

### 3. INTEGRAL

#### 3.1. Integracija stopničastih funkcij

Naj bo  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  prostor z mero. Za stopničasto funkcijo

$$s := \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j} \quad (\text{s merljiva})$$

definiramo  $\int_X s d\mu := \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j)$ .

Če je  $s = \chi_A$ , potem  $\int_X s d\mu = \mu(A)$ .

Izkazuje se, da je  $\int_X s d\mu$  neodvisen od izbire  $A_j$  in  $c_j$ . Torej lahko dostikrat prevzamemo, da je  $s$  zapisan v kanonični obliki.

Če je  $A$  merljiv, definiramo  $\int_A s d\mu := \int_X s \chi_A d\mu$ .

Lema: Naj bo  $s: X \rightarrow [0, \infty)$  merljiva stopničasta funkcija. Tedaj je z  $\gamma(A) := \int_A s d\mu$  definirana pozitivna mera  $(X, \mathcal{A})$ .

Dokaz:  $\gamma(\emptyset) = \int_{\emptyset} s d\mu = \int_X s \chi_{\emptyset} d\mu = \int_X 0 d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0$

Naj bodo  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paroma disjunktne merljive množice in naj bo  $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .  $\gamma(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n)$

Naj bo  $s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$  kanonična oblika za  $s$ .

$$s \chi_A = \left( \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j} \right) \chi_A = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j \cap A}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma(A) &= \int_A s d\mu = \int_X s \chi_A d\mu = \sum_{j=1}^n c_j \mu(E_j \cap A) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_j \mu(E_j \cap A_i) \\
 \xrightarrow{\text{ANA 1}} \quad &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mu(E_j \cap A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_X s d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(A_i)
 \end{aligned}$$

□

Lema: Naj bosta  $s, t : X \rightarrow [0, \infty]$  merljivi stopničasti funkciji in naj bo  $c \in [0, \infty]$ . Tedaj velja:

$$i) \int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

$$ii) \int_X c s d\mu = c \int_X s d\mu$$

Dokaz: i)  $s := \sum_{i=1}^m c_i \chi_{E_i}$ ,  $t := \sum_{j=1}^n d_j \chi_{F_j}$  zapisa v kanonični obliki

$$\text{Tedaj je } s+t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_i + d_j) \chi_{E_i \cap F_j}.$$

Čeprav so množice  $E_i \cap F_j$  paroma disjunktne, to ni nujno kanonična oblika za  $s+t$ . Velja pa

$$\begin{aligned}
 \int_X (s+t) d\mu &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_i + d_j) \mu(E_i \cap F_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_j \mu(E_i \cap F_j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{j=1}^n F_j &= X \\
 \bigcup_{i=1}^m E_i &= X \\
 &= \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^n d_j \sum_{i=1}^m \mu(E_i \cap F_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m c_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^n d_j \mu(F_j)
 \end{aligned}$$

$$= \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

$$ii) \int_X c s d\mu = \sum_{i=1}^m c c_i \mu(E_i) = c \sum_{i=1}^m c_i \mu(E_i) = c \int_X s d\mu$$

□

Lema: Naj bosta  $s, t$  takšni merljivi stopničasti funkciji, da velja  $0 \leq s \leq t$ . Tedaj je  $0 \leq \int_X s d\mu \leq \int_X t d\mu$ .

Dokaz:  $t = t - s + s$ . Po prejšnji lemi :

$$\int_X t d\mu = \int_X (t - s) d\mu + \int_X s d\mu \geq \int_X s d\mu \geq 0$$

□

### 3.2. Integral nenegetivne merljive funkije

Naj bo  $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$  prostor z mero in  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva.

S  $\mathcal{F}$  definiramo množico  $\{s \mid 0 \leq s \leq f \text{ merljiva stopničasta funkcija}\}$ .

Definiramo :  $\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \in \mathcal{F} \right\}$ .

Lema: Naj bosta  $0 \leq f \leq g$  merljivi. Potem je  $0 \leq \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ .

Dokaz:  $\mathcal{F}_f \subseteq \mathcal{F}_g \Rightarrow \text{supremum po } \mathcal{F}_f \leq \text{supremum po } \mathcal{F}_g$

Primer:  $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$ ,  $\delta_{x_0}$  Diracova mera

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

$$0 \leq s \leq f \Rightarrow \int_X s d\delta_{x_0} \geq \int_X s d\delta_{x_0} \quad \text{||} \quad s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j} \quad \begin{matrix} \text{kanonična} \\ \text{obična} \end{matrix}$$

$$\sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_0}(E_j) = c_k \cdot 1 = s(x_0) \quad (x_0 \in E_k)$$

Ker  $s_n \nearrow f$  po točkah (izrek o apriksimaciji), dobimo  $\int_X f d\delta_{x_0} \geq f(x_0)$ .

$$\int_X s d\delta_{x_0} = s(x_0) \leq f(x_0)$$

Naredimo supremum po vseh  $s \in \mathcal{F}_f$ .

Primer:  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ :  $\mu$  steje točke

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

$$f(n) \leftrightarrow a_n \leadsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Izrek [Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci (LMK)]:

Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  naraščajoče zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$ .

