

# Teorija mere

Predavatelj: Marko Kandić

Teorija mere  $\approx$  realna analiza  
ta predmet

1. oktober 2025

## 1. MERE

### 1.1. $\sigma$ -algebri

Naj bo  $X$  neprazna množica. Družina podmnožic  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  je  $\sigma$ -algebra, če velja:

- i)  $X \in \mathcal{A}$
- ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- iii)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Če namesto iii) zahtevamo  $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ :

- iii')  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A},$

potem je  $\mathcal{A}$  algebra.

Če je  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra, potem je  $(X, \mathcal{A})$  merljiv prostor.

Elementi  $\mathcal{A}$  so merljive množice.

Opomba: i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Vsaka  $\sigma$ -algebra je algebra.

iii)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$$

Primeri: i)  $X, \mathcal{A} = \{\emptyset, X\} \leftarrow$  trivialna  $\sigma$ -algebra  
 $(X, \mathcal{A})$  je trivialni merljiv prostor

- ii)  $(X, \mathcal{P}(X))$ ,  $\mathcal{P}(X)$  potenčna  $\sigma$ -algebra  
 iii)  $X$ ,  $\mathcal{A} = \{E \subseteq X \mid E \text{ števna ali } E^c \text{ števna}\}$   
 povezana s topologijo končnih komplementov

Če je  $X$  neštevna, je  $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$ .

Trditve: Naj bo  $B$  družina podmnožic množice  $X$ .  
 Tedaj obstaja najmanjša  $\sigma$ -algebra na  $X$ , ki vsebuje  $B$ . Ta je enaka preseku vseh  $\sigma$ -algeber, ki  $B$  vsebujejo.

Oznaka:  $\sigma$ -algebra iz trditve označimo z  $\sigma(B)$ .

Dokaz:  $\mathcal{C} := \{\text{vse } \sigma\text{-algebri, ki vsebujejo } B\}$   
 $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \neq \emptyset$

Presek vseh  $\sigma$ -alg iz  $\mathcal{C}$  je  $\sigma$ -algebra. (ocitno)  
 Po definiciji mora biti najmanjša.

## Borelove množice

$(X, \tau)$  topološki prostor

$\sigma(\tau)$  je Borelova  $\sigma$ -algebra;  $\sigma$ -algebra generirana z vsemi odprtimi množicami

Ker je  $A = (A^c)^c$ , je  $\sigma(\tau)$  generirana z zaprtimi množicami. Namesto  $\sigma(\tau)$  pišemo  $\mathcal{B}(X)$  ali  $\mathcal{B}_X$ .

$A \in \mathcal{B}(X)$  je

- $F_\sigma$  množica, če je števna unija zaprtih množic
- $G_\sigma$  množica, če je števen presek odprtih množic

Primer:  $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$   
 $= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$

Trditev:  $A \in \mathbb{R}^n$

- i)  $A$  zaprta  $\Rightarrow A$  je  $G_\sigma$
- ii)  $A$  odprta  $\Rightarrow A$  je  $F_\sigma$

Brez dokaza. Enostaven.

Trditev:  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  je generirana s katerokoli od spodnjih družin generatorjev:

- i)  $\Sigma_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$
- ii)  $\Sigma_2 = \{[a, b] \mid a < b\}$
- iii)  $\Sigma_3 = \{[a, b) \mid a < b\}$
- iv)  $\Sigma_4 = \{(a, b] \mid a < b\}$
- v)  $\Sigma_5 = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$
- vi)  $\Sigma_6 = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$
- vii)  $\Sigma_7 = \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$
- viii)  $\Sigma_8 = \{(-\infty, a]\mid a \in \mathbb{R}\}$

Dokaz: i)  $\Sigma_1 \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \sigma(\Sigma_1) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ker je neka odprta mn. števna unija odprtih odprtih int.,  
je  $\mathcal{T} \subseteq \delta(\Sigma_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\Sigma_1)$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$

ii) Ker je vsake  $(a, b)$  st. unija zaprtih int oblike  
 $[a, b]$ , je  $\sigma(\Sigma_1) \subseteq \sigma(\Sigma_2) \Rightarrow \sigma(\Sigma_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

## 1.2. Pozitivne mere

7. oktober 2025

Definicija: Pozitivna mera (ali zaenkrat samo mera) je preslikava  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [\Omega, \infty]$ , ki ima naslednje lastnosti

i)  $\mu(\emptyset) = 0$

zaprt interval

razširitev realne osi z največjim elementom

ii)  $A_1, A_2, \dots$  paroma disjunktne iz  $\mathcal{A}$ , potem je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

iii) se imenuje števna ali  $\sigma$ -aditivnost.

$(X, \mathcal{A})$  merljiv prostor

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  merljiv prostor z mero oz. merljiv prostor oz. prostor z mero

Če vzamemo  $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \dots$ , potem dobimo končno aditivnost

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Primeri:

i)  $X \neq \emptyset, x \in X \quad (X, \mathcal{P}(X))$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$\mu$  je mera, označimo jo z  $\delta_x$  ... Diracova mera

ii)  $X \neq \emptyset; \quad (X, \mathcal{P}(X))$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|; & |A| < \infty \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$

mera štetja točk

iii) Naj bo  $X$  neštevna in

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ števna ali } A^c \text{ števna}\}$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ števna} \\ 1; & A^c \text{ steven} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{je mera.} \\ \text{Dokaz na vajah.} \end{array}$$

iv)  $X$  neskončna mn.

$$\mu: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

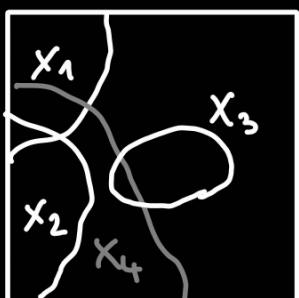
$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ števna} \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$

ni števno aditivna, je končno aditivna.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ : Mera  $\mu$  je končna, če je  $\mu(X) < \infty$ .

Mera  $\mu$  je  $\sigma$ -končna, če

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n \text{ in } \mu(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



$X$

V definiciji  $\sigma$ -končnosti lahko ekvivalentno zahtevamo

i)  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  so paroma disj., z unijo  $X$

ii)  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je naraščajoče z unijo  $X$

**UPORABNO**

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  spl.  $\rightsquigarrow X_1, X_1 \cup X_2, X_1 \cup X_2 \cup X_3, \dots$   
iz spljoščega zaporedja dobimo naraščajoče zaporedje  
 $\rightsquigarrow X_1, X_2 \setminus X_1, X_3 \setminus (X_2 \cup X_1), \dots$   
št. unija paroma disjunktnih

Lema: Naj bo  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  končno aditivna funkcija na algebri  $\mathcal{A}$ . Tedaj velja:

$$A, B \in \mathcal{A} \text{ in } A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B). \quad \text{MONOTONAST}$$

Dokaz:  $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

□

Irditev: Naj bo  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  prostor z mero. Tedaj za  $\forall$  zap.  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$  velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz:  $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$   
Tedaj so  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paroma disjunktne iz  $\mathcal{A}$ .

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j \text{ in } \bigvee_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} B_j$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Irditev: Naj bo  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  končna aditivna funkcija, kjer je  $(X, \mathcal{A})$  merljiv prostor.  
Tedaj je  $\mu$  mera  $\Leftrightarrow \forall$  naraščajoče zaporedje  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  merljivih množic velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: ( $\Rightarrow$ ): Naj bo  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  naraščajoče zaporedje v  $\mathcal{A}$ .



$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_2, \dots$$

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mu(B_n) \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \dots + \mu(A_k \setminus A_{k-1}))$$

$$\forall j. \mu(A_j) < \infty \Rightarrow = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_1) + (\mu(A_2) - \mu(A_1)) + \dots + (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1}))) \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

Če je  $\mu(A_j) = \infty$ , potem je  $\mu(A_k) = \infty \forall k \geq j$  in zaradi monotonoosti mere velja enakaj v trditvi.

( $\Leftarrow$ ): Naj bo  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje paroma disjunktnih množic v  $\mathcal{A}$ .

$B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$  Tedaj je  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  naraščajoče v  $\mathcal{A}$ .

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \square$$

Irditev: Naj bo  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  prostor z mero in  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  padajoče zaporedje mn. v  $\mathcal{A}$ . Če je  $\mu(A_1) < \infty$ , potem

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: Ker  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  padajoče je  $(A_1 \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  naraščajoče.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c) = A_1 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\mu(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right) \stackrel{\substack{\text{prejčna} \\ \text{trditve}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n) \\ \stackrel{\text{II}}{=} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{\text{II}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n))$$

$$\Rightarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

□

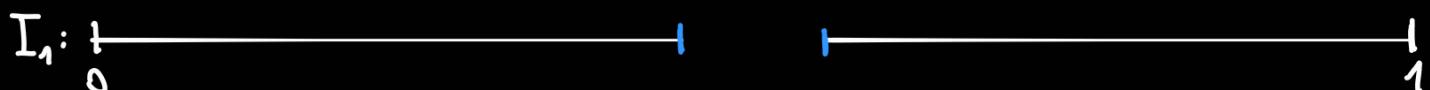
Primer:  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ,  $\mu$  šteje točke

$$A_n = \{n, n+1, \dots\}, \quad \mu(A_n) = \infty$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

Ta primer pokazuje, da prejšnja trditev ne velja nujno, če je  $\mu(A_1) = \infty$ .

Primer: Oglejmo si konstrukcijo posplošene Cantorjeve množice.



I<sub>1</sub>: Izrežemo d<sub>1</sub>-ti delež skoli  $1/2$  za  $0 < d_1 < 1$ .

I<sub>2</sub> dobimo tako, da od vsakega intervala i ∈ I<sub>1</sub> izrežemo centralni interval deleža d<sub>2</sub> za  $0 < d_2 < 1$ .



Postopek nadaljujemo. Dobimo množico I<sub>n</sub>, ki je unija  $2^n$  intervalov iste dolžine. Za  $0 < d_n < 1$  iz vsakega od teh intervalov izrežemo centralni interval deleža d<sub>n+1</sub>. Če  $d_3 = d_2 = d_1 = \dots$  dobimo Cantorjevo množico. Sicer v preseku  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$  dobimo posplošeno Cantorjevo množico.

Zaenkrat predpostavimo obstoj Lebesgueove mere,

ki se na intervalih vjema z njihovo dolžino.

$$m(I_0) = 1$$

$$m(I_1) = m(I_0) - m(I_0)\alpha = m(I_0)(1-\alpha_1) = 1-\alpha_1$$

$$m(I_2) = m(I_1)(1-\alpha_2) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$$

$$m(I_3) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)$$

:

$$m(I_n) = \prod_{k=1}^n (1-\alpha_k)$$

Po prejšnji trditvi je

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1-\alpha_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_k)$$

V primeru Cantorjeve množice je  $\frac{1}{3} = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots$ , zato je  $m(C) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3} = 0$ .

Izrek: Posplošena Cantorjeva množica je metrizabilen kompakten nikjer gost povsem nepovezan prostor brez izoliranih točk z mero  $\prod_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_k)$ . To je lahko  $> 1 - \varepsilon$ , ampak nikjer gost!

Irditer: Posplošena Cantorjeva množica ima pozitivno mero  $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$  konvergira.

8. Oktober 2025

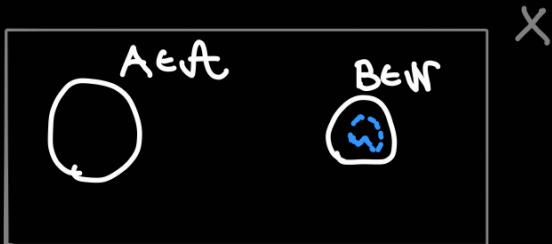
### 1.3. Napolnitveni prostori z mero

Definicija:  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  prostor z mero. A  $\in \mathcal{A}$  je  $\mu$ -ničelna, če je  $\mu(A) = 0$ .

Oznacimo  $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = 0\}$ .

Lema:  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$

Dokaz:  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$



Definicija:  $(X, \mathcal{U}, \mu)$  je poln, če  $\forall N \in \mathbb{N}$  in  $B \subseteq N$  sledi  $B \in \mathcal{A}$ .

Izrek: Naj bo  $(X, \mathcal{U}, \mu)$  prostor z mero. Naj bo

$$\bar{\mathcal{A}} := \{A \cup S \mid A \in \mathcal{A}, \exists N \in \mathbb{N}. S \subseteq N\}.$$

Tedaj je  $\bar{\mathcal{A}}$   $\sigma$ -algebra, ki vsebuje  $\mathcal{U}$ . Če za  $A \cup S \in \bar{\mathcal{A}}$  definiramo  $\bar{\mu}(A \cup S) := \mu(A)$  potem je  $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$  poln merljiv prostor.

Dokaz:  $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{U}$

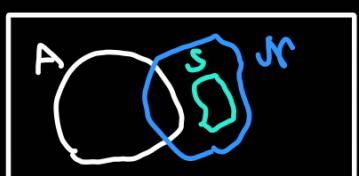
$$A \in \mathcal{U} \Rightarrow A = A \cup \emptyset$$

$\bar{\mathcal{A}}$  je  $\sigma$ -algebra.

i)  $X \in \bar{\mathcal{A}}$ , ker  $X = X \cup \emptyset$

ii)  $A \cup S \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow (A \cup S)^c \in \bar{\mathcal{A}}$ .

$$\exists N \in \mathbb{N}. S \subseteq N$$



$$\begin{aligned} (A \cup S)^c &= A^c \cap S^c = A^c \cap (N^c \cup N \setminus S) \\ &= \underbrace{(A^c \cap N^c)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(A^c \cap N \setminus S)}_{S \subseteq N} \end{aligned}$$

$$\text{iii) } A_n \cup S_n \in \bar{\mathcal{A}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) \in \bar{\mathcal{A}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad N_n \in \mathcal{W}. \quad S_n \subseteq N_n$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{W}$$

$\bar{\mu}: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow [0, \infty]$  je dobro definirana pozitivna mera

$$E \in \bar{\mathcal{A}}; \quad E = A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2 \\ S_1 \subseteq N_1 \in \mathcal{W}, \quad S_2 \subseteq N_2 \in \mathcal{W} \\ \Rightarrow \bar{\mu}(A_1) = \bar{\mu}(A_2)$$

$$A_1 \subseteq A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2 \subseteq A_2 \cup N_2$$

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup N_2) \leq \mu(A_2) + \mu(N_2) = \mu(A_2)$$

Podobno  $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$ .

