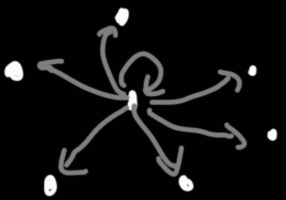
Verjetnost 2

Predavatelj: Martin Raič

pisni izpit ⟶ ustni izpit

1. UVOD in OSVEŽITEV TEORIJE VERJETNOSTI

6. oktober 2025



Markovska lastnost:

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1} \mid \overbrace{X_0=x_0, X_1=x_1, \dots,}^{\text{prednodna stanja}} X_n=x_n) =$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_n=x_n)$$

naslednje stanje

trenutno stanje

Andrej Andrejevič Markov (1856–1922)

Časovno homogena različica:

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1} \mid X_0=x_0, \dots, X_n=x_n) = p_{x_n, x_{n+1}}$$

V resnici iz 2. različice sledi 1.

Primer: model vremena

1: pretežno jasno
2: pretežno oblačno, a suho
3: deževno

$p_{x,y}$

x \ y	1	2	3
1	0.7	0.2	0.1
2	0.2	0.6	0.2
3	0.2	0.3	0.5

vsote vrstic morajo biti enake 1

Recimo, da je danes pretežno jasno. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo pojutrišnjem dež?

$$\mathbb{P}(X_2=3 \mid X_0=1) = ?$$

Trditev 1.1: Če je B fiksen dogodek s $\mathbb{P}(B) > 0$ in definiramo $\mathbb{P}^B(A) := \mathbb{P}(B \mid A)$, je $\mathbb{P}^B$ spet verjetnostna mera in jo lahko gledamo na kateremkoli zoženem prostoru Ω', kjer je Ω' dogodek in $B \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$.

Dokaz: DN.

Trditev 1.2: Naj bodo A, B in C dogodki na istem verjetnostnem prostoru. Tedaj je $\mathbb{P}(B) > 0$ in $\mathbb{P}^B(C) > 0$ natanko tedaj, ko je $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$. Če je slednje res velja trdi $\mathbb{P}^B(A \mid C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)$.

Dokaz: DN.

$$\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = \mathbb{P}^{X_0 = 1}(X_2 = 3)$$

trditev 1.1, izrek o popolni verjetnosti

$$= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}^{X_0=1}(X_1 = i)\, \mathbb{P}^{X_0=1}(X_2 = 3 \mid X_1 = i)$$

trditev 1.2

$$= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_1 = i \mid X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1, X_1 = i)$$

časovno homogena Markovska lastnost

$$= p_{11} p_{13} + p_{12} p_{23} + p_{13} p_{33}$$

$$= 0.7 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.16$$

Kaj pa $\mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 1)$?

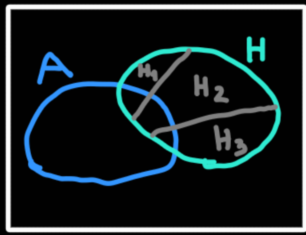
$$\mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 1) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_2 = i \mid X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 1, X_2 = i)$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1) = p_{11} p_{11} + p_{12} p_{21} + p_{13} p_{31} = 0.55$$

$\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = 0.16$ od prej

$\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_0 = 1 = 0.29 \quad (= 1 - 0.55 - 0.16)$

Trditev 1.3: Če je $0 \leq p \leq 1$, $(H_k)_{k \in K}$ števna družina paroma disjunktnih dogodkov z unijo H s $\mathbb{P}(H) > 0$ ter A tak dogodek, da je $\mathbb{P}(A \mid H_k) = p$, brž ko je $\mathbb{P}(H_k) > 0$, je tudi $\mathbb{P}(A \mid H) = p$.



Dokaz: $K^+ := \{k \in K \mid \mathbb{P}(H_k) > 0\}$

$$\mathbb{P}(A \mid H) = \mathbb{P}^H(A) = \sum_{k \in K^+} \mathbb{P}^H(H_k) \underbrace{\mathbb{P}^H(A \mid H_k)}_{\mathbb{P}(A \mid H_k \cap H) = \mathbb{P}(A \mid H_k) = p}$$

$$= p \sum_{k \in K^+} \mathbb{P}^H(H_k) = p\, \mathbb{P}^H(H) = p. \qquad \blacksquare$$

Iz trditve sledi:

$$\mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 1) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_2 = i \mid X_0 = 1)\, \mathbb{P}(X_3 = 3 \mid X_0 = 1, X_2 = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_2 = i \mid X_0 = 1)\, p_{i,3}$$

$$= 0.55 \cdot 0.1 + 0.29 \cdot 0.2 + 0.16 \cdot 0.5 = 0.193$$

Še nekaj vprašanj:

* $\mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = 1) = ?$
* Je to zaporedje konvergentno? Če je, kam konvergira?
* Ali je limitno obnašanje verjetnosti $\mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x)$, ko gre $n \to \infty$, odvisno od x?
* $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}.\, X_n = y \mid X_0 = x) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X_n = y\} \mid X_0 = x) = ?$

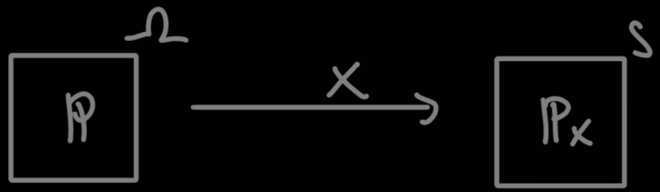
Izrek 1.4 [enoličnost verjetnosti]: Naj bo $\mathcal{A}$ družina podmnožic množice Ω, ki je zaprta za končne preseke, $\mathcal{F}$ pa naj bo Ω algebra generirana z $\mathcal{A}$. Tedaj, če se verjetnostni meri $\mathbb{P}_1$ in $\mathbb{P}_2$ ujemata na $\mathcal{A}$, se ujemata tudi na $\mathcal{F}$.

Rezultat sledi iz Dynkinove leme, znane tudi kot izrek π-λ.

<u>Definicija</u>: Slučajni element na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v množici S, opremljeni s σ-algebro $\mathcal{S}$ (merljivem prostoru $(S, \mathcal{S})$), je $\mathcal{F}/\mathcal{S}$-merljiva preslikava $X: \Omega \longrightarrow S$, tj. za vsako množico $C \in \mathcal{S}$ velja $X^{-1}(C) = \{X \in C\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}$.

O diskretnem slučajnem elementu govorimo, če je S števna in $\mathcal{S} = 2^S$.
Za merljivost je tedaj dovolj, da so vse množice $\{X = x\}$ dogodki.

<u>Definicija</u>: Porazdelitev slučajnega elementa X, definiranega kot zgoraj je potisk/slika mere $\mathbb{P}$ vzdolž X, torej verjetnostna mera $\mathbb{P}_X = X_* \mathbb{P}$, definirana po predpisu $\mathbb{P}_X(C) := \mathbb{P}(X \in C)$.



Poznati porazdelitev pomeni poznati verjetnosti $\mathbb{P}(X \in C)$ za vse $C \in \mathcal{S}$. V resnici jih je treba le za $C \in \mathcal{A}$, kjer je $\mathcal{A}$ družina za končne preseke in generira $\mathcal{S}$.

Denimo, če je $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \underbrace{\mathcal{B}}_{}(\mathbb{R}))$ (Borelova σ-algebra), je za $\mathcal{A}$ dovolj vzeti družino vseh poltrakov $(-\infty, x]$, torej je dovolj poznati $\mathbb{P}(X \leq x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

Če je X diskreten slučajni element, je še lažje: tedaj je dovolj poznati $\mathbb{P}(X=x)$ za vse $x \in S$.

<u>Definicija</u>: **Slučajni vektor** je

(1) končen nabor $(X_1, \ldots, X_n)$ slučajnih elementov na istem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a z vrednostmi v merljivih prostorih $(S_1, \mathcal{S}_1), \ldots, (S_n, \mathcal{S}_n)$, ki pa so lahko različni.

ALI EKVIVALENTNO

(2) slučajni element $\underline{X}$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\left(\prod_{i=1}^n S_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{S}_i\right) = (S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{S}_n)$, kjer je $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{S}_i$ σ-algebra, generirana z množicami oblike $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$, kjer je $C_i \in \mathcal{S}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\begin{tikzcd} & S_1 \\ \Omega \arrow[ur, "X_1"] \arrow[r, "X_2"'] \arrow[dr, "X_n"'] & S_2 \\ & \vdots \\ & S_n \end{tikzcd} \qquad \Omega \xrightarrow{\underline{X}} S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

Ekvivalenco določa zveza
$$\underline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

Prek (2) definiramo porazdelitev slučajnega vektorja.

<u>Opazka 1.5</u>: Porazdelitev slučajnega vektorja $(X_1, \ldots, X_n)$ torej predstavljajo verjetnosti $\mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in C)$, dovolj pa je poznati verjetnosti

$C \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{S}_i$

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_1 \in C_1, X_2 \in C_2, \ldots, X_n \in C_n}_{(x_1, \ldots, x_n) \in C_1 \times \cdots \times C_n}); \quad C_i \in \mathcal{S}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Opazka 1.6: Če so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ diskretni slučajni elementi, je to tudi slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$. Za njegovo porazdelitev je dovolj poznati verjetnosti $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$, kjer je $x_i \in S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definicija: Slučajni proces v diskretnem času z enostransko neskončnostjo je:

(1) Zaporedje $X_0, X_1, X_2, \ldots$ slučajnih elementov na istem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, a z vrednostmi v merljivih prostorih prostorih $(S_0, \mathcal{S}_0), (S_1, \mathcal{S}_1), (S_2, \mathcal{S}_2), \ldots$ ki so lahko različni.

(2) slučajni element $\underline{X}$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z vrednostmi v $\left(\prod_{i=1}^{\infty} S_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i\right) = (S_0 \times S_1 \times S_2, \ldots, \mathcal{S}_0 \otimes \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2 \otimes \cdots)$, kjer je $\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i$ σ-algebra, generirana z množicami oblike $C_0 \times C_1 \times C_2 \times \cdots$, kjer je $C_i \in \mathcal{S}_i$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Omega \xrightarrow{X_0} S_0, \quad \Omega \xrightarrow{X_1} S_1, \quad \Omega \xrightarrow{X_2} S_2, \quad \vdots \qquad\qquad \Omega \xrightarrow{\underline{X}} S_0 \times S_1 \times S_2 \times \cdots$$

Ekvivalenco določa zveza

$$\underline{X}(\omega) = (X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots).$$

Prek (2) definiramo porazdelitev slučajnega procesa.

Opazka 1.7: Brž ko ima neskončno množic S_i več kot en element, je produkt $\prod_{i=0}^{\infty} S_i$ nešteven. Slučajni proces v neskončnem času torej tipično ni diskreten slučajni element.

Opazka 1.8: σ-algebra $\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}_i$ generirajo že produkti oblike $C_0 \times C_1 \times \cdots \times C_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times \cdots$. Družina teh produktov je zaprta za končne preseke. Za porazdelitev slučajnega procesa je torej dovolj poznati verjetnosti
$\mathbb{P}(X_0 \in C_0, X_1 \in C_1, \dots, X_n \in C_n)$; $C_i \in \mathcal{S}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$
Če so S_i števne in $\mathcal{S}_i = 2^{S_i}$, pa je dovolj poznati verjetnosti $\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$; $x_i \in S_i$, $i = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$

POZOR! Ni pa dovolj poznati verjetnosti
$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots)$. (te verjetnosti so lahko vse enake 0) recimo, če mečemo pošten kovanec

Izrek 1.9: Naj bodo $(S_0, \mathcal{S}_0), (S_1, \mathcal{S}_1), \dots$ merljivi prostori, na produktih $(S_0, \mathcal{S}_0), (S_0 \times S_1, \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2), \dots$ pa definirane verjetnostne mere $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \dots$, ki naj bodo konsistentne v smislu, da, če je $(X_0, X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) \sim \mathbb{P}_{n+1}$, je tudi $(X_0, X_1, \dots, X_n) \sim \mathbb{P}_n$. Tedaj obstaja (natanko ena) verjetnostna mera $\mathbb{P}_\infty$ na $\left(\prod_{i=1}^{\infty} S_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i\right)$ z lastnostjo, da če je $(X_0, X_1, \dots) \sim \mathbb{P}_\infty$, je za vse n tudi $(X_0, X_1, \dots, X_n) \sim \mathbb{P}_n$.
Dokaz opuščamo. (Daniell, Kolmogorov – poseben primer)

2. MARKOVSKE VERIGE S FIKSNO ZAČETNO PORAZDELITVIJO

2.1. Osnovni pojmi

13. oktober 2025

Definicija: Časovno homogeno markovsko verigo v diskretnem času in na diskretni množici stanj s fiksno porazdelitvijo sestavljajo:

- števna množica S – prostor stanj;
- verjetnosti prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- slučajne spremenljivke $X_0, X_1, X_2, \ldots$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ in z vrednostmi v $(S, 2^S)$
- prehodne verjetnosti $p_{x,y}$; $x, y \in S$, pri čemer zahtevamo, $p_{x,y} \geq 0$ za vse $x, y \in S$;
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = p_{x_n, y},$$
brž ko je $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) > 0$.
- $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$ za vse $x \in S$.