Dokaz: Ker je  $(\int_X f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  naraščajoče zaporedje, obstaja

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$$

$$a = \int_X f d\mu ; \quad f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

$$a \leq \int_X f d\mu, \text{ saj } f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a \geq \int_X f d\mu \Leftrightarrow a \geq \int_X c s d\mu \quad \forall c \in (0,1) \quad \forall s \in \mathcal{F}$$

$\Leftarrow$ : √ zaradi monotonosti

$\Leftarrow$ : sledi iz dejstva, da najprej naredimo supremum po  $c \in (0,1)$  in nato supremum po vseh  $s \in \mathcal{F}$ .

Izberimo  $c \in (0,1)$  in  $s \in \mathcal{F}$ . Za  $n \in \mathbb{N}$  definiramo

$$A_n := \{x \in X \mid c s(x) \leq f_n(x)\}.$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{in} \quad A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definiramo mero  $\nu$  s predpisom  $\nu(B) = \int_X c s d\mu$ . To je mera po lemi iz razdelka o stopničastih funkcijah.

$$\int_X c s d\mu = \nu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} c s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = a$$

sa  $f_n \geq c s$  na  $A_n$



Izrek: Naj bodo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nenegativne merljive funkcije. Tedaj velja

$$\int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz: Najprej dokazimo  $\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$ .

$\exists$  zaporedje  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nenegativnih merljivih stopničastih funkcij, da  $0 \leq s_n \nearrow f_1$  in  $0 \leq t_n \nearrow f_2$  po tičkah.

$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{s_n + t_n}_{\text{stopničasta funkcija}} \nearrow f_1 + f_2$  po tadih

stopničasta  
funkcija

$$\begin{aligned} \int_X (f_1 + f_2) d\mu &\stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \\ &\stackrel{2 \text{ LMK}}{=} \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu \end{aligned}$$

V splošnem:  $g_n := f_1 + \dots + f_n \Rightarrow 0 \leq g_n \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$

$$\int_X \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu \stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu$$

12. november 2025

Postledica: Naj bo  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva in  $c \geq 0$ . Tedaj velja

$$\int_X c f d\mu = c \cdot \int_X f d\mu.$$

Dokaz: Naj bodo  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  takšne merljive stopničaste funkcije, da  $0 \leq s_n \nearrow f$ . Vemo, da velja

$$\int_X c s_n d\mu = c \cdot \int_X s_n d\mu \stackrel{\text{LMK za } 0 \leq s_n \nearrow f}{\longrightarrow} c \cdot \int_X f d\mu$$

$\int_X c f d\mu$



Trditev: Naj bo  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva. Definiramo

$$\gamma(A) = \int_A f d\mu; \quad A \in \mathcal{A}. \quad \text{Velja:}$$

- i)  $\gamma$  je pozitivna mera na  $(X, \mathcal{A})$ .
- ii) Če je  $\mu(A) = 0$ , potem je  $\gamma(A) = 0$ .
- iii) Če je  $g: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva, potem  $\int_X g d\gamma = \int_X f \cdot g d\mu$ .

Doprime: (a) Pogoj  $\mu(A) = 0 \Rightarrow \gamma(A) = 0$ , se imenuje **absolutna zveznost** mere  $\gamma$  glede na mero  $\mu$ .

(b) Če je  $\gamma$  glede na  $\mu$  absolutno zvezna, to zapišemo  $\gamma \ll \mu$ , f iz trditve pa zapišemo kot  $f = \frac{d\gamma}{d\mu}$ . (" $\int_A f d\mu = \int_A d\gamma = \gamma(A)$ ")

Dokaz: i)  $\gamma(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int_X f \chi_{\emptyset} d\mu = \int_X 0 d\mu = \mu(X) \cdot 0 = 0$

Če so  $(A_n)$  neskončna paroma disjunktne in  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , potem

$$\begin{aligned} \gamma(A) &= \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu = \int_X \left( f \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \right) d\mu \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \chi_{A_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n) \end{aligned}$$

ii) Naj bo  $\mu(A) = 0$ .

$$\gamma(A) = \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu$$

Naj bodo  $0 \leq s_n \leq f \chi_A$ ; s merljive stopničaste

$$s = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n} \quad (\text{kanonična oblika})$$

$$f \chi_A = 0 \text{ na } A^c \Rightarrow s = 0 \text{ na } A^c \Rightarrow s = s \chi_A$$

$$\Rightarrow s = \lambda_1 \chi_{A_1 \cap A} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n \cap A}$$

$$\Rightarrow \int_X s d\mu = \lambda_1 \mu(A_1 \cap A) + \dots + \lambda_n \mu(A_n \cap A) = 0$$

$$\Rightarrow \int_X f \chi_A d\mu = 0 \quad (\text{po definiciji integrala nenegativne funkcije})$$

iii) Dokazali bomo najprej za karakteristične funkcije, nato stopničaste in nato nenegativne z uporabo LMK.