$\bar{\mu}$  je mera:

$$\cdot \bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$$

Najbo  $(A_n \cup S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paroma disj. zap. mn. v  $\bar{\mathcal{A}}$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n)\right) &= \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n \cup S_n) \end{aligned}$$

$(X, \mathcal{F}, \bar{\mu})$  je poln

$$\bar{\mu}(N) = 0, \quad S \subseteq N \Rightarrow S \in \bar{\mathcal{A}}$$

$$N = A \cup \tilde{S}; \quad A \in \bar{\mathcal{A}}, \quad \tilde{S} \subseteq \tilde{N} \in \mathcal{N}$$

Po definiciji je  $\bar{\mu}(N) = 0$   
 $\|$   
 $\mu(A) \Rightarrow A \in \mathcal{W}$

$$S = \emptyset \vee S ; S \subseteq N \subseteq A \cup \tilde{N} \in \mathcal{W}$$



Primer:  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Izkaže se  $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$ . (Brez dokaza.)

Če je  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  polna, potem so vse podmnožice Cantorjeve množice merljive. Ker  $|\mathcal{C}| = |\mathbb{R}|$ , bi bilo  $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}}$  ~~✗~~  
 Torej  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$  ni poln prostor.

Napolnitvev je Lebesgueova  $\sigma$ -algebra.

$$\Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Ker } \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{ je } |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \leq 2^{\mathbb{R}} \end{array} \right\} \Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| = 2^{\mathbb{R}}$$

$$\text{Ker } \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{ je } |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \leq 2^{\mathbb{R}}$$

$$\text{Imamo } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

$\uparrow$  prava vsebovanost?

Primer: Pokazali bomo, da na  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  pod privzetkom aksioma izbire ne obstaja translacijsko invariantna mera.  
 $\mu$  je translacijsko invariantna, če za  $\forall A$  velja  $\mu(A+x) = \mu(A)$ .  $A+x = \{a+x \mid a \in A\}$ .

Na  $\mathbb{R}$  vpeljemo relacijo  $\sim$ :  $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$  razpade na ekvivalenčne razrede 14. oktober 2025

$\mathbb{R}/\sim$  kvocientni prostor

Skonstruirali bomo tako množico, ki bo preprečila obstoj translacijsko inv. mere na  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

Sledil bi, da obstaja Lebesgueva nemerljiva mn.

$\forall x \in [-1, 1]$  izberemo predstavniku ekv. razreda  $[x]$ , ki leži v  $[-1, 1]$ . Tukaj uporabimo aksiom izbire. Naj bo  $S$  množica vseh ravnskark izbranih predstavnikov. Velja  $S \subseteq [-1, 1]$ .

Def.  $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q} \cap [-2, 2]$ .

Def.  $\tilde{F} = \{r + S \mid r \in \mathbb{Q}_1\} \leftarrow \text{števna množica}$

Velja:  $(r + S) \cap (r' + S) = \emptyset$  za  $r = r'$

$$r + S = r' + S \Rightarrow S - S = r - r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow S \sim S \quad \times$$

ii)  $[-1, 1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + S)$

$x \in [-1, 1], \exists s \in S \subseteq [-1, 1]$ , da je  $x \sim s$

$$g := x - s \in \mathbb{Q}$$

$$|g| \leq |x| + |s| \leq 2 \Rightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (r + S)$$

Velja  $[-1, 1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + S) \subseteq [-3, 3]$ .

Če bi obstajala transl. inv. mera na  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ , ki se na intervalih ujema z dolžino, potem bi veljalo

$$2 \leq \mu\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + S)\right) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(r + S) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(S) \leq 6 \quad \times$$

Kasneje bomo skonstruirali Leb. mero, ki je definirana na Leb.  $\sigma$ -algebri. Ta je zaprta za translacijo, Leb. mera pa je transl. invariantna. Zato  $S$  ni Leb. merljiva.

#### 1.4. Zunanja mera

Zunanja mera na množici  $X$  je funkcija  $\xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ , za katere velja:

i)  $\xi(\emptyset) = 0$

ii)  $\xi(A) \leq \xi(B) \quad \forall A \subseteq B$

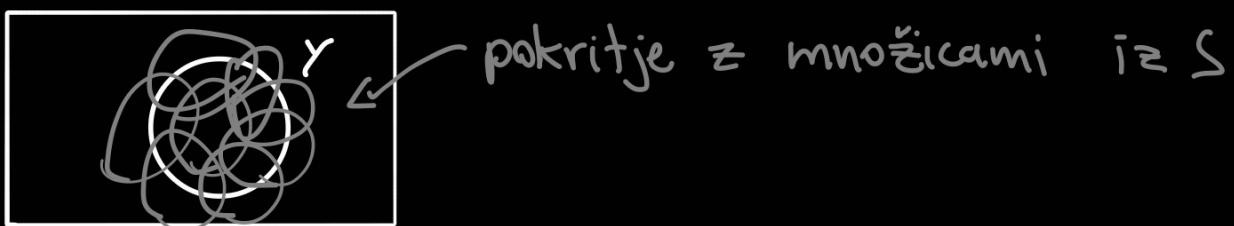
iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n) \quad \xi(A \cup (B \setminus A)) \leq$

vedno def. na  
 $\mathcal{P}(X)$

Irditer: Naj bo  $S$  družina podmnožic neprazne množice  $X$ , ki vsebuje  $\emptyset$  in  $X$ . Naj bo  $\mu: \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$  funkcija za katero velja  $\mu(\emptyset) = 0$ . Definiramo  $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  s predpisom

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \mid (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq S \text{ pokritje za } Y \right\}.$$

Tedaj je  $\mu^*$  zunanjia mera.



Dokaz: i)  $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

ii)  $A \subseteq B$ . neko pokritje za  $B$  je pokritje za  $A$   
 $\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) Neenakost drži, če je  $\mu^*(A_n) = \infty$  za nek  $n \in \mathbb{N}$ .

Predpostavimo, da je  $\mu^*(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\varepsilon > 0$ . Tu  $n \in \mathbb{N} \exists$  pokritje  $(A_{nj})_j$  za  $A_n$ , da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{nj}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$\Rightarrow (A_{nj})_{n, j \in \mathbb{N}}$  je pokritje za  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* + \varepsilon \end{aligned}$$

Ker je  $\varepsilon > 0$  poljuben, dobimo števno subadditivnost. □

Definicija: Naj bo  $\xi$  zunanjja mera na  $\mathcal{P}(X)$ . Množica  $A \subseteq X$  je zunanje merljiva oziroma  $\xi$ -merljiva, če je

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c)$$

za vsak  $Y \subseteq X$ .



Da preverimo  $\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c)$ , moramo preveriti  $\leq$  in  $\geq$ . Sledi iz (iii) def. zunanjih mera. Zato zadostuje preveriti:

$$\xi(Y) \geq \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c). \quad (*)$$

Če  $\xi(Y) = \infty$ , potem (\*) velja, sicer moramo preveriti.

Carathéodoryjev izrek: Naj bo  $\xi$  zunanjja mera na  $X$ . Tedaj je

$$\mathcal{A}_\xi = \{A \subseteq X \mid A \text{ je } \xi\text{-merljiva}\}$$

$\sigma$ -algebra, trojica  $(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$  pa je poln merljiv prostor.

Dokaz:  $\mathcal{A}_\xi$  je  $\sigma$ -algebra

$$\begin{aligned} i) Y \subseteq X &\Rightarrow \xi(Y) = \xi(Y \cap \emptyset) + \xi(Y \cap \emptyset^c) = 0 + \xi(Y). \\ &\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_\xi \end{aligned}$$

$$ii) \xi(Y) = \xi(Y \cap A^c) + \xi(Y \cap A^c)^c = \underset{Y \cap A}{\xi(A)} + \underset{Y \cap A^c}{\xi(A^c)} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\xi$$

Najprej bomo dokazali, da je  $\mathcal{A}_\xi$  zaprt za končne unije, torej algebra, zaprtost za števne unije pa bomo dokazali hkrati s števno aditivnostjo  $\xi|_{\mathcal{A}_\xi}$  za števne disjunktne družine množic.

$$A, B \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\xi$$

$$\xi((A \cup B) \cap Y) + \xi((A \cup B)^c \cap Y) = \xi((A \cap Y) \cup (B \cap Y)) + \xi((A \cap Y)^c \cup (B \cap Y)^c)$$

$$\begin{aligned}
 &= \xi(A \cap Y \cup B \cap A^c \cap Y) + \xi(A^c \cap B^c \cap Y) \\
 &\leq \xi(A \cap Y) + \xi(B \cap A^c \cap Y) + \xi(B^c \cap A^c \cap Y) \\
 &= \xi(A \cap Y) + \xi(A^c \cap Y) = \xi(Y).
 \end{aligned}$$

$\nearrow B \in \mathcal{A}_\xi$        $\uparrow A \in \mathcal{A}_\xi$

$\Rightarrow \mathcal{A}_\xi$  je algebra.

$$\text{Naj bodo } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi$$

$$A_1 = A_1, \quad A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))$$

Dokazali bomo, da je  $\mathcal{A}_\xi$  zaprta za števne disjunktne unije in ker je  $\mathcal{A}_\xi$  algebra, bo sledilo, da je  $\mathcal{A}_\xi$   $\sigma$ -algebra.

Naj bodo  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  paroma disjunktne mn. iz  $\mathcal{A}_\xi$ .

$$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi \quad \text{in} \quad \xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$$B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}_\xi$$

$$Y \subseteq X \Rightarrow \xi(Y \cap B_n) = \xi(Y \cap B_n \cap A_n) + \xi(Y \cap B_n \cap A_n^c)$$

$$\begin{aligned}
 &\quad \boxed{A_1 | A_2 | \dots | A_n | \dots} \quad X \\
 &= \xi(Y \cap A_n) + \xi(Y \cap B_{n-1}) \\
 &= \dots = \sum_{j=1}^n \xi(Y \cap A_j)
 \end{aligned}$$

$$Y = B_n \Rightarrow \xi(B_n) = \sum_{j=1}^n \xi(A_j)$$

$\Rightarrow \xi$  je končno aditivna na  $\mathcal{A}_\xi$

$$\xi(B) \geq \xi(B_n) = \sum_{j=1}^n \xi(A_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$$\Rightarrow \xi(B) \geq \sum_{j=1}^n \xi(A_j) \quad \text{Ker } \xi \text{ stevno subaditivna, je}$$

$$\xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$B \in A_\xi$

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c)$$

$$\geq \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c)$$

$$= \sum_{j=1}^n \xi(Y \cap A_j) + \xi(Y \cap B^c)$$

$$\geq \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c).$$

Ker je  $\xi$  st. svbaditvna je  $\xi(Y) = \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c)$ .

$\Rightarrow B \in A_\xi$ .

$(X, A_\xi, \xi|_{A_\xi})$  je poln merljiv prostor

$M \in A_\xi$  in  $\xi(M) = 0$ ,  $N \subseteq M$

$$Y \subseteq X. \quad \underbrace{\xi(Y \cap N)}_{\substack{\text{monotonost} \\ \text{svbaditivnost}}} + \xi(Y \cap N^c) = \xi(Y \cap N^c) \leq \xi(Y)$$

$$\xi(Y) \leq \xi(Y \cap N) + \xi(Y \cap N^c)$$



## 1.5. Mera na algebri:

Mera na algebri  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  je preslikava  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ , za katero velja:

$$i) \mu(\emptyset) = 0$$

ii)  $A_1, A_2, \dots$  paroma dij. v it in  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ , potem

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Izrek: Naj bo  $\mu$  mera na algebri  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Za  $Y \subseteq X$  definiramo zunanjš mero

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ je pokritje za } Y \right\}.$$

Tedaj je  $\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$  in  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$ .

Dokaz:  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A)$$

$$\mu(A) \leq \mu^*(A).$$

Naj bo  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pokritje za  $A$  z mnogicami iz  $\mathcal{A}$ .

$$B_1 = A \cap A_1, \quad B_2 = A \cap (A_2 \setminus A_1), \quad B_3 = A \cap (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)), \dots$$

$B_i \cap B_j \neq \emptyset$  za  $i \neq j$  in

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \cap A \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A$$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

To velja za vsako pokritje  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , zato tudi v infimumu dobimo isti neenacuj  $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ .

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$$

15. oktober 2025

$A \in \mathcal{A}$  in  $Y \subseteq X$ . Da je  $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$  moramo preveriti, da je  $\mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) \stackrel{(*)}{=} \mu^*(Y) \quad \forall Y \subseteq X, \mu^*(Y) < \infty$ .

Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Po definiciji zunanje mere obstaja tako pokritje  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$  za  $Y$ , da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Y) + \varepsilon.$$

Po definiciji zunanje mere velja

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap Y) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \text{ in } \mu^*(A^c \cap Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n). \\ \Rightarrow \mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A \cap A_n) + \mu(A^c \cap A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu((A \cap A_n) \cup (A^c \cap A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^* + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pošljimo  $\varepsilon \rightarrow 0$  in dobimo  $(*)$ . □

Nekaj oznak:  $\mathcal{A}$  je algebra,  $\mu_0$  je mera na algebri,  $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$ ,  $\mu := \mu_0^*|_{\mathcal{A}_{\mu_0^*}}$ .

Izrek: Naj bodo  $\mathcal{A}, \mu_0, \mu_0^*, \mathcal{A}_{\mu_0^*}$  in  $\mu$  kot zgoraj.

- i) Naj bo  $\gamma$  mera na  $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$ , ki razširjuje  $\mu_0$ . Tedaj velja  $\gamma(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ .
- ii) Če je  $\mu(A) < \infty$ , potem je  $\gamma(A) = \mu(A)$  za vsako razširitev mere  $\mu_0$ .

(iii) Če je  $\mu_0$   $\sigma$ -končna mera na algebri, potem je  $\mu$  enolično določena razširitev mere  $\mu_0$  do mere na  $\mathcal{A}\mu_0^*$ .

Dokaz: i) Naj bo  $\gamma$  mera na  $\mathcal{A}\mu_0^*$ , ki razširja  $\mu_0$ .  
 Naj bo  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pokritje za  $A \in \mathcal{A}\mu_0^*$  z množicami iz  $\mathcal{A}$ . Tedaj je

$$\gamma(A) \leq \gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Naredimo inf. po vseh pokritjih in po definiciji dobimo:

$$\gamma(A) \leq \mu_0^*(A) = \mu(A).$$

ii) Naj bo  $A \in \mathcal{A}\mu_0^*$  in  $\mu(A) < \infty$ . Izberimo  $\varepsilon > 0$  in poiščimo pokritje  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  za  $A$  z množicami iz  $\mathcal{A}$ , da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu_0(A_n)}_{\mu(A_n)} < \underbrace{\mu_0^*(A)}_{\mu(A)} + \varepsilon.$$

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \gamma(B) = \gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

$$\begin{aligned} \mu|_{\mathcal{A}} = \gamma|_{\mathcal{A}} = \mu_0 &\xrightarrow{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \mu(B) \end{aligned}$$

Ker je  $\mu$  mera, je  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(A) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\mu(A) \leq \mu(B) = \gamma(B)$$

$$\begin{aligned}
 &= V(A) + V(B \setminus A) \\
 &\leq V(A) + \mu(B \setminus A) \\
 &< V(A) + \epsilon
 \end{aligned}$$

Ker je  $\epsilon > 0$  poljuben, je  $\mu(A) \leq V(A)$

iii) Naj bo  $\mu_0$   $\sigma$ -končna, to pomeni

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad \mu_0(A_n) < \infty$$

$\mu_0^*(A_n) = \mu(A_n)$

$$A \in \mathcal{A}, \mu_0^* \Rightarrow A = A \wedge X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \wedge A_n)$$

BSS izberimo  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paroma disjunktne.