Porazdelitvi slučajne spremenljivke X_0 pravimo začetna porazdelitev.

Prehodna matrika: $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$

Za matriko $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$ za katero je $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$ za vse $x \in S$, pravimo, da je stohastična.

Opazka 2.1: Skupna porazdelitev procesa je natančno določena z začetno dobčena z začetno porazdelitvijo in prehodnimi verjetnostmi, saj je [izrek 1.4, opazka 1.8]
$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) = p_{x_0 x_1} p_{x_1 x_2} \cdots p_{x_{n-1} x_n}.$$

Opazka 2.2: Za vsako verjetnostno mero π na $(S, 2^S)$ in za vsako stohastično matriko $P \in [0,1]^{S \times S}$ obstaja taka verjetnostna mera na $(S^{\mathbb{N}_0}, (2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0})$, da je slučajni proces $X_0, X_1, \ldots$ porazdeljen skladno s to mero, markovska veriga z začetno porazdelitvijo π in prehodno matriko P.

produktna σ-algebra

Uporabimo namreč izrek 1.9: če je $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$ najprej definiramo končnorazsežne porazdelitve $\mathbb{P}_n$ na $(S^{n+1}, (2^S)^{\otimes(n+1)})$ po predpisu:

$$\mathbb{P}_n(\{(x_0, x_1, \ldots, x_n)\}) := \pi(\{x_0\}) p_{x_0 x_1} p_{x_1 x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}.$$

Le-te so konsistentne (DV), torej obstaja ustrezna mera $\mathbb{P}_\infty$ na $(S^{\mathbb{N}_0}, (2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0})$. Domača vaja = DV.

Opazka 2.3: Iz trditve 1.3 sledi, da za vsak $x \in S$ in vsak $D \subseteq S^n$ velja

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) \in D,\ X_n = x}_{\substack{\text{disjunktna unija dogodkov oblike} \\ \{X_0 = x_0,\, X_1 = x_1, \ldots,\, X_{n-1} = x_{n-1},\, X_n = x_n\}}}) = p_{x,y}.$$

Med drugim je $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = p_{x,y}$. Nadalje trdi za vsako množico $D \subseteq S^{n+1}$ velja:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in D,\ X_n = x}_{\substack{\text{disjunktna unija dogodkov oblike} \\ \{X_0 = x_0,\, X_1 = x_1, \ldots,\, X_n = x\}}}) = p_{x,y}.$$

Trditev 2.4 [razširitev lastnosti Markova na cel proces]: Pogojno na poljuben dogodek oblike $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\}$ z neničelno verjetnostjo je $X_n, X_{n+1}, \dots$ spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi, njena začetna porazdelitev pa se seveda ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke X_n glede na $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\}$.

Dokaz:

$$\mathbb{P}^{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D}\left(X_{n+m+1} = y \mid X_n = x_0,\ X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m\right)$$

$$\overset{(1.2)}{=} \mathbb{P}\Big(X_{n+m+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D,\ X_n = x_0,\ X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m}_{(X_0, X_1, \dots, X_{n+m+1}) \in D'}\Big)$$

$$\overset{\text{prejšnja opazka}}{=} p_{x_m, y}.$$

∎

Opomba: Pri pogojevanju lahko Ω zožimo na poljuben dogodek Ω', za katerega je

$$\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\} \subseteq \Omega' \subseteq \Omega.$$

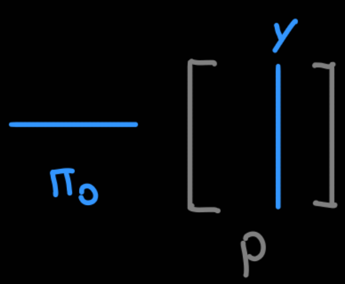
Posledica 2.5: Če s π_n označimo n-to robno porazdelitev, tj. porazdelitev slučajne spremenljivke X_n, je $X_n, X_{n+1}, \dots$ (brezpogojno) spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in začetno porazdelitvijo π_n. ∎

Opazka 2.6:

$$\underset{\pi_1(y)}{\underset{\parallel}{\pi_1(\{y_1\})}} = \mathbb{P}(X_1 = y)$$

$$= \sum_{\substack{x \in S \\ \mathbb{P}(X_0 = x) > 0}} \mathbb{P}(X_0 = x)\, \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$$

$$= \sum_{\substack{x \in S \\ \cancel{\pi_0(\{x\}) > 0}}} \pi_0(\{x\})\, p_{x,y}$$



Če torej prehodne verjetnosti uvrstimo v matriko $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$, robne porazdelitve pa identificiramo z vrstičnimi vektorji, velja $\pi_1 = \pi_0 \cdot P$. Po posledici 2.5 pa je tudi $\pi_{n+1} = \pi_n P$. Z indukcijo sledi $\underline{\pi_n = \pi_0 P^n}$.

<u>Primer</u>: vreme od prejšnjič:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{pre. ja.} & \text{pre. ob} & \text{dež} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{pretežno jasno} \\ \text{pretežno oblačno} \\ \text{dež} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\pi_0 := [1, 0, 0]$$

$$\pi_1 = [1, 0, 0]\, P = [0.7 \quad 0.2 \quad 0.1]$$

$$\pi_2 = [0.7 \quad 0.2 \quad 0.1]\, P = [0.55 \quad 0.29 \quad 0.16]$$

<u>Primer</u>: slučajni sprehod na $\mathbb{Z}$, $p \in [0, 1]$

$$p_{k,k+1} := p, \quad p_{k,k-1} := 1 - p, \quad X_0 = 0$$

$$\begin{aligned} X_n &= \text{št. pomikov navzgor} - \text{št. pomikov navzdol} \\ &= 2 \cdot (\text{št. pomikov navzgor}) - n \end{aligned}$$

$$\underset{\frac{X_n + n}{2}}{\overset{\text{št. pomikov navzgor}}{\shortparallel}} \sim \mathrm{Bin}(n, p) \Rightarrow \mathbb{P}(X_n = -n + 2k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}; \; k \in \mathbb{Z}$$

Primer: $\pi_0 := \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, $\quad P := \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$$\pi_0 P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Sledi $\pi_n = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$.

Definicija: Markovska veriga s fiksno začetno porazdelitvijo je stacionarna, če so vse robne porazdelitve enake.

Ekvivalentno: $\underbrace{\pi_1}_{\pi_0 P} = \pi_0$. $\quad$ (π_0 je levi lastni vektor za lastno vrednost 1)

2.2. Časi ustavljanja

Definicija: Slučajna spremenljivka T z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ je čas ustavljanja glede na slučajni proces $X_0, X_1, \dots$, če za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja, da je dogodek $\{T = n\}$ natančno določen z $X_0, X_1, \dots, X_n$, t.j. če obstaja taka merljiva množica D_n, da je $\{T_n\} = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D_n\}$.

↪ če ima X_k vrednosti v $(S_k, \mathcal{S}_k)$ zahtevamo $D_n \in \mathcal{S}_0 \otimes \mathcal{S}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_n$.

Primera in protiprimer:

1) Čas zadetja množice $C \in \mathcal{S}$, tj. $T_C := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in C\}$ ob dogovoru $\min \emptyset := \infty$, je čas ustavljanja.

$$\{T = n\} = \{X_0 \notin C, X_1 \notin C, \dots, X_n \notin C, X_n \in C\}$$
$$= \{(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) \in (C^c)^n \times C\}$$

2) Naj bo $(S, \mathcal{S}) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ← Borelova σ-algebra

$T := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n > X_{n-1}\}$ je čas vstavljanja

$\{T = n\} = \{X_0 > X_1 > X_2 > \cdots > X_{n-1} < X_n\}$

3) $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$T := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_{n+1} > X_n\}$ tipično ni čas vstavljanja (razen, če gre npr. za konstanten proces)

$\{T = n\}$ je odvisno od X_{n+1}

Opazka 2.7: Če so $h_0, h_1, \dots$ injektivne in ohranjajo merljivost (tj. A merljiva $\Leftrightarrow$ $h_n(A)$ merljiva), se časi ustavljanja glede na $X_0, X_1, X_2, \dots$ ujemajo s časi ustavljanja glede na $h_0(X_0), h_1(X_1), \dots$ (DV – malo težje)

Definicija: Filtracija (v diskretnem času z naraščanjem v nedogled) na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je zaporedje σ-algeber $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$.

Definicija: Slučajna spremenljivka T z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ je čas ustavljanja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ velja $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Definicija: Za vsak slučajni proces $X_0, X_1, \dots$, kjer ima X_n vrednosti v $(S_n, \mathcal{S}_n)$, definiramo njegovo naravno filtracijo:

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D_n;\ D_n \in \mathcal{S}_0 \otimes \cdots \otimes \mathcal{S}_n\}.$$

DV: utemelji, da je to res filtracija.

Opazka 2.8: Časi ustavljanja glede na dobčen slučajni proces se ujemajo s časi ustavljanja glede na naravno filtracijo.

Trditev 2.9: Če je T čas ustavljanja in $k \in \mathbb{N}_0$, je $T+k$ prav tako čas ustavljanja.

Dokaz: Za $n = 0, 1, \ldots, k-1$ je $\{T+k=n\} = \{T = n-k\} = \underbrace{\emptyset}_{\in \mathcal{F}_n}$.
Za $n = k, k+1, \ldots$ pa velja

$$\{T+k=n\} = \{T=n-k\} \subseteq \mathcal{F}_{n-k} \subseteq \mathcal{F}_n \qquad \blacksquare$$

Trditev 2.10: Naj bo T slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ in $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ filtracija. Naslednje trditve so ekvivalentne:

(1) T je čas ustavljanja glede na $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(2) $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$

(3) $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$

Dokaz: (2)$\Leftrightarrow$(3): očitno, saj sta si dogodka $\{T \leq n\}$ in $\{T > n\}$ nasprotna

σ-alg. zaprte za unije

(1)$\Rightarrow$(2): $\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \underbrace{\{T=k\}}_{\in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

(2)$\Rightarrow$(1): $\{T=n\} = \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \setminus \underbrace{\{T \leq n-1\}}_{\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

$\mathcal{F}_{-1} := \{\emptyset, \Omega\}$ $\qquad \blacksquare$

15. oktober 2025

Trditev 2.11: Če sta T in S časa ustavljanja glede na določeno filtracijo, so to tudi $T+S$, $T \vee S := \max\{T, S\}$ in $T \wedge S := \min\{T, S\}$.

Dokaz: $\{T+S=n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T=k\} \cap \{T=n-k\}$

$\{T=k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$, $\{T=n-k\} \in \mathcal{F}_{n-k} \subseteq \mathcal{F}_n$

$\{T \vee S \leq n\} = \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, $\{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

$\mathcal{F}_i$ so σ-algebre

$\{T \wedge S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\}$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, $\{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ $\blacksquare$

Opazka 2.8½ (zadnjič izpustili)
Konstante iz $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ so tudi časi ustavljanja.

Izrek 2.12 [krepka lastnost Markova]: Naj bo:

- $X_0, X_1, \ldots$ časovno homogena markovska veriga na števni množici stanj S s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$, $x, y \in S$, in fiksno začetno porazdelitvijo
- $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ naravna filtracija tega procesa;
  $\mathcal{F}_n = \{(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in D_n \mid D_n \in S^{n+1}\}$
- T čas ustavljanja glede na to filtracijo (ekvivalentno glede na proces $X_0, X_1, \ldots$)
- $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{T=n\} \cap B_n)$, kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$, in $\mathbb{P}(B) > 0$

Pogojno na B (in v verjetnostnem prostoru, ki je zožitev prvotnega na poljuben dogodek Ω', za katerega je $B \subseteq \Omega' \subseteq \{T < \infty\}$) je tedaj slučajni proces $X_T, X_{T+1}, \ldots$, spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in fiksno začetno porazdelitvijo, ki je pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke X_T glede na B.

Opazka 2.13: Med pomembnimi legitimnimi dogodki B so dogodki $\{T \in K\}$, kjer je $K \subseteq \mathbb{N}_0$.