a)  $g = \chi_A$ ; A merljiva

$$\int_X g d\gamma = \int_X \chi_A d\gamma = \gamma(A)$$

$$\int_X f g d\mu = \int_X \chi_A f d\mu = \int_A f d\mu = \gamma(A)$$

b)  $g = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$ :  $A_1, \dots, A_n$  merljive

$$\begin{aligned} \int_X g d\gamma &= \int_X \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i} d\gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i} d\gamma \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i} f d\mu \\ &= \int_X \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i} \right)}_g f d\mu \end{aligned}$$

c)  $g \geq 0$  merljiva: Vemo, da obstaja zaporedje  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  merljivih stopničastih funkcij:  $0 \leq s_n \nearrow g$ .

$$\begin{array}{ccc} \forall n \in \mathbb{N}: \int_X s_n d\gamma & = \int_X s_n f d\mu & \\ \downarrow \begin{matrix} \text{LMK za } \gamma \\ \text{in } 0 \leq s_n \nearrow f \end{matrix} & & \downarrow \begin{matrix} \text{LMK za } \mu \text{ in } 0 \leq s_n f \nearrow g f \\ \int_X g f d\mu \end{matrix} \\ \int_X g d\gamma & & \end{array}$$

Fatovjeva lema: Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja:  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ .

Dokaz:  $g_n := \inf_{k \geq n} f_k \stackrel{\leq f_n}{\longrightarrow} 0 \leq g_n \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$

$$\begin{aligned} \text{LMK: } \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \\ &\quad \text{||} \\ &\quad \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \end{aligned}$$

$(\liminf a_n = \lim a_n, \text{ če limita obstaja})$   
 $(\text{in } a_n \leq b_n \Rightarrow \liminf a_n \leq \liminf b_n)$

Primer:  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ,  $\mu$  šteje točke

$$f_n = \chi_{\{n, n+1, \dots\}} \longrightarrow \chi_{\emptyset} = 0$$

$$\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \infty, \quad \int_{\mathbb{N}} \chi_{\emptyset} d\mu = 0$$

$\Rightarrow$  V Fatoujevi lemi lahko imamo strogi neenakaj.

18. november 2025

Če je  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  merljiv prostor in  $\mu(A) = 0$ , potem je  $\int_A f d\mu = 0$  za vsako merljivo funkcijo  $f \geq 0$ .

DN. Stopničaste funkcije in definicija integrala ali LMK.

Irditev: Naj bo  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva. Tedaj velja:

$$i) \int_X f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0.$$

$$ii) \int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ s.p.}$$

Dokaz: i)  $A := \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$

$$0 \leq \infty \chi_A \leq f \Rightarrow 0 \leq \infty \mu(A) \leq \int_X f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(A) = 0$$

ii) ( $\Leftarrow$ ):  $f(0)$  s.p.  $\Rightarrow X = E \cup E^c$ ,  $\mu(E) = 0$ ;  $f|_{E^c} \equiv 0$

$$\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \int_{E^c} f d\mu = 0 + 0 = 0.$$

↑ int. po  
meri  $\sigma$       ↑ int. ničelne  
funkcije

( $\Rightarrow$ ): Za  $n \in \mathbb{N}$  definiramo  $A_n := \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ . To je merljiva množica, saj je presliku zaprtega intervala.

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \frac{1}{n} \int_{A_n} 1 d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n)$$

$$\Rightarrow \mu(A_n) = 0, \quad \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0.$$



### 3.3. Integral kompleksne merljive funkcije

Demotivirajoči primer: Recimo, da integral že znamo vpeljati. Kaj bi bil integral ad  $\chi_E - \chi_F$ .

$$\text{Naivno: } \int_X (\chi_E - \chi_F) d\mu = \mu(E) - \mu(F)$$

Težava: lahko dobimo  $\infty - \infty$ , kar ni ok.

Merljiva funkcija  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  je integrabilna, če je integral  $\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu < \infty$ . Če je  $\|f\|_1 < \infty$ , potem pišemo  $f \in L^1(\mu)$ . Z  $L^0(\mu)$  označimo vektorski prostor vseh kompleksnih merljivih funkcij.

Kako preverimo, da je  $f \in L^1(\mu)$ ? Preverimo  $\int_X |f| d\mu < \infty$ .

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \Rightarrow |f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 \\ \Rightarrow |f| \geq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$$

$$f \in L^1(\mu) \Rightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^1(\mu).$$

$$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^1(\mu) \Rightarrow |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \Rightarrow f \in L^1(\mu).$$

$g$  realna merljiva funkcija  $\Rightarrow g = g^+ - g^-$ ;  $g^+, g^-$  merljivi

$$\int_X g d\mu = \int_X g^+ d\mu + \int_X g^- d\mu \quad \min\{g^+, g^-\} = 0$$

$$\Rightarrow (g \in L^1(\mu) \Leftrightarrow g^+, g^- \in L^1(\mu))$$

$f \in L^1(\mu)$ :

$$\int_X f d\mu := \int_X (\operatorname{Re} f)^+ d\mu + \int_X (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \left( \int_X (\operatorname{Im} f)^+ d\mu + \int_X (\operatorname{Im} f)^- d\mu \right)$$

Lema: Če  $\mathbb{L}^1(\mu)$  opredimo z operacijami po točkah, potem je  $\mathbb{L}^1(\mu)$  vektorski prostor,  $\|\cdot\|_1$  pa je polnorma na  $\mathbb{L}^1(\mu)$ .

