emptyset$.

(d): Hahnov razcep je enolično določen, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \neq 0$. Res, iz $a_n > 0$ sledi $\lambda\{n\} = a_n \geq 0$, torej je $n \in P$. Podobno iz $a_n < 0$ sledi $n \in N$. Če pa je $a_n = 0$ pa lahko velja $n \in P$ ali $n \in \mathbb{N}$. □

Naloga 3.4

Naj bo μ pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$ in $f \in L^1(\mu)$ realna funkcija. Definiramo realno mero $\mu_f \colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\mu_f(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Določite Jordanov razcep za μ_f.

Rešitev. Naj bo $f = f^+ - f^-$, kjer je $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ in $f^- = \max\{-f(x), 0\}$. Definiramo

$$\mu_f^+(E) := \int_E f^+\, d\mu \quad \text{in} \quad \mu_f^-(E) := \int_E f^-\, d\mu.$$

Preverimo, da je to res Jordanov razcep.

- Ker sta f^+ in f^- nenegativni merljivi funkciji, sta μ^+ in μ^- pozitivni meri.

- Ker velja $0 \leq |f^+| \leq |f|$ in , $0 \leq |f^-| \leq |f|$ so spodnji integrali končni in velja
$$\mu_f(E) = \int_E f\, d\mu = \int_E (f^+ - f^-)\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu = \mu_f^+(E) - \mu_f^-(E).$$
- Naj bo $X^+ := f^{-1}([0,\infty))$ in $X^- := f^{-1}(-\infty, 0) = (X^+)^c$. Ker je f merljiva funkcija (saj je element L^1), sta tudi množici X^+ in X^- merljivi. Množici sta disjunktni, zato zadošča dokazati, da je μ_f^+ skoncentrirana na X^+ in μ_f^- skoncentrirana na X^-. Naj bo $E \in \mathcal{A}$. Tedaj je
$$\begin{aligned}\mu_f^+(E) &= \mu_f^+((E \cap X^+) \cup (E \cap X^-)) \\ &= \mu_f(E \cap X^+) + \mu_f(E \cap X^-) \\ &= \mu_f(E \cap X^+),\end{aligned}$$
kjer smo upoštevali, da je $f^+|_{X^-} \equiv 0$. Podobno dobimo $\mu_f^-(E) = \mu_f(E \cap X^-)$.

S tem smo dokazali, da meri μ_f^+ in μ_f^- res določata Jordanov □

Naloga 3.5

Dokažite, da za realno mero λ velja
$$|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-.$$

Rešitev. Naj bo $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ Jordanov razcep mere λ. Vemo že, da velja
$$|\lambda| = \left|\lambda^+ - \lambda^-\right| \leq \left|\lambda^+\right| + \left|\lambda^-\right| = \lambda^+ + \lambda^-,$$
kjer zadnja enakost velja, saj je totalna variacije pozitivne mere kar mera sama.

Dokažimo še obratno neenakost. Naj bo λ^+ skoncentrirana na množici E. Tedaj nam vzajemna singularnost pove, da je λ^- skoncentrirana na množici E^-. Sledi
$$\begin{aligned}|\lambda|(A) &\geq |\lambda(A \cap E)| + |\lambda(A \cap E^c)| \\ &= \left|\lambda^+(A \cap E) + \lambda^-(A \cap E)\right| + \left|\lambda^+(A \cap E^c) + \lambda^-(A \cap E^c)\right| \\ &= \left|\lambda^+(A \cap E)\right| + \left|\lambda^-(A \cap E^c)\right| \\ &= \left|\lambda^+(A)\right| + \left|\lambda^-(A)\right| \\ &= \lambda^+(A) + \lambda^-(A).\end{aligned}$$
□

Naloga 3.6

Naj bo λ realna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$.

(a) Če za totalno variacijo $|\lambda|$ mere λ velja $|\lambda|(X) = \lambda(X)$, dokaži, da je λ končna pozitivna mera.

(b) Ali trditev iz (a) velja, če samo predpostavimo $\lambda(X) \geq 0$?

Rešitev. **(a):** Ker je λ realna mera, bo v primeru, da je pozitivna, avtomatsko tudi končna. Naj bo $A \in \mathcal{A}$. Velja

$$|\lambda|(X) = \lambda^+(X) + \lambda^-(X) \quad \text{in} \quad |\lambda| = \lambda^+(X) - \lambda^-(X).$$

Sledi $\lambda^-(X) = 0$, torej je tudi $\lambda^-(A) = 0$ oziroma $\lambda(A) = \lambda^+(A) \geq 0$.