Dokaz izreka 2.12: Preveriti je treba:

$$\mathbb{P}^B(X_{T+m+1} = y \mid X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m) = p_{x_m, y}.$$

$$\overset{\text{trditev 1.2}}{\|}$$

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\})$$

brž ko je $\mathbb{P}^B(X_T = x_0, X_{T+1} = x_1, \dots, X_{T+m} = x_m) > 0.$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}) > 0$$

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B_n \cap \{T = n, X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\})$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+m+1} = y \mid \underbrace{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in D_n}_{B_n}, \underbrace{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in D_n'}_{T=n}, X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m)$$

$$= p_{x_m, y} \quad \text{(Opazka 2.3)}$$

Dogodek $B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_0\}$ pa je števna disjunktna unija dogodkov $B_n \cap \{T = n, X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}$. Po trditvi 1.3 mora biti tudi

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}) = p_{x_m y}.$$

∎

3. MARKOVSKE VERIGE S PROSTIM ZAČETNIM STANJEM

3.1. Osnovni pojmi

Definicija: Časovno homogeno markovsko verigo v diskretnem času in na števni množici stanj s prostim začetnim stanjem sestavljajo:

- števna množica S - množica stanj;
- merljiv prostor $(\Omega, \mathcal{F})$;
- na tem merljivem prostoru verjetnostne mere $\mathbb{P}_x$; $x \in S$;
- $\mathcal{F}/2^S$ merljive preslikave $X_0, X_1, \ldots : \Omega \longrightarrow S$
- prehodne verjetnosti $p_{x,y}$; $x, y \in S$, pri čemer zahtevamo $p_{x,y} \geq 0$ za vse $x, y \in S$ in $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$ za vse $x \in S$.
- slučajne spremenljivke $X_0, X_1, \ldots$ pri vsaki od verjetnostnih mer $\mathbb{P}_x$ tvorijo markovsko verigo na S s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$; $x, y \in S$, njena začetna porazdelitev pa je določena s $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.

Opazka 3.1: Iz opazke 2.2 sledi, da za vsako stohastično matriko $P \in [0,1]^{S \times S}$ obstaja markovska veriga s prostim začetnim stanjem in prehodno matriko P ($X_0, X_1, \ldots$ definiramo na kanoničnem merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}) := (S^{\mathbb{N}_0}, \underbrace{\mathcal{Y}^{\otimes \mathbb{N}_0}}_{\text{produktna } \sigma\text{-algebra}})$

Iz opazke 2.1 pa sledi, da je porazdelitev procesa $X_0, X_1, \ldots$ pri $\mathbb{P}_x$ natančno določena z x in prehodno matriko P.

<u>Primer</u> [kockarjev bankrot/propad]:
Kockar ima na začetku premoženje velikosti $a \in \mathbb{N}$, želi pa imati premoženje $b > a$. Dokler ima premoženje $k \in \{1, \dots, b-1\}$, stavi eno enoto. Z verjetnostjo p pridobi, z verjetnostjo $1-p$ pa izgubi eno enoto. Kolikšna je verjetnost, da dobi željeno premoženje b?

To modeliramo z markovsko verigo na $S := \{0, 1, \dots, b\}$, ki jo definirajo prehodne verjetnosti:

absorbirajoče stanje

$p_{0,0} = 1, \quad p_{b,b} = 1$

20. oktober 2025

$$p_{k,k+1} = p, \quad p_{k,k-1} = 1-p \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, b-1$$

$$T_k := \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid X_n = k\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

$$w_a := \mathbb{P}_a(T_b < \infty) = ? \qquad w_0 = 0, \quad w_b = 1$$

$a = 1, \dots, 2, \dots, b-1$:

$$w_a = \mathbb{P}_a(X_1 = a+1)\, \mathbb{P}_a(T_b < \infty \mid X_1 = a+1) + \mathbb{P}_a(X_1 = a-1)\, \mathbb{P}_a(T_b < \infty, X_1 = a-1)$$

$$\mathbb{P}_a(\cancel{X_0 = a}, X_1 = a+1) = \underbrace{\mathbb{P}(X_0 = a)}_{1} \cdot \underbrace{p_{a,a+1}}_{p}$$

$$w_a = p\, \mathbb{P}_a(\cancel{X_0 = b} \text{ ali } X_1 = b \text{ ali } X_2 = b \text{ ali} \cdots \mid X_1 = a+1)$$
$$+ (1-p)\, \mathbb{P}_a(\cancel{X_0 = b} \text{ ali } X_1 = b \text{ ali } \cdots \mid X_1 = a-1)$$

Po trditvi 2.4. je pogojno na dogodek $\{X_1 = a+1\}$ ali na dogodek $\{X_1 = a-1\}$, proces $X_1, X_2, \dots$ spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in začetno porazdelitvijo skoncentrirano $a+1$ oziroma $a-1$.
To pa je tudi proces $X_0, X_1, X_2, \dots$ pri verjetnostni meri $\mathbb{P}_{a+1}$ oz $\mathbb{P}_{a-1}$.

Iz enoličnosti (opazka 2.1) pa sledi, da se pogojna porazdelitev procesa $X_1, X_2, \dots$ glede na $\{X_1 = a+1\}$ oz. $\{X_1 = a-1\}$ (pri $\mathbb{P}_a$) ujema z brezpogojno porazdelitvijo procesa $X_0, X_1, \dots$ pri $\mathbb{P}_{a+1}$ oz. $\mathbb{P}_{a-1}$.

$$\begin{aligned} w_a &= p \cdot \mathbb{P}_{a+1}(X_0 = b \text{ ali } X_1 = b, \dots) + (1-p)\,\mathbb{P}_{a-1}(X_0 = b \text{ ali } X_1 = b \text{ ali } \dots) \\ &= p\,\mathbb{P}_{a+1}(T_b < \infty) + (1-p)\,\mathbb{P}_{a-1}(T_b < \infty) \\ &= p\, w_{a+1} + (1-p) w_{a-1} \end{aligned}$$

(Zveza je očitna, vendar je v ozadju veliko teorije. To je lahko vprašanje na ustnem izpitu.)

V izogib računanja, se omejimo na $p = 1/2$.

$$w_0 = 1, \quad w_b = 1, \quad w_a = \tfrac{1}{2}(w_{a+1} - w_{a-1}) \quad \text{za } a = 1, \dots, b-1$$

$$w_{a+1} - w_a = w_a - w_{a-1}$$

$w_0, w_1, w_2, \dots$ je torej aritmetično zaporedje $\Rightarrow w_a = \frac{a}{b}$

Na vajah: izračun za splošni p.

Podobno za verjetnost bankrota $r_a := \mathbb{P}_a(T_0 < \infty)$ dobimo $r_0 = 1$, $r_b = 0$, $r_{a+1} - r_a = r_a - r_{a-1}$. Sledi $r_a = \frac{b-a}{b}$.
Opazimo, da je $r_a + w_a = 1$.

$$\mathbb{P}_a(T_0 < \infty) + \mathbb{P}_a(T_b < \infty) = 1$$

Vemo še, da je $\mathbb{P}_a(T_0 < \infty \text{ in } T_b < \infty) = 0$. Sledi $\mathbb{P}_a(T_0 < \infty \text{ ali } T_b < 1) = 1$.

$\pi(x) \equiv \pi(\{x\})$, zloraba notacije, naredimo identifikacijo
$\pi \equiv [\pi(s_1), \pi(s_2), \dots, \pi(s_m)]$

Iz markovske verige s prostim začetnim stanjem in verjetnostne mere π na S dobimo slučajni proces

$X_0, X_1, \ldots$ z $X_0 \sim \pi$, če privzememo verjetnostno mero:
$$\mathbb{P}_\pi(A) := \sum_{x \in S} \pi(x)\, \mathbb{P}_x(A).$$

DV: to je spet verjetnostna mera (zamenjava vrstnega reda seštevanja).

Porazdelitev tega procesa pri $\mathbb{P}_\pi$ je enolično določena s π in prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$, saj je porazdelitev procesa pri $\mathbb{P}_x$ dobčena že z x in prehodnimi verjetnostmi (opazka 3.1).

<u>Lema 3.2</u>: Naj bodo verjetnostne mere $\mathbb{P}_x$ in $\mathbb{P}_\pi$ podane tako kot zgoraj. Če sta A in B dogodka, $g \geq 0$ in $\mathbb{P}_x(A) = g \cdot \mathbb{P}_x(b)$ za vse $x \in S$, je tudi $\mathbb{P}_\pi(A) = g\,\mathbb{P}_\pi(b)$.

<u>Dokaz</u>: $\mathbb{P}_\pi(A) = \sum_{x \in S} \pi(x)\mathbb{P}_x(A) = \sum \pi(x) g\, \mathbb{P}_x(B) = g \sum_{x \in S} \pi(x)\mathbb{P}_x(B)$
$= g\, \mathbb{P}_\pi(B).$ ▨

<u>Posledica 3.3</u>: Pod zgornjimi pogoji je $X_0, X_1, \ldots$ pri $\mathbb{P}_\pi$ prav tako markovska veriga, in sicer s fiksno začetno porazdelitvijo π in istimi prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$.

<u>Dokaz</u>: $\mathbb{P}_x(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n+1} = x_{n+1}) = \mathbb{P}_x(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \cdot p_{x_n, x_{n+1}}$
↳ lahko zamenjemo s π (lema 3.2) ▨

<u>Primer</u>: vreme

$$\begin{array}{ll} & \\ \text{pretežno jasno} & \\ \text{pretežno oblačno} & P = \\ \text{dež} & \end{array}
\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}
= \begin{bmatrix} [1\ 0\ 0]\,P \\ [0\ 1\ 0]\,P \\ [0\ 0\ 1]\,P \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.29 & 0.16 \\ 0.3 & 0.46 & 0.24 \\ 0.3 & 0.37 & 0.33 \end{bmatrix} \qquad P^3 = \begin{bmatrix} 0.475 & 0.332 & 0.193 \\ 0.35 & 0.408 & 0.243 \\ 0.35 & 0.381 & 0.269 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.400586 & 0.371135 & 0.228279 \\ 0.399609 & 0.371626 & 0.228764 \\ 0.399609 & 0.371621 & 0.228770 \end{bmatrix}$$

Opazka 3.4: Robne porazdelitve π_n so pri vsaki meri $\mathbb{P}_\pi$ enolično določene s prehodno matriko – velja $\pi_n = \pi P^n$. Pravimo jim inducirane porazdelitve.

Definicija: Porazdelitev π^* je stacionarna ali invariantna za markovsko verigo s prostim začetnim stanjem, če se z njo ujemajo vse pripadajoče inducirane porazdelitve. Ekvivalentno, če je $\pi^* P = \pi^*$ oziroma, če je π^* levi lastni vektor matrike P za lastno vrednost 1.

Opazka 3.5: Število 1 je lastna vrednost vsake matrike, saj ima desni lastni vektor $\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

Primer: $\pi^* = [p_1^*, p_2^*, p_3^*]$

(vreme)

$$\pi^*(P - I) = 0$$

$$P - I = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Imamo sistem treh enačb $\rightsquigarrow$

$$p_2^* = \frac{13}{8} p_3^*$$

$$p_1^* = \frac{7}{4} p_3^*$$

Če želimo, da je π^* verjetnostna mera, mora biti $\pi^* 1 = 1$.

$p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \quad \Rightarrow \quad p_3^* = \frac{8}{35}$

$$\pi^* = \begin{bmatrix} \frac{14}{35} & \frac{13}{35} & \frac{8}{35} \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0.4 & 0.371429 & 0.228571 \end{bmatrix}$$

podobno vrsticam matrike P^{10}

Kaže torej, da je $\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi^* \\ \pi^* \\ \pi^* \end{bmatrix}$ oziroma $\lim_{n\to\infty} \pi P^n = \pi^*$ za vsako začetno porazdelitev π.

$$\det(P - I - \lambda I) = \det(P - (\lambda+1) I)$$

$$= \begin{vmatrix} -0.3-\lambda & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4-\lambda & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & -0.5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0.2 & 0.1 \\ -\lambda & -0.4-\lambda & 0.2 \\ -\lambda & 0.3 & -0.5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & -0.4-\lambda & 0.2 \\ 1 & 0.3 & -0.5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.6-\lambda & 0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left[(\lambda + 0.6)^2 - 0.1^2 \right] =$$

$$= -\lambda(\lambda+0.5)(\lambda+0.7)$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -0.7$

Lastne vrednosti matrike P: $1, 0.5, 0.3$

Naj bosta v_2 in v_3 leva lastna vektorja za lastni vrednosti $\lambda_2 + 1$ in $\lambda_3 + 1$.

$$V := \mathrm{Lin}(v_2, v_3)$$

Za vsak $v \in V$, je spet $vP \in V$ in velja

$$\|vP\| \leq 0.5 \|v\|$$

Poleg tega pa za vsak $v \in V$ velja $v\mathbb{1} = 0$.

Vemo: $$P\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

$$v_2\mathbb{1} = v_2 P \mathbb{1} = 0.5\, v_2 \mathbb{1} \Rightarrow v_2 \mathbb{1} = 0.$$

Podobno $v_3 \mathbb{1} = 0 \Rightarrow \forall v \in V.\ v\mathbb{1} = 0.$

Če je π verjetnostna porazdelitev na $S = \{1, 2, 3\}$, obstajata tak $a \in \mathbb{R}$ in tak $v \in V$, da je $\pi = a \cdot \pi^* + v$.

$$\underbrace{\pi \mathbb{1}}_{1} = a \underbrace{\pi^* \mathbb{1}}_{1} + \underbrace{v \mathbb{1}}_{0}$$

$\Rightarrow a = 1$, $\pi = \pi^* + v$

$$\pi P^n = \pi^* P^n + v P^n$$
$$= \pi^* + v P^n$$

$$\|vP^n\| \leq 0.5 \cdot \|v\|$$

Torej je $\lim_{n \to \infty} \pi P^n = \pi^*$.