Dokaz:  $f, g \in \mathbb{L}^1(\mu)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\|\alpha f + \beta g\| &= \int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int_X (\|\alpha\| |f| + \|\beta\| |g|) d\mu \\ &= |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu < \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathbb{L}^1(\mu)$  in  $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$  (tričotniška neenakost)

$\|\cdot\|_1$  je polnorma:

i)  $\|f\|_1 \geq 0 \quad \forall f \in \mathbb{L}^1(\mu) \quad \checkmark$

ii)  $\|\alpha f\| = \int_X |\alpha f| d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu = |\alpha| \cdot \|f\|_1$

iii) tričotniška neenakost  $\checkmark$

□

Opomba: V splošnem  $\mathbb{L}^1(\mu)$  ni normirani prostor:

$$X = \mathbb{R}, \mu = m, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

C... Cantorjeva množica  $\neq m(C) = 0$

$$\|\chi_C\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \chi_C dm = m(C) = 0$$

Prostor ni normirani (v splošnem), lahko mu pa priredimo normirani prostor, ki "vsebuje vse informacije o  $\mathbb{L}^1(\mu)$ ".

Vpeljimo relacijo  $\sim$  na  $\mathbb{L}^1(\mu)$ :  $f \sim g : \Leftrightarrow f = g \text{ s.p.}$

•  $f \sim f \quad \checkmark$

•  $f \sim g \Rightarrow g \sim f \quad \checkmark$

•  $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f = g \text{ na } A, g = h \text{ na } B$

$\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0 \Rightarrow f = h \text{ na } A \cap B \text{ in } \mu((A \cap B)^c) \leq \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0$

Definiramo:  $\mathbb{L}^1(\mu) = \mathbb{L}^1(\mu)/\sim$ :

$$\begin{aligned}\| [f] \|_1 &:= \|f\|_1 \\ [f] + [g] &:= [f+g] \\ \alpha [f] &:= [\alpha f]\end{aligned}$$

Ali sta operaciji določeni definirani? Da.

$$\cdot F \sim F', g \sim g' : [F] + [g] = [F+g], [F'] + [g'] = [F'+g']$$

$F \sim f'$ ,  $g \sim g' \Rightarrow F = f$  na  $A$ ,  $g' = g$  na  $B$

$$\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0 \Rightarrow F+g = f'+g' \text{ na } A \cap B \text{ in} \\ \mu((A \cap B)^c) \leq \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0$$

$$\Rightarrow F+g \sim f'+g'$$

$$\cdot d[F] = [dF] \text{ DN.}$$

Posledica:  $L^1(\mu)$  je normirani prostor.

Dokaz: Vse lastnosti se dedujejo iz  $\mathcal{L}^1(\mu)$  na  $L^1(\mu)$ .

$$\|[F]\|_1 = 0 \Rightarrow \|f\|_1 = 0 \Rightarrow |f| = 0 \text{ s.p.}$$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ s.p.} \Rightarrow f \sim 0 \Rightarrow [f] \sim [0]$$

□

Zakaj je norma  $\|[F]\|_1$  dobro definirana?

$$[f] = [f'] \Rightarrow f \sim f' = f = f' \text{ s.p.} \Rightarrow |f| = |f'| \text{ s.p.}$$

$$\Rightarrow \int_X |f| d\mu = \int_X |f'| d\mu \Rightarrow \|f\|_1 = \|f'\|_1$$

Irditev: Za  $\mathcal{L}^1$ -funkcije velja naslednje:

i) Integral je linearen funkcional na  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

ii) Če sta  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  in  $f \leq g$ , potem je

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu. \quad \text{Kaj pomeni } f \leq g?$$

$$\text{iii)} |\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

$$\frac{f \leq g \text{ pri tehah}}{f \leq g \text{ s.p.} \Leftrightarrow f \leq g \vee L^0(\mu)} \\ [f] \leq [g]$$

$$\underline{\text{Dokaz: i)}} \quad \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

$\int_a^b f(x) dx$  Riemann  
 $\int f dm$  Lebesgue  
 $[a,b]$   
 $\hookrightarrow$  nekateri pišajo  
 $\int_{(c,b)} f dx$   
 Huszu zárvány  
 $\int_a^b f(x) dx$   
 Možno bi mohlo  
 pišat: celo  
 $\int_X f(x) d\mu(x)$

$$f, g \text{ realni: } (f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^-$$

$$\text{Raje pišimo } h := f+g$$

$$h = h^+ - h^-$$

$$f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$$

$$\Rightarrow \int_X (f^+ + g^+ + h^-) d\mu = \int_X (f^- + g^- + h^+) d\mu$$

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu = \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu + \int_X h^+ d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu$$

$$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu = \int_X \underbrace{(f+g)}_h d\mu$$

Za komplexne funkcije DN ( $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ ).

