

Teorija mere

Predavatelj: Marko Kandić

Teorija mere \approx realna analiza
ta predmet

1. oktober 2025

1. Mere

1.1. σ -algebri

Naj bo X neprazna množica. Družina podmnožic $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je σ -algebra, če velja:

- i) $X \in \mathcal{A}$
- ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Če namesto iii) zahtevamo $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$:

- iii') $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A},$

potem je \mathcal{A} algebra.

Če je \mathcal{A} σ -algebra, potem je (X, \mathcal{A}) merljiv prostor.

Elementi \mathcal{A} so merljive množice.

Opomba: i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Vsaka σ -algebra je algebra.

iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$$

Primeri: i) $X, \mathcal{A} = \{\emptyset, X\} \leftarrow$ trivialna σ -algebra
 (X, \mathcal{A}) je trivialni merljiv prostor

- ii) $(X, \mathcal{P}(X))$, $\mathcal{P}(X)$ potenčna σ -algebra
 iii) X , $\mathcal{A} = \{E \subseteq X \mid E \text{ števna ali } E^c \text{ števna}\}$
 povezana s topologijo končnih komplementov

Če je X neštevna, je $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$.

Trditve: Naj bo B družina podmnožic množice X .
 Tedaj obstaja najmanjša σ -algebra na X , ki vsebuje B . Ta je enaka preseku vseh σ -algeber, ki B vsebujejo.

Oznaka: σ -algebra iz trditve označimo z $\sigma(B)$.

Dokaz: $\mathcal{C} := \{\text{vse } \sigma\text{-algebri, ki vsebujejo } B\}$
 $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \neq \emptyset$

Presek vseh σ -alg iz \mathcal{C} je σ -algebra. (ocitno)
 Po definiciji mora biti najmanjša.

Borelove množice

(X, τ) topološki prostor

$\sigma(\tau)$ je Borelova σ -algebra; σ -algebra generirana z vsemi odprtimi množicami

Ker je $A = (A^c)^c$, je $\sigma(\tau)$ generirana z zaprtimi množicami. Namesto $\sigma(\tau)$ pišemo $\mathcal{B}(X)$ ali \mathcal{B}_X .

$A \in \mathcal{B}(X)$ je

- F_σ množica, če je števna unija zaprtih množic
- G_σ množica, če je števen presek odprtih množic

Primer: $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$
 $= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$

Trditev: $A \in \mathbb{R}^n$

i) A zaprta $\Rightarrow A$ je G_σ

ii) A odprta $\Rightarrow A$ je F_σ

Brez dokaza. Enostaven.

Trditev: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je generirana s katerokoli od spodnjih družin generatorjev:

$$i) \Sigma_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$$

$$ii) \Sigma_2 = \{[a, b] \mid a < b\}$$

$$iii) \Sigma_3 = \{[a, b) \mid a < b\}$$

$$iv) \Sigma_4 = \{(a, b] \mid a < b\}$$

$$v) \Sigma_5 = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$vi) \Sigma_6 = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$$

$$vii) \Sigma_7 = \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$viii) \Sigma_8 = \{(-\infty, a]\mid a \in \mathbb{R}\}$$

Dokaz: i) $\Sigma_1 \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \sigma(\Sigma_1) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ker je neka odprta mn. števna unija odprtih odprtih int.,
je $\mathcal{T} \subseteq \delta(\Sigma_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\Sigma_1)$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ii) Ker je vsake (a, b) st. unija zaprtih int oblike
 $[a, b]$, je $\sigma(\Sigma_1) \subseteq \sigma(\Sigma_2) \Rightarrow \sigma(\Sigma_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.2. Pozitivne mere

7. oktober 2025

Definicija: Pozitivna mera (ali zaenkrat samo mera) je preslikava $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [\Omega, \infty]$, ki ima naslednje lastnosti

i) $\mu(\emptyset) = 0$

zaprt interval

razširitev realne osi z največjim elementom

ii) A_1, A_2, \dots paroma disjunktne iz \mathcal{A} , potem je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

iii) se imenuje števna ali σ -aditivnost.

(X, \mathcal{A}) merljiv prostor

(X, \mathcal{A}, μ) merljiv prostor z mero oz. merljiv prostor oz. prostor z mero

Če vzamemo $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \dots$, potem dobimo končno aditivnost

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Primeri:

i) $X \neq \emptyset, x \in X \quad (X, \mathcal{P}(X))$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

μ je mera, označimo jo z δ_x ... Diracova mera

ii) $X \neq \emptyset; \quad (X, \mathcal{P}(X))$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|; & |A| < \infty \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$

mera štetja točk

iii) Naj bo X neštevna in

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ števna ali } A^c \text{ števna}\}$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ števna} \\ 1; & A^c \text{ steven} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{je mera.} \\ \text{Dokaz na vajah.} \end{array}$$

iv) X neskončna mn.

$$\mu: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

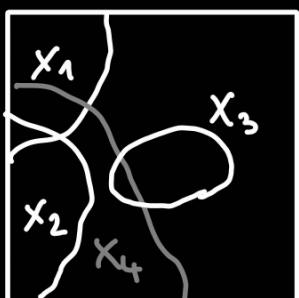
$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ števna} \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$

ni števno aditivna, je končno aditivna.

(X, \mathcal{A}, μ) : Mera μ je končna, če je $\mu(X) < \infty$.