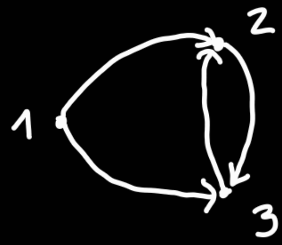
Takemu obnašanju pravimo ergodičnost.

Primer:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad P - I = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}p_1^* = 0 \qquad \cancel{\frac{1}{4}p_1^*} - \frac{1}{4}p_2^* + \frac{1}{2}p_3^* = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{4}p_1^*} + \frac{1}{4}p_2^* - \frac{1}{2}p_3^* = 0$$



$$\Rightarrow p_2^* = 2p_3^* \Rightarrow \pi^* = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Dejstvo, da je $p_1^* = 0$, je posledica minljivosti stanja 1:

$$\mathbb{P}_1(T_1^+ = \infty) = \mathbb{P}_1\left(\min\{n = 1,2,3,\dots;\ X_n = 1\} = \infty\right)$$
$$= \mathbb{P}_1(X_n \neq 1 \text{ za vse } n = 1,2,3,\dots) > 0$$

Izrek 3.6: Vsaka markovska veriga na končni množici stanj ima stacionarno porazdelitev. Dokaz po izreku 3.49.

Vemo: 1 je lastna vrednost prehodne matrike P, torej obstaja levi lastni vektor; obstaja tak π^*, da je $\pi^* P = \pi^*$.

Če je $\pi^* \mathbb{1} \neq 0$, lahko π^* izberemo tako, da bo $\pi^* \mathbb{1} = 1$. Ni pa rečeno, da so vse komponente vrstičnega vektorja nenegativne! (To želimo dokazat.)

Perron-Frobeniusov izrek: Vsaka matrika z nenegativnimi komponentami ima tako realno lastno vrednost r, da za poljubno lastno vrednost λ velja $|\lambda| \leq r$.

Nadalje za lastno vrednost r obstaja lastni vektor z nenegativnimi komponentami.
Dokaz opuščamo. Zgornje bomo dokazali z verjetnostnimi metodami.

<u>Primer</u>: enostavni slučajni sprehod na $S := \mathbb{Z}$

$$p_{k,k+1} = p_{k,k-1} = 1/2$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi_i^* p_{ij} = \pi_j^*$$

$$\pi_j^* = \frac{1}{2}\left(\pi_{j+1}^* + \pi_{j-1}^*\right)$$

Števila π_j^*, $j \in \mathbb{Z}$, torej tvorijo aritmetično zaporedje. Če želimo, da je $\pi_j^* > 0$ za vse $j \in \mathbb{Z}$, morajo biti vsa števila π_j^* enaka. Nikoli se ne seštejejo v 1.
$\Rightarrow$ Invariantna porazdelitev ne obstaja.

πP pa lahko izračunamo za kateri koli vrstični vektor z vrednostmi v $[0, \infty]$.

"posplošena"
Matrika P predstavlja operator na množici pozitivnih mer na S.

$$\pi \longmapsto \pi P$$

Vsaki pozitivni meri π lahko priredimo inducirane mere $\pi_n = \pi P^n$. Pozitivna mera π je invariantna, (ne uporabljamo stacionarna) če je $\pi^* P = \pi^*$.
Enostavni slučajni sprehod ima invariantne mere $\pi^*(k) = a$ za vse k, kjer je $a \in [0, \infty]$ fiksen.

Od zadnjič: $\boxed{\text{22. oktober 2025}}$

π: vrstični vektor $\equiv$ (verjetnostna) mera na S

πP = porazdelitev sl. sprem. X_1 pri verj. meri $\mathbb{P}_\pi$

oz. pri $X_0 \sim \pi$ (opazka 3.4)

$$\delta_x \equiv [0 \cdots 0 \ \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1} \ 0 \cdots 0]$$

$\delta_x P$ = porazdelitev slučajne spr. X_1 pri $\mathbb{P}_x$

Kaj pa pomeni Ph? $Ph = ?$

Opazka 3.7: πh ustreza pričakovani vrednosti $\mathbb{E}[h(X)]$, kjer $X \sim \pi$. h preizkusna funkcija

Ph je stolpčni vektor iz $\mathbb{E}_x[h(X_1)]$ za vse možne $x \in S$.

$$(\underbrace{\delta_x P}_{X_1})h$$

$$\delta_x P h \equiv \mathbb{E}_x[h(X_1)]$$

pričakovana vrednost pri $\mathbb{P}_x$

$\delta_x(Ph)$?

3.2. Krepka lastnost Markova

sledi iz izreka 2.12 in posledice 3.3

Izrek 3.8 [krepka lastnost Markova]:

Naj bo:
- $X_0, X_1, \dots$ markovska veriga na množici S s prostim začetnim stanjem in prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$
- π verjetnostna mera na S
- T čas ustavljanja za $X_0, X_1, \dots$ oz. pripadajočo naravno filtracijo $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2, \dots$
- $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T = n\} \cap B_n$, kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$
- ρ pogojna porazdelitev sl. sprem. X_T glede na B pri $\mathbb{P}_\pi$ (strogo gledano, sl. sprem. Y, ki je na dogodku $\{T < \infty\}$ enaka X_T) in zožena na ...

Pogojno na B je tedaj $X_T, X_{T+1}, \dots$ markovska veriga z začetno porazdelitvijo ρ in istimi prehodnimi verjetnostmi za poljubno množico $D \in (2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0}$ velja:

$$\mathbb{P}_\pi^B\left[(X_T, X_{T+1}, \dots) \in D\right] = \mathbb{P}_\rho\left[(X_0, X_1, \dots) \in D\right].$$

Dokaz: sledi iz izreka 2.12 in posledice 3.3. $\blacksquare$

$\mathbb{P}(X \in D)$ osnovno $\underset{\text{ekvivalentno}}{\overset{\text{nekako}}{\approx}}$ $\mathbb{E}[h(X)]$ bolj fleksibilno } radi bi rezulta v desni obliki

„Standardna mašinerija:"

$$\mathbb{P}(X \in D) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_D(X)\right], \text{ kjer je } \mathbb{1}_D(x) = \mathbb{1}(x \in D) = \begin{cases} 1; & x \in D \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Z uporabo linearnosti posplošimo z indikatorjev na enostavne funkcije h:

enostavne $\leftrightarrow$ stopničaste

teorija mere

Z uporabo izreka o monotoni/kombinirani konvergenci posplošimo na želeni razred funkcij h.

Opazka 3.9: Če je $\mathbb{P}_\pi(A) = \sum_{x\in S} \pi(x) \mathbb{P}_\pi(A)$, tudi za poljubno omejeno slučajno spremenljivko Y velja

$$\mathbb{E}_\pi(Y) = \sum_{x\in S} \pi(x) \mathbb{E}_x(Y).$$

Med drugim je: $\pi P h = \mathbb{E}_\pi[h(X_1)]$.

Izrek 3.10: Pod predpostavkami izreka 3.8 za poljubno omejeno in $(2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljivo funkcijo h velja zveza:

$$\mathbb{E}_\pi^B[h(X_T, X_{T+1}, \dots)] = \mathbb{E}_P[h(X_0, X_1, \dots)]$$

Dokaz: „Standardna mašinerija" teorije mere.

Opazka 3.11: Če je vselej $T<\infty$, dogodki oblike $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{T=n\} \cap B_n$, kjer je $B_n \cap \mathcal{F}_n$, tvorijo σ-algebro. (DV)

V splošnem pa to velja za dogodke oblike $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}} \{T=n\} \cap B_n$, kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$, za $\mathcal{F}_\infty$ pa lahko vzamemo poljubno σ-algebro, ki vsebuje vse $\mathcal{F}_n$.

[Če je $T=\infty$, ni zaprtosti za komplemente v 1. primeru].

Definicija: Za merljiv prostor $(\Omega, \mathcal{F})$, filtracijo $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ in čas ustavljanja T glede na to filtracijo označimo z $\mathcal{F}_T$ σ-algebro dogodkov oblike

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}} \{T_n = n\} \cap B_n,$$

kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$ in $B_\infty \in \mathcal{F}$.

Opazka 3.12: Če je T konstanten $(T=n<\infty)$, se definiciji ujemata.

T čas ustavljanja

Trditev 3.13: $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 .\ A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n\}$
$= \{A \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 .\ A \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n\}$

Dokaz: Če je $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \{T=n\} \cap \underset{\mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{B_n}}$, je

$$A \cap \{T=n\} = \underset{\mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{B_n}} \cap \underset{\mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{\{T=n\}}} \in \mathcal{F}_n \qquad \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$$

čas ustavljanja

Če za vse $n \in \mathbb{N}_0$ velja $A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n$, lahko postavimo $B_n := A \cap \{T=n\}$, $B_\infty := A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$.
$\subseteq \{T=\infty\}$

Nadalje je: $A \cap \{T \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{(A \cap \{T=k\})}_{\in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n}$

$$A \cap \{T=n\} = \underbrace{(A \cap \{T \le n\})}_{\mathcal{F}_n \in} \setminus \underbrace{(A \cap \{T \le n-1\})}_{\substack{\in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n \text{ za } n=1,2,\dots \\ = \emptyset \in \mathcal{F}_n \text{ za } n=0}} \qquad \boxed{\diagup}$$

Trditev 3.14: Če je $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ naravna filtracija za slučajni proces $X_0, X_1, \dots$ z vrednostmi v merljivem prostoru $(S, \mathcal{S})$ in T čas ustavljanja za to filtracijo oz. proces, je slučajna spremenljivka

$$X^* = \begin{cases} X_T ; & T < \infty \\ \text{karkoli } \mathcal{F}/\mathcal{S} \text{ merljivega} ; & \text{sicer} \end{cases}$$

$\mathcal{F}_T/\mathcal{S}$ merljiva.

<u>Dokaz</u>: Za vsak $C \in \mathcal{S}$ moramo dokazati, da je

$$\{X^* \in C\} = \{w \in \Omega \mid X^*(w) \in C\} = (X^*)^{-1}(C) \in \mathcal{F}(T).$$

Ekvivalentno, $\{X^* \in C\} \in \mathcal{F}$ in $\{X^* \in C, T=n\} \in \mathcal{F}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$.

Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$\{X^* \in C, T=n\} = \{\overset{\mathcal{F}_n}{\Downarrow}\!\!\!\!X_n \in C, \overset{\mathcal{F}_n}{\Downarrow}\!\!\!\!T=n\} \in \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$$

Nadalje je

$$\{\underbrace{X^* \in C}_{\in \mathcal{F}}, \underbrace{T=\infty}_{\in \mathcal{F}}\} \in \mathcal{F}$$

$$\{X^* \in C\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \{X^* \in C, T=n\} \in \mathcal{F}$$

▨

27. oktober 2025

Iz trditve 3.13 sledi

<u>Izrek 3.10'</u>: Pod predpostavkami izreka 3.8 za vsako omejeno in $(2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljivo funkcijo h in vsak $\underbrace{B \in \mathcal{F}_T}_{\text{Sprememba od 3.10}}$, za katerega je $\mathbb{P}(B) > 0$, velja zveza:

$$\mathbb{E}_\pi^B[h(X_T, X_{T+1}, \ldots)] = \mathbb{E}_\rho[h(X_0, X_1, \ldots)],$$

kjer je ρ porazdelitev sluč. sprem. X_T pri $\mathbb{P}_\pi^B$.

<u>Definicija</u>: Za dogodek B s $\mathbb{P}(B) > 0$ in slučajno spremenljivko X z $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ definirajmo:

- $\mathbb{E}^B(X) :=$ pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X pri $\mathbb{P}^B$
- $\mathbb{E}(X \mid B) := \dfrac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}$

<u>Trditev 3.15</u>: Brž ko je $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, je tudi $\mathbb{E}^B(|X|) < \infty$ in velja $\mathbb{E}^B(X) = \mathbb{E}(X \mid B)$.

Dokaz: „standardna mašinerija"; Naredimo le 1. korak.

$X = \mathbb{1}_A$: $\quad \mathbb{E}^B(X) = \mathbb{E}^B(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}^B(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$

$$\mathbb{E}(X \mid B) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A\cap B})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Nadaljevanje: domača vaja. $\square$

Definicija: Naj bo X $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljiva slučajna spremenljivka z $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Za σ-algebro $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ definirajmo $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$ kot $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljivo slučajno spremenljivko Z z lastnostjo, da za vsak dogodek $B \in \mathcal{H}$ velja: $\mathbb{E}[Z \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]$. Slučajni spremenljivki Z pravimo pogojna pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X glede na $\mathcal{H}$.

Opazka 3.16: Pogojna pričakovana vrednost Z je le skoraj natančno določena: če sta Z_1 in Z_2 pogojni pričakovani vrednosti slučajne spremenljivke X glede na $\mathcal{H}$, velja $\mathbb{P}(Z_1 = Z_2) = 1$: postavimo $B_1 := Z_1 > Z_2$, $B_2 = Z_2 > Z_1$ (DV).