$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \wedge A_n) \stackrel{\text{ii)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} V(A \wedge A_n) = V(A) \quad \blacksquare$$

## 1.6. polmere in polalgebri

Definicija: Polalgebra je množica  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , ki zadosti:

i)  $\emptyset \in \mathcal{S}$ .

ii)  $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$ .

iii)  $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^C$  je končna disjunktna unija množic iz  $\mathcal{S}$ .

Primer:  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{[a, b], (-\infty, b), [a, \infty) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$  je polalgebra (enostavno preveriti)

Definicija: Naj bo  $\mathcal{S}$  polalgebra in  $\mu: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  preslikava.  $\mu$  je polmera, če velja:

i)  $\mu(\emptyset) = 0$

ii)  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$  paroma disjunktne in je  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$ , potem je

$$\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

iii) Če so  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$  paroma disjunktne in je  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$ , potem je

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

21. oktober 2025

Irditev: Nuj bo  $S$  polalgebra na množici  $X$ . Tedaj je algebra generirana z  $S$ , enaka družini vseh končnih disjunktivnih unij iz  $S$ .

Simbolično:  $\mathcal{J} \dots$  podalgebra

$$\mathcal{A} = \{A_1 \cup \dots \cup A_n \mid n \in \mathbb{N}, A_i \in S \text{ paroma disjunktne}\}$$

Dokaz:  $\mathcal{A}$  je algebra, ki ocenjuje vsebuje  $\mathcal{J}$ .

Po definiciji bo  $\mathcal{A}$  vsebovala, algebro generirano  $\mathcal{J}$ , zgornji opis pa pove tudi, da bo  $\mathcal{A}$  vsebovala v algebri generirani s  $\mathcal{J}$ .

$\mathcal{A}$ -je algebra

- i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$  (A polalgebra) ✓
- ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}^c$
- iii)  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Dokazali bomo iiii) za končne preseke in nato še ii) "Novu" (ii) in (iii) sta skupaj ekvivalentna (ii)+(iii) zaradi de Morganovega pravila.

$$iiv) A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m, \quad i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_n \quad i \neq j \quad B_i \cap B_j \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cap B = \left( \bigcup_{i=1}^m A_i \right) \cap \left( \bigcup_{j=1}^n B_j \right) = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n A_i \cap B_j$$

$\Rightarrow A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$ , saj je  $\mathcal{S}$  polalgebra in

$$(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = (A_i \cap B_k) \cap (B_j \cap B_l)$$

Če je  $i \neq k$  ali  $j \neq l$ , je to prazen presek.

$\Rightarrow A \cap B$  je končna unija paroma disjunktivnih  $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

$$iii) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i ; A_i \in \mathcal{S} \text{ paroma disj.}$$

$$A^c = \bigcap_{i=1}^m A_i^c$$

Ker je  $A_i^c$  po def.  $\mathcal{A}$  in alk. za algebro v  $\mathcal{A}$ , je  
 $A^c \in \mathcal{A}$  po iii).



Irditev: Naj bo  $\mathcal{S}$  polalgebra na mn.  $X$  in naj bo  $\mu$  polmera na  $\mathcal{S}$ . Tedaj obstaja natanko ena razširitev  $\mu$  do mere  $\tilde{\mu}$  na algebri generirani s  $\mathcal{S}$ .

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$  paroma disj., da je

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \Rightarrow \tilde{\mu}(A) := \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Dokaz: vaje

Opomba: Točka iii) v def. polmere na polalgebri pravi:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S} \text{ paroma disj. in } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (*)$$

Ker se polmera na polalgebri razširi do mere na algebri, gen. z  $\mathcal{S}$  je v  $(*)$  enačaj.

## 1.7. Lebegue - Stieltjesove mere

Naj bo  $X$  topološki prostor. Mera je **Borelova**, če je definirana na Borelovi  $\sigma$ -algebri  $\mathcal{B}(X)$ .

Irditev: Naj bo  $\mu$  Borelova mera na  $\mathbb{R}$ , ki je končna na vseh omejenih Borelovinih množicah realne osi.

Def:  $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu([0, \infty)) & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -\mu([x, 0)) & ; x < 0 \end{cases}$$

Tedaj je  $F_\mu$  naraščajoča in levozvezna.

i)  $a < b \Rightarrow \mu([a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$

ii) Če je  $\mu$  končna, potem je

$$F = F_\mu + \mu(-\infty, 0),$$

kjer je  $F(x) = \mu(-\infty, x)$ .

Dokaz:  $F_\mu$  naraščajoča, saj je  $\mu$  monotona

Dokazimo, da je  $F_\mu$  levozvezna. Naj bo

$$x > 0. \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty), \text{ da } x_n \nearrow x$$

$$F_\mu(x) = \mu([0, \infty)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([0, x_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n).$$

Primera  $x \leq 0$  se lotimo na podoben način.

i)  $0 < a < b : \mu([a, b]) = \mu([0, b] \setminus [0, a])$   
 $= \mu([0, b]) - \mu([0, a])$   
 $= F_\mu(b) - F_\mu(a)$

Podobno v ostalih primerih.

$$\text{ii) } F(x) = \mu((-\infty, x)) = \mu((-\infty, 0) \cup (0, x)) \\ = \mu((-\infty, 0)) + F_\mu(x).$$

□

Cilj je dokazati obratno trditev: Vsaka naraščajoča levozvezna funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  porodi Borelovo mero. Naj bo torej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  naraščajoča levozvezna. Tedaj obstajata

$$f(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{in} \quad f(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Na polalgebri  $\mathcal{J}(\mathbb{R})$  vseh intervalov oblike  $[a, b]$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$  in  $\emptyset$  definiramo preslikavo  $\mu_f$  s predpisom:

$$\mu_f(\emptyset) := 0$$

$$\mu_f([a, b]) := f(b) - f(a)$$

$$\mu_f([a, \infty)) := f(\infty) - f(a)$$

$$\mu_f((-\infty, b]) := f(b) - f(-\infty)$$

Izrek [Lebesgue-Stieltjes]:  $\mu_f$  je polmera na polalgebri  $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ .

Dokaz: (i): Po definiciji je  $\mu_f(\emptyset) = 0$ .

(ii) Naj bo  $[a, b]$  končna disjunktna unija množic iz  $\mathcal{J}$ :

$$[a, b] = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j], \quad [a_j, b_j] \text{ so parne disj.}$$

$$\mu_f([a, b]) = \mu_f\left(\bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]\right). \quad \begin{array}{l} \text{intervali so urejeni tako, da} \\ \text{se nadaljujejo} \end{array}$$

$$f(b) - f(a) \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^n (f(b_j) - f(a_j)) = f(a_1) - f(b_n) = f(a) - f(b_n)$$



Na podoben način preverimo  $[a, \infty)$  in  $(-\infty, b)$ . DN

(iii): Preverimo stevno svbaditivnost za  $M_f$ .

Naj bo interval  $I \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  Števna disj. unija intervalov  $I_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

$$M_f(I) \leq \sum_{m=1}^{\infty} M_f(I_m)$$

1. primer:  $I = [a, b] \Rightarrow I_m = [a_m, b_m]$ .

Izberimo  $\varepsilon > 0$ . Ker je  $f$  levozvezna, obstaja  $c < b$  in  $c_j < a_j$ , da je  $f(c) > f(b) - \frac{\varepsilon}{2}$  in  $f(c_j) > f(a_j) - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j}$



Kompaktni interval  $[a, c]$  pokrijemo z odprtimi intervali  $\{(c_j, b_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ . Obstaja končno podpokritje.

Točka  $a$  je vključena v nekem  $(c_j, b_j)$ . BSS  $a \in (c_1, b_1)$



Če je  $b_1 > c_1$ , potem je  $[a, c] \subseteq (c_1, b_1)$ , sicer imamo BSS  $b_1 \in (c_2, b_2)$



Če je  $b_2 > c_1$ , potem je  $[a, c] \subseteq (c_1, b_1) \cup (c_2, b_2)$ , sicer

Postopek nadaljujemo. Po končnih korakih (po preštevilčenju), dobimo intervale  $(c_1, b_1), (c_2, b_2), \dots, (c_n, b_n)$ , da je  $c_1 < a_1, c_{j+1} < b_j$  za  $j = 1, \dots, n-1$ ,  $b_n > c$

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) &\geq \sum_{j=1}^n (f(b_j) - f(a_j)) \quad \text{indeksi po preimenovanju} \\
 &\geq \left( \sum_{j=1}^n f(b_j) - f(c_j) \right) - \varepsilon/2 \\
 &= -f(c_1) + \left( \sum_{j=2}^{n-1} \underbrace{(f(b_j) - f(c_{j-1}))}_{\geq 0} \right) + f(b_n) - \varepsilon/2 \\
 &\geq -f(a) + 0 + f(c) - \varepsilon/2 \\
 &> -f(a) + (f(b) - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 \\
 &= f(b) - f(a) - \varepsilon
 \end{aligned}$$

Ker je  $\varepsilon > 0$  poljuben, je

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) \geq f(b) - f(a)$$

2. primer:  $[a, \infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$

$$f(\infty) - f(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (f(b_j) - f(a_j))$$

$$\text{Za } n \in \mathbb{N}: [a, n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, \min\{n, b_j\})$$

Po prejšnjem primeru velja:

$$\begin{aligned}
 f(n) - f(a) &= \sum_{j=1}^{\infty} (f(\min\{b_j, n\}) - f(a_j)) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\infty) - f(a)
 \end{aligned}$$

Ostali primeri DN.



Na  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  imamo polmora  $\mu_f$ :

$$\mu_f(\emptyset) = 0, \mu_f([a, b]) = f(a) - f(b), \mu_f([a, \infty)) = f(\infty) - f(a), \mu_f((-\infty, b)) = f(b) - f(-\infty)$$

Po izreku lahko na razširimo na en sam način da vnesemo  $\mu_f$  na algebra ut generiran z  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ . Tvorimo zunanj mera  $\mu_f^*$  na  $\mathbb{R}$ . Po Caratheodorijskem izreku je množica  $A_{\mu_f^*}$  vseh  $\mu_f^*$  mernih množic  $\sigma$ -algebra, ki vsebuje vsi intervale oblike  $[a, b]$ . Torej  $A_{\mu_f^*} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Dodatno:  $(\mathbb{R}, A_{\mu_f^*}, \mu_f^*|_{A_{\mu_f^*}})$  je poln merljiv prostor.

$\Rightarrow A_{\mu_f^*} \supseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$  ... Lebesgueva  $\sigma$ -algebra, ki je napolnitvene Borelove  $\sigma$ -algebri.

Mera  $\mu_f^* := \mu$  je Lebesgue-Stieltjesova mera. Po izreku s kl zadnjic je ta mera enolična razširitev mere iz alg. gen. z  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , saj je tista mera  $\sigma$ -končna.

Poseben primer:  $f(x) = x \Rightarrow$  Dobimo Lebesgueovo mero.

Označimo jo z  $m$ .

22. oktober 2025

Posledica: Naj bo  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  in  $x \in \mathbb{R}$ . Tedaj velja  $m(x+A) = m(A)$  in  $m(x \cdot A) = |x|m(A)$ .

Dokaz: Naj bo  $m_x$  definirana na  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  s predpisom

$$m_x(A) := m(x+A).$$

$m_x$  je polmera na  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ,  $x + [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n] = \bigcup_{i=1}^n (x + [a_i, b_i])$  ki se ujema z  $m$  na  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

Če je ut alg. gen. z  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , potem se  $m_x$  in  $m$  ujemata tudi na ut. Uporabimo Caratheodorijska za  $(\mathbb{R}, m)$  in  $(ut, m_x)$ .

Vseh primerih dobimo  $\sigma$ -algebre, ki vsebuje  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ . Ker sta  $m$  in  $m_x$   $\sigma$ -končni na  $(\mathbb{R}, ut)$ , sta enolična razširiljivi na  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ .

Dokaz druge enakosti podobno. □

Spomnimo se:  $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu_f) \rightsquigarrow (\mathcal{A}, \mu_f) \rightsquigarrow (\mathcal{A}_{\mu_f^*}, \mu_f^*)$

polmera na  
polalgebri      mera na  
algebri       $\mu$

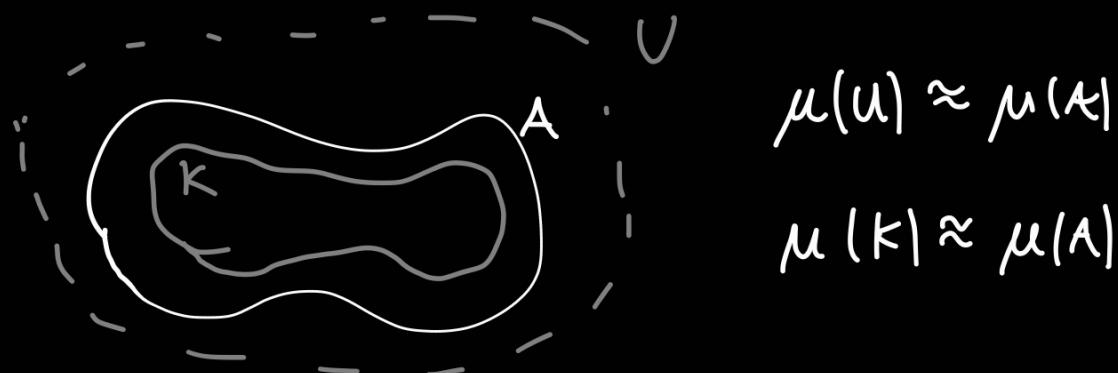
$$A \in \mathcal{A}_{\mu_f^*} \rightsquigarrow \mu(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ in } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

$A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n$  je končna disjunktna unija intervalov oblike  $[a, b], (-\infty, b), [a, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \mu_f([a_m, b_m]) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} f(b_m) - f(a_m) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \right\} \end{aligned}$$

Trditev: Naj bo  $\mu_f$  Lebesgue-Stieltjesova mera na  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ , poravnana z naraščajočo levozvezno funkcijo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tedaj je

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (a_m, b_m) \right\}.$$



Dokaz: Označimo desno stran z  $\gamma(A)$ .