Mera μ je σ -končna, če

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n \text{ in } \mu(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



X

V definiciji σ -končnosti lahko ekvivalentno zahtevamo

i) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so paroma disj., z unijo X

ii) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je naraščajoče z unijo X

UPORABNO

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spl. $\rightsquigarrow X_1, X_1 \cup X_2, X_1 \cup X_2 \cup X_3, \dots$
iz spljoščega zaporedja dobimo naraščajoče zaporedje $\rightsquigarrow X_1, X_2 \setminus X_1, X_3 \setminus (X_2 \cup X_1), \dots$
št. unija paroma disjunktnih

Lema: Naj bo $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ končno aditivna funkcija na algebri \mathcal{A} . Tedaj velja:

$$A, B \in \mathcal{A} \text{ in } A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B). \quad \text{MONOTONAST}$$

Dokaz: $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

□

Irditev: Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) prostor z mero. Tedaj za \forall zap. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$
Tedaj so $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne iz \mathcal{A} .

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j \text{ in } \bigvee_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} B_j$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Irditev: Naj bo $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ končna aditivna funkcija, kjer je (X, \mathcal{A}) merljiv prostor.
Tedaj je μ mera $\Leftrightarrow \forall$ naraščajoče zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih množic velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: (\Rightarrow): Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje v \mathcal{A} .



$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_2, \dots$$

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mu(B_n) \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \dots + \mu(A_k \setminus A_{k-1}))$$

$$\forall j. \mu(A_j) < \infty \Rightarrow = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_1) + (\mu(A_2) - \mu(A_1)) + \dots + (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1}))) \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

Če je $\mu(A_j) = \infty$, potem je $\mu(A_k) = \infty \forall k \geq j$ in zaradi monotonoosti mere velja enakaj v trditvi.

(\Leftarrow): Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje paroma disjunktnih množic v \mathcal{A} .

$B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$ Tedaj je $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče v \mathcal{A} .

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \square$$

Irditev: Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) prostor z mero in $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče zaporedje mn. v \mathcal{A} . Če je $\mu(A_1) < \infty$, potem

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: Ker $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče je $(A_1 \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c) = A_1 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\mu(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right) \stackrel{\substack{\text{prejčna} \\ \text{trditve}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n) \\ \stackrel{\text{II}}{=} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{\text{II}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n))$$

$$\Rightarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

□

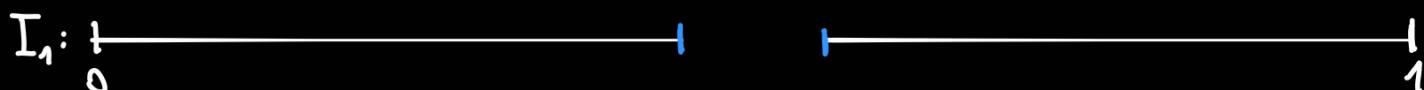
Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ šteje točke

$$A_n = \{n, n+1, \dots\}, \quad \mu(A_n) = \infty$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

Ta primer pokazuje, da prejšnja trditev ne velja nujno, če je $\mu(A_1) = \infty$.

Primer: Oglejmo si konstrukcijo posplošene Cantorjeve množice.



I₁: Izrežemo d₁-ti delež skoli $1/2$ za $0 < d_1 < 1$.

I₂ dobimo tako, da od vsakega intervala i ∈ I₁ izrežemo centralni interval deleža d₂ za $0 < d_2 < 1$.



Postopek nadaljujemo. Dobimo množico I_n, ki je unija 2^n intervalov iste dolžine. Za $0 < d_n < 1$ iz vsakega od teh intervalov izrežemo centralni interval deleža d_{n+1}. Če $d_3 = d_4 = d_5 = \dots$ dobimo Cantorjevo množico. Sicer v preseku $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ dobimo posplošeno Cantorjevo množico.

Zaenkrat predpostavimo obstoj Lebesgueove mere,

ki se na intervalih vjema z njihovo dolžino.

$$m(I_0) = 1$$

$$m(I_1) = m(I_0) - m(I_0)\alpha = m(I_0)(1-\alpha_1) = 1-\alpha_1$$

$$m(I_2) = m(I_1)(1-\alpha_2) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$$

$$m(I_3) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)$$

:

$$m(I_n) = \prod_{k=1}^n (1-\alpha_k)$$

Po prejšnji trditvi je

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1-\alpha_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_k)$$

V primeru Cantorjeve množice je $\frac{1}{3} = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots$, zato je $m(C) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3} = 0$.

Izrek: Posplošena Cantorjeva množica je metrizabilen kompakten nikjer gost povsem nepovezan prostor brez izoliranih točk z mero $\prod_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_k)$. To je lahko $> 1 - \varepsilon$, ampak nikjer gost!

Irditer: Posplošena Cantorjeva množica ima pozitivno mero $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ konvergira.

8. Oktober 2025

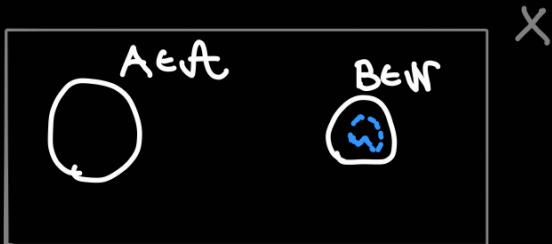
1.3. Napolnitveni prostori z mero

Definicija: (X, \mathcal{A}, μ) prostor z mero. A $\in \mathcal{A}$ je μ -ničelna, če je $\mu(A) = 0$.