(b): Ne. Naj bo $X = \{a, b\}$, $\lambda(\{a\}) = 1$ in $\lambda(\{b\}) = -1$. V tem primeru je $\lambda(X) \geq 0$, vendar λ ni pozitivna mera. □

3.3 Lebesgue-Radon-Nikodymov izrek

- *Lebesgue-Radon-Nikodymov izrek*: Naj bo λ kompleksna mera in μ σ-končna mera na $(X, \mathcal{A})$. Tedaj obstajata takšni enolično določeni kompleksni meri λ_a in λ_s, da je $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ in $\lambda_s \perp \mu$. Dodatno obstaja takšna skoraj povsod enolično določena funkcija $f \in L^1(\mu)$, da je

$$\lambda_a(E) = \int_E f \, d\mu.$$

  za vsak $E \in \mathcal{A}$.

- Če iz $\mu(A) = 0$ sledi $\lambda(A) = 0$, označimo $\lambda \ll \mu$. Pravimo, da je λ *absolutno zvezna* gleda na μ.

- Funkcija f se imenuje *Radon-Nikodymov odvod* mere λ_a po meri μ.

- Razcep $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ je *Lebesgueov razcep* mere λ glede na mero μ.

Naloga 3.7

Na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ definiramo kompleksno mero s predpisom

$$\lambda(E) = \sum_{k \in E} e^{ik^2} \, 2^{-|k|}$$

in pozitivno mero

$$\mu(E) = \sum_{k \in E \cap \mathbb{N}} \frac{1}{k^2}.$$

Tedaj je λ kompleksna mera, μ pa σ-končna pozitivna mera.

(a) Izračunajte totalno variacijo $|\lambda|$ in normo $\|\lambda\|$.

(b) Določite Lebesgueov razcep mere λ glede na mero μ.

(c) Določite Radon-Nikodymov odvod $\frac{d\lambda_a}{d\mu}$.

Rešitev. **(a):** Naj bo $E \subseteq \mathbb{Z}$. Tedaj lahko zapišemo $E = \bigcup_{m \in E} \{n\}$. Naj bo (E_n) števno razbitje E. Velja

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda(E_n)| &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m\in E_n} \lambda(\{m\}) \right) \\ &= |\lambda(\{E\})| \\ &= \sum_{m\in E} \left| e^{im} \right| 2^{-|m|} \\ &= \sum_{m\in E} 2^{-|m|}.\end{aligned}$$

Opazimo, da je zgornji izraz neodvisen od izbire razbitja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Torej je

$$\sup_{(E_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda(E_n)| \right\} \leq \sum_{m\in E} 2^{-|m|}.$$

Če za razbitje vzamemo enojce, dobimo enakost. Torej je

$$|\lambda|(E) = \sum_{m\in E} 2^{-|m|}.$$

Sledi

$$\|\lambda\| = |\lambda|(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m} = 1 + 2 = 3.$$

(b): Mera μ je skoncentrirana na $\mathbb{N}$, torej bo mera λ_s skoncentrirana na $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Naj bo

$$\lambda_s(E) := \sum_{k\in E\cap(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N})} e^{ik^2} 2^{-|k|} \qquad \text{in} \qquad \lambda_a(E) := \sum_{k\in E\cap\mathbb{N}} e^{ik^2} 2^{-|k|}$$

Tedaj velja $\lambda = \lambda_s + \lambda_a$ in $\lambda_s \perp \mu$. Dokazati moramo še, da je $\lambda_a \ll \mu$. Naj bo $E \subseteq \mathbb{Z}$ takšna množica, da je $\mu(E) = 0$. Po definiciji μ sledi $E \cap \mathbb{N} = \emptyset$, torej je $\lambda_a(E) = 0$.

(c): Izrek nam pove, da obstaja skoraj povsod enolično določena funkcija $f \in L^1(\mu)$, za katero velja

$$\lambda_a(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Naj bo $n \geq 0$ in $E = \{n\}$. Dobimo

$$\lambda_a(\{n\}) = e^{in^2} 2^{-n} = \int_{\{n\}} f\, d\mu = \mu(\{n\}) \cdot f(n) = \frac{1}{n^2} f(n),$$

iz česar sledi

$$f(n) = \begin{cases} n^2 e^{in^2} 2^{-n}; & n > 0 \\ *; & n \leq 0 \end{cases} = \frac{d\lambda_a}{d\mu}.$$

kjer upoštevamo, da je $\mu(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = 0$, torej je lahko vrednost $f(n)$ za $n \geq 0$ poljubna. $\square$

Naloga 3.8

Naj bo $X = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ pa Lebesgueova σ-algebra. Naj bo μ mera štetja točk na $\mathcal{A}$ in m Lebesgueova mera.