Vsek interval  $(a_n, b_n)$  je števna disjunktna unija intervalov oblike  $[a_{n,m}, b_{n,m}]$ . Po definiciji infimuma je  $\mu(A) \leq \gamma(A)$ .

Za obratno neenakost pa potrebujemo levozveznost funkcije  $f$ . Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}$  in naj bo  $\mu(A) < \infty$ . Tedaj za  $\forall \epsilon > 0$ .  $\exists [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ , da je

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \text{ in}$$



$$\mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f([a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n))$$

Ker je  $f$  levozvezna, za  $\forall n \in \mathbb{N}. \exists a'_n < a_n$ , da je

$$f(a'_n) > f(a_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

$$\Rightarrow \mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a'_n)) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$= \left( \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a'_n)) \right) - \varepsilon$$



$$\Rightarrow \mu(A) + 2\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a'_n))$$

Zaradi monotonosti mere je potem  $\mu(A) = \nu(A)$ . □

Izrek: Za  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  velja

$$m(A) = \inf \{ m(V) \mid A \subseteq V^{\text{odp}} \} \quad (*)$$

$$= \sup \{ m(K) \mid K^{\text{komp}} \subseteq A \} \quad (**)$$

Dokaz [prva enakost]: (druga možče karneje - Rieszov izrek).

$$A \subseteq V \Rightarrow m(A) \leq m(V)$$

$$\Rightarrow m(A) \leq \inf \{ m(V) \mid V^{\text{odp}} \supseteq A \}$$

Prej smo dokazali, da je:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n)) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}$$

$$V := \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \Rightarrow m(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n))$$



(\*) ... zunanjja regularnost mere, (\*\*)... notranja regularnost mere  
 (inf. po odprtih mn.) (sup. po komp. mn)

## 2. MERLJIVE FUNKCIJE

28. oktober, 2025

### 2.1. Merljive preslikave

Naj bojstu  $(X, \mathcal{A})$  in  $(Y, \mathcal{B})$  merljiva prostora. Preslikava  $f: X \rightarrow Y$  je merljiva, če je  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  za vsak  $B \in \mathcal{B}$ .

Primer: Konstantne preslikave so merljive:  $f \equiv b_0$ .

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & ; b \notin B \\ X & ; b \in B \end{cases}$$

Lema: Kompozitum merljivih preslikav je merljiva preslikava.

Dokaz:  $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ ,  $g: (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (Z, \mathcal{C})$

$$c \in \mathcal{C}: (g \circ f)^{-1}(c) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(c)}_{\in \mathcal{B}}) \quad \square$$

Lema: Naj bo  $(X, \mathcal{A})$  merljiv prostor,  $Y$  mn. in  $f: X \rightarrow Y$  preslikava.

- i)  $\mathcal{B}_0 = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$  je  $\sigma$ -algebra na  $Y$
- ii) Če je  $(Y, \mathcal{B})$  merljiva prostor in  $\mathcal{B} = \sigma(F)$ , potem je  $F$  merljiva  $\Leftrightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{A} \quad \forall F \in \mathcal{F}$ .

Dokaz: i)  $\mathcal{B}_0$  je  $\sigma$ -algebra

$$\cdot f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}_0$$

$$\cdot B \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow B^c \in \mathcal{B}_0$$

$$f^{-1}(B^c) = (\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}})^c \in \mathcal{A}$$

$$\cdot (B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \underbrace{\in}_{G \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

ii)  $\Leftrightarrow \checkmark$

$$\Leftrightarrow: \mathcal{B}_0 := \{ B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

$\mathcal{B}_0$  je  $\sigma$ -algebra po i)

$\mathcal{B}_0$   
"

Po predpostavkah je  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_0 \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}_0$

$\forall B \in \mathcal{B}$  velja  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Rightarrow f$  merljiva

Posledica: Naj bo  $(X, \mathcal{A})$  merljiv prostor in  $Y$  topološki prostor.

Tedaj je  $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$  merljiva  $\Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$   $\forall V$  očlp v  $Y$ .

Posledica: Vsaka zvezna preslikava med topološkima prostoroma je merljiva glede na Borelovi  $\sigma$ -alg (na  $X$  in  $Y$ ). ( $f: (X, \mathcal{B}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$  je merljiva, če je zvezna).

Merljive preslikave med topološkimi prostori, opredeljenimi z Borelovimi  $\sigma$ -algebrami, bomo imenovali **Borelove preslikave**.

Irditev: Naj bo  $(X, \mathcal{A})$  merljiv prostor in  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. NTSE:

- i)  $f$  je  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  merljiva ( $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  je merljiva).
- ii)  $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$  ali  $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- iii)  $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$  ali  $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- iv)  $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A} \quad \forall a < b$  ali  $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A} \quad \forall a < b$
- v)  $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A} \quad \forall a < b$
- vi)  $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A} \quad \forall a < b$

## 2.2. Razširjena realna QS

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} =: [-\infty, \infty]$$

$-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$  (imamo največji in najmanjši element)

Topologija na  $\bar{\mathbb{R}}$ :

- na  $\mathbb{R}$  je običajna Evklidska topologija.
- bazni sistem okolic za  $\infty$ :  $(a, \infty]$ ;  $a \in \mathbb{R}$
- bazni sistem okolic za  $-\infty$ :  $[-\infty, b)$ ;  $b \in \mathbb{R}$

Topologija na  $\bar{\mathbb{R}}$  je natanko relativna topologija oz. inkluzija  $i: \mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}}$  je zvezna

Zanimu nas  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$

Dpomba: Topologija na  $\bar{\mathbb{R}}$  pove, da je  $x_r \rightarrow \infty$  v smislu ANA1 natanko konvergenca v top. pr.  $\bar{\mathbb{R}}$ .

Trditev: Naj bo  $X$  topološki prostor in  $Y$  podprostор v  $X$ , opremljen z relativno topologijo. Tedaj je

$$\mathcal{B}(Y) := \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Dokaz: Oglejmo si  $\mathcal{B} = \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{B}(X)\}$

Hkrat se vidi, da je  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -algebra. Po definiciji relativne topologije na  $Y$ ,  $\mathcal{B}$  vsebuje vsi odprti množice iz  $Y$ .  $\Rightarrow \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}$

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(Y) \quad A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow Y \cap A \in \mathcal{B}(Y)$$

$i: Y \rightarrow X$  je zvezna, saj je  $Y$  opremljen z rel. top.  
 $\Rightarrow i(Y, \mathcal{B}(Y)) \rightarrow (X, \mathcal{B}(X))$

$$A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow i^{-1}(A) \in \mathcal{B}(Y)$$

$$Y \cap A$$



Irditev: Velja  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$  in

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \subseteq \{-\infty, \infty\}\}. \quad (*)$$

Dokaz:  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \mathbb{R} \cap B, \quad B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}).$$

$$\mathbb{R} \text{ odprta} \vee \bar{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \Rightarrow A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$$

(\*) (2):  $B$  je zaprta v  $\bar{\mathbb{R}}$   $\Rightarrow B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$   
 $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$

( $\subseteq$ ):  $A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$

$$A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow A = (A \cap \mathbb{R}) \cup C; \quad C \subseteq \{-\infty, \infty\}$$

□

Irditev: Naj bo  $(X, \mathcal{A})$  merljiv prostor in  $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  funkcija. Tedenj je  $f$  merljiva  $\Leftrightarrow f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A} \forall a \in \mathbb{R}$ .

Posledica: Če je  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  merljiva, potem je  $\lambda f$  tudi merljiva za vsak  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Dokaz:  $\lambda = 0$ :  $\lambda f = 0$  je merljiva ✓

$\lambda > 0$ :  $(\lambda f)^{-1}([-\infty, a]) = \{x \in X \mid (\lambda f)(x) \in [-\infty, a]\}$   
 $= \{x \in X \mid f(x) \in [-\infty, \frac{a}{\lambda}]\}$   
 $= f^{-1}([-\infty, \frac{a}{\lambda}]) \in \mathcal{A}$

$\lambda < 0$ : podobno

□

Primer:  $(X, \mathcal{A})$  merljiv prostor. Merljivost  $\chi_A$ ;  $A \subseteq X$ .

$$\chi_A^{-1}([-\infty, a]) = \begin{cases} X: a \geq 1 \\ A^c: 0 \leq a < 1 \\ \emptyset: a < 0 \end{cases}$$

$\chi_A$  merljiva  $\Leftrightarrow A^c$  merljiva  $\Leftrightarrow A$  merljiva

## 2.3. Produktna $\sigma$ -algebra

$$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}) \rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \times B$  merljiv pravokotnik

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  ...  $\sigma$ -algebra generirana z vsemi merljivimi pravokotniki

Lema: Naj bosta  $(X, \mathcal{A})$  in  $(Y, \mathcal{B})$  merljiva prostora.

- i) Produktna  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  je najmanjša  $\sigma$ -algebra na  $X \times Y$ , da sta projekciji  $\Pi_1: X \times Y \rightarrow X$  in  $\Pi_2: X \times Y \rightarrow Y$  merljivi.
- ii) Če je  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$  in  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ , potem je  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  generirana z  $G := \{A \times B \mid A \in \mathcal{E}\} \times \{X \times B \mid B \in \mathcal{F}\}$

Dokaz: (i): Naj bosta  $g_1: X \times Y \rightarrow X$  in  $g_2: X \times Y \rightarrow Y$  merljivi glede na neko  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{C}$  na  $X \times Y$ .

$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = g_1^{-1}(A) \cap g_2^{-1}(B) \in \mathcal{C}$$

$\Rightarrow$  Po definiciji:  $\mathcal{C}$  vsebuje  $A \otimes B$ .

(ii): Vsi elementi  $G$  so merljivi pravokotniki  $\Rightarrow \sigma(G) \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(G)$ :

$$\tilde{\mathcal{Z}} := \{A \subseteq X \mid g_1^{-1}(A) \subseteq \sigma(G)\}, \quad g_1: X \times Y \rightarrow X$$

Po lemi je  $\tilde{\mathcal{Z}}$   $\sigma$ -algebra, ki vsebuje  $\mathcal{E} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \tilde{\mathcal{Z}}$

$$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}: g_1^{-1}(A) \in \sigma(G)$$

$A \subseteq X$

Podobno  $\forall B \in \mathcal{B}: X \times B \in \sigma(G)$

$$\Rightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \in \sigma(G) \Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(G).$$

Trditev: Naj bosta  $X$  in  $Y$  topološka prostora. Produkt  $X \times Y$  opremimo s produktno  $\sigma$ -algeoero. Tedaj velja:

i)  $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}(X \times Y)$

- (i) Če sta  $X, Y$  2-števnu, potem  $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$ .  
(ii) Če sta  $X, Y$  separabilna metrična prostora, potem je  $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$ .

Dokaz: (ii) V metričnih prostorih je separabilnost  $\Leftrightarrow$  2-števnost.

29. oktober 2025

i) Naj bo  $\mathcal{C}$   $\sigma$ -algebra generirana z

$$\mathcal{F} := \{U \times Y \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times V \mid V \in \mathcal{T}_Y\}$$

Po prejšnji lemi  $\mathcal{F}$  ravno generira produktno  $\sigma$ -algebro  $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ . Ker  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}_{X \times Y}$ , je  $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{T}_{X \times Y}) = \mathcal{B}(X \times Y)$ .

$$\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$$

ii)  $\mathcal{B}(X \times Y) \subseteq \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$

Topološki prostor je 2-števen, če obstaja števna baza za topologijo. To pomeni, da obstaja števna družina odprtih množic, da je vsaka odprta množica unija neke poddružine.

Pokažali bomo, da je vseh odprtih množic v  $X \times Y$  vsebovana v  $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ . Ker je vsaka odprta množica v  $X \times Y$  števna unija odprtih pravokotnikov, je potrebno "dokazati", da je  $\bigcup_{V \in \mathcal{T}_X, U \in \mathcal{T}_Y} (U \times V)$  za  $V \in \mathcal{T}_Y, U \in \mathcal{T}_X$ . ■

Recimo, da imamo  $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  in  $(Z, \mathcal{C})$ .

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightsquigarrow ((X \times Y) \times Z, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C})$$

Podobno lahko tvorimo ostale možne produkte. Da se videti, da je  $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}$  generirana z

$$\{(A \times B) \times C \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

V duhu identifikacij pišemo  $(X \times Y \times Z, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ .

Podobno za več prostorov.

Posledica: Za  $n \in \mathbb{N}$  velja  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Dokaz:  $n=2$  po trditvi, saj je  $\mathbb{R}$  separabilen metrični prostor.

$$\begin{aligned}\underline{n \rightarrow n+1}: \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}) &= \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

□

V duhu identifikacije  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , velja:

Posledica:  $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Irditev: Naj bosta  $(Y_1, \mathcal{B}_1)$  in  $(Y_2, \mathcal{B}_2)$  merljiva prostora,  $Y_1 \times Y_2$  opremlimo s produktno  $\sigma$ -algebro. Če je  $(A, \mathcal{A})$  merljiv prostor in  $f: A \rightarrow Y_1 \times Y_2$  preslikava, tedaj je  $f$   $(A, \mathcal{A})$ -merljiva  $\Leftrightarrow g_1 \circ f$  in  $g_2 \circ f$  sta z uporedoma  $(A, \mathcal{A})$ - in  $(Y_i, \mathcal{B}_i)$ -merljivi.

Dokaz: ( $\Rightarrow$ ): Naj bo  $f: A \rightarrow Y_1 \times Y_2$   $(A, \mathcal{A})$ -merljiva

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y_1 \times Y_2 \\ & \searrow g_i \circ f & \downarrow g_i \\ & & Y_i \end{array}$$

Ker je  $g_i$   $(Y_1 \times Y_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_i)$ -merljiva, je  $g_i \circ f$   $(A, \mathcal{A})$ -merljiva.

( $\Leftarrow$ ): Naj bosta  $g_1 \circ f$  in  $g_2 \circ f$  merljivi. Označimo

$$\mathcal{C} := \{ B \subseteq Y_1 \times Y_2 \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

Vemo, da je  $\mathcal{C}$   $\sigma$ -algebra. Če  $\mathcal{C}$  vsebuje vse merljive pravokotnike, potem je  $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{C}$ .