Oznacimo $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = 0\}$.

Lema: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$

Dokaz: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$



Definicija: (X, \mathcal{U}, μ) je poln, če $\forall N \in \mathbb{N}$ in $B \subseteq N$ sledi $B \in \mathcal{A}$.

Izrek: Naj bo (X, \mathcal{U}, μ) prostor z mero. Naj bo

$$\bar{\mathcal{A}} := \{A \cup S \mid A \in \mathcal{A}, \exists N \in \mathbb{N}. S \subseteq N\}.$$

Tedaj je $\bar{\mathcal{A}}$ σ -algebra, ki vsebuje \mathcal{U} . Če za $A \cup S \in \bar{\mathcal{A}}$ definiramo $\bar{\mu}(A \cup S) := \mu(A)$ potem je $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ poln merljiv prostor.

Dokaz: $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{U}$

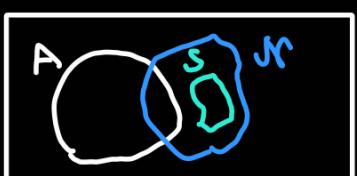
$$A \in \mathcal{U} \Rightarrow A = A \cup \emptyset$$

$\bar{\mathcal{A}}$ je σ -algebra.

i) $X \in \bar{\mathcal{A}}$, ker $X = X \cup \emptyset$

ii) $A \cup S \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow (A \cup S)^c \in \bar{\mathcal{A}}$.

$$\exists N \in \mathbb{N}. S \subseteq N$$



$$\begin{aligned} (A \cup S)^c &= A^c \cap S^c = A^c \cap (N^c \cup N \setminus S) \\ &= \underbrace{(A^c \cap N^c)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(A^c \cap N \setminus S)}_{S \subseteq N} \end{aligned}$$

$$\text{iii) } A_n \cup S_n \in \bar{\mathcal{A}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) \in \bar{\mathcal{A}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad N_n \in \mathcal{W}. \quad S_n \subseteq N_n$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{W}$$

$\bar{\mu}: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow [0, \infty]$ je dobro definirana pozitivna mera

$$E \in \bar{\mathcal{A}}; \quad E = A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2 \\ S_1 \subseteq N_1 \in \mathcal{W}, \quad S_2 \subseteq N_2 \in \mathcal{W} \\ \Rightarrow \bar{\mu}(A_1) = \bar{\mu}(A_2)$$

$$A_1 \subseteq A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2 \subseteq A_2 \cup N_2$$

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup N_2) \leq \mu(A_2) + \mu(N_2) = \mu(A_2)$$

Podobno $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$.

$\bar{\mu}$ je mera:

$$\cdot \bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$$

Najbo $(A_n \cup S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disj. zap. mn. v $\bar{\mathcal{A}}$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n)\right) &= \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n \cup S_n) \end{aligned}$$

$(X, \mathcal{F}, \bar{\mu})$ je poln

$$\bar{\mu}(N) = 0, \quad S \subseteq N \Rightarrow S \in \bar{\mathcal{A}}$$

$$N = A \cup \tilde{S}; \quad A \in \bar{\mathcal{A}}, \quad \tilde{S} \subseteq \tilde{N} \in \mathcal{N}$$

Po definiciji je $\bar{\mu}(N) = 0$
 $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{\mu}(A) = 0$

$$S = \emptyset \vee S ; \quad S \subseteq N \subseteq A \cup \tilde{N} \in \mathcal{W}$$



Primer: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Izkaže se $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$. (Brez dokaza.)

Če je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ polna, potem so vse podmnožice Cantorjeve množice merljive. Ker $|\mathcal{C}| = |\mathbb{R}|$, bi bilo $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}}$ ~~✗~~
 Torej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ ni poln prostor.

Napolnitvev je Lebesgueova σ -algebra.

$$\Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ker } \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{ je } |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \leq 2^{\mathbb{R}} \end{array} \right\} \Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| = 2^{\mathbb{R}}$$

$$\text{Ker } \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{ je } |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \leq 2^{\mathbb{R}}$$

$$\text{Imamo } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

\uparrow prava vsebovanost?

Primer: Pokazali bomo, da na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ pod privzetkom aksioma izbire ne obstaja translacijsko invariantna mera.
 μ je translacijsko invariantna, če za $\forall A$ velja $\mu(A+x) = \mu(A)$. $A+x = \{a+x \mid a \in A\}$.

Na \mathbb{R} vpeljemo relacijo \sim : $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$

\mathbb{R} razpade na ekvivalenčne razrede 14. oktober 2025

\mathbb{R}/\sim kvocientni prostor

Skonstruirali bomo tako množico, ki bo preprečila obstoj translacijsko inv. mere na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Sledil bi, da obstaja Lebesgueva nemerljiva mn.

$\forall x \in [-1, 1]$ izberemo predstavniku ekv. razreda $[x]$, ki leži v $[-1, 1]$. Tukaj uporabimo aksiom izbire. Naj bo S množica vseh ravnskark izbranih predstavnikov. Velja $S \subseteq [-1, 1]$.

Def. $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q} \cap [-2, 2]$.