$\rightsquigarrow Z = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$ je v resnici ekvivalenčni razred, gre za zlorabo notacije

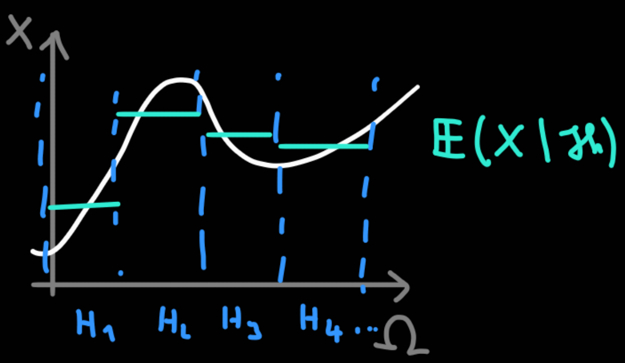
Opazka 3.17: Če je X že $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljiva, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) = X$.

Trditev 3.18: Če je $\mathcal{H}$ σ-algebra, generirana z števno particijo $(H_k)_{k\in K}$ prostora Ω, tj. družina vseh možnih unij množic H_k, in Z slučajna spremenljivka, velja:

(1) Z je $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljiva $\Leftrightarrow$ Z je na vsakem dogodku H_k konstantna

(2) $Z = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \Leftrightarrow Z$ je $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ merljiva in na vsakem dogodku H_k s $\mathbb{P}(H_k) > 0$ enaka $\mathbb{E}(X \mid H_k)$.

Dokaz: DV.



Posledica 3.19: Za $\mathcal{H} = \{\emptyset, \Omega\}$ je $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X)$.

Izrek 3.20 [različica krepke lastnosti Markova za pogojno pričakovano vrednost]: Pod pogoji izreka 3.8 za vsako omejeno in $(2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0} / \mathcal{B}(\mathbb{R})$-merljivo funkcijo $h: S^{\mathbb{N}_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ na dogodku $\{T < \infty\}$ velja:

$$\mathbb{E}_\pi[h(X_T, X_{T+1}, \ldots) \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}_{X_T}[h(X_0, X_1, \ldots)].$$

Opomba: Glede na to, da so $X_T, X_{T+1}, \ldots$ nedefinirane na $\{T = \infty\}$ bi morali $h(X_T, X_{T+1}, \ldots)$ zamenjati s slučajno spremenljivko Y, ki se na dogodku $\{T < \infty\}$ ujema s $h(X_T, X_{T+1}, \ldots)$.

Opomba: Pri $\mathbb{E}_{X_T}[h(X_0, X_1, \ldots)]$ gre za dve ločeni manifestaciji slučajnega procesa $X_0, X_1, \ldots$

$$w \longmapsto \mathbb{E}_{X_{T(w)}(w)}[h(X_0, X_1, \ldots)]$$

$$= \int h(X_0(w'), X_1(w'), \ldots) \, d\mathbb{P}_{X_{T(w)}(w)}(w')$$

Nauk: imamo dve omegi.

Podoben primer od prej: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

$$F_X(X) \neq \mathbb{P}(X \leq X) = 1$$

Nauk: pri zlorabi notacije moramo biti previdni

$$w \mapsto \overset{\shortparallel}{F_X}(X(w)) = \mathbb{P}(\{w' \mid X(w') \leq X(w)\})$$

<u>Dokaz izreka 3.20</u>: Spomnimo se izreka 3.10':

$$\mathbb{E}_\pi[h(X_T, X_{T+1}, \ldots) \mid B] = \mathbb{E}_\rho[h(X_0, X_1, \ldots)].$$

$$\parallel \qquad \mathcal{F}_T \ni B,\ B \subseteq \{T<\infty\}$$

$$\frac{1}{\mathbb{P}_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi[\underbrace{h(X_T, X_{T+1}, \ldots)}_{\hookrightarrow \text{strogo gledano: } Y \text{ od prej}} \mathbb{1}_B]$$

Za poljubno omejeno slučajno spremenljivko W velja:

$$\mathbb{E}_\rho(W) \overset{3.9}{=} \sum_{x \in S} \rho(x) \mathbb{E}_x(W) = \sum_{x \in S} \mathbb{P}_\pi^B(X_T = x) \mathbb{E}_x(W)$$

$$= \mathbb{E}_\pi^B[\mathbb{E}_{X_T}(W)]$$

$$\overset{3.15}{=} \frac{1}{\mathbb{P}_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi[\mathbb{E}_{X_T}(W) \cdot \mathbb{1}_B]$$

Sledi, da za poljuben $B \in \mathcal{F}_T$ s ~~$\mathbb{P}_\pi(B)$~~ >0 velja:

$$\cancel{\frac{1}{\mathbb{P}_\pi(B)}} \mathbb{E}_\pi[h(X_T, X_{T+1}, \ldots) \mathbb{1}_B] = \cancel{\frac{1}{\mathbb{P}_\pi(B)}} \mathbb{E}_\pi[\mathbb{E}_{X_T}[h(X_0, X_1, \ldots)] \mathbb{1}_B]$$ ▨

<u>3.3 Dosegljivost stanj</u>

Popravek terminologije:

<u>Definicija</u>: Čas ~~zadetja~~ vstopa v množico A:

$$T_A := \min\{n = 0, 1, 2, \ldots \mid X_n \in A\}$$

Čas zadetja množice A: $T_A^{(1)} := \min\{n = 1, 2, 3, \ldots \mid X_n \in A\}$.

<u>Opazka 3.21</u>: Tudi $T_A^{(1)}$ je čas ustavljanja:

$\{T_A^{(1)} = n\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}$.

<u>Opazka 3.22</u>: Če je $x \notin A$, je $P_x(T_A^{(1)} = T_A) = 1$.

<u>Definicija</u>: $T_y := T_{\{y\}}$, $\quad T_y^{(1)} := T_{\{y\}}^{(1)}$

Definicija: Verjetnost dosega stanja y iz stanja x je:

$$\rho_{x,y} := \mathbb{P}_x(T_y^{(1)} < \infty) = \mathbb{P}_x(X_1 = y \text{ ali } X_2 = y \text{ ali } \dots)$$

Stanje y je dosegljivo iz stanja x, če je $\rho_{x,y} > 0$.
Pišemo $x \longrightarrow y$. $\quad$ $x \to x$ ni nujno res

Opazka 3.23: Za poljubne dogodke $A_1, A_2, \dots$ velja:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) > 0 \iff \exists n \in \mathbb{N}.\ \mathbb{P}(A_n) > 0$$

Torej je $x \longrightarrow y \iff \exists n \in \mathbb{N}.\ \mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$.

Trditev 3.24: Če je $x \longrightarrow y$ in $y \longrightarrow z$, je tudi $x \longrightarrow z$.

Dokaz: Obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da je $\mathbb{P}_x(X_m = y) > 0$, in tak $n \in \mathbb{N}$, da je $\mathbb{P}_y(X_n = z) > 0$. Po lastnosti Markova (izrek 3.8) pa je $\mathbb{P}_x(X_{m+n} = z \mid X_m = y) = \mathbb{P}_y(X_n = z)$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}_x(X_{m+n} = z) \geq \mathbb{P}_x(X_m = y, X_{m+n} = z) = \mathbb{P}_x(X_m = y)\,\mathbb{P}_y(X_n = z) > 0. \quad \blacksquare$$

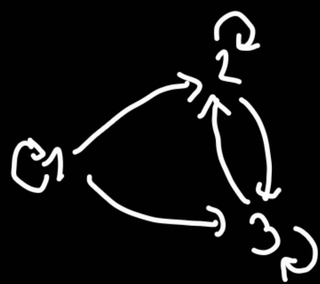
Opomba: $P^m = [\mathbb{P}_x(X_m = y)]_{x,y}$ $\quad$ $P^{m+n} = P^m \cdot P^n$

Sledi: $\mathbb{P}_x(X_{m+n} = z) = \sum_y \mathbb{P}_x(X_m = y)\,\mathbb{P}_y(X_n = z)$

Definicija: Stanje x je minljivo (angl. transient), če je $\rho_{x,x} < 1$, in povrnljivo (angl. recurrent), če je $\rho_{x,x} = 1$.

Primer:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ & 3/4 & 1/4 \\ & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$



Stanje 1 je minljivo, saj je $\rho_{1,1} = 1/2$.
Stanji 2 in 3 sta povrnljivi:

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{2,2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\rho_{3,2} \\ \rho_{3,2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho_{3,2} \quad \Rightarrow \rho_{3,2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho_{2,2} = 1$$

Podobno za $\rho_{3,3}$.

Lema 3.25: Naj bo $x \longrightarrow y$, tj. $\rho(x,y) > 0$. Če je $\rho_{y,x} < 1$, je stanje x minljivo.

nikoli več x

Dokaz: BŠS $x \neq y$. $\exists m \in \mathbb{N}.\ \mathbb{P}_x(X_m = y) > 0$ in $\forall n < m$ ($n \in \mathbb{N}$). $\mathbb{P}_x(X_n = y) = 0$

$$\mathbb{P}_x(X_n = x, X_m = y) = \mathbb{P}_x(X_n = x) \cdot \mathbb{P}_x(X_m = y \mid X_n = x)$$
$$= \mathbb{P}_x(X_n = x)\, \underbrace{\mathbb{P}_x(X_{m-n} = y)}_{0} = 0$$

krajša pot

$\Rightarrow$ Za vsak $n \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ je torej $\mathbb{P}_x(X_n = x, X_m = y) = 0$.

$\boxed{\text{3. november 2025}}$

to bi šlo, vendar bomo naredili drugače (dokaz kasneje) (trditev 3.29)

Trditev 3.26: Neenakost $P_x(X_n = y) > 0$ velja natanko tedaj, ko obstaja taka veriga stanj $x = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = y$, da je $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$ za vse $k = 1, 2, \dots, n$. Torej je $x \longrightarrow z$ natanko tedaj, kadar obstaja takšen n in takšni $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$, da je $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$ za vse $k = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz: $\mathbb{P}_x(X_n = y) = \sum\limits_{z_1, \dots, z_{n-1} \in S} p_{z_0 z_1} p_{z_1 z_2} \cdots p_{z_{n-1} z_n}$, kjer je $z_0 = x$ in $z_n = y$.

Vsota na desni je večja od 0 natanko tedaj, ko obstajajo taki $z_1, \dots, z_{n-1}$ da je $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$ za vse $k = 1, \dots, n$.

Drugi del sledi iz opazke 3.23:

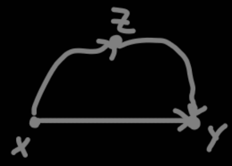
$$x \to y \iff \exists n \in \mathbb{N}.\ P_x(X_n = y) > 0$$

$$\Big\Updownarrow \text{def}$$

$$P_x(\exists n \in \mathbb{N}.\ X_n = y) > 0$$

$\blacksquare$

Trditev 3.27: $\rho_{x,y} = p_{x,y} + \sum_{z;\, z\neq y} p_{x,z}\,\rho_{z,y}$.



Dokaz: $$\rho_{x,y} = \mathbb{P}_x(\{X_1=y\}\cup\{X_2=y\}\cup\cdots\}$$

$$= \mathbb{P}_x(X_1=y) + \sum_{z;\, z\neq y} \mathbb{P}_x(\{X_1=z\}\cap(\{X_2=y\}\cup\{X_3=y\}\cup\cdots)$$

$$= \mathbb{P}_x(X_1=y) + \sum_{\substack{z;\, z\neq y\\ \mathbb{P}_x(X_1=z)>0}} \mathbb{P}(X_1=z)\,\mathbb{P}_x(\{X_2=y\}\cup\{X_3=y\}\cup\cdots\mid X_1=z)$$

$$= p_{x,y} + \sum_{z;\, z\neq y} p_{x,z}\,\mathbb{P}_z(\{X_1=y\}\cup\{X_2=y\}\cup\cdots)$$

lastnost Markova

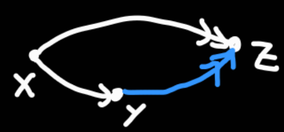
$$= p_{x,y} + \sum_{z;\, z\neq y} p_{x,z}\,\rho_{z,y}$$ ▨

Definicija: Stanje y je skoraj gotovo dosegljivo iz x, če je $\rho_{x,y}=1$; pišemo $x \twoheadrightarrow y$.

ni standardna oznaka

Stanje x je torej povrnljivo $\Leftrightarrow$ $x \twoheadrightarrow x$.

Trditev 3.28: Če je $x \twoheadrightarrow z$, $y\neq z$ in $p_{x,y}>0$, je tudi $y \twoheadrightarrow z$.



Dokaz: Po trditvi 3.27 je

$$\rho_{x,z} = p_{x,z} + \sum_{w;\, w\neq z} p_{x,w}\,\rho_{w,z}.$$

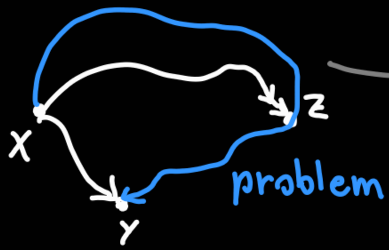
$$1 = p_{x,z} + \sum_{w;\, w\neq z} p_{x,w}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1-\rho_{x,z}}_{=0} = \sum_{w;\, w\neq z} p_{x,w}(1-\rho_{w,z})$$

Torej za vse $w\neq z$ velja $p_{x,w}(1-\rho_{w,z})=0$.