$B = B_1 \times B_2$ ,  $B_1 \in \mathcal{B}_1$ ,  $B_2 \in \mathcal{B}_2$

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \{x \in X \mid f_1(x) \in B_1 \text{ in } f_2(x) \in B_2\} \\ &= \{x \in X \mid f_1(x) \in B_1\} \cap \{x \in X \mid f_2(x) \in B_2\} \\ &= f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

saj sta  $f_1$  in  $f_2$  merljivi.

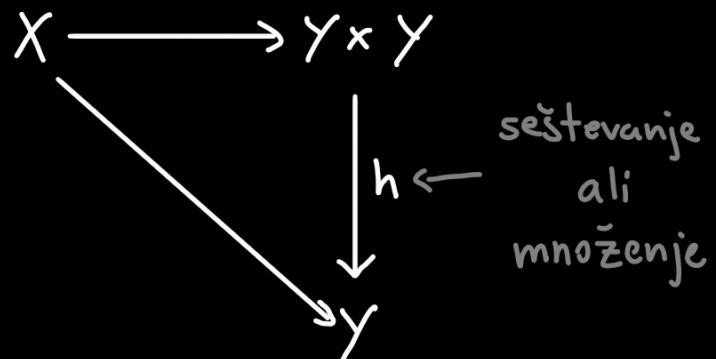
□

Posledica: Naj bo  $(X, \mathcal{A})$  merljiv prostor in  $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, [0, \infty]\}$ .

Če sta  $f, g: X \rightarrow Y$  merljivi, potem sta merljivi tudi  $f+g$  in  $f \cdot g$ .

Dokaz:  $F: X \rightarrow Y \times Y$

$$x \mapsto (f(x), g(x))$$



$h$  je zvezna, zato je  $h: (Y \times Y, \mathcal{B}(Y, Y)) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$

merljiva. Ker sta  $f, g: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$  merljivi, je tudi  $F: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y \times Y, \mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y))$ .

$\mathcal{B}(Y \times Y) = \mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y)$ , ker  $Y$  2-števen

□

Irditev: Linearne kombinacije merljivih preslikav z vrednosti v  $\mathbb{R}$  ali  $\mathbb{C}$  so merljive.

Posledica: Naj bo  $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{A}, \mathcal{B}(\mathbb{A}))$  merljiva. Tedaj sta  $\text{Re } f$  in  $\text{Im } f$  tudi merljivi.

Velja tudi obrat, saj je  $f = \text{Re } f + i \text{Im } f$ .

## 2.4. Zaporedja merljivih funkcij

4. november 2025

Naj bo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [-\infty, \infty]$  zaporedje. Definiramo  $\tilde{a}_n := \sup_{k \geq n} a_k$ . Tedaj je  $(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  padajoče zaporedje in zato ima limito  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n$  v  $[-\infty, \infty]$ . To limito označimo z

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{k \geq n} a_k \right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k.$$

Podobno obstaja limes inferior in velja:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k.$$

Naj bo dano zaporedje  $f_n: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ . Definiramo naslednje funkcije:

$$(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

$$(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

$$(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Primer: Naj bo  $X$  neštevna množica in  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra števnskoštvenih (števna ali komplement števen) podmnožic v  $X$ . Naj bo  $E \subseteq X$  takšna množica, da niti  $E$  niti  $E^c$  ni števna. Torej  $E \notin \mathcal{A} \Rightarrow \chi_E$  ni merljiva.

$\chi_E = \sup \{\chi_{\{x\}} \mid x \in E\}$  je supremum družine merljivih funkcij, vendar ni merljiva.

Lema: Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje merljivih funkcij iz  $X \rightarrow [-\infty, \infty]$ .

- i) Tedaj sta  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  in  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$  merljivi funkciji.
- ii) Tedaj sta  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  in  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  merljivi funkciji.
- iii) Če  $f_n \rightarrow f$  po točkah, potem je  $f$  merljiva.

Dokaz: i) Označimo  $g := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ .

$$\begin{aligned} g^{-1}([-∞, a]) &= \{x \in X \mid g(x) \leq a\} \\ &= \{x \in X \mid f_n(x) \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) \leq a\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-∞, a]) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

saj so  $f_n$  merljive.

Funkcija  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}} (-f_n)$  je merljiva po zgornjem.

ii)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n \leftarrow$  merljivo po i)  
 $g_n \dots$  merljivo po i)

Podobno  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ .

iii) Če  $f_n \rightarrow f$  po točkah, potem  $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ .  $\blacksquare$

## 2.5. Aproximacija s stopničastimi funkcijami

Funkcija  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  je **stopničasta**, če ima končno založno vrednosti.

Če  $Z_f = \{a_1, \dots, a_n\}$ , pri čemer  $a_i \neq a_j$  za  $i \neq j$ , potem

$$F = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \chi_{f^{-1}(\{a_k\})} = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k},$$

kjer je  $A_k = f^{-1}(\{a_k\})$ .

Opozka:  $f$  merljiva  $\Leftrightarrow A_k$  merljive  $\forall k = 1, 2, \dots, n$ .

Dokaz: ( $\Leftarrow$ ):  $A_k$  merljiva  $\Rightarrow \chi_{A_k}$  merljiva  $\Rightarrow f$  merljiva kot linearna kombinacija merljivih

( $\Rightarrow$ ): Naj bo  $U_k$  odprta množica, ki vsebuje  $a_i$ , ne vsebuje  $a_j$  za  $j \neq k$ .  $f^{-1}(U_k) = A_k$  (Lahko razumeš singleton)  $\Rightarrow A_k$  merljiva.  $\square$

Zgoraj je  $f$  v kanonični obliki:  $a_k$  paroma različni,  $A_k$  paroma disjunktne in  $\bigcup_{k=1}^m A_k = X$ .

Vektorski prostor vseh omejenih merljivih funkcij opreminimo s supremum normo.

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Dobimo normirani prostor.

Irditev: Prostор vseh omejenih merljivih funkcij na  $X$  je Banachov prostor glede na  $\|\cdot\|_\infty$ .

Dokaz:  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyjeva  $\Rightarrow (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  je konvergentna v  $\mathcal{C}$   
 $\Rightarrow \exists f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  je enakovredna limita

$$\left( \begin{array}{l} |f_n(x) - f_m(y)| < \varepsilon \quad \text{za } m, n \geq n_0 \quad \forall x, y \in X \\ |f(x) - f_m(x)| \stackrel{\downarrow}{\leq} \varepsilon \end{array} \right)$$

$\Rightarrow f$  je limita po točkah zaporedja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Rightarrow f$  merljiva  $\square$

Iz naslednjega izreka bo sledilo, da je vektorski prostor vseh stopničastih merljivih funkcij gost v prostoru vseh omejenih merljivih funkcij.

$$S(X) \text{ gosta v } B(X)$$

↑                      ↑  
stop. merlj.            om. merlj.

Izrek: Naj bo  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva. Tedaj obstaja naraščajoče zaporedje nenegativnih merljivih stopničastih funkcij  $f_n: X \rightarrow [0, \infty)$ , da  $f_n \nearrow f$  po točkah. Ta konvergenca je enakovredna na vsaki množici, kjer je  $f$  omejena.

Opoomba: Če je  $f$  omejena, potem  $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ;  $f_n: X \rightarrow [0, \infty)$  stopnicaste in  $f_n \rightarrow f$  enakomerno.

$F: X \rightarrow \mathbb{C}$  merljiva  $\Rightarrow F = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F = (\operatorname{Re} F^+ - \operatorname{Re} F^-) + i(\operatorname{Im} F^+ - \operatorname{Im} F^-)$ .

$\operatorname{Re} F^+, \operatorname{Re} F^-, \operatorname{Im} F^+, \operatorname{Im} F^-: X \rightarrow [0, \infty)$  so omejene, če je  $f$  omejena.

Po zgornjem  $\exists (u_n)_n, (v_n)_n, (s)_n, (\zeta_n)_n$  zap. neneg. stop. merlj. funk., da so konvergencije  $u_n \rightarrow \operatorname{Re} F^+$ ,  $v_n \rightarrow \operatorname{Re} F^-$ ;  $s_n \rightarrow \operatorname{Im} F^+$ ,  $\zeta_n \rightarrow \operatorname{Im} F^-$  enakomerne.  $\Rightarrow \underbrace{u_n - v_n + i(s_n - \zeta_n)}_{\text{stop. kompl. merlj. funkcija}} \rightarrow f$  enakomerno

Dokaz (izreka o aproksimaciji):

Za  $\forall n \in \mathbb{N}$  in  $k=1, 2, \dots, n \cdot 2^n$  definiramo merljive množice

$$E_{n,k} := \left\{ x \in X \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right)$$

$$\text{in } F_n := \left\{ x \in X \mid f(x) \geq n \right\} = f^{-1}([n, \infty)).$$

$$\text{Definiramo } f_n = \left( \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} \right) + n \chi_{F_n}.$$

$f_n$  so stopnicaste, nenegetivne in merljive. Da se videti, da je  $f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Za  $x \in f^{-1}([0, n])$  velja  $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ . Če  $f(x) < \infty$ , potem od nekod dalje velja  $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ .

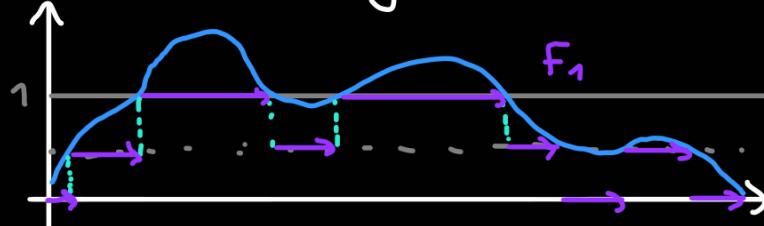
Torej  $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x)$  oziroma  $f_n(x) \nearrow f(x)$ .

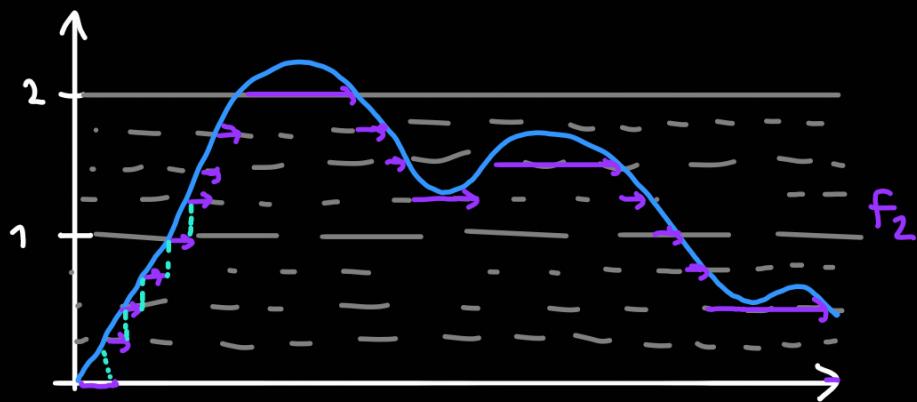
Če  $f(x) = \infty$ , potem je  $s_n(x) = n \rightarrow \infty$ . Torej  $f_n \nearrow f$ .

Naj bo  $A \subseteq X$  taka, da je  $f|_A$  omejena. Tedaj je  $A \cap F_n = \emptyset$  od nekod dalje. Od prej: vsak  $x \in A$  zadostca

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq n_0.$$

To je enakomerna konvergenca. □





$$2 \cdot 2^2 = 8 \text{ niwojev}$$

Posledica: Naj bo  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  merljiva. Tedaj obstaja zaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  merljivih stopničastih funkcij, da velja  $0 \leq |f_1| \leq |f_2| \leq \dots$  in  $f_n \rightarrow f$  po točkah. Konvergenca je enakomerna na vseki množici, na kateri je  $f$  omejena.

Dokaz: DN

## 2.6. Načini konvergencije

Naj bo  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  merljivi prostor in  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje merljivih funkcij. Pravimo, da  $f_n \rightarrow f$  skoraj enakomerno, če za  $\forall \varepsilon > 0$ .  $\exists A \in \mathcal{A}$ , da  $\mu(A^c) < \varepsilon$  in  $f_n \rightarrow f$  enakomerno na  $A$ . Pravimo, da  $f_n \rightarrow f$  skoraj povsod, če ima množica  $\{x \in X \mid f_n(x) \neq f(x)\}$  ničelno mero. Lahko se zgodi, da limitna ni merljiva.

Irditev: Če  $f_n \rightarrow f$  skoraj enakomerno, potem  $f_n \rightarrow f$  skoraj povsod.

Dokaz: Za  $\forall m \in \mathbb{N}$ .  $\exists A_m$ .  $\mu(A_m^c) < \frac{1}{m}$  in  $f_n \rightarrow f$  enakomerno na  $A_m$ . Zato  $f_n \rightarrow f$  po točkah na  $A_m$ .  $\Rightarrow f_n \rightarrow f$  po točkah na  $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ . Velja

$$\mu\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)^c\right) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m^c\right) \leq \frac{1}{m} \rightarrow 0$$



skoraj povsod  $\rightsquigarrow$  s.p.  
almost everywhere  $\rightsquigarrow$  a.e.

tipične  
okrajšave

5. november 2025

Lastnost  $P$  velja skoraj povsod, če ima komplement množice vseh  $x \in X$ , za katere  $P$  velja, mero nič.

Primer: i) konvergenca skoraj povsod  $f_n \rightarrow f$  skoraj povsod:  
 $P \dots f_n(x) \rightarrow f(x)$

ii)  $f \geq 0$  skoraj povsod

$$P \dots f(x) \geq 0$$

Izrek [Jegorov]: Naj bo  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  prostor s končno mero. Če so  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  merljive in  $f_n \rightarrow f$  skoraj povsod, kjer je  $f$  merljiva, potem  $f_n \rightarrow f$  skoraj enakomerno.

Dokaz:  $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow f_n - f \rightarrow 0$  (velja za skoraj povsod in skoraj enakomerno)

BSS.  $f_n \rightarrow 0$  skoraj povsod.

Zapišimo  $X = X' \cup N$ ;  $\mu(N) = 0$  in  $f_n \rightarrow f$  na  $X'$  po točkah. Če dokazemo, da  $f_n \rightarrow 0$  skoraj enakomerno na  $X'$ , potem gre  $f_n \rightarrow 0$  skoraj enakomerno na  $X$ .

BSS  $f_n \rightarrow 0$  po točkah na  $X$ .