Def. $\tilde{F} = \{r + S \mid r \in \mathbb{Q}_1\} \leftarrow \text{števna množica}$

Velja: $(r + S) \cap (r' + S) = \emptyset$ za $r = r'$

$$r + S = r' + S \Rightarrow S - S = r - r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow S \sim S \quad \times$$

ii) $[-1, 1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + S)$

$x \in [-1, 1], \exists s \in S \subseteq [-1, 1]$, da je $x \sim s$

$$g := x - s \in \mathbb{Q}$$

$$|g| \leq |x| + |s| \leq 2 \Rightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (r + S)$$

Velja $[-1, 1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + S) \subseteq [-3, 3]$.

Če bi obstajala transl. inv. mera na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ki se na intervalih ujema z dolžino, potem bi veljalo

$$2 \leq \mu\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + S)\right) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(r + S) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(S) \leq 6 \quad \times$$

Kasneje bomo skonstruirali Leb. mero, ki je definirana na Leb. σ -algebri. Ta je zaprta za translacijo, Leb. mera pa je transl. invariantna. Zato S ni Leb. merljiva.

1.4. Zunanja mera

Zunanja mera na množici X je funkcija $\xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$, za katere velja:

i) $\xi(\emptyset) = 0$

ii) $\xi(A) \leq \xi(B) \quad \forall A \subseteq B$

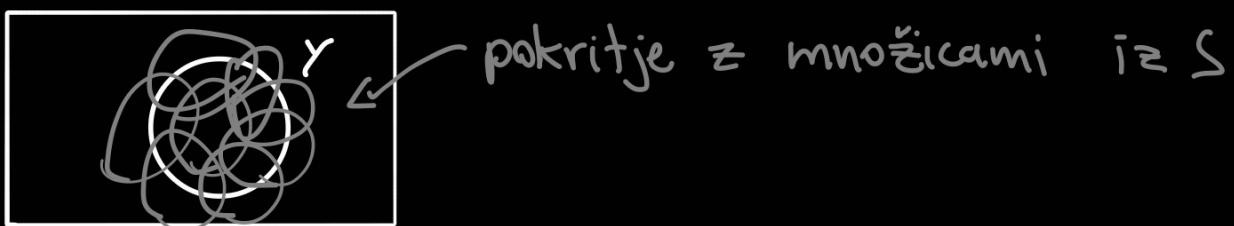
iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n) \quad \xi(A \cup (B \setminus A)) \leq$

vedno def. na
 $\mathcal{P}(X)$

Irditer: Naj bo S družina podmnožic neprazne množice X , ki vsebuje \emptyset in X . Naj bo $\mu: \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ funkcija za katero velja $\mu(\emptyset) = 0$. Definiramo $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ s predpisom

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \mid (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq S \text{ pokritje za } Y \right\}.$$

Tedaj je μ^* zunanjia mera.



Dokaz: i) $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

ii) $A \subseteq B$. neko pokritje za B je pokritje za A
 $\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) Neenakost drži, če je $\mu^*(A_n) = \infty$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

Predpostavimo, da je $\mu^*(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\varepsilon > 0$. Tu $n \in \mathbb{N}$ \exists pokritje $(A_{nj})_j$ za A_n , da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{nj}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$\Rightarrow (A_{nj})_{n, j \in \mathbb{N}}$ je pokritje za $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* + \varepsilon \end{aligned}$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, dobimo števno subadditivnost. □

Definicija: Naj bo ξ zunanjja mera na $\mathcal{P}(X)$. Množica $A \subseteq X$ je zunanje merljiva oziroma ξ -merljiva, če je

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c)$$

za vsak $Y \subseteq X$.



Da preverimo $\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c)$, moramo preveriti \leq in \geq . Sledi iz (iii) def. zunanjih mera. Zato zadostuje preveriti:

$$\xi(Y) \geq \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c). \quad (*)$$

Če $\xi(Y) = \infty$, potem (*) velja, sicer moramo preveriti.

Carathéodoryjev izrek: Naj bo ξ zunanjja mera na X . Tedaj je

$$\mathcal{A}_\xi = \{A \subseteq X \mid A \text{ je } \xi\text{-merljiva}\}$$

σ -algebra, trojica $(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$ pa je poln merljiv prostor.

Dokaz: \mathcal{A}_ξ je σ -algebra

$$\begin{aligned} i) Y \subseteq X &\Rightarrow \xi(Y) = \xi(Y \cap \emptyset) + \xi(Y \cap \emptyset^c) = 0 + \xi(Y). \\ &\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_\xi \end{aligned}$$

$$ii) \xi(Y) = \xi(Y \cap A^c) + \xi(Y \cap A^c)^c = \underset{Y \cap A}{\xi(A)} + \underset{Y \cap A^c}{\xi(A^c)} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\xi$$

Najprej bomo dokazali, da je \mathcal{A}_ξ zaprt za končne unije, torej algebra, zaprtost za števne unije pa bomo dokazali hkrati s števno aditivnostjo $\xi|_{\mathcal{A}_\xi}$ za števne disjunktne družine množic.

$$A, B \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\xi$$

$$\xi((A \cup B) \cap Y) + \xi((A \cup B)^c \cap Y) = \xi((A \cap Y) \cup (B \cap Y)) + \xi((A \cap Y)^c \cup (B \cap Y)^c)$$

$$\begin{aligned}
 &= \xi(A \cap Y \cup B \cap A^c \cap Y) + \xi(A^c \cap B^c \cap Y) \\
 &\leq \xi(A \cap Y) + \xi(B \cap A^c \cap Y) + \xi(B^c \cap A^c \cap Y) \\
 &= \xi(A \cap Y) + \xi(A^c \cap Y) = \xi(Y).
 \end{aligned}$$

$\nearrow B \in \mathcal{A}_\xi$ $\uparrow A \in \mathcal{A}_\xi$

$\Rightarrow \mathcal{A}_\xi$ je algebra.

$$\text{Naj bodo } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi$$

$$A_1 = A_1, \quad A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))$$

Dokazali bomo, da je \mathcal{A}_ξ zaprta za števne disjunktne unije in ker je \mathcal{A}_ξ algebra, bo sledilo, da je \mathcal{A}_ξ σ -algebra.