(a) Ali obstaja Lebesgueov razcep mere μ glede na mero m?

(b) Pokažite, da je $m \ll \nu$.

(c) Pokažite, da $dm/d\mu$ ne obstaja.

Opomba: Ker μ ni kompleksna mera, ne moremo uporabiti Lebesgueovega izreka.

Rešitev. **(a):** Recimo, da obstaja Lebesgueov razcep $\mu = \mu_s + \mu_s$. Tedaj je

$$1 = \mu(\{x\}) = \mu_s(\{x\}) + \mu_a(\{x\}).$$

Ker je $m(\{x\}) = 0$, mora veljati $\mu_a(\{x\}) = 0$ (ker je $\lambda_a \ll m$). Sledi $\mu_s(\{x\}) = 1 \neq 0$. za vsak $x \in [0,1]$. Iz $\mu_s \perp m$ sledi, da je m skoncentirana na $X \setminus [0,1] = \emptyset$, kar je protislovje. Takšen Lebesgueov razcep torej ne obstaja.

(b): Če je $\mu(A) = 0$, je $A = \emptyset$, torej velja $m(A) = 0$.

(c): Recimo nasprotno. Tedaj za vsak $E \in \mathcal{A}$ velja

$$m(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Med drugim velja

$$m(\{*\}) = 0 = \int_{\{*\}} f \, d\mu = 1 f(*),$$

torej je $f \equiv 0$. Sledi $m \equiv 0$, kar je ponovno protislovje. □

Naloga 3.9

Naj bo λ kompleksna mera na $(X, \mathcal{A})$ in $c \in \mathbb{C}$. Dokažite, da je $|c\lambda| = |c| \cdot |\lambda|$.

Rešitev. Naj bo $E \in \mathcal{A}$ in $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ razbitje množice E. Velja

$$(c\lambda)(E) = c\lambda(E) = c \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c\lambda(E_i),$$

torej

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(c\lambda)(E_n)| = |c| \sum_{n=1}^{\infty} |(\lambda)(E_n)| \, .$$

Naredimo supremum po vseh števnih razbitjih in dobimo

$$|c\lambda|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |(c\lambda)(E_n)| \;\middle|\; (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ razbitje } E \right\} = |c| \cdot \lambda(E).$$ □

Naloga 3.10

Naj bo $X = [-1, 1]$, $\mathcal{A}$ Lebesgueova σ-algebra in m Lebesgueova mera na X. Definiramo

$$\lambda(E) := m(E) + im(E \cap [0,1]) \quad \text{in} \quad \mu(E) := m(E \cap [-1, 0)).$$

Izkaže se, da je λ kompleksna, μ pa končna pozitivna mera.

1. Določite Lebesgueov razcep λ glede na μ.
2. Določite $|\lambda|$ in dokažite $\mu \ll |\lambda|$.
3. Izračunajte $\frac{d\lambda}{d|\lambda|}$ in $\frac{d\mu}{d|\lambda|}$.

Rešitev. **(a):** Zapišemo lahko

$$\lambda(E) = \underbrace{m(E \cap [-1,0))}_{\lambda_a(E)} + \underbrace{(1+i)m(E \cap [0,1])}_{\lambda_s(E)}.$$

Opazimo, da je $\mu = \lambda_a$, torej je $\lambda_a \ll \mu$. čitno velja tudi $\lambda_s \perp \mu$.

(b): V splošnem velja:[1] iz $\lambda_1 \perp \lambda_2$ sledi $|\lambda_1 + \lambda_2| = |\lambda_1| + |\lambda_2|$. V našem primeru torej velja

$$\begin{aligned} |\lambda|(E) &= |\lambda_a|(E) + |\lambda|(E) \\ &= |\mu|(E \cap [-1,0)) + |\lambda_s|(E \cap [0,1]) \\ &= m(E \cap [-1,0]) + \sqrt{2}m(E \cap [0,1]), \end{aligned}$$

kjer zadnja enakost sledi po prejšnji nalogi.