Vpeljimo množice

$$A_{k,m} = \{x \in X \mid |f_n(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \forall n \geq k\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,m} = X \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$x \in X : f_n(x) \rightarrow 0$$

$$\forall m \in \mathbb{N}. \exists k \in \mathbb{N}. |f_n(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \forall n > k \Rightarrow x \in A_{k,m}$$

$$\text{Hkrati } A_{k,m} \subseteq A_{k+1,m} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \forall k \in \mathbb{N}$$

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,m}; \quad A_{k,m} \subseteq A_{k+1,m} \Rightarrow \mu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (A_{k,m}) \quad (*)$$

Fiksirajmo  $\varepsilon > 0$ . Iz ( $*$ ) sledi, da za  $m \in \mathbb{N}$ .  $\exists k_m \in \mathbb{N}$ .

$$\mu(A_{k_m, m}) \geq \mu(x) - \frac{\varepsilon}{2^m}$$

$$\text{Definirajmo } A := \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{k_m, m} \Rightarrow \mu(A^c) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{k_m, m}^c)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (\mu(x) - \mu(A_{k_m, m}))$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.$$

$f_n \rightarrow 0$  enakomerne na  $A$

$x \in A \Rightarrow x \in A_{k_m, m} \forall n \in \mathbb{N}$

$\delta > 0 \exists m \in \mathbb{N}. \frac{1}{m} < \delta$

$x \in A_{k_m, m} \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{m} < \delta \quad \forall n \geq k_m$

To je definicija enakomerne konvergencije na  $A$ . □

Zuporedje merljivih funkcij  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  konvergira po meri proti merljivi funkciji  $f$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Primer: i)  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$

$$f_n = \chi_{(n, n+1]}$$

$$f_n(x) = \chi_{(n, n+1)}(x) = \begin{cases} 1; & x \in (n, n+1) \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n \rightarrow 0$  po točkah

$f_n \not\rightarrow 0$  po meri:

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in X \mid \chi_{(n, n+1)}(x) \geq \varepsilon\}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \{x \in X \mid \chi_{(n, n+1)}(x) \geq \frac{1}{2}\} = (n, n+1)$$

$$m(\{x \in X \mid \chi_{(n, n+1)}(x) \geq \frac{1}{2}\}) = 1 \not\rightarrow 0$$

$f_n \rightarrow 0$  skoraj enakomerno

$$|f_n(x) - 0| = |\chi_{(n,n+1)}(x) - 0| = \begin{cases} 1; & x \in (n, n+1) \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Če bi za  $\varepsilon = 1/2$ , A borelva, da  $m(A^c) < 1/2$  in  $f_n \rightarrow 0$  enak na A. Iz zgornjega sledi, da tak A ne obstaja.

ii)  $[0,1]$ , Leb.-mera (ozirama njena zožitev na  $[0,1]$ )

$$f_1 = \chi_{[0,1]},$$

$$f_2 = \chi_{[0,1/2]}, f_3 = \chi_{[1/2,1]}$$

$$f_4 = \chi_{[0,1/4]}, f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}, f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}, f_7 = \chi_{[3/4,1]}$$

⋮ ⋮

Za  $\forall x \in [0,1]$  ima zaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  neskončno mnogo 1 in 0. Torej ne konvergira po točkah (v nobeni točki).

$f_n \rightarrow 0$  po meri

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}$$

Ta množica ima mero enako meri ustreznegra intervala, ki definira  $f_n$ . Ker te mere konvergirajo proti 0, velja  $f_n \rightarrow 0$  po meri

Opomba: Izrek Jegorova ne velja nujno, če je  $\mu(X) = \infty$ .

11. november 2025

Irditev: Naj bo  $(X, (A, \mu))$  prostor z mero in  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje merljivih funkcij in f merljiva.

i)  $f_n \rightarrow f$  skoraj enakomerno  $\Rightarrow f_n \rightarrow f$  po meri

ii)  $\mu(X) < \infty$  in  $f_n \rightarrow f$  skoraj presel  $\Rightarrow f_n \rightarrow f$  po meri

Dokaz: i) Glej vaje.

ii)  $\mu(X) < \infty \stackrel{\text{Jegorov}}{\Rightarrow} f_n \rightarrow f$  skoraj enak.  $\Rightarrow f_n \rightarrow f$  po meri.



### 3. INTEGRAL

#### 3.1. Integracija stopničastih funkcij

Naj bo  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  prostor z mero. Za stopničasto funkcijo

$$s := \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j} \quad (\text{s merljiva})$$

definiramo  $\int_X s d\mu := \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j)$ .

Če je  $s = \chi_A$ , potem  $\int_X s d\mu = \mu(A)$ .

Izkazuje se, da je  $\int_X s d\mu$  neodvisen od izbire  $A_j$  in  $c_j$ . Torej lahko dostikrat prevzamemo, da je  $s$  zapisan v kanonični obliki.

Če je  $A$  merljiv, definiramo  $\int_A s d\mu := \int_X s \chi_A d\mu$ .

Lema: Naj bo  $s: X \rightarrow [0, \infty)$  merljiva stopničasta funkcija. Tedaj je z  $\gamma(A) := \int_A s d\mu$  definirana pozitivna mera  $(X, \mathcal{A})$ .

Dokaz:  $\gamma(\emptyset) = \int_{\emptyset} s d\mu = \int_X s \chi_{\emptyset} d\mu = \int_X 0 d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0$

Naj bodo  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paroma disjunktne merljive množice in naj bo  $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .  $\gamma(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n)$

Naj bo  $s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$  kanonična oblika za  $s$ .

$$s \chi_A = \left( \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j} \right) \chi_A = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j \cap A}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma(A) &= \int_A s d\mu = \int_X s \chi_A d\mu = \sum_{j=1}^n c_j \mu(E_j \cap A) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_j \mu(E_j \cap A_i) \\
 \xrightarrow{\text{ANA 1}} \quad &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mu(E_j \cap A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_X s d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(A_i)
 \end{aligned}$$

□

Lema: Naj bosta  $s, t : X \rightarrow [0, \infty]$  merljivi stopničasti funkciji in naj bo  $c \in [0, \infty]$ . Tedaj velja:

$$i) \int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

$$ii) \int_X c s d\mu = c \int_X s d\mu$$

Dokaz: i)  $s := \sum_{i=1}^m c_i \chi_{E_i}$ ,  $t := \sum_{j=1}^n d_j \chi_{F_j}$  zapisa v kanonični obliki

$$\text{Tedaj je } s+t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_i + d_j) \chi_{E_i \cap F_j}.$$

Čeprav so množice  $E_i \cap F_j$  paroma disjunktne, to ni nujno kanonična oblika za  $s+t$ . Velja pa

$$\begin{aligned}
 \int_X (s+t) d\mu &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_i + d_j) \mu(E_i \cap F_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_j \mu(E_i \cap F_j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{j=1}^n F_j &= X \\
 \bigcup_{i=1}^m E_i &= X \\
 &= \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^n d_j \sum_{i=1}^m \mu(E_i \cap F_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m c_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^n d_j \mu(F_j)
 \end{aligned}$$

$$= \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

$$ii) \int_X c s d\mu = \sum_{i=1}^m c c_i \mu(E_i) = c \sum_{i=1}^m c_i \mu(E_i) = c \int_X s d\mu$$

□

Lema: Naj bosta  $s, t$  takšni merljivi stopničasti funkciji, da velja  $0 \leq s \leq t$ . Tedaj je  $0 \leq \int_X s d\mu \leq \int_X t d\mu$ .

Dokaz:  $t = t - s + s$ . Po prejšnji lemi :

$$\int_X t d\mu = \int_X (t - s) d\mu + \int_X s d\mu \geq \int_X s d\mu \geq 0$$

□

### 3.2. Integral nenegetivne merljive funkije

Naj bo  $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$  prostor z mero in  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva.

Z  $\mathcal{I}_f$  definiramo množico  $\{s \mid 0 \leq s \leq f \text{ merljiva stopničasta funkcija}\}$ .

Definiramo :  $\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \in \mathcal{I}_f \right\}$ .

Lema: Naj bosta  $0 \leq f \leq g$  merljivi. Potem je  $0 \leq \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ .

Dokaz:  $\mathcal{I}_f \subseteq \mathcal{I}_g \Rightarrow \text{supremum po } \mathcal{I}_f \leq \text{supremum po } \mathcal{I}_g$

Primer:  $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$ ,  $\delta_{x_0}$  Diracova mera

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

$$0 \leq s \leq f \Rightarrow \int_X s d\delta_{x_0} \geq \int_X s d\delta_{x_0} \quad \text{||} \quad s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j} \quad \begin{matrix} \text{kanonična} \\ \text{obična} \end{matrix}$$

$$\sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_0}(E_j) = c_k \cdot 1 = s(x_0) \quad (x_0 \in E_k)$$

Ker  $s_n \nearrow f$  po točkah (izrek o apriksimaciji), dobimo  $\int_X f d\delta_{x_0} \geq f(x_0)$ .

$$\int_X s d\delta_{x_0} = s(x_0) \leq f(x_0)$$

Naredimo supremum po vseh  $s \in \mathcal{I}_f$ .

Primer:  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ :  $\mu$  steje točke

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

$$f(n) \leftrightarrow a_n \leadsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Izrek [Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci (LMK)]:

Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  naraščajoče zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$ .

Dokaz: Ker je  $(\int_X f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  naraščajoče zaporedje, obstaja

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$$

$$a = \int_X f d\mu ; \quad f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

$$a \leq \int_X f d\mu, \text{ saj } f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a \geq \int_X f d\mu \Leftrightarrow a \geq \int_X c s d\mu \quad \forall c \in (0,1) \quad \forall s \in \mathcal{F}$$

$\Leftarrow$ : √ zaradi monotonosti

$\Leftarrow$ : sledi iz dejstva, da najprej naredimo supremum po  $c \in (0,1)$  in nato supremum po vseh  $s \in \mathcal{F}$ .

Izberimo  $c \in (0,1)$  in  $s \in \mathcal{F}$ . Za  $n \in \mathbb{N}$  definiramo

$$A_n := \{x \in X \mid c s(x) \leq f_n(x)\}.$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{in} \quad A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definiramo mero  $\nu$  s predpisom  $\nu(B) = \int_X c s d\mu$ . To je mera po lemi iz razdelka o stopničastih funkcijah.

$$\int_X c s d\mu = \nu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} c s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = a$$

sa  $f_n \geq c s$  na  $A_n$



Izrek: Naj bodo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nenegativne merljive funkcije. Tedaj velja

$$\int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz: Najprej dokazimo  $\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$ .

$\exists$  zaporedje  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nenegativnih merljivih stopničastih funkcij, da  $0 \leq s_n \nearrow f_1$  in  $0 \leq t_n \nearrow f_2$  po tičkah.

$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{s_n + t_n}_{\text{stopničasta funkcija}} \nearrow f_1 + f_2$  po tadih

$$\begin{aligned} \int_X (f_1 + f_2) d\mu &\stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \\ &\stackrel{2 \text{ LMK}}{=} \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu \end{aligned}$$

V splošnem:  $g_n := f_1 + \dots + f_n \Rightarrow 0 \leq g_n \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$

$$\int_X \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu \stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu$$



12. november 2025

Postledica: Naj bo  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva in  $c \geq 0$ . Tedaj velja

$$\int_X c f d\mu = c \cdot \int_X f d\mu.$$

Dokaz: Naj bodo  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  takšne merljive stopničaste funkcije, da  $0 \leq s_n \nearrow f$ . Vemo, da velja

$$\int_X c s_n d\mu = c \cdot \int_X s_n d\mu \stackrel{\text{LMK za } 0 \leq s_n \nearrow f}{\longrightarrow} c \cdot \int_X f d\mu$$



Trditev: Naj bo  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva. Definiramo

$$\gamma(A) = \int_A f d\mu; \quad A \in \mathcal{A}. \quad \text{Velja:}$$

- $\gamma$  je pozitivna mera na  $(X, \mathcal{A})$ .
- Če je  $\mu(A) = 0$ , potem je  $\gamma(A) = 0$ .
- Če je  $g: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva, potem  $\int_X g d\gamma = \int_X f \cdot g d\mu$ .

Doprime: (a) Pogoj  $\mu|A|=0 \Rightarrow \gamma(A)=0$ , se imenuje **absolutna zveznost** mere  $\gamma$  glede na mero  $\mu$ .

(b) Če je  $\gamma$  glede na  $\mu$  absolutno zvezna, to zapišemo  $\gamma \ll \mu$ , f iz trditve pa zapišemo kot  $f = \frac{d\gamma}{d\mu}$ . (" $\int_A f d\mu = \int_A d\gamma = \gamma(A)$ ")

Dokaz: i)  $\gamma(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int_X f \chi_{\emptyset} d\mu = \int_X 0 d\mu = \mu(X) \cdot 0 = 0$

Če so  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paroma disjunktne in  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , potem

$$\begin{aligned}\gamma(A) &= \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu = \int_X \left( f \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \right) d\mu \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \chi_{A_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n)\end{aligned}$$

ii) Naj bo  $\mu(A) = 0$ .

$$\gamma(A) = \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu$$

Naj bodo  $0 \leq s_n \leq f \chi_A$ ; s merljive stopničaste

$$s = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n} \quad (\text{kanonična oblika})$$

$$f \chi_A = 0 \text{ na } A^c \Rightarrow s = 0 \text{ na } A^c \Rightarrow s = s \chi_A$$

$$\Rightarrow s = \lambda_1 \chi_{A_1 \cap A} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n \cap A}$$

$$\Rightarrow \int_X s d\mu = \lambda_1 \mu(A_1 \cap A) + \dots + \lambda_n \mu(A_n \cap A) = 0$$

$$\Rightarrow \int_X f \chi_A d\mu = 0 \quad (\text{po definiciji integrala nenegativne funkcije})$$

iii) Dokazali bomo najprej za karakteristične funkcije, nato stopničaste in nato nenegativne z uporabo LMK.

a)  $g = \chi_A$ ; A merljiva

$$\int_X g d\gamma = \int_X \chi_A d\gamma = \gamma(A)$$

$$\int_X f g d\mu = \int_X \chi_A f d\mu = \int_A f d\mu = \gamma(A)$$

b)  $g = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$ :  $A_1, \dots, A_n$  merljive

$$\begin{aligned} \int_X g d\gamma &= \int_X \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i} d\gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i} d\gamma \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i} f d\mu \\ &= \int_X \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i} \right)}_g f d\mu \end{aligned}$$

c)  $g \geq 0$  merljiva: Vemo, da obstaja zaporedje  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  merljivih stopničastih funkcij:  $0 \leq s_n \nearrow g$ .

$$\begin{array}{ccc} \forall n \in \mathbb{N}: \int_X s_n d\gamma & = \int_X s_n f d\mu & \\ \downarrow \begin{matrix} \text{LMK za } \gamma \\ \text{in } 0 \leq s_n \nearrow f \end{matrix} & & \downarrow \begin{matrix} \text{LMK za } \mu \text{ in } 0 \leq s_n f \nearrow g f \\ \int_X g f d\mu \end{matrix} \\ \int_X g d\gamma & & \end{array}$$

Fatovjeva lema: Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja:  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ .

Dokaz:  $g_n := \inf_{k \geq n} f_k \stackrel{\leq f_n}{\longrightarrow} 0 \leq g_n \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$

$$\begin{aligned} \text{LMK: } \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \\ &\quad \text{||} \\ &\quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \end{aligned}$$

$(\liminf a_n = \lim a_n, \text{ če limita obstaja})$   
 $(\text{in } a_n \leq b_n \Rightarrow \liminf a_n \leq \liminf b_n)$

Primer:  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ,  $\mu$  šteje točke

$$f_n = \chi_{\{n, n+1, \dots\}} \longrightarrow \chi_{\emptyset} = 0$$

$$\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \infty, \quad \int_{\mathbb{N}} \chi_{\emptyset} d\mu = 0$$

$\Rightarrow$  V Fatoujevi lemi lahko imamo strogi neenakaj.

18. november 2025

Če je  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  merljiv prostor in  $\mu(A) = 0$ , potem je  $\int_A f d\mu = 0$  za vsako merljivo funkcijo  $f \geq 0$ .

DN. Stopničaste funkcije in definicija integrala ali LMK.

Irditev: Naj bo  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva. Tedaj velja:

i)  $\int_X f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0$ .

ii)  $\int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$  s.p.

Dokaz: i)  $A := \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$

$$0 \leq \infty \chi_A \leq f \Rightarrow 0 \leq \infty \mu(A) \leq \int_X f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(A) = 0$$

ii) ( $\Leftarrow$ ):  $f(0)$  s.p.  $\Rightarrow X = E \cup E^c$ ,  $\mu(E) = 0$ ;  $f|_{E^c} \equiv 0$

$$\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \int_{E^c} f d\mu = 0 + 0 = 0.$$

↑ int. po  
meri  $\sigma$       ↑ int. ničelne  
funkcije

( $\Rightarrow$ ): Za  $n \in \mathbb{N}$  definiramo  $A_n := \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ . To je merljiva množica, saj je presliku zaprtega intervala.

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \frac{1}{n} \int_{A_n} 1 d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n)$$

$$\Rightarrow \mu(A_n) = 0, \quad \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0.$$



### 3.3. Integral kompleksne merljive funkcije

Demotivirajoči primer: Recimo, da integral že znamo vpeljati. Kaj bi bil integral ad  $\chi_E - \chi_F$ .

$$\text{Naivno: } \int_X (\chi_E - \chi_F) d\mu = \mu(E) - \mu(F)$$

Težava: lahko dobimo  $\infty - \infty$ , kar ni ok.

Merljiva funkcija  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  je integrabilna, če je integral  $\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu < \infty$ . Če je  $\|f\|_1 < \infty$ , potem pišemo  $f \in L^1(\mu)$ . Z  $L^0(\mu)$  označimo vektorski prostor vseh kompleksnih merljivih funkcij.

Kako preverimo, da je  $f \in L^1(\mu)$ ? Preverimo  $\int_X |f| d\mu < \infty$ .

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \Rightarrow |f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 \\ \Rightarrow |f| \geq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$$

$$f \in L^1(\mu) \Rightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^1(\mu).$$

$$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^1(\mu) \Rightarrow |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \Rightarrow f \in L^1(\mu).$$

$g$  realna merljiva funkcija  $\Rightarrow g = g^+ - g^-$ ;  $g^+, g^-$  merljivi

$$\int_X g d\mu = \int_X g^+ d\mu + \int_X g^- d\mu \quad \min\{g^+, g^-\} = 0$$

$$\Rightarrow (g \in L^1(\mu) \Leftrightarrow g^+, g^- \in L^1(\mu))$$

$f \in L^1(\mu)$ :

$$\int_X f d\mu := \int_X (\operatorname{Re} f)^+ d\mu + \int_X (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \left( \int_X (\operatorname{Im} f)^+ d\mu + \int_X (\operatorname{Im} f)^- d\mu \right)$$

Lema: Če  $\mathcal{L}^1(\mu)$  opredimo z operacijami po točkah, potem je  $\mathcal{L}^1(\mu)$  vektorski prostor,  $\|\cdot\|_1$  pa je polnorma na  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

Dokaz:  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\|\alpha f + \beta g\| &= \int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int_X (\|\alpha\| |f| + \|\beta\| |g|) d\mu \\ &= |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu < \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  in  $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$  (tričotniška neenakost)

$\|\cdot\|_1$  je polnorma:

i)  $\|f\|_1 \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \checkmark$

ii)  $\|\alpha f\| = \int_X |\alpha f| d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu = |\alpha| \cdot \|f\|_1$

iii) tričotniška neenakost  $\checkmark$

□

Opomba: V splošnem  $\mathcal{L}^1(\mu)$  ni normirani prostor:

$$X = \mathbb{R}, \mu = m, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

C... Cantorjeva množica  $\neq m(C) = 0$

$$\|\chi_C\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \chi_C dm = m(C) = 0$$

Prostor ni normirani (v splošnem), lahko mu pa priredimo normirani prostor, ki "vsebuje vse informacije o  $\mathcal{L}^1(\mu)$ ".

Vpeljimo relacijo  $\sim$  na  $\mathcal{L}^1(\mu)$ :  $f \sim g : \Leftrightarrow f = g \text{ s.p.}$

•  $f \sim f \quad \checkmark$

•  $f \sim g \Rightarrow g \sim f \quad \checkmark$

•  $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f = g \text{ na } A, g = h \text{ na } B$

$\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0 \Rightarrow f = h \text{ na } A \cap B \text{ in } \mu((A \cap B)^c) \leq \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0$

Definiramo:  $L^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu)/\sim$ :

$$\begin{aligned}\|[f]\|_1 &:= \|f\|_1 \\ [f] + [g] &:= [f+g] \\ \alpha[f] &:= [\alpha f]\end{aligned}$$

Ali sta operaciji določeni definirani? Da.

$$\cdot F \sim F', g \sim g' : [F] + [g] = [F+g], [F'] + [g'] = [F'+g']$$

$F \sim f'$ ,  $g \sim g' \Rightarrow F = f$  na  $A$ ,  $g' = g$  na  $B$

$$\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0 \Rightarrow F+g = f'+g' \text{ na } A \cap B \text{ in} \\ \mu((A \cap B)^c) \leq \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0$$

$$\Rightarrow F+g \sim f'+g'$$

$$\cdot d[F] = [dF] \text{ DN.}$$

Posledica:  $L^1(\mu)$  je normirani prostor.

Dokaz: Vse lastnosti se dedujejo iz  $\mathcal{L}^1(\mu)$  na  $L^1(\mu)$ .

$$\|[F]\|_1 = 0 \Rightarrow \|f\|_1 = 0 \Rightarrow |f| = 0 \text{ s.p.}$$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ s.p.} \Rightarrow f \sim 0 \Rightarrow [f] \sim [0]$$

□

Zakaj je norma  $\|[F]\|_1$  dobro definirana?

$$[f] = [f'] \Rightarrow f \sim f' = f = f' \text{ s.p.} \Rightarrow |f| = |f'| \text{ s.p.}$$

$$\Rightarrow \int_X |f| d\mu = \int_X |f'| d\mu \Rightarrow \|f\|_1 = \|f'\|_1$$

Irditev: Za  $\mathcal{L}^1$ -funkcije velja naslednje:

i) Integral je linearen funkcional na  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

ii) Če sta  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  in  $f \leq g$ , potem je

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu. \quad \text{Kaj pomeni } f \leq g?$$

$$\text{iii)} |\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

$$\frac{f \leq g \text{ pri tehah}}{f \leq g \text{ s.p.} \Leftrightarrow f \leq g \vee L^0(\mu)} \\ [f] \leq [g]$$

$$\text{Dokaz: i) } \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

F, g realni:  $(f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^-$

Raje pišimo  $h := f+g$

$$h = h^+ - h^-$$

$$f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$$

$$\Rightarrow \int_X (f^+ + g^+ + h^-) d\mu = \int_X (f^- + g^- + h^+) d\mu$$

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu = \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu + \int_X h^+ d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu$$

$$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu = \int_X \underbrace{(f+g)}_h d\mu$$

Za kompleksne funkcije DN ( $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ ).

Množenje s skalarji: le za  $\lambda \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \int_X \lambda f d\mu &= \int_X \lambda (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) d\mu \\ &= \int_X \lambda \operatorname{Re} f d\mu + \int_X \lambda \operatorname{Im} f d\mu \\ &= \int_X (\lambda (\operatorname{Re} f)^+ - \lambda (\operatorname{Re} f)^-) d\mu + i \int_X (\lambda (\operatorname{Im} f)^+ - \lambda (\operatorname{Im} f)^-) d\mu \\ &= \underbrace{\int_X \lambda (\operatorname{Re} f)^+ d\mu}_{\text{Preostanek (i)}} - \underbrace{\int_X \lambda (\operatorname{Re} f)^- d\mu}_{\text{izpustimo}} + i \underbrace{\int_X \lambda \operatorname{Im} f^+ d\mu}_{\geq 0} - i \underbrace{\int_X \lambda \operatorname{Im} f^- d\mu}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Preostanek (i) izpustimo.

$$(ii) g = g^- - f + f$$

$$\Rightarrow \int_X g d\mu = \int_X \underbrace{(g-f)}_{\geq 0} d\mu + \int_X f d\mu$$

$\int_a^b f(x) dx$  Riemann  
 $\int_a^b f dm$  Lebesgue  
 ↳ nekateri pogoji  
 $\int_a^b f dx$   
 $\{c_i, b_i\}$   
 Huszu zložba  
 $\int_a^b f(x) dx$   
 Možete bi moralisati: celo  
 $\int_X f(x) d\mu(x)$

(ii) Če je  $\int_X f d\mu = 0$ , potem neenakost drži.

BSS. da :=  $\int_X f d\mu \neq 0 \Rightarrow \exists w. |w| \text{ in } w\lambda = |\lambda|$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= |\lambda| = w\lambda = w \cdot \int_X f d\mu = \int_X wf d\mu = \operatorname{Re} \int_X wf d\mu \\ &= \int_X \operatorname{Re}(wf) d\mu \leq \int_X |wf| d\mu = \int_X |f| d\mu \end{aligned}$$

$|w|=1$

Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci (LDK): angleščina: (LDC)

Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje merljivih funkcij, ki po točkah s.p. konvergirajo proti merljivi funkciji  $f$ . Če  $\exists g \in L^1(\mu)$ , da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ za skoraj vsak } x,$$

potem velja

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \text{ in } \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Opoomba:  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ v } L^1(\mu)$ .

Dokaz: Kot v dokazu izreka degerove, lahko BSS predpostavimo, da  $f_n \rightarrow f$  po točkah in  $|f_n| \leq g \quad \forall n$  povsod na  $X$ .

$$\begin{aligned} h_n &:= 2g - |f_n - f| \\ |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g \end{aligned} \quad \Rightarrow h_n \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Po Fatoujevi lemi: } \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu \\ \int_X 2g d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \end{aligned}$$

$$= \int_X 2g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (-|f_n - f|) d\mu = \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$  in je enaka 0

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0$$

19. november 2025

Kako v praksi preverimo, da je normirani prostor Banachov?

i) Vsaka Cauchyjeva zaporedje konvergira (poisčemo limito).

ii) Dokazemo, da vsaka absolutno konvergirajoča vrsta tudi konvergira.

Irditev: Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  takšna zaporedje  $L^1$ -funkcij, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

Tedaj vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konvergira skoraj povsod proti neki  $L^1$ -funkciji  $f$ .

Velja še

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz: Definiramo  $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ . Tedaj je  $g: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva in

$$\int_X g d\mu = \int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

$\Rightarrow g(x) < \infty$  za skoraj vsak  $x \in X$

$\Rightarrow$  za skoraj vsak  $x \in X$  vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konvergira absolutno  $\Rightarrow$  konvergira

Definiramo  $g_n := f_1 + \dots + f_n \Rightarrow |g_n| \leq \sum_{k=1}^n |f_k| \leq g \in L^1(\mu) \quad g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  zloraba natanjic ...

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_X f_j d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu$$

LDK  
S=I

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

□

Riesz-Fisherjev izrek: Prostor  $L^1(\mu)$  je Banachov prostor. Če  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ , potem obstaja  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , da  $f_{n_k} \rightarrow f$  skoraj povsod.

Opomba: Veliko podobnih izrekov se tudi imenuje Riesz-Fisherjev izrek.

Opoomba:  $p \geq 1$ ,  $\ell^p = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$  ( $p \neq \infty$ )

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \Rightarrow (\ell^p, \|\cdot\|_p) \text{ je Banachov}$$

$\ell^\infty$  ← omejena zaporedja

$$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^\infty \subseteq \ell^\infty \quad 1 \leq p \leq \infty$$

$$\mu(x) < \infty \Rightarrow L^\infty(\mu) \subseteq L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu)$$

tega še ne poznamo

Dokaz [Riesz-Fisher]:  $L^1(\mu)$  je poln:

Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyjevo zaporedje v  $L^1(\mu)$ . Našli bomo ustrezeno podzaporedje, ki bo konvergiralo v  $L^1(\mu)$ . Po izreku iz metričnih prostorov bo ta limita tvrdi limita prvotnega zaporedja.

Ker je  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyjevo, obstaja strogo naraščajoče zaporedje  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  indeksov, da  $\|f_n - f_{n_k}\|_1 \leq 2^{-k} \quad \forall m, n \geq n_k$ .

Po trditvi od prej  $f := f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$  konvergira skoraj povsod proti neki funkciji  $f \in L^1(\mu)$ .

Ker velja:  $f_{n_1} + \sum_{j=1}^k (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) = f_{n_{k+1}}$ , podzaporedje  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergira proti  $f$  skoraj povsod. Ker pa velja

$$|f_{n_{k+1}}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \in L^1(\mu),$$

po LDK dobimo  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f| d\mu = 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_{k+1}} - f\|_1.$$

Torej  $f_{n_{k+1}} \rightarrow f$  v  $L^1(\mu)$ .



### 3.4 Riemannov in Lebesgueov integral

25. november 2025

Naj bo  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Za particijo  $P$   
 $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

intervala  $[a, b]$  definiramo

$$m_j := \inf_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x) \quad \text{in} \quad M_j := \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x).$$

Definiramo spodnjo in zgornjo Darbouxova vsoto:

$$S_p := \sum_{j=1}^n m_j \Delta_j \quad \text{in} \quad Z_p := \sum_{j=1}^n M_j \Delta_j,$$

kjer je  $\Delta_j := x_j - x_{j-1}$ . Iz Analize 1 vemo, da je  $f$  Riemannova integrabilna  $\Leftrightarrow \sup_{P \text{ part}} S_p = \inf_{P \text{ part}} Z_p$ .