Naj bodo $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne mn. iz \mathcal{A}_ξ .

$$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi \quad \text{in} \quad \xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$$B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}_\xi$$

$$Y \subseteq X \Rightarrow \xi(Y \cap B_n) = \xi(Y \cap B_n \cap A_n) + \xi(Y \cap B_n \cap A_n^c)$$

$$\begin{aligned}
 &\quad \boxed{A_1 | A_2 | \dots | A_n | \dots} \quad X \\
 &= \xi(Y \cap A_n) + \xi(Y \cap B_{n-1}) \\
 &= \dots = \sum_{j=1}^n \xi(Y \cap A_j)
 \end{aligned}$$

$$Y = B_n \Rightarrow \xi(B_n) = \sum_{j=1}^n \xi(A_j)$$

$\Rightarrow \xi$ je končno aditivna na \mathcal{A}_ξ

$$\xi(B) \geq \xi(B_n) = \sum_{j=1}^n \xi(A_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$$\Rightarrow \xi(B) \geq \sum_{j=1}^n \xi(A_j) \quad \text{Ker } \xi \text{ stevno subaditivna, je}$$

$$\xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$B \in A_\xi$

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c)$$

$$\geq \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c)$$

$$= \sum_{j=1}^n \xi(Y \cap A_j) + \xi(Y \cap B^c)$$

$$\geq \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c).$$

Ker je ξ st. svbaditvna je $\xi(Y) = \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c)$.

$\Rightarrow B \in A_\xi$.

$(X, A_\xi, \xi|_{A_\xi})$ je poln merljiv prostor

$M \in A_\xi$ in $\xi(M) = 0$, $N \subseteq M$

$$Y \subseteq X. \quad \underbrace{\xi(Y \cap N)}_{\substack{\text{monotonost} \\ \text{svbaditivnost}}} + \xi(Y \cap N^c) = \xi(Y \cap N^c) \leq \xi(Y)$$

$$\xi(Y) \leq \xi(Y \cap N) + \xi(Y \cap N^c)$$



1.5. Mera na algebri:

Mera na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je preslikava $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, za katero velja:

$$i) \mu(\emptyset) = 0$$

ii) A_1, A_2, \dots paroma dij. v it in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, potem

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Izrek: Naj bo μ mera na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Za $Y \subseteq X$ definiramo zunanj mero

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ je pokritje za } Y \right\}.$$

Tedaj je $\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Dokaz: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A)$$

$$\mu(A) \leq \mu^*(A).$$

Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pokritje za A z mnogicami iz \mathcal{A} .

$$B_1 = A \cap A_1, \quad B_2 = A \cap (A_2 \setminus A_1), \quad B_3 = A \cap (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)), \dots$$

$B_i \cap B_j \neq \emptyset$ za $i \neq j$ in

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \cap A \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A$$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

To velja za vsako pokritje $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$, zato tudi v infimumu dobimo isti neenacuj $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$$

15. oktober 2025

$A \in \mathcal{A}$ in $Y \subseteq X$. Da je $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ moramo preveriti, da je $\mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) \stackrel{(*)}{=} \mu^*(Y) \quad \forall Y \subseteq X, \mu^*(Y) < \infty$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Po definiciji zunanje mere obstaja tako pokritje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ za Y , da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Y) + \varepsilon.$$

Po definiciji zunanje mere velja

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap Y) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \text{ in } \mu^*(A^c \cap Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n). \\ \Rightarrow \mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A \cap A_n) + \mu(A^c \cap A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu((A \cap A_n) \cup (A^c \cap A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^* + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pošljimo $\varepsilon \rightarrow 0$ in dobimo $(*)$. □

Nekaj oznak: \mathcal{A} je algebra, μ_0 je mera na algebri, $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, $\mu := \mu_0^*|_{\mathcal{A}_{\mu_0^*}}$.

Izrek: Naj bodo $\mathcal{A}, \mu_0, \mu_0^*, \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ in μ kot zgoraj.

- i) Naj bo γ mera na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, ki razširjuje μ_0 . Tedaj velja $\gamma(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$.
- ii) Če je $\mu(A) < \infty$, potem je $\gamma(A) = \mu(A)$ za vsako razširitev mere μ_0 .

(iii) Če je μ_0 σ -končna mera na algebri, potem je μ enolično določena razširitev mere μ_0 do mere na $\mathcal{A}\mu_0^*$.