Množenje s skalarji: le za  $\lambda \geq 0$ :

$$\begin{aligned}
 \int_X \lambda f d\mu &= \int_X \lambda (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) d\mu \\
 &= \int_X \lambda \operatorname{Re} f d\mu + \int_X \lambda \operatorname{Im} f d\mu \\
 &= \int_X (\lambda (\operatorname{Re} f)^+ - \lambda (\operatorname{Re} f)^-) d\mu + i \int_X (\lambda (\operatorname{Im} f)^+ - \lambda (\operatorname{Im} f)^-) d\mu \\
 &= \underbrace{\int_X \lambda (\operatorname{Re} f)^+ d\mu}_{\text{Preostanek (i)}} - \underbrace{\int_X \lambda (\operatorname{Re} f)^- d\mu}_{\text{izpustimo}} + i \underbrace{\int_X \lambda \operatorname{Im} f^+ d\mu}_{\text{Preostanek (ii)}} - i \underbrace{\int_X \lambda \operatorname{Im} f^- d\mu}_{\text{izpustimo}}
 \end{aligned}$$

Preostanek (i) izpustimo.

$$(ii) g = g^- - f + f$$

$$\Rightarrow \int_X g d\mu = \int_X \underbrace{(g-f)}_{\geq 0} d\mu + \int_X f d\mu$$

(ii) Če je  $\int_X f d\mu = 0$ , potem neenakost drži.

BSS. da :=  $\int_X f d\mu \neq 0 \Rightarrow \exists w. |w| \text{ in } w\lambda = |\lambda|$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= |\lambda| = w\lambda = w \cdot \int_X f d\mu = \int_X wf d\mu = \operatorname{Re} \int_X wf d\mu \\ &= \int_X \operatorname{Re}(wf) d\mu \leq \int_X |wf| d\mu = \int_X |f| d\mu \end{aligned}$$

$|w|=1$

Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci (LDK): angleščina: (LDC)

Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje merljivih funkcij, ki po točkah s.p. konvergirajo proti merljivi funkciji  $f$ . Če  $\exists g \in L^1(\mu)$ , da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ za skoraj vsak } x,$$

potem velja

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \text{ in } \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Opoomba:  $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ v } L^1(\mu)$ .

Dokaz: Kot v dokazu izreka degerove, lahko BSS predpostavimo, da  $f_n \rightarrow f$  po točkah in  $|f_n| \leq g \quad \forall n$  povsod na  $X$ .

$$\begin{aligned} h_n &:= 2g - |f_n - f| \\ |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g \end{aligned} \quad \Rightarrow h_n \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Po Fatoujevi lemi: } \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu \\ \int_X 2g d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \end{aligned}$$

$$= \int_X 2g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (-|f_n - f|) d\mu = \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$  in je enaka 0

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0$$

19. november 2025

Kako v praksi preverimo, da je normirani prostor Banachov?

i) Vsaka Cauchyjeva zaporedje konvergira (poisčemo limito).

ii) Dokazemo, da vsaka absolutno konvergirajoča vrsta tudi konvergira.

Irditev: Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  takšna zaporedje  $L^1$ -funkcij, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

Tedaj vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konvergira skoraj povsod proti neki  $L^1$ -funkciji  $f$ .

Velja še

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz: Definiramo  $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ . Tedaj je  $g: X \rightarrow [0, \infty]$  merljiva in

$$\int_X g d\mu = \int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

$\Rightarrow g(x) < \infty$  za skoraj vsak  $x \in X$

$\Rightarrow$  za skoraj vsak  $x \in X$  vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konvergira absolutno  $\Rightarrow$  konvergira

Definiramo  $g_n := f_1 + \dots + f_n \Rightarrow |g_n| \leq \sum_{k=1}^n |f_k| \leq g \in L^1(\mu) \quad g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  zloraba natanjic ...

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_X f_j d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu$$

LDK  
S=I

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

□

Riesz-Fisherjev izrek: Prostor  $L^1(\mu)$  je Banachov prostor. Če  $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ , potem obstaja  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , da  $f_{n_k} \rightarrow f$  skoraj povsod.

Opomba: Veliko podobnih izrekov se tudi imenuje Riesz-Fisherjev izrek.

Opoomba:  $p \geq 1$ ,  $\ell^p = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$  ( $p \neq \infty$ )

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \Rightarrow (\ell^p, \|\cdot\|_p) \text{ je Banachov}$$

$\ell^\infty$  ← omejena zaporedja

$$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^\infty \subseteq \ell^\infty \quad 1 \leq p \leq \infty$$

$$\mu(x) < \infty \Rightarrow L^\infty(\mu) \subseteq L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu)$$

torej še ne poznamo

Dokaz [Riesz-Fisher]:  $L^1(\mu)$  je poln:

Naj bo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyjevo zaporedje v  $L^1(\mu)$ . Našli bomo ustrezeno podzaporedje, ki bo konvergiralo v  $L^1(\mu)$ . Po izreku iz metričnih prostorov bo ta limita tvrdi limita prvotnega zaporedja.