V primeru, ko je  $f$  Riemannova integrabilna, to število označimo z  $\int_a^b f(x) dx$ .

Za vsak  $j = 1, \dots, n$  in vsak  $x \in [x_{j-1}, x_j]$  velja  $m_j \leq f(x) \leq M_j$ .

Izrek: Riemannova integrabilna funkcija  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je Lebesguevo integrabilna in velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\mu.$$

Dokaz: Za particijo  $P$  definiramo

$$\Delta_p := \sum_{j=1}^n m_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]} + f(b) \chi_{\{b\}} \quad \text{in} \quad Z_p := \sum_{j=1}^n M_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]} + f(b) \chi_{\{b\}}.$$

$\Rightarrow \Delta_p \leq f \leq Z_p$  za vsako particijo  $P$ .

$$\text{Velja } \int_{[a, b]} \Delta_p dm = S_p \quad \text{in} \quad \int_{[a, b]} Z_p dm = Z_p$$

Ker je  $f$  Riemannova integrabilna, obstaja naraščajoče zaporedje particij  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tako, da je vsaka finejša od predhodne in velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{P_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{P_k} = \int_a^b f(x) dx$$

(Tukaj zvezka dolžine najširših intervalov delitve gredo proti 0.)

Ker je  $P_{n+1}$  finejša od  $P_n$ , je torej  $s_n \leq s_{n+1} \leq f \leq z_{n+1} \leq z_n$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .

Torej  $\Delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$  in  $z := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  po točkah dobimo  $s_n \leq s \leq f \leq z \leq z_n$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .  
 $s_n, z_n$  merljive  $\Rightarrow s$  in  $z$  merljivi

$$\begin{array}{cccc} \int_{[a,b]} s dm & \leq \int_{[a,b]} s dm & \leq \int_{[a,b]} z dm & \leq \int_{[a,b]} z dm \\ \downarrow & & & \downarrow \\ \int_a^b f(x) dx & & & \int_a^b F(x) dx \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} s dm = \int_a^b F(x) dx = \int_{[a,b]} z dm \Rightarrow \int_{[a,b]} (z-s) dm = 0$$

$\Rightarrow z-s=0$  s.p. na  $[a,b]$ , saj je  $z \geq s$ .

$\Rightarrow f = z = s$  s.p. na  $[a,b]$

$\Rightarrow f$  je Lebesgueova merljiva, saj je Lebesgueova  $\sigma$ -algebra polna

$f = z$	$m(B) = 0$
$f^{-1}(U) \cap A$	$z^{-1}(U) \cap B$
$z^{-1}(U) \cap A$	$\subseteq B$

Skica:

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} z dm = \int_{[a,b]} s dm = \int_a^b f(x) dx$$

Izrek:  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  je Riemannova integrabilna  $\Leftrightarrow$  Lebesgueova mera točk neveznosti funkcije  $f$  je 0.  
 $(f$  je skoraj povsod zvezna na  $[a,b]$ )

Brez dokazu.

Primer: Izračunaj  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ .

$$\frac{1}{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1; & 0 \leq x < 1 \\ 2; & x = 1 \end{cases} \quad (\text{zgorajje meja je } +\infty)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{dm}{1+x^n} \stackrel{\text{L DK}}{=} \int_{[0,1]} f dm = \int_{[0,1]} f dm \\ &= 1 \cdot m([0,1]) + 0 \cdot m(\{1\}) = 1 \end{aligned}$$

### 3.5 Produktna mera (in Fubinijev izrek)

Naj bosta  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  in  $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$  merljiva prostora.

Produktna  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  je najmanjša  $\sigma$ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike.

Kako definirati produktno mero na  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ ?

Naj bo  $\mathcal{S} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ . Definiramo

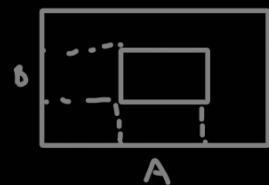
$$\Theta(A \times B) = \mu(A) \cdot \lambda(B).$$

Trditev:  $\mathcal{S}$  je polalgebra in  $\Theta: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  je polmerna.

Dokaz: i)  $X \times Y \in \mathcal{S}$  ✓

$$(ii) A \times B \in \mathcal{S} \Rightarrow (A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (A \times B^c)$$

$$\text{Velja } (A^c \times Y) \cap (A \times B^c) = \emptyset.$$



$$(iii) (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

$\Theta$  je polmerna na  $\mathcal{S}$

$$i) \Theta(\emptyset) = \Theta(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset) \cdot \lambda(\emptyset) = 0$$

(ii) in (iii) Naj bo  $A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) \in \mathcal{S}$  in naj bodo  $(A_n \times B_n)$  paroma disjunktne iz  $\mathcal{S}$ .

$$\Theta(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(A_n \times B_n) \quad \text{oziroma} \quad \mu(A) \lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \lambda(B_n)$$

$$\chi_{A \times B}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y), \text{ saj je } \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) = A \times B \quad \text{dijunktna unija}$$

Fiksirajmo  $x \in X$ :

$$\int_X \chi_A(x) \int_Y \chi_B(y) d\lambda = \int_Y \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y) d\lambda$$

$\chi_A(x) \lambda(B)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \int_Y \chi_{B_n}(y) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \lambda(B_n)$

$$\Rightarrow \lambda(B) \chi_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \chi_{A_n}(x) \quad \forall x \in X$$

Integrirajmo po  $x$  in kot zgoraj dobimo

$$\lambda(B) \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \mu(A_n).$$



Izrek: Polmerca  $\Theta: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  se da razširiti do mere  $A \otimes B$ . Če sta  $\mu$  in  $\lambda$   $\sigma$ -končni, potem je razširitev ena sama.

Dokaz: Najprej na en sam način  $\Theta$  razširimo do mere na algebri, generirani z  $\mathcal{S}$ . Ta razširitev je ena suma. Po Caratheodorijskem izreku obstaja mera na  $\sigma$ -algebri vseh zunanjih množic, ki razširja  $\Theta$ .

Če sta  $\mu$  in  $\lambda$   $\sigma$ -končni, potem je

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n; \quad \mu(X_n) < \infty \quad \text{in } X_n \subseteq X_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n; \quad \lambda(Y_n) < \infty \quad \text{in } Y_n \subseteq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \times Y_n); \quad \Theta(X_n \times Y_n) = \mu(X_n) \lambda(Y_n) < \infty \quad \text{in } X_n \times Y_n \subseteq X_{n+1} \times Y_{n+1}$$

$\Rightarrow$  mera na algebri je  $\sigma$ -končna. Po izreku je razširitev na Caratheodorijsko  $\sigma$ -algebra ena sama.

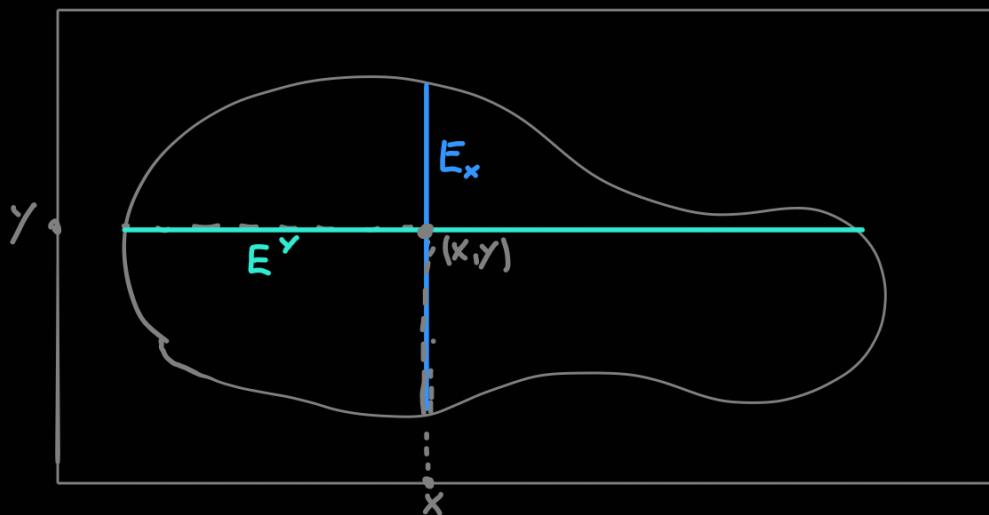


V primeru, ko sta  $X$  in  $Y$   $\sigma$ -končna, dobijemo enako mero imenujemo produktna mera in jo označimo z  $\mu \times \lambda$  ozziroma lahko tudi  $\mu \otimes \lambda$ .

Fubini iz Analize 2:  $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna:

$$\begin{aligned} \int_P f(x,y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx \\ &= \int_a^b dx \int_c^d f_x(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f^y(x) dx \end{aligned}$$

Naj bo  $E \subseteq X \times Y$ . Za  $x \in X$  in  $y \in Y$  definiramo preseza  $E_x$  in  $E^y$  z  $E_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in E\}$  in  $E^y := \{x \in X \mid (x,y) \in E\}$ .



Podobno za  $f: X \times Y \rightarrow Z$  definiramo  $f_x: Y \rightarrow Z$  in  $f^y: X \rightarrow Z$  s predpisoma  $f_x(y) = f(x, y) = f^y(x)$ .

26. november 2025

Primer: Naj bo  $E \subseteq X \times Y$ . Tedaj za vse  $x \in X$  in  $y \in Y$  velja  $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$  in  $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$ .

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$$

$$(\chi_E)_x(y) = \chi_E(x, y) = \begin{cases} 1; & (x, y) \in E \\ 0; & (x, y) \notin E \end{cases} \stackrel{x \text{ fiksen}}{\downarrow} = \begin{cases} 1; & y \in E_x \\ 0; & y \notin E_x \end{cases} = \chi_{E_x}$$

Podobno  $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$ .

Irditev: i) Naj bo  $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Tedaj je  $E_x \in \mathcal{B}$  in  $E^y \in \mathcal{A}$  za vse  $x \in X$  in  $y \in Y$ .

ii) Če je  $f$  merljiva glede na produktno  $\sigma$ -algebra  $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  na  $X \times Y$ , potem sta  $f_x$  in  $f^y$  merljivi glede na  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{A}$ .

Dokaz: Naj bo  $\mathcal{C}$  družina vseh podmnožic v  $X \times Y$ , da  $\forall E \in \mathcal{C}$  velja  $E_x \in \mathcal{B}$  in  $E^y \in \mathcal{A}$ .

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$  je  $\sigma$ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B} \Rightarrow E = A \times B \in \mathcal{C}$

$$x \in X: x \in A \Rightarrow E_x = B \in \mathcal{B}$$

$$x \notin A \Rightarrow E_x = \emptyset \in \mathcal{B}$$

Podobno  $E^y \in \mathcal{A} \quad \forall y \in \mathcal{C}$ .

$\Rightarrow \mathcal{C}$  vsebuje vse merljive pravokotnike  $\Rightarrow X \times Y \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{C} \Rightarrow (E^c)_X &= \{y \in Y \mid (x, y) \in E^c\} \\ &= \{y \in Y \mid (x, y) \notin E\} \\ &= \{y \in Y \mid y \notin E_x\} \\ &= (E_x)^c \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da velja  $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_X$  in podobno za  $y$ -prereze. (DN)

$$\Rightarrow \mathcal{C} \supseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

ii) Naj bo  $D \subseteq Z$  merljiva množica. Izberimo  $x \in X$ . Ker je  $f$  merljiva, je  $f^{-1}(D) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f^{-1}(D))_x &\in \mathcal{B} \quad \text{in } (f^{-1}(D))^y \in \mathcal{A} \\ &\stackrel{\text{II?}}{(f_x^{-1})(D)} \quad \stackrel{\text{II?}}{(f^y)^{-1}(D)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (f_x^{-1})(D) = \{y \in Y \mid f_x(y) \in D\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{y \in Y \mid f(x, y) \in D\} \\
 &= \{y \in Y \mid (x, y) \in f^{-1}(D)\} \\
 &= \{y \in Y \mid y \in (f^{-1}(D))_x\} \\
 &= (f^{-1}(D))_x
 \end{aligned}$$

Podobno za  $y$ -prereze.



Družine podmnožic  $M$  dane množice je monoton razred, če velja naslednje:

i)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ ;  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$

ii)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ ;  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in M$

Ker je presek neprazne družine monotonih razredov zopet monoton razred, vedno obstaja najmanjši monoton razred, ki vsebuje dano družino.

\* Vsaka  $\sigma$ -algebra je monoton razred.

\* Vsaka algebra, ki je monoton razred, je  $\sigma$ -algebra.

Dokaz:  $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$  algebra

Definiramo  $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \quad \uparrow \text{monoton razred}$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

Lema [o monotonem razredu]: Naj bo  $\mathcal{A}$  algebra podmnožic množice  $X$ . Tedaj je monoton razred  $M$ , generiran z  $\mathcal{A}$ ,  $\sigma$ -algebra.

Dopomba: Ta monoton razred je dejansko  $\sigma$ -algebra, generirana z  $\mathcal{A}$ .

$$A \subseteq \mathcal{M}, A \subseteq \sigma(A) \Rightarrow A \subseteq \mathcal{M} \subseteq \sigma(A)$$

$\Downarrow \leftarrow \mathcal{M}$  je  $\sigma$ -algebra  $\sigma(A)$  je monotoni razred

$$A \subseteq \sigma(A) \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(A) = \mathcal{M}$$

Dokaz: Po opombi zadostuje dokazati, da je  $\mathcal{M}$  algebra. Za  $A \in \mathcal{M}$  definiramo

$$\mathcal{M}(A) := \{B \in \mathcal{M} \mid A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M}\}.$$

tu lahko  
 vzememo  $x$   
 $\Rightarrow x \setminus B \in \mathcal{M}$   
 $B^c$

Za vsak  $A \in \mathcal{M}$  je  $\mathcal{M}(A)$  monotoni razred. (DN)

Opazimo še  $B \in \mathcal{M}(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}(B)$ .

Vzemimo  $A, B \in \mathcal{M}$   $\Rightarrow A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{M}(A) \quad \forall B \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow A \subseteq \mathcal{M}(A) \Rightarrow \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(A)$$

(vsebuje tudi najmanjši monotoni razred generiran z  $A$ )

$$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}. \exists C \in \mathcal{M}(A) \quad (A \text{ poljuben})$$

$\Rightarrow \mathcal{M}(A)$  je monotoni razred

$$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}. \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(B)$$

$\Rightarrow$  vsebuje vsaj najmanjši monotoni razred)

$$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{M}. A \in \mathcal{M}(B) : A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M}$$

2. december 2025