Dokaz: i) Naj bo γ mera na $\mathcal{A}\mu_0^*$, ki razširja μ_0 .
 Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pokritje za $A \in \mathcal{A}\mu_0^*$ z množicami iz \mathcal{A} . Tedaj je

$$\gamma(A) \leq \gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Naredimo inf. po vseh pokritjih in po definiciji dobimo:

$$\gamma(A) \leq \mu_0^*(A) = \mu(A).$$

ii) Naj bo $A \in \mathcal{A}\mu_0^*$ in $\mu(A) < \infty$. Izberimo $\varepsilon > 0$ in poiščimo pokritje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ za A z množicami iz \mathcal{A} , da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu_0(A_n)}_{\mu(A_n)} < \underbrace{\mu_0^*(A)}_{\mu(A)} + \varepsilon.$$

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \gamma(B) = \gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

$$\begin{aligned} \mu|_{\mathcal{A}} = \gamma|_{\mathcal{A}} = \mu_0 &\xrightarrow{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \mu(B) \end{aligned}$$

Ker je μ mera, je $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(A) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\mu(A) \leq \mu(B) = \gamma(B)$$

$$\begin{aligned}
 &= V(A) + V(B \setminus A) \\
 &\leq V(A) + \mu(B \setminus A) \\
 &< V(A) + \epsilon
 \end{aligned}$$

Ker je $\epsilon > 0$ poljuben, je $\mu(A) \leq V(A)$

iii) Naj bo μ_0 σ -končna, to pomeni

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad \mu_0(A_n) < \infty$$

$\mu_0^*(A_n) = \mu(A_n)$

$$A \in \mathcal{A}, \mu_0^* \Rightarrow A = A \wedge X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \wedge A_n)$$

BSS izberimo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne.

$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \wedge A_n) \stackrel{\text{ii)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} V(A \wedge A_n) = V(A) \quad \blacksquare$$

1.6. polmere in polalgebri

Definicija: Polalgebra je množica $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ki zadosti:

i) $\emptyset \in \mathcal{S}$.

ii) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$.

iii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^C$ je končna disjunktna unija množic iz \mathcal{S} .

Primer: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{[a, b], (-\infty, b), [a, \infty) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je polalgebra (enostavno preveriti)

Definicija: Naj bo \mathcal{S} polalgebra in $\mu: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ preslikava. μ je polmera, če velja:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne in je $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$, potem je

$$\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

iii) Če so $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne in je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, potem je

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

21. oktober 2025

Irditev: Nuj bo S polalgebra na množici X . Tedaj je algebra generirana z S , enaka družini vseh končnih disjunktivnih unij iz S .

Simbolično: $\mathcal{J} \dots$ podalgebra

$$\mathcal{A} = \{A_1 \cup \dots \cup A_n \mid n \in \mathbb{N}, A_i \in S \text{ paroma disjunktne}\}$$

Dokaz: \mathcal{A} je algebra, ki ocenjuje vsebuje \mathcal{J} .

Po definiciji bo \mathcal{A} vsebovala, algebro generirano \mathcal{J} , zgornji opis pa pove tudi, da bo \mathcal{A} vsebovala v algebri generirani s \mathcal{J} .

\mathcal{A} -je algebra

- i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ (A polalgebra) ✓
- ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}^c$
- iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Dokazali bomo iiii) za končne preseke in nato še ii) "Novu" (ii) in (iii) sta skupaj ekvivalentna (ii)+(iii) zaradi de Morganovega pravila.

$$iui) A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m, \quad i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_n \quad i \neq j \quad B_i \cap B_j \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n A_i \cap B_j$$

$\Rightarrow A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$, saj je \mathcal{S} polalgebra in

$$(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = (A_i \cap B_k) \cap (B_j \cap B_l)$$

Če je $i \neq k$ ali $j \neq l$, je to prazen presek.

$\Rightarrow A \cap B$ je končna unija paroma disjunktivnih $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

$$iii) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i ; A_i \in \mathcal{S} \text{ paroma disj.}$$

$$A^c = \bigcap_{i=1}^m A_i^c$$

Ker je A_i^c po def. \mathcal{A} in alk. za algebro v \mathcal{A} , je $A^c \in \mathcal{A}$ po iii).



Irditev: Naj bo \mathcal{S} polalgebra na mn. X in naj bo μ polmera na \mathcal{S} . Tedaj obstaja natanko ena razširitev μ do mere $\tilde{\mu}$ na algebri generirani s \mathcal{S} .

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ paroma disj., da je

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \Rightarrow \tilde{\mu}(A) := \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Dokaz: vaje

Opomba: Točka iii) v def. polmere na polalgebri pravi:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S} \text{ paroma disj. in } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\star)$$

Ker se polmera na polalgebri razširi do mere na algebri, gen. z \mathcal{S} je v (\star) enačaj.

1.7. Lebegue - Stieltjesove mere

Naj bo X topološki prostor. Mera je **Borelova**, če je definirana na Borelovi σ -algebri $\mathcal{B}(X)$.

Irditev: Naj bo μ Borelova mera na \mathbb{R} , ki je končna na vseh omejenih Borelovinih množicah realne osi.

Def: $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu([0, \infty)) & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -\mu([x, 0)) & ; x < 0 \end{cases}$$

Tedaj je F_μ naraščajoča in levozvezna.

i) $a < b \Rightarrow \mu([a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$

ii) Če je μ končna, potem je

$$F = F_\mu + \mu(-\infty, 0),$$

kjer je $F(x) = \mu(-\infty, x)$.