Ker je  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyjevo, obstaja strogo naraščajoče zaporedje  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  indeksov, da  $\|f_n - f_{n_k}\|_1 \leq 2^{-k} \quad \forall m, n \geq n_k$ .

Po trditvi od prej  $f := f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$  konvergira skoraj povsod proti neki funkciji  $f \in L^1(\mu)$ .

Ker velja:  $f_{n_1} + \sum_{j=1}^k (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) = f_{n_{k+1}}$ , podzaporedje  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergira proti  $f$  skoraj povsod. Ker pa velja

$$|f_{n_{k+1}}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \in L^1(\mu),$$

po LDK dobimo  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f| d\mu = 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_{k+1}} - f\|_1.$$

Torej  $f_{n_{k+1}} \rightarrow f$  v  $L^1(\mu)$ .



### 3.4 Riemannov in Lebesgueov integral

25. november 2025

Naj bo  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Za particijo  $P$   
 $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

intervala  $[a, b]$  definiramo

$$m_j := \inf_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x) \quad \text{in} \quad M_j := \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x).$$

Definiramo spodnjo in zgornjo Darbouxova vsoto:

$$S_p := \sum_{j=1}^n m_j \Delta_j \quad \text{in} \quad Z_p := \sum_{j=1}^n M_j \Delta_j,$$

kjer je  $\Delta_j := x_j - x_{j-1}$ . Iz Analize 1 vemo, da je  $f$  Riemannova integrabilna  $\Leftrightarrow \sup_{P \text{ part}} S_p = \inf_{P \text{ part}} Z_p$ .

V primeru, ko je  $f$  Riemannova integrabilna, to število označimo z  $\int_a^b f(x) dx$ .

Za vsak  $j = 1, \dots, n$  in vsak  $x \in [x_{j-1}, x_j]$  velja  $m_j \leq f(x) \leq M_j$ .

Izrek: Riemannova integrabilna funkcija  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je Lebesguevo integrabilna in velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\mu.$$

Dokaz: Za particijo  $P$  definiramo

$$\Delta_p := \sum_{j=1}^n m_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]} + f(b) \chi_{\{b\}} \quad \text{in} \quad Z_p := \sum_{j=1}^n M_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]} + f(b) \chi_{\{b\}}.$$

$\Rightarrow \Delta_p \leq f \leq Z_p$  za vsako particijo  $P$ .

$$\text{Velja } \int_{[a, b]} \Delta_p dm = S_p \quad \text{in} \quad \int_{[a, b]} Z_p dm = Z_p$$

Ker je  $f$  Riemannova integrabilna, obstaja naraščajoče zaporedje particij  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tako, da je vsaka finejša od predhodne in velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{P_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{P_k} = \int_a^b f(x) dx$$

(Tukaj zvezka dolžine najširših intervalov delitve gredo proti 0.)

Ker je  $P_{n+1}$  finejša od  $P_n$ , je torej  $s_n \leq s_{n+1} \leq f \leq z_{n+1} \leq z_n$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .

Torej  $\Delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$  in  $z := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  po točkah dobimo  $s_n \leq s \leq f \leq z \leq z_n$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .  
 $s_n, z_n$  merljive  $\Rightarrow s$  in  $z$  merljivi

$$\begin{array}{cccc} \int_{[a,b]} s dm & \leq \int_{[a,b]} s dm & \leq \int_{[a,b]} z dm & \leq \int_{[a,b]} z dm \\ \downarrow & & & \downarrow \\ \int_a^b f(x) dx & & & \int_a^b F(x) dx \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} s dm = \int_a^b F(x) dx = \int_{[a,b]} z dm \Rightarrow \int_{[a,b]} (z-s) dm = 0$$

$\Rightarrow z-s=0$  s.p. na  $[a,b]$ , saj je  $z \geq s$ .

$\Rightarrow f = z = s$  s.p. na  $[a,b]$

$\Rightarrow f$  je Lebesgueova merljiva, saj je Lebesgueova  $\sigma$ -algebra polna

$f = z$	$m(B) = 0$
$f^{-1}(U) \cap A$	$z^{-1}(U) \cap B$
$z^{-1}(U) \cap A$	$\subseteq B$

Skica:

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} z dm = \int_{[a,b]} s dm = \int_a^b f(x) dx$$

Izrek:  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  je Riemannova integrabilna  $\Leftrightarrow$  Lebesgueova mera točk neveznosti funkcije  $f$  je 0.  
 $(f$  je skoraj povsod zvezna na  $[a,b]$ )

Brez dokazu.

Primer: Izračunaj  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ .

$$\frac{1}{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1; & 0 \leq x < 1 \\ 2; & x = 1 \end{cases} \quad (\text{zgorajje meja je } +\infty)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{dm}{1+x^n} \stackrel{\text{L DK}}{=} \int_{[0,1]} f dm = \int_{[0,1]} f dm \\ &= 1 \cdot m([0,1]) + 0 \cdot m(\{1\}) = 1 \end{aligned}$$

### 3.5 Produktna mera (in Fubinijev izrek)

Naj bosta  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  in  $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$  merljiva prostora.