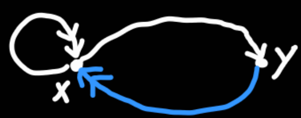
Ker je $p_{x,y}>0$ in $y\neq z$, mora biti $1-\rho_{w,z}=0$, t.j. $\rho_{y,z}=1$. ▨

~~Trditev 3.29:~~ $x \twoheadrightarrow z,\ x \longrightarrow y,\ y \neq z \not\Rightarrow y \twoheadrightarrow z$



Trditev 3.29: Če je x povrnljivo in $x \longrightarrow y$, je $y \twoheadrightarrow x$.

Dokaz: Po trditvi 3.26 obstaja taka veriga stanj $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$, da je $p_{z_{k-1} z_k} > 0$ za vse $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Privzamemo lahko, da so $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ vsi različni od x. Iz prejšnje trditve z indukcijo dobimo, da je $z_k \twoheadrightarrow x$ za vse $k = 0, 1, \dots, n$. ▨



$$\left(z_k \twoheadrightarrow x,\ z_k \longrightarrow z_{k+1},\ z_{k+1} \neq x \Rightarrow z_{k+1} \twoheadrightarrow x \right)$$

Velja: Trditev 3.29 $\Longleftrightarrow$ Lema 3.25, torej smo dokazali lemo 3.25.

Definicija: Za $k = 1, 2, \dots$ rekurzivno definiramo čas k-tega obiska množice $A \subseteq S$ s predpisom:

$$T_A^{(k+1)} := \begin{cases} \min\{n = T_A^{(k)}+1, T_A^{(k)}+2, \dots \mid X_n \in A\}; & T_A^{(k)} < \infty \\ \infty & ; T_A^{(k)} = \infty \end{cases},$$

kjer je $T_A^{(1)}$ že definiran. Število obiskov množice A je:

$$\begin{aligned} N(A) &:= |\{n = 1, 2, 3, \dots \mid X_n \in A\}| \\ &= \max\{k = 1, 2, \dots ;\ T_A^{(k)} < \infty\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_A^{(k)} < \infty) \end{aligned}$$

Če je $N(A) = \infty$, dobimo $T_A^{(1)} < T_A^{(2)} < \dots < \infty$, če je $N(A) < \infty$, pa dobimo $T_A^{(1)} < T_A^{(2)} < \dots < T_A^{(N(A))} < \infty = T_A^{(N(A)+1)} = \dots$.

Označimo $T_y^{(k)} := T_{\{y\}}^{(k)}$ in $N(y) := N(\{y\})$.

Opazka 3.30: $\{T_A^{(k)} < \infty\} = \{N(A) \geq k\}$

Spomnimo se: $\mathbb{P}_x(T_y^{(1)} < \infty) = \rho_{x,y}$

$$\mathbb{P}_x(T_y^{(k+1)} < \infty) = \mathbb{P}_x(T_y^{(k)} < \infty, T_y^{(k+1)} < \infty)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}_x(T_y^{(1)} < \infty)}_{\text{če je to } > 0} \cdot \mathbb{P}_x^{T_y^{(1)} < \infty}(T_y^{(k+1)} < \infty)$$

$$= \rho_{x,y} \cdot \mathbb{P}_x^{T_y^{(1)} < \infty}\left(\begin{matrix}\exists \text{ vsaj } k \text{ časov } n, \text{ za} \\ \text{katere je } X_{T_y^{(1)}+n} = y\end{matrix}\right)$$

krepka lastnost Markova
$X_{T_y^{(1)}} = y$

$$= \rho_{x,y} \mathbb{P}_y\left(\begin{matrix}\exists \text{ vsaj } k \text{ časov } n \text{ za} \\ \text{katere je } X_n = y\end{matrix}\right)$$

$$= \rho_{x,y} \mathbb{P}_y(T_y^{(k)} < \infty)$$

Med drugim je $\mathbb{P}_y(T^{(k+1)} < \infty) = \rho_{y,y} \mathbb{P}_y(T^{(k)} < \infty)$, torej z indukcijo dobimo: $\mathbb{P}_x(T_y^{(k+1)} < \infty) = \rho_{x,y} \cdot \rho_{y,y}^k$.

Dokazali smo:

Trditev 3.31: $\mathbb{P}_x(T_y^{(k)} < \infty) = \mathbb{P}_x(N(y) \geq k) = \rho_{x,y} \cdot \rho_{y,y}^{k-1}$ (za $k = 1, 2, \dots$).

Opazka 3.32 [razločitev]: Velja $\mathbb{P}_x(N(y) = 0) = 1 - \rho_{x,y}$ in nadalje:

* Če je stanje y minljivo ali $\rho_{x,y} = 0$, je:

$$\mathbb{P}_x(N(y) = k) = \mathbb{P}_x(N(y) \geq k) - \mathbb{P}_x(N(y) \geq k+1)$$

$$= \rho_{x,y} \cdot \rho_{y,y}^{k-1}(1 - \rho_{y,y}); \quad k = 1, 2, \dots$$

(ob dogovoru $0^0 := 1$)

Velja $\mathbb{P}_x(N(y) = \infty) = 0$

$x \longrightarrow y$

* Če je stanje y povrnljivo in $\rho_{x,y} > 0$, pa je $\mathbb{P}_x(N(y) = k) = 0$ za $k = 1, 2, 3, \ldots$; in $\mathbb{P}(N(y) = \infty) = \rho_{x,y}$.

<u>Ponovimo</u>:

Za slučajno spremenljivko N z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ velja:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}(N > k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(N \geq k).$$

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N > k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k)$$

<u>Opazka 3.33</u>: $\mathbb{E}_\pi[N(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(X_n \in A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(T_A^{(k)} < \infty)$

<u>Opazka 3.34</u>:

$$\mathbb{E}_x[N(y)] = \begin{cases} \frac{\rho_{x,y}}{1-\rho_{xy}} & ; \; y \text{ minljivo} \\ 0 & ; \; \rho_{x,y} = 0 \\ \infty & ; \; y \text{ povrnljivo in } \rho_{x,y} > 0 \end{cases}$$

$\mathbb{P}_x(T_y^{(k)} < \infty) = \rho_{xy}\rho_{x,y}^{k-1}$

(geo. vrsta)

Torej je bodisi $\mathbb{E}_x[N(y)] < \infty$ bodisi $\mathbb{P}_x(N(y) = \infty) > 0$.

<u>Opazka 3.35</u>: * Če je stanje x minljivo, je:

premaknjena geometrijska porazdelitev

$$\mathbb{P}_x(N(x) = k) = \rho_{x,x}^{k}(1 - \rho_{x,x}); \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad 0^0 = 1$$

$$\mathbb{P}_x(N(x) = \infty) = 0$$

Torej je $N(x) + 1 \sim \text{Geom}(\rho_{x,x})$ in $\mathbb{E}_x[N(x)] = \frac{\rho_{x,x}}{1-\rho_{x,x}}$.

* Če je stanje x povrnljivo, pa je: $\mathbb{P}_x(N(x) = \infty) = 1$.

10. in 17. november 2025

<u>Definicija</u>: Stanji sta povezani, če velja $x = y$ ali:

$$x \rightarrow y \quad \text{in} \quad y \longrightarrow x.$$

Pišemo: $x \longleftrightarrow y$

Opazka 3.36: To je ekvivalenčna relacija.

Definicija: Ekvivalenčnim razredom, ki jih porodi relacija povezanosti, pravimo nerazcepne množice.

Definicija: Markovska veriga je nerazcepna, če je celotna množica stanj nerazcepna.

Opazka 3.37: Za nerazcepni množici A in B so naslednje trditve ekvivalentne:

- $\exists x \in A.\ \exists y \in B.\ x \longrightarrow y$
- $\exists x \in A.\ \forall y \in B.\ x \longrightarrow y$
- $\forall x \in A.\ \exists y \in B.\ x \longrightarrow y$
- $\forall x \in A.\ \forall y \in B.\ x \longrightarrow y$

Če te trditve veljajo, pišemo $A \longrightarrow B$.

Opazka 3.38: Ta relacija je tranzitivna.

Trditev 3.39: Če je stanje x povrnljivo in $x \longrightarrow y$, potem je $x \twoheadrightarrow y$, $y \twoheadrightarrow x$, y pa je prav tako povrnljivo.

Dokaz: Izjava $y \twoheadrightarrow x$ sledi iz trditve 3.29.
Dovolj je dokazati, da je stanje y povrnljivo. Uporabili bomo opazki 3.33 in 3.34:

$$\mathbb{E}_\pi[N(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(X_n \in A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(T_a^{(n)} < \infty$$

in

$$\mathbb{E}_x[N(y)] = \begin{cases} \frac{\rho_{x,y}}{1-\rho_{y,y}} & ; \ y \text{ minljivo} \\ 0 & ; \ \rho_{x,y} = 0 \\ \infty & ; \ y \text{ povrnljivo in } \rho_{x,y} > 0 \end{cases}$$

Dovolj je torej dokazati, da je $\mathbb{E}_x[N(y)] = \infty$, saj iz tega sledi povrnljivost y. Vemo

$$\mathbb{E}_x[N(x)] = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_m = x) = \infty$$

Ker je $x \to y$, po opazki 3.23 obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $\mathbb{P}_x(X_k = y) > 0$. Ta dva podatka nam data

$$\infty = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_m = x) \cdot \underline{\mathbb{P}_x(X_k = y)}$$

$$\overset{\text{Markov}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_m = x) \cdot \mathbb{P}_x(X_{m+k} = y \mid X_m = x)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_m = x, X_{m+k} = y)$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_{m+k} = y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \mathbb{E}_x[N(y)]$$

$\Rightarrow y$ je povrnljivo ▨

<u>Posledica 3.40</u>: V vsaki nerazcepni množici so bodisi vsa stanja minljiva, bodisi vsa stanja povrnljiva.

<u>Definicija</u>: Množica $A \subseteq S$ je zaprta (tudi absorbirajoča, terminalna), če za poljubna $x \in A$ in $y \notin A$ velja $\rho_{x,y} = 0$.

<u>Opazka 3.41</u>: Če je A zaprta, $x \in A$ in $y \notin A$, ne more biti $x \to y$. Torej za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $\mathbb{P}_x(X_n = y) = 0$, kar pomeni $\mathbb{P}_x(X_n \in A) = 1$. Nadalje je $\mathbb{P}_x\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X_n \in A\}\right) = 1$.

Torej lahko markovsko verigo zožimo na A.

<u>Definicija</u>: Za nerazcepni množici definiramo relacijo $A \leq B$, če je bodisi $A = B$ bodisi $A \to B$.

Opazka 3.42: Tako definirana relacija predstavlja delno urejenost, nerazcepna množica pa je zaprta $\Leftrightarrow$ predstavlja maksimalni element.

Opazka 3.43: Če je nerazcepnih množic končno mnogo, je vsaj ena izmed njih zaprta.

Trditev 3.44: Nerazcepne množice, ki niso zaprte, imajo minljiva stanja.

Dokaz: Naj bo A nerazcepna množica, ki ni zaprta. Tedaj obstajata takšna $x \in A$ in $y \notin A$, da je $x \longrightarrow y$. Potem pa ne more biti $y \rightarrow x$, zato je po lemi 3.25 stanje x minljivo. Po posledici 3.40 sledi, da so vsa stanja minljiva. ▨

Primer: Asimetrični slučajni sprehod po $\mathbb{Z}$:

$$p_{k,k+1} = \theta \quad \text{in} \quad p_{k,k-1} = 1-\theta,$$

kjer je $\theta \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Izkaže se (vaje), da so vsa stanja minljiva, čeprav je celotna markovska veriga nerazcepna.

Trditev 3.45: V Markovski verigi s končno mnogo stanji je vsaj eno od njih povrnljivo.

Dokaz: Naj bo $x \in S$ in $n \in \mathbb{N}$. Velja $\sum_{y \in S} \mathbb{P}_x(X_n = y) = 1$. Torej

$$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{x \in S} \sum_{y \in S}}_{\text{končno}} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \underbrace{\sum_{x \in S} \sum_{y \in S}}_{\text{končno}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y)$$

Sledi: za neka $x, y \in S$ mora biti $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \infty$, kar pa je ravno: $\mathbb{E}_x[N(y)] = \infty$.

$\Rightarrow$ Po opazki 3.34 mora biti stanje y povrnljivo.

Posledica 3.46: Končna nerazcepna množica je zaprta natanko tedaj, ko so njena stanja povrnljiva.

3.4. Konstrukcija invariantnih mer

Inducirane mere: $\mu_n = \mu P^n$ oziroma $\mu_n(y) = \sum_{x \in S} \mu(x) \cdot \mathbb{P}_x(X_n = y)$.