Dokaz: F_μ naraščajoča, saj je μ monotona

Dokazimo, da je F_μ levozvezna. Naj bo

$$x > 0. \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty), \text{ da } x_n \nearrow x$$

$$F_\mu(x) = \mu([0, \infty)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([0, x_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n).$$

Primera $x \leq 0$ se lotimo na podoben način.

i) $0 < a < b : \mu([a, b]) = \mu([0, b] \setminus [0, a])$
 $= \mu([0, b]) - \mu([0, a])$
 $= F_\mu(b) - F_\mu(a)$

Podobno v ostalih primerih.

$$\text{ii) } F(x) = \mu((-\infty, x)) = \mu((-\infty, 0) \cup (0, x)) \\ = \mu((-\infty, 0)) + F_\mu(x).$$

□

Cilj je dokazati obratno trditev: Vsaka naraščajoča levozvezna funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ porodi Borelovo mero. Naj bo torej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naraščajoča levozvezna. Tedaj obstajata

$$f(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{in} \quad f(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Na polalgebri $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ vseh intervalov oblike $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ in \emptyset definiramo preslikavo μ_f s predpisom:

$$\mu_f(\emptyset) := 0$$

$$\mu_f([a, b]) := f(b) - f(a)$$

$$\mu_f([a, \infty)) := f(\infty) - f(a)$$

$$\mu_f((-\infty, b]) := f(b) - f(-\infty)$$

Izrek [Lebesgue-Stieltjes]: μ_f je polmera na polalgebra $\mathcal{J}(\mathbb{R})$.

Dokaz: (i): Po definiciji je $\mu_f(\emptyset) = 0$.

(ii) Naj bo $[a, b]$ končna disjunktna unija množic iz \mathcal{J} :

$$[a, b] = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j], \quad [a_j, b_j] \text{ so parne disj.}$$

$$\mu_f([a, b]) = \mu_f\left(\bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]\right). \quad \begin{array}{l} \text{intervali so urejeni tako, da} \\ \text{se nadaljujejo} \end{array}$$

$$f(b) - f(a) \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^n (f(b_j) - f(a_j)) = f(a_1) - f(b_n) = f(a) - f(b_n)$$



Na podoben način preverimo $[a, \infty)$ in $(-\infty, b)$. DN

(iii): Preverimo stevno svbaditivnost za M_f .

Naj bo interval $I \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ Števna disj. unija intervalov $I_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$M_f(I) \leq \sum_{m=1}^{\infty} M_f(I_m)$$

1. primer: $I = [a, b] \Rightarrow I_m = [a_m, b_m]$.

Izberimo $\varepsilon > 0$. Ker je f levozvezna, obstaja $c < b$ in $c_j < a_j$, da je $f(c) > f(b) - \frac{\varepsilon}{2}$ in $f(c_j) > f(a_j) - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j}$



Kompaktni interval $[a, c]$ pokrijemo z odprtimi intervali $\{(c_j, b_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$. Obstaja končno podpokritje.

Točka a je vključena v nekem (c_j, b_j) . BSS $a \in (c_1, b_1)$



Če je $b_1 > c_1$, potem je $[a, c] \subseteq (c_1, b_1)$, sicer imamo BSS $b_1 \in (c_2, b_2)$



Če je $b_2 > c_1$, potem je $[a, c] \subseteq (c_1, b_1) \cup (c_2, b_2)$, sicer

Postopek nadaljujemo. Po končnih korakih (po preštevilčenju), dobimo intervale $(c_1, b_1), (c_2, b_2), \dots, (c_n, b_n)$, da je $c_1 < a_1, c_{j+1} < b_j$ za $j = 1, \dots, n-1$, $b_n > c$

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) &\geq \sum_{j=1}^n (f(b_j) - f(a_j)) \quad \text{indeksi po preimenovanju} \\
 &\geq \left(\sum_{j=1}^n f(b_j) - f(c_j) \right) - \varepsilon/2 \\
 &= -f(c_1) + \left(\sum_{j=2}^{n-1} \underbrace{(f(b_j) - f(c_{j-1}))}_{\geq 0} \right) + f(b_n) - \varepsilon/2 \\
 &\geq -f(a) + 0 + f(c) - \varepsilon/2 \\
 &> -f(a) + (f(b) - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 \\
 &= f(b) - f(a) - \varepsilon
 \end{aligned}$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, je

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) \geq f(b) - f(a)$$

2. primer: $[a, \infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$

$$f(\infty) - f(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (f(b_j) - f(a_j))$$

$$\text{Za } n \in \mathbb{N}: [a, n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, \min\{n, b_j\})$$

Po prejšnjem primeru velja:

$$\begin{aligned}
 f(n) - f(a) &= \sum_{j=1}^{\infty} (f(\min\{b_j, n\}) - f(a_j)) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\infty) - f(a)
 \end{aligned}$$

Ostali primeri DN.



Na $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ imamo polmora μ_f :

$$\mu_f(\emptyset) = 0, \mu_f([a, b]) = f(a) - f(b), \mu_f([a, \infty)) = f(\infty) - f(a), \mu_f((-\infty, b)) = f(b) - f(-\infty)$$

Po izreku lahko na razširimo na en sam način da vnesemo μ_f na algebra ut generiran z $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Tvorimo zunanj mera μ_f^* na \mathbb{R} . Po Carathéodoryjevem izreku je množica $A_{\mu_f^*}$ vseh μ_f^* mernjivih množic σ -algebra, ki vsebuje vsi intervale oblike $[a, b]$. Torej $A_{\mu_f^*} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Dodatno: $(\mathbb{R}, A_{\mu_f^*}, \mu_f^*|_{A_{\mu_f^*}})$ je poln merljiv prostor.