Produktna  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  je najmanjša  $\sigma$ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike.

Kako definirati produktno mero na  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ ?

Naj bo  $\mathcal{S} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ . Definiramo

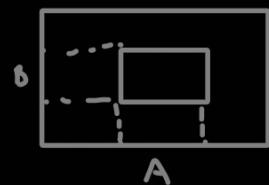
$$\Theta(A \times B) = \mu(A) \cdot \lambda(B).$$

Trditev:  $\mathcal{S}$  je polalgebra in  $\Theta: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  je polmerna.

Dokaz: i)  $X \times Y \in \mathcal{S}$  ✓

ii)  $A \times B \in \mathcal{S} \Rightarrow (A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (A \times B^c)$

$$\text{Velja } (A^c \times Y) \cap (A \times B^c) = \emptyset.$$



iii)  $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ .

$\Theta$  je polmerna na  $\mathcal{S}$

$$i) \Theta(\emptyset) = \Theta(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset) \cdot \lambda(\emptyset) = 0$$

ii) in iii) Naj bo  $A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) \in \mathcal{S}$  in naj bodo  $(A_n \times B_n)$  paroma disjunktne iz  $\mathcal{S}$ .

$$\Theta(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(A_n \times B_n) \quad \text{oziroma} \quad \mu(A) \lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \lambda(B_n)$$

$$\chi_{A \times B}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y), \text{ sij je } \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) = A \times B \text{ dijunktna unija}$$

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$$

Fiksirajmo  $x \in X$ :

$$\int_X \chi_A(x) \int_Y \chi_B(y) d\lambda = \int_Y \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y) d\lambda$$

$$\chi_A(x) \lambda(B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \leftarrow \Sigma = \Sigma$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \int_Y \chi_{B_n}(y) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \lambda(B_n)$$

$$\Rightarrow \lambda(B) \chi_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \chi_{A_n}(x) \quad \forall x \in X$$

Integrirajmo po  $x$  in kot zgoraj dobimo

$$\lambda(B) \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \mu(A_n).$$

□

Izrek: Polmerca  $\Theta: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  se da razširiti do mere  $A \otimes B$ . Če sta  $\mu$  in  $\lambda$   $\sigma$ -končni, potem je razširitev ena sama.

Dokaz: Najprej na en sam način  $\Theta$  razširimo do mere na algebri, generirani z  $\mathcal{S}$ . Ta razširitev je ena suma. Po Caratheodorijskem izreku obstaja mera na  $\sigma$ -algebri vseh zunanjih množic, ki razširja  $\Theta$ .

Če sta  $\mu$  in  $\lambda$   $\sigma$ -končni, potem je

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n; \quad \mu(X_n) < \infty \quad \text{in } X_n \subseteq X_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n; \quad \lambda(Y_n) < \infty \quad \text{in } Y_n \subseteq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \times Y_n); \quad \Theta(X_n \times Y_n) = \mu(X_n) \lambda(Y_n) < \infty \quad \text{in}$$

$$X_n \times Y_n \subseteq X_{n+1} \times Y_{n+1}$$

$\Rightarrow$  mera na algebri je  $\sigma$ -končna. Po izreku je razširitev na Caratheodorijsko  $\sigma$ -algebra ena sama.

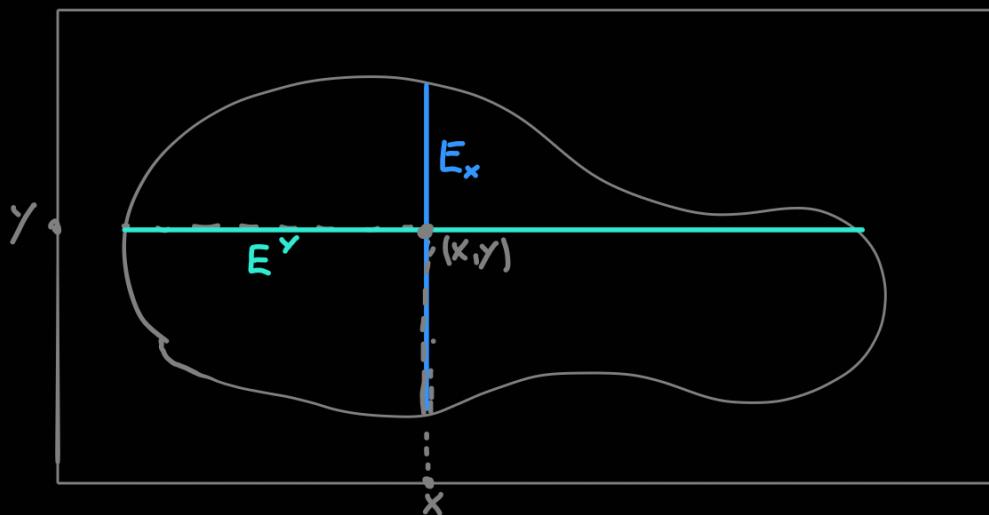
□

V primeru, ko sta  $X$  in  $Y$   $\sigma$ -končna, dobijemo enačbo mero imenujemo produktna mera in jo označimo z  $\mu \times \lambda$  ozziroma lahko tudi  $\mu \otimes \lambda$ .