Definicija: Mera μ^* na $(S, 2^S)$ je invariantna za markovsko verigo s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$; $x, y \in S$, če je:

$$\mu^*(y) = \sum_{x \in S} \mu^*(x) p_{x,y} \quad \text{za vse } y \in S.$$

Stacionarna ali invariantna porazdelitev je invariantna verjetnostna mera.

Definicija: Za markovsko verigo s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ in izbrano stanje $x \in S$ definiramo mero μ_x^* po predpisu:

$$\mu_x^*(y) := \mathbb{E}\Big[\underbrace{\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbb{1}(X_n = y)}_{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(X_n = y,\, n \leq T_x^{(1)})}\Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y,\ T_x^{(1)} \geq n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x,\ X_n = y)$$

Opazka 3.47: Velja $\mu_x^*(x) = \rho_{x,x} \cdot 1 + (1 - \rho_{x,x}) \cdot 0 = \rho_{x,x}$

$$\hookrightarrow \Big(\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbb{1}(\dots)\Big)(\omega) = \begin{cases} 1; & \text{vrnemo se v } x \\ 0; & \text{ne vrnemo se v } x \end{cases}$$

Trditev 3.48 [Ciklični trik]: Če je stanje x povrnljivo, velja tudi:

$$\mu_x^*(y) = \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{T_x^{(1)}-1} \mathbb{1}(X_n=y)\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n=y,\ T_x^{(1)} \overset{!}{>} n).$$

<u>Dokaz</u>: Pri računanju $\mu_x^*(y)$ opazujemo dogodke oblike

$$\underbrace{x\;\overbrace{\cdots\cdots\cdots}^{\text{to upoštevamo v definiciji } \mu_x^*}}_{\text{to upoštevamo pri trditvi}}\; x$$

Oglejmo si dogodka $\{X_0=y\}$ in $\{T_x^{(1)}<\infty,\ X_{T_x^{(1)}}=y\}$. Za $y\neq x$ sta ta dogodka nemogoča, za $y=x$ pa skoraj gotova. ▨

<u>Izrek 3.49</u>: Če je stanje x povrnljivo, je mera μ_x^* invariantna.

<u>Dokaz</u>: Računamo:

$$\sum_{y\in S}\mu_x^*(y)\,p_{y,z} \overset{\text{ciklični trik}}{=} \sum_{y\in S}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_x(X_n=y,\ T_x^{(1)}>n)\cdot p_{y,z}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_n=y,\ \underbrace{T_x^{(1)}>n}_{\in\mathcal{F}_n})\,p_{y,z} \qquad (*)$$

Če je $\mathbb{P}_x(T_x^{(1)}>n)>0$, je po lastnosti Markova:

$$\sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_n=y,T_x^{(1)}>n)\,p_{y,z} = \sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_n=y,T_x^{(1)}>n)\cdot\mathbb{P}_x(X_{n+1}=z\mid X_n=y,T_x^{(1)}>n)$$

$$= \sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_n=y,T_x^{(1)}>n,\ X_{n+1}=z)$$

$$= \mathbb{P}_x(T_x^{(1)}>n,\ X_{n+1}=z)$$

Ta enakost velja tudi, če je $\mathbb{P}_x(T_x^{(1)}>n)=0$ (obe strani sta 0).
Vstavimo v $(*)$:

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_x(T_x^{(1)}\geq n+1,\ X_{n+1}=z) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_x(T_x^{(1)}\geq n,\ X_n=z) = \mu_x^*(z).$$ ▨

Iz tega izreka (3.49) in trditve 3.45 pa sledi izrek 3.6: Vsaka markovska veriga na končni množici stanj ima stacionarno porazdelitev.

Opomba: Utemeljiti obstoja levega lastnega vektorja za $\lambda=1$ ni bil problem. Problem je pokazati nenegativnost njegovih komponent.

Opazka 3.50: Če je μ^* invariantna mera, velja:

- $\mu^*(x)=\infty,\ p_{x,y}>0 \Rightarrow \mu^*(y)=\infty$
- $\mu^*(x)=0,\ p_{x,y}>0 \Rightarrow \mu^*(y)=0$
- Če je A nerazcepna množica, velja ena od naslednjih možnosti:
  - $\forall x\in A.\ \mu^*(x)=0$
  - $\forall x\in A.\ \mu^*(x)=\infty$
  - $\forall x\in A.\ \mu^*(x)\in(0,\infty)$

Posledica 3.51: Naj bo x povrnljivo in μ_x^* pripadajoča invariantna mera. Če je $x\longleftrightarrow y$, je $0<\mu_x^*(y)<\infty$, sicer pa je $\mu_x^*(y)=0$.

Opomba: Če je x ni povrnljivo stanje, konstrukcija še deluje, ampak ne dobimo invariantne mere.

Dokaz: Če je $x\longleftrightarrow y$, rezultat sledi iz opazke 3.50. Če ni $x\longleftrightarrow y$, po trditvi 3.29 ne more biti $x\longrightarrow y$, saj je x povrnljivo. Potem sledi $\mu_x^*(y)=0$. ▨

Dokaz izreka 3.6: Po trditvi 3.45 je vsaj eno stanje povrnljivo, naj bo to x. Če je $x\longleftrightarrow y$, je $\mu_x^*(y)\in(0,\infty)$, sicer pa je $\mu_x^*(y)=0$. Ker je S končna, mora biti $0<\sum_{y\in S}\mu_x^*(y)<\infty$. Potem pa je:

$$\pi^*(z):=\frac{\mu_x^*(y)}{\sum_{y\in S}\mu_x^*(y)}$$

iskana stacionarna porazdelitev. ▨

Opazka 3.52: $\sum_{y\in S}\mu_x^*(y) = \sum_{y\in S}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_x(X_n=y, T_x^{(1)}\geq n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{y\in S}\mathbb{P}_x(X_n=y, T^{(1)}\geq n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_x(T_x^{(1)}\geq n)$$

$$= \mathbb{E}[T_x^{(1)}]$$

Definicija: Stanje x je **pozitivno povrnljivo**, če je $\mathbb{E}_x[T_x^{(1)}]<\infty$. Za stanje, ki je povrnljivo z $\mathbb{E}_x[T_x^{(1)}]=\infty$, pravimo, da je **ničelno povrnljivo**.

Posledica 3.53: Če je stanje x pozitivno povrnljivo, obstaja stacionarna porazdelitev π^*, za katero je

$$\pi^*(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x^{(1)}]}$$

to pa je totalna masa za μ_x^*

(iz opazke 3.47 vemo, da je $\mu_x^*(x) = \delta_{x,x}=1$.

3.5. Časovni obrat markovske verige

Naj bo $X_0, X_1, \ldots$ markovska veriga s fiksno začetno porazdelitvijo. Kdaj lahko rečemo, da je tudi slučajni vektor $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0)$ del neke markovske verige?

Najosnovnejša markovska lastnost:

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=x_{k+1} \mid X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_k=x_k) = \mathbb{P}(X_{k+1}=x_{k+1} \mid X_k=x_k) =: p_{x_k,x_{k+1}}^{(k,k+1)}$$

Mi opazujemo le čase $k=0,1,\ldots,n$. Obrnimo čas! Računajmo:

$$\mathbb{P}(X_{k-1} \mid X_k=k, \ldots, X_n=x_n) = \frac{\mathbb{P}(X_{k-1}=x_{k-1}, \ldots, X_n=x_n)}{\mathbb{P}(X_k=x_k, \ldots, X_n=x_n)}$$

$$= \frac{\pi^{(k-1)}(x_{k-1}) \cdot p^{(k-1,k)}_{x_{k-1},x_k} \cdot \cancel{p^{(k,k+1)}_{x_k,x_{k+1}}} \cancel{\cdots} \cancel{p^{(n-1,n)}_{x_{n-1},x_n}}}{\pi^{(k)}(x_k)\, \cancel{p^{(k,k+1)}_{x_k,x_{k+1}}} \cancel{\cdots} \cancel{p^{(n-1,n)}_{x_{n-1},x_n}}}$$

vpeljemo robno porazdelitev $\pi^{(k)}(x) := \mathbb{P}(X_k = x)$

$$= \frac{\pi^{(k-1)}(x_{k-1})}{\pi^{(k)}(x_k)} \cdot p^{(k-1,k)}_{x_{k-1},x_k}$$

Opazka 3.54: Obrat časa ohranja markovsko lastnost v najosnovnejšem smislu: če jo ima zaporedje $X_0, \ldots, X_n$:

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_k = x_k) = p^{(k,k+1)}_{x_k,x_{k+1}} \;; \quad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

jo ima tudi zaporedje $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_n$:

$$\mathbb{P}(X_{k-1} = x_{k-1} \mid X_k = x_k, \ldots, X_n = x_n) = p^{(k,k-1)}_{x_k,x_{k-1}},$$

kjer je

$$p^{(k,k-1)}_{y,x} := \frac{\pi^{(k-1)}(x)}{\pi^{(k)}(y)}\, p^{(k-1,k)}_{x,y} \;; \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Definicija: Markovski verigi z invariantno mero μ^*, za katero je $0 < \mu^*(x) < \infty$ (tj. μ^* je po točkah končna in nikjer ničelna), definiramo prehodne verjetnosti za obrnjen tok časa:

$$\hat{p}_{y,x} := \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)}\, p_{x,y}$$

(pomisli na $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}(B \mid A)$)

Opazka 3.55: To so res prehodne verjetnosti:

$$\sum_{x \in S} \hat{p}_{y,x} = \frac{1}{\mu^*(y)} \sum_{x \in S} \mu^*(x) p_{x,y} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\mu^*(y)} \cdot \mu^*(y) = 1.$$

μ^* invariantna

Opazka 3.56: Če je nikjer ničelna in po točkah končna mera μ^* invariantna za markovsko verigo z določenimi prehodnimi verjetnostmi, je invariantna tudi za markovsko verigo s pripadajočimi časovno obrnjenimi prehodnimi verjetnostmi:

$$\sum_{y\in S} \mu^*(y)\,\hat{p}_{y,s} = \sum_{y\in S} \cancel{\mu^*(y)}\,\frac{\mu^*(x)}{\cancel{\mu^*(y)}}\,p_{x,y} = \mu^*(x)$$

↳ μ^* invariantna

Opazka 3.57: Časovni obrat prehodnih verjetnosti je sam sebi inverzen:

$$\hat{\hat{p}}_{xy} = \frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)}\,\hat{p}_{y,x} = \frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)}\cdot\frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)}\,p_{x,y} = p_{x,y}.$$

Opazka 3.58: Če je $X_0, X_1, \dots$ markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ ter nikjer ničelno stacionarno porazdelitvijo π^*, $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots$ pa markovska veriga s časovno obrnjenimi prehodnimi verjetnostmi $\hat{p}_{y,x}$ pri verjetnostnih merah $\mathbb{P}_{\pi^*}$ in $\hat{\mathbb{P}}_{\pi^*}$, velja:

enako porazdeljena

$$(\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n) \stackrel{d}{=} (X_n, X_{n-1}, \dots, X_1).$$

Definicija: Slučajni proces $X_0, X_1, \dots$ je casovno obrnljiv (angleško reversible), če za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja:

$$(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) = (X_0, X_1, \dots, X_n).$$

Opazka 3.59: Časovno obrnljiv proces je nujno stacionaren. Zgornji pogoj nam namreč da: $\forall n\in\mathbb{N}.\ X_0 \stackrel{d}{=} X_n$.

Opazka 3.60: Markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi p_{xy} in nikjer ničelno stacionarno porazdelitvijo π^* je pri $\mathbb{P}_{\pi^*}$ časovno obrnljiva natanko tedaj, ko za poljubna $x,y\in S$ velja:

$$\pi^*(x)\,p_{x,y} = \pi^*(y)\,p_{y,x}. \quad \left(\text{izhaja iz } p_{y,x} = \frac{\pi^*(x)}{\pi^*(y)}\,p_{x,y}\right)$$

Intuicija s prekladanjem peska: Med vsakima stanjema x,y velja: Kolikor peska gre iz x v y, gre tudi v drugo smer.
↳ To pojasni ima pojma iz naslednje definicije.

Definicija: Markovska veriga s prehodnimi verjetnostimi $p_{x,y}$ in mera μ na S sta v točni izravnavi (angleško: detailed balance), če za poljubna $x,y \in S$ velja $\mu(x) p_{x,y} = \mu(y) p_{y,x}$.

Opazka 3.61: Vsaka mera, ki je z dano markovsko verigo v točni izravnavi, je zanjo tudi invariantna:

$$\sum_{x \in S} \mu(x) p_{x,y} = \sum_{x \in S} \mu(y) p_{y,x} = \mu(y).$$

Primer: Vreme (isto kot do zdaj):

$$P = \begin{bmatrix} 7/10 & 2/10 & 1/10 \\ 2/10 & 6/10 & 2/10 \\ 2/10 & 3/10 & 5/10 \end{bmatrix}$$

Vemo že: $\pi^* = \begin{bmatrix} 2/5 & 13/35 & 8/35 \end{bmatrix}$ je edina stacionarna porazdelitev. Preverimo, ali je v točki izravnavi:

$$\pi^*(1) \cdot p_{1,2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{25}$$

$$\pi^*(2) \cdot p_{2,1} = \frac{13}{35} \cdot \frac{2}{10} = \frac{13}{175}$$

Ta markovska veriga ni v točni izravnavi s svojo edino stacionarno porazdelitvijo, zato tudi ni v točni izravnavi z nobeno netrivialno mero. ▨

Primer: Slučajni sprehod po $\mathbb{Z}$: $S = \mathbb{Z}$, $p_{k,k+1} = \theta$, $p_{k,k-1} = 1-\theta$. Potem je μ^* v točni izravnavi $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}.\ \mu^*(k) \cdot \theta = \mu^*(k+1) \cdot (1-\theta)$ oziroma $\mu^*(k+1) = \frac{\theta}{1-\theta} \mu^*(k)$. Torej je: $\mu^*(k) = C \cdot \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^k$; $C \in [0, \infty]$.