$\Rightarrow A_{\mu_f^*} \supseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$... Lebesgueva σ -algebra, ki je napolnitev Borelove σ -algebri.

Mera $\mu_f^* := \mu$ je Lebesgue-Stieltjeova mera. Po izreku sl zadnjici je ta mera enolična razširitev mere iz alg. gen. z $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, saj je tista mera σ -končna.

Poseben primer: $f(x) = x \Rightarrow$ Dobimo Lebesgueovo mero.

Označimo jo z m .

22. oktober 2025

Posledica: Naj bo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ in $x \in \mathbb{R}$. Tedaj velja $m(x+A) = m(A)$ in $m(x \cdot A) = |x|m(A)$.

Dokaz: Naj bo m_x definirana na $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ s predpisom

$$m_x(A) := m(x+A).$$

m_x je polmera na $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, $x + [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n] = \bigcup_{i=1}^n (x + [a_i, b_i])$ ki se ujema z m na $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Če je ut alg. gen. z $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, potem se m_x in m ujemata tudi na ut. Uporabimo Carathéodoryja za (\mathbb{R}, m) in (ut, m_x) .

Vseh primerih dobimo σ -algebre, ki vsebuje $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Ker sta m in m_x σ -končni na (\mathbb{R}, ut) , sta enolična razširiljivi na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Dokaz druge enakosti podobno. □

Spomnimo se: $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu_f) \rightsquigarrow (\mathcal{A}, \mu_f) \rightsquigarrow (\mathcal{A}_{\mu_f^*}, \mu_f^*)$

polmera na
polalgebri mera na
algebri μ

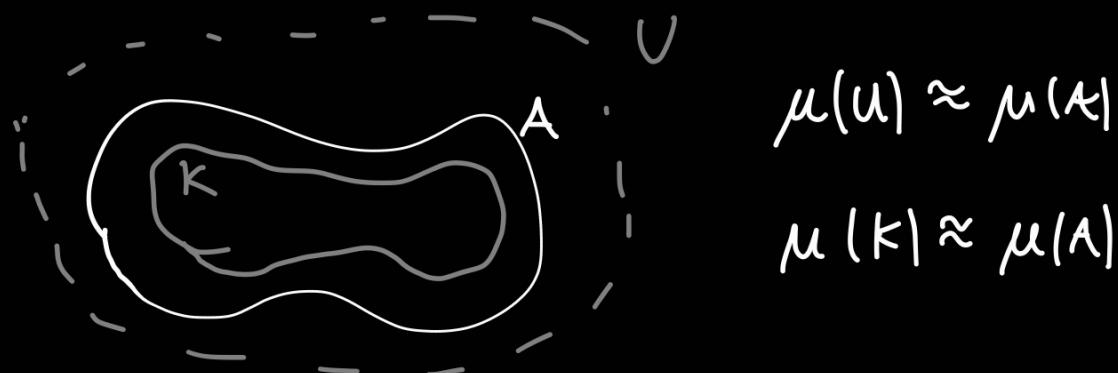
$$A \in \mathcal{A}_{\mu_f^*} \rightsquigarrow \mu(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ in } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

$A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n$ je končna disjunktna unija intervalov oblike $[a, b], (-\infty, b), [a, \infty)$.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \mu_f([a_m, b_m]) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} f(b_m) - f(a_m) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \right\} \end{aligned}$$

Trditev: Naj bo μ_f Lebesgue-Stieltjesova mera na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, poravnana z naraščajočo levozvezno funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tedaj je

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (a_m, b_m) \right\}.$$



Dokaz: Označimo desno stran z $\gamma(A)$.

Vsek interval (a_n, b_n) je števna disjunktna unija intervalov oblike $[a_{n,m}, b_{n,m}]$. Po definiciji infimuma je $\mu(A) \leq \gamma(A)$.

Za obratno neenakost pa potrebujemo levozveznost funkcije f . Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ in naj bo $\mu(A) < \infty$. Tedaj za $\forall \epsilon > 0$. $\exists [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$, da je

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \text{ in}$$



$$\mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f([a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n))$$

Ker je f levozvezna, za $\forall n \in \mathbb{N}. \exists a'_n < a_n$, da je

$$f(a'_n) > f(a_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

$$\Rightarrow \mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a'_n)) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a'_n)) \right) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu(A) + 2\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a'_n))$$



Zaradi monotonosti mere je potem $\mu(A) = \nu(A)$. □

Izrek: Za $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ velja

$$m(A) = \inf \{ m(V) \mid A \subseteq V^{\text{odp}} \} \quad (*)$$

$$= \sup \{ m(K) \mid K^{\text{komp}} \subseteq A \} \quad (**)$$

Dokaz [prva enakost]: (druga možče kar neje - Rieszov izrek).

$$A \subseteq V \Rightarrow m(A) \leq m(V)$$

$$\Rightarrow m(A) \leq \inf \{ m(V) \mid V^{\text{odp}} \supseteq A \}$$

Prej smo dokazali, da je:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n)) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}$$

$$V := \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \Rightarrow m(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n))$$



(*) ... zunanjja regularnost mere, (**)... notranja regularnost mere
 (inf. po odprtih mn.) (sup. po komp. mn)

28. Oktober, 2025