Vieta jumping

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

23. januar 2025

1 Vieta jumping

Lema: Vietovi formuli za kvadratno enačbo

Za rešitvi x_1 in x_2 kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, kjer $a \neq 0$, velja

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{in} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Strategija: Vieta jumping

- Predpostavimo, da obstaja rešitev, ki se ne sklada z zahtevo naloge.
- Vzamemo najmanjšo takšno rešitev (a, b), kjer si izberemo smiselno definicijo[a] minimalnosti.
- Zamenjamo a s spremenljivko x in dobimo enačbo, ki ima a za eno izmed rešitev.
- S pomočjo Vietovih formul pokažemo, da naša predpostavka implicira obstoj manjše rešitve, torej dobimo protislovje.

[a] Pogosto želimo minimalizirati $a + b$.

Naloga 1.1. Naj bosta a in b takšni pozitivni celi števili, da $ab+1$ deli a^2+b^2. Pokažite, da je

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

popoln kvadrat.

Naloga 1.2. Naj bodo a, b in c takšna naravna števila, da velja

$$0 < a^2 + b^2 - abc < c.$$

Dokažite, da je $a^2 + b^2 - abc$ popoln kvadrat.

Naloga 1.3. Dokažite, da ima za vsako realno število N enačba

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + bcd + cda + dab$$

rešitev, kjer so a, b, c in d cela števila, večja od N.

Naloga 1.4. Naj bosta a in b takšni naravni števili, da $4ab-1$ deli $(4a^2-1)^2$. Dokažite, da je $a=b$.

2 Dodatne naloge

Naloga 2.1. Poiščite vse pare takšnih celih števil m in n, da je $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ celo število.

Naloga 2.2. Naj bosta a in b takšni naravni števili, da ab deli a^2+b^2+1. Dokažite, da velja $a^2+b^2+1=3ab$.

Naloga 2.3. Naj bosta a in b takšni naravni števili, da je

$$k=\frac{a^2+b^2}{ab-1}$$

celo število. Določite vse možne vrednosti k.

Naloga 2.4. Naj bo k naravno število različno od 1 in 3. Dokažite, da je $(0,0,0)$ edina celoštevilska rešitev

$$x^2+y^2+z^2=kxyz.$$

Naloga 2.5. Poiščite najmanjše naravno število n ali dokažite, da takšen n ne obstaja, ki zadošča sledeči lastnosti: Obstaja neskončno mnogo različnih n-teric takšnih pozitivnih racionalnih števil $(a_1,\ldots,a_n)$, da sta

$$a_1+\cdots+a_n \qquad \text{in} \qquad \frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

celi števili.

Naloga 2.6. Naj bosta a in b naravni števili. Dokažite, da

$$a^2+\left\lceil\frac{4a^2}{b}\right\rceil$$

ni popoln kvadrat.

Naloga 2.7. Poiščite vse takšne pare naravnih števil, da je $(xy+1)(xy+x+2)$ popoln kvadrat.