To lahko omejimo tudi na končno množico $S_b = \{0, 1, \dots, b\}$:

$$\left.\begin{aligned} p_{k,k+1} &= \theta \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, b-1 \\ p_{k,k-1} &= 1-\theta \quad \text{za } k = 1, \dots, b \\ p_{0,0} &= 1-\theta, \quad p_{b,b} = \theta \end{aligned}\right\} \text{kockarjev bankrot, kjer se igra ne konča v robnih stanjih}$$

Mere μ^*, definirane kot zgoraj so še vedno v točni izravnavi.
Porazdelitev v točni izravnavi:

$$\pi^*(k) := \begin{cases} \theta^k (1-\theta)^{n-k} \cdot \dfrac{1-2\theta}{(1-\theta)^{b+1} - \theta^{b+1}} & ; \theta \neq 1/2 \\ \dfrac{1}{b+1} & ; \theta = 1/2 \end{cases}$$

Ta slučajni proces je časovno obrnljiv, čeprav je lahko asimetričen.

Do konca razdelka naj bo $X_0, X_1, \ldots$ markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ in invariantno mero μ^*, ki je po točkah končna in nikjer ničelna:

$$\hat{p}_{y,x} := \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} p_{x,y}$$

Prav tako naj bo $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \ldots ; (\hat{\mathbb{P}}_x)_{x \in S}$ časovno obrnjena markovska veriga glede na invariantno mero μ^*.

Trditev 3.62: Velja

$\hat{X}_0 = y$ je že privzeto

$$\hat{\mathbb{P}}_y(\hat{X}_n = x, (\hat{X}_{n-1}, \ldots, \hat{X}_1) \in D) = \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} \mathbb{P}_x((X_1, \ldots, X_{n-1}) \in D, X_n = y).$$

Dokaz: Dovolj je preveriti za enojce (S je diskretna): $D = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$. Velja:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}_y(X_n = x, (\hat{X}_{n-1}, \ldots, \hat{X}_1) \in D) &= \hat{\mathbb{P}}_y(X_n = x, \hat{X}_{n-1} = x_1, \ldots, \hat{X}_1 = x_{n-1}) \\
&= \hat{p}_{y,x_{n-1}} \cdot \hat{p}_{x_{n-1},x_{n-2}} \cdots \hat{p}_{x_2,x_1} \cdot \hat{p}_{x_1,x} \\
&= \frac{\mu^*\cancel{(x_{n-1})}}{\mu^*(y)} p_{x_{n-1},y} \frac{\cancel{\mu^*(x_{n-2})}}{\cancel{\mu^*(x_{n-1})}} p_{x_{n-2},x_{n-1}} \cdots \frac{\mu^*(x)}{\cancel{\mu^*}(x_1)} p_{x,x_1} \\
&= \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} p_{x,x_1} p_{x_1,x_2} \cdots p_{x_{n-1},y} \\
&= \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} \mathbb{P}_x(\underbrace{X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}}_{(X_1, \ldots, X_{n-1}) \in D}, X_n = y)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

24. november 2025

Posledica 3.63: $x \longrightarrow y$ v $X_0, X_1, \dots; (\mathbb{P}_z)_{z\in S} \Leftrightarrow$
$y \longrightarrow x$ v $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots; (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z\in S}$.

Dokaz: $x \longrightarrow y$ v $X_0, X_1, \dots; (\mathbb{P}_z)_{z\in S}$

$$\Updownarrow$$

$$\exists n \in \mathbb{N}_0.\ \mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$$

$y \longrightarrow x$ v $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots; (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z\in S}$.

$$\Updownarrow$$

$$\exists n \in \mathbb{N}_0.\ \underbrace{\hat{\mathbb{P}}_y(\hat{X}_n = x)}_{= \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} \mathbb{P}_x(X_n = y)} > 0$$

∎

Posledica 3.64: Obrat časa ohrani minljivost in povrnljivost.

Dokaz: $\underset{(\text{v } \mathbb{P}_z)_{z\in S}}{x \twoheadrightarrow x} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}_x(X_1 \neq x, X_2 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = x)}_{= \hat{\mathbb{P}}_x(\hat{X}_1 \neq x, \hat{X}_2 \neq x, \dots, \hat{X}_{n-1} \neq x, \hat{X}_n = x)} = 1$

$\Leftrightarrow x \twoheadrightarrow (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z\in S}$

∎

3.6. Sorazmernost invariantnih mer

Spomnimo se: $\mu^*_x(y) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbb{1}(X_n = y)\right]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\underbrace{X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x,}_{T_x^{(1)} \geq n} X_n = y)$$

$$\mu^*_x(x) = \rho_{x,x}$$

Lema 3.65: Če je μ^* invariantna mera nerazcepne markovske verige in $\mu^*(x) = 1$, je $\mu^*(y) \geq \mu_x(y)$ za vse $y \in S$. Če so stanja verige povrnljiva, pa velja $\mu^*(y) = \mu_x^*(y)$ za vse $y \in S$.

Dokaz: Izrazimo $\mu_x^*(y)$ z verjetnostmi v markovski verigi $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \ldots; (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z \in S}$, ki pripada obratu časa glede na μ^*. Ta je možen, ker po opazki 3.50 za vse $y \in S$ velja $0 < \mu^*(y) < \infty$, saj je $x \longleftrightarrow y$.

$$\mu_x^*(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \ldots, X_{n-1} \neq x, X_n = y)$$

$$\overset{3.62}{=} \frac{\mu^*(y)}{\underbrace{\mu^*(x)}_{=1}} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mathbb{P}}_y(\hat{X}_1 \neq x, \hat{X}_2 \neq x, \ldots, \hat{X}_{n-1} \neq x, \hat{X}_n = x)}_{\text{paroma disjunktni dogodki}}$$

$$= \mu^*(y) \cdot \hat{\mathbb{P}}_y(T_x^{(1)} < \infty)$$

Sledi $\mu_x^*(y) \leq \mu^*(y)$. Če pa ima markovska veriga povrnljiva stanja, jih ima po posledici 3.64 tudi v obrnjenem času. Po posledici 3.63 pa je veriga tudi v obrnjenem času nerazcepna. Po trditvi 3.39 mora biti tedaj tudi $\hat{\mathbb{P}}_y(T_x^{(1)} < \infty) = 1$ in sledi $\mu_x^*(y) = \mu^*(y)$. ▨

Posledica 3.66: Invariantne mere nerazcepne markovske verige s povrnljivimi stanji so si v premem sorazmerju: brž ko sta μ^* in ν^* invariantni meri, za kateri $\exists x \in S.\, 0 < \mu^*(x) < \infty$ in $\exists y \in S.\, 0 < \mu^*(y) < \infty$ ($\Leftrightarrow \forall x \in S.\, 0 < \mu^*(x), \mu^*(y) < \infty$), obstaja tak c, da je $\nu^*(y) = c\mu^*(y)$ za vse $y \in S$.

Dokaz: Izberimo $x \in S$. Za vse $y \in S$ velja

$$\frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)} = \mu_x^*(y) = \frac{\nu^*(y)}{\nu^*(x)}, \qquad \nu^*(y) = \underbrace{\frac{\nu^*(x)}{\mu^*(x)}}_{=:c} \mu^*(y)$$

▨

Trditev 3.67: Naj bo μ^* invariantna mera markovske verige, $S' \subseteq S$ ter $\forall x \in S'.\ \mu^*(x) > 0$ in $\sum_{x \in S'} \mu^*(x) < \infty$. Tedaj je S' zaprta.

Dokaz:
$$\begin{aligned}
\sum_{y \in S'} \mu^*(y) &= \sum_{y \in S'} \sum_{x \in S'} \mu^*(x) p_{x,y} \\
&= \sum_{x \in S'} \mu^*(x) \sum_{y \in S'} p_{x,y} \\
&= \sum_{x \in S'} \mu^*(x) \Big(1 - \sum_{y \in S \setminus S'} p_{x,y}\Big) \\
&= \sum_{x \in S'} \mu^*(x) - \sum_{x \in S'} \sum_{y \in S \setminus S'} \mu^*(x) p_{x,y}
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \sum_{x \in S'} \sum_{y \in S \setminus S'} \mu^*(x) p_{x,y} = 0 \Rightarrow \forall x \in S'.\ \forall y \in S \setminus S'.\ \overset{>0}{\mu^*(x)} p_{x,y} = 0$$
$$\Rightarrow \forall x \in S'.\ \forall y \in S \setminus S'.\ p_{x,y} = 0$$
▨

Trditev 3.68: Stanje x poljubne markovske verige je pozitivno povrnljivo natanko tedaj, ko obstaja taka invariantna porazdelitev π^*, da je $\pi^*(x) > 0$.

Dokaz: ($\Rightarrow$): Sledi že iz posledice 3.53 (spomnimo, da smo π^* skonstruirali tako, da je $\pi^*(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})}$).

($\Leftarrow$): Uporabili bomo opazko 3.52, po kateri je
$$\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \sum_{y \in S} \mu_x^*(y).$$
To vsoto pa bomo ocenili s pomočjo leme 3.65. Toda ta lema predpostavlja nerazcepnost. Naj bo torej S_x nerazcepna množica, ki ji pripada stanje x. Po opazki 3.50 za vsak $y \in S_x$ velja $\pi^*(y) > 0$. Po trditvi 3.67 je množica S_x zaprta, torej lahko markovsko verigo zožimo nanjo. Zožena markovska veriga je nerazcepna, $\pi_x^* := \pi^*|_{S_x}$ pa je njena invariantna mera.

Po lemi 3.65 je $\mu_x^*(y) \leq \frac{\pi_x^*(y)}{\pi_x^*(x)}$ za vse $y \in S_x$. Sledi

$$\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \sum_{y \in S_x} \mu_x^*(y) \leq \frac{1}{\pi_x^*(x)} \sum_{y \in S_x} \pi_x^*(y) < \infty.$$

Izrek 3.69: V nerazcepni markovski verigi so naslednje izjave ekvivalentne:

(1) Vsaj eno stanje je pozitivno povrnljivo.
(2) Vsa stanja so pozitivno povrnljiva.
(3) Obstaja stacionarna porazdelitev.
(4) Vsa stanja so pozitivno povrnljiva in $\pi^*(x) := \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})}$ je edina stacionarna porazdelitev.

$$\begin{tikzcd} (1) \arrow[d, Rightarrow] & (2) \arrow[l, Rightarrow] \\ (3) \arrow[ur, dotted, Rightarrow] & (4) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Dokaz: Očitno $(4) \Rightarrow (3)$ in $(4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$.
Dokazali smo že $(1) \Rightarrow (3)$ (izrek 3.49).

$(3) \Rightarrow (2)$: Naj bo π^* stacionarna porazdelitev in $x \in S$. Velja $\sum_{y \in S} \pi^*(y) = 1$, obstaja tak $y \in S$, da je $\pi^*(y) > 0$. Potem po opazki 3.50 velja tudi $\pi^*(x) > 0$. Iz trditve 3.67 dobimo, da je x pozitivno obrnljivo.

$(2) \Rightarrow (4)$: Po posledici 3.53 za vsak $x \in S$ obstaja stacionarna porazdelitev π_x^*, za katero je $\pi_x^*(x) = 1/\mathbb{E}(T_x^{(1)})$. Po posledici 3.66 pa je stacionarna enolično določena. Za edino stacionarno π^* in vse $x \in S$ mora torej veljati

$$\pi^*(x) = \pi_x^*(x) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x^{(1)})}.$$

Posledica 3.70: V markovski verigi s končno množico stanj povrnljivost pomeni tudi pozitivno povrnljivost. Če je torej markovska veriga s končno množico stanj nerazcepna, so vsa njena stanja pozitivno povrnljiva.

Dokaz: Če je stanje x povrnljivo, je μ_x^* po opazki 3.47 in izreku 3.49 invariantna mera z $\mu_x^*(x) = 1$. Torej je

$$\pi_x(y) := \frac{\mu_x^*(y)}{\sum_{z \in S} \mu_x^*(z)}$$

stacionarna porazdelitev s $\pi^*(x) > 0$. Po trditvi 3.47 je stanje x pozitivno povrnljivo. Če je veriga nerazcepna, pa iz obstoja stacionarne sledi pozitivna povrnljivost vseh stanj. ▨

$\boxed{\text{1. december 2025}}$