Če je $|\lambda|(E) = 0$, je med drugim tudi $m(E \cap [-1,0]) = \mu(E) = 0$, torej je $\mu \ll |\lambda|$.

(c): Označimo $f = \frac{d\lambda}{d|\lambda|}$ in $g = \frac{d\mu}{d|\lambda|}$. Naj bo E merljiva. Tedaj je

$$\lambda(E) = \int_E f\, d|\lambda| = m(E \cap [-1,0]) + \sqrt{2}m(E \cap [0,1])$$

Uganemo lahko, da

$$f = \chi_{[-1,0)} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\chi_{[0,1]}$$

ustreza. Podobno iz

$$m(E \cap [-1,0)) = \mu(E) = \int_E g\, d|\lambda|$$

dobimo $g = \chi_{[-1,0)}$. □

3.4 L^p prostori

- Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero. Za $1 \leq p \leq \infty$ definiramo

$$L^p(\mu) := \left\{ [f] \;\middle|\; f\colon X \to \mathbb{C}, \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

  To je Banachov prostor za

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

- $L^\infty(\mu)$ je prostor razredov skoraj povsod omejenih funkcij.

$$\begin{aligned} L^\infty(\mu) &:= \{[f] \mid f\colon X \to \mathbb{C}.\ \exists C \geq 0.\ |f(x)| \leq X \text{ za skoraj vse } x \in X\} \\ \|f\|_\infty &:= \inf\{C \geq 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ za skoraj vse } x \in X\} \end{aligned}$$

- Velja $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ za skoraj vse $x \in x$.

[1] Če je λ_1 skoncentrirana na A in λ_2 skoncentrirana na B, iz $(\lambda_1 + \lambda_2)(E) = \lambda_1(E \cap A) + \lambda_2(E \cap B)$ željeno hitro sledi.

- *Jensen*: Naj bo $\mu(X) = 1$, $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konveksna (drugi odvod je pozitiven), $f \in L^1(\mu)$ in $f\colon X \to (a,b)$. Tedaj je
$$\varphi\left(\int_X f\, d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f)\, d\mu.$$
- *Hölder*: Naj bo $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $q \in L^q$. Tedaj je
$$\left|\int_X fg\, d\mu\right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q\,.$$

Naloga 3.11

Naj bo $f \in L^1([0,1], m)$ taka realna funkcija, da je $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Dokažite, da velja
$$\int_0^1 \ln\Big(1 + e^{f(x)}\Big)\, dx \geq \ln 2.$$

Rešitev. Velja $m[0,1] = 1$. Naj bo $\varphi = \ln(1 + e^{f(x)})$. Tedaj je
$$\varphi''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0,$$
torej je φ konveksna. Po Jensenu sledi
$$\int_0^1 \ln(1 + e^{f(x)})\, dx \geq \ln\left(1 + e^{\int_0^1 f(x)\, dx}\right) = \ln\left(1 + e^0\right) = \ln 2. \qquad \square$$

Naloga 3.12

Naj bo $1 \leq p < q \leq \infty$. Dokažite, da je $\ell^p \subsetneq \ell^q$ in za vsak $x \in \ell^p$ velja $\|f\|_q \leq \|f\|_p$.

Za $1 \leq p < \infty$ je
$$l^p := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}, \qquad \|(x_n)_n\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$
l^∞ pa je množica omejenih zaporedij, $\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty$.

Rešitev. Naj bo $q < \infty$ in $x = (x_n)_n \in \ell^p$. Če je $x \equiv 0$, potem oboje velja, torej predpostavimo, da $x \not\equiv 0$. Definiramo
$$(\overline{x}_n)_n := \left(\frac{x_n}{\|x\|_p}\right)_n.$$
Tedaj je
$$|\overline{x}_n|^p = \frac{|x_n|^p}{\sum_j |x_j|^p} \leq \frac{|x_n|^p}{|x_n|^p} = 1$$

in sledi

$$\left|\frac{x_n}{\|x\|_p}\right|^q \leq \left|\frac{x_n}{\|x\|_p}\right|^p \quad \text{oziroma} \quad \frac{|x_n|^q}{\|x\|_p^q} \leq \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p}.$$

Dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|^q}{\|x\|_p^q} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{1}{\|x\|_p^p}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p = 1.$$

oziroma

$$\frac{1}{\|x\|_p^q}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q \leq,$$

torej je $x \in l^q$ in velja $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

Naj bo sedaj $q = \infty$ in $p < q$. Če je $x = (x_n)_n \in \ell^p$, potem

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty,$$

torej je $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. To pomeni, da je zaporedje x omejeno oziroma $x \in \ell^\infty$. Za vsak n velja

$$\|x_p\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right) \geq |x_n|,$$

kar pomeni

$$\|x_p\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| = \|x\|_\infty. \qquad \square$$

Naloga 3.13

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedoma zaporedji v $L^p(\mu)$ in $L^q(\mu)$ za $1 \leq p \leq \infty$ in $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Če zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira v prostoru $L^p(\mu)$ proti funkciji f, zaporedje $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pa konvergira v prostoru $L^q(\mu)$ proti funkciji g, dokažite, da zaporedje $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira v prostoru $L^1(\mu)$ proti funkciji fg.

Rešitev. Po Hölderjevi neenkosti vemo, da je $f_ng_n \in L^1$ in $fg \in L^1$. Velja

$$\begin{aligned}
\|fg - f_ng_n\|_1 &= \|fg - f_ng + f_ng - f_ng_n\|_1 \\
&\leq \|g(f-f_n)\|_1 + \|f_n(g-g_n)\|_1 \\
&= \int_X |g(f-f_n)|\,d\mu + \int_X |f_n(g-g_n)|\,d\mu \\
&\overset{H}{\leq} \|g\|_q \cdot \|f-f_n\|_p + \|f_n\|_p \cdot \|g-g_n\|_q \xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je člen $\|f_n\|_p$ omejen, saj $f_n \to f$. $\square$

Naloga 3.14

Naj bo μ končna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ in $1 \leq p < q < \infty$.

(a) Dokažite, da je $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

(b) Če je $f \in L^q(\mu)$ poljubna funkcija, pokažite, da velja

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q .$$

Rešitev. **(a):** Naj bo $f \in L^q(\mu)$, $X^+ = \{x \in X \mid |f(x)| > 1\}$ in $X^- = X \setminus X^+$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \, d\mu \\
&= \int_{X^+} |f|^p \, d\mu + \int_{X^-} |f|^p \, d\mu \\
&\leq \int_{X^+} |f|^q \, d\mu + \int_{X^-} 1 \, d\mu \\
&\leq \int_X |f|^q \, d\mu + \int_X 1 \, d\mu \\
&= \|f\|_q^q + \mu(X) \\
&\leq \infty.
\end{aligned}$$

(b): Velja

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \cdot 1 d\mu \\
&\leq \left\| |f|^p \right\|_{q/p} \cdot \|1\|_{p/(q-p)} \\
&= \left(\int_X \left| |f|^p \right|^{q/p} d\mu\right)^{p/q} \cdot \left(\int_X 1 \, d\mu\right)^{(q-p)/q} \\
&= \left(\left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^1 /q\right)^p \cdot \mu(X)^{(q-p)/q} \\
&= \|f\|_q^p \cdot \mu(X)^{(q-p)/q}.
\end{aligned}$$

□

Alternativno lahko nalogo rešimo tudi na sledeč način.

Rešitev. Naj bo $f \in L^p(\mu)$. Ker je $q/p > 1$, je funkcija $\varphi(x) = x^{q/p}$ konveksna. Naj bo $\tilde{\mu}(a) := \frac{\mu(a)}{\mu(X)}$ (da lahko uporabimo Jensenovo neenakost). Velja

$$|f|^q = (|f|^p)^{q/p} = \varphi(|f|^p).$$

Ker je $f \in L^p$, je $|f|^p \in L^1$. Sledi

$$\varphi\left(\int_X |f|^p \, d\tilde{\mu}\right) \leq \int_X |f|^q \, d\tilde{\mu} < \infty.$$

Sedaj upoštevamo

$$\varphi\left(\int_X |f|^p \, d\tilde{\mu}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f|^p \, d\mu\right) = \frac{1}{\mu(X)^{q/p}} \cdot \|f\|_p^q$$

in

$$\int_X |f|^q \, d\tilde{\mu} = \frac{1}{\mu(X)} \int_X |f|^q \, d\mu$$

ter dobimo $\|f\|_p < \infty$ oziroma $f \in L^p(\mu)$. Hkrati smo dobili tudi

$$\|f\|_p^q \leq \mu(X)^{\frac{q}{p}-1} \|f\|_q^q .$$

oziroma

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q . \qquad \square$$

Literatura

[1] Marko Kandić. *Naloge iz teorije mere.* 2015.