Fubini iz Analize 2:  $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna:

$$\begin{aligned} \int_P f(x,y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx \\ &= \int_a^b dx \int_c^d f_x(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f^y(x) dx \end{aligned}$$

Naj bo  $E \subseteq X \times Y$ . Za  $x \in X$  in  $y \in Y$  definiramo preseza  $E_x$  in  $E^y$  z  $E_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in E\}$  in  $E^y := \{x \in X \mid (x,y) \in E\}$ .



Podobno za  $f: X \times Y \rightarrow Z$  definiramo  $f_x: Y \rightarrow Z$  in  $f^y: X \rightarrow Z$  s predpisoma  $f_x(y) = f(x,y) = f^y(x)$ .

26. november 2025

Primer: Naj bo  $E \subseteq X \times Y$ . Tedaj za vse  $x \in X$  in  $y \in Y$  velja  $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$  in  $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$ .

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$$

$$(\chi_E)_x(y) = \chi_E(x,y) = \begin{cases} 1; & (x,y) \in E \\ 0; & (x,y) \notin E \end{cases} \stackrel{x \text{ fiksen}}{\downarrow} = \begin{cases} 1; & y \in E_x \\ 0; & y \notin E_x \end{cases} = \chi_{E_x}$$

Podobno  $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$ .

Irditev: i) Naj bo  $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Tedaj je  $E_x \in \mathcal{B}$  in  $E^y \in \mathcal{A}$  za vse  $x \in X$  in  $y \in Y$ .

ii) Če je  $f$  merljiva glede na produktno  $\sigma$ -algebra  $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  na  $X \times Y$ , potem sta  $f_x$  in  $f^y$  merljivi glede na  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{A}$ .

Dokaz: Naj bo  $\mathcal{C}$  družina vseh podmnožic v  $X \times Y$ , da  $\forall E \in \mathcal{C}$  velja  $E_x \in \mathcal{B}$  in  $E^y \in \mathcal{A}$ .

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$  je  $\sigma$ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{B} \Rightarrow E = A \times B \in \mathcal{C}$

$$x \in X: x \in A \Rightarrow E_x = B \in \mathcal{B}$$

$$x \notin A \Rightarrow E_x = \emptyset \in \mathcal{B}$$

Podobno  $E^y \in \mathcal{A} \quad \forall y \in \mathcal{C}$ .

$\Rightarrow \mathcal{C}$  vsebuje vse merljive pravokotnike  $\Rightarrow X \times Y \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{C} \Rightarrow (E^c)_X &= \{y \in Y \mid (x, y) \in E^c\} \\ &= \{y \in Y \mid (x, y) \notin E\} \\ &= \{y \in Y \mid y \notin E_x\} \\ &= (E_x)^c \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da velja  $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_X$  in podobno za  $y$ -prereze. (DN)

$$\Rightarrow \mathcal{C} \supseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

ii) Naj bo  $D \subseteq Z$  merljiva množica. Izberimo  $x \in X$ . Ker je  $f$  merljiva, je  $f^{-1}(D) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f^{-1}(D))_x &\in \mathcal{B} \quad \text{in } (f^{-1}(D))^y \in \mathcal{A} \\ &\stackrel{\text{II?}}{(f_x^{-1})(D)} \quad \stackrel{\text{II?}}{(f^y)^{-1}(D)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (f_x^{-1})(D) = \{y \in Y \mid f_x(y) \in D\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{y \in Y \mid f(x, y) \in D\} \\
 &= \{y \in Y \mid (x, y) \in f^{-1}(D)\} \\
 &= \{y \in Y \mid y \in (f^{-1}(D))_x\} \\
 &= (f^{-1}(D))_x
 \end{aligned}$$

Podobno za  $y$ -prereze.



Družine podmnožic  $M$  dane množice je monoton razred, če velja naslednje:

i)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ ;  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$

ii)  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ ;  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in M$

Ker je presek neprazne družine monotonih razredov zopet monoton razred, vedno obstaja najmanjši monoton razred, ki vsebuje dano družino.

\* Vsaka  $\sigma$ -algebra je monoton razred.

\* Vsaka algebra, ki je monoton razred, je  $\sigma$ -algebra.

Dokaz:  $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$  algebra

Definiramo  $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \quad \uparrow \text{monoton razred}$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

Lema [o monotonem razredu]: Naj bo  $\mathcal{A}$  algebra podmnožic množice  $X$ . Tedaj je monoton razred  $M$ , generiran z  $\mathcal{A}$ ,  $\sigma$ -algebra.

Dopomba: Ta monoton razred je dejansko  $\sigma$ -algebra, generirana z  $\mathcal{A}$ .

$$A \subseteq \mathcal{M}, A \subseteq \sigma(A) \Rightarrow A \subseteq \mathcal{M} \subseteq \sigma(A)$$

$\Downarrow \leftarrow \mathcal{M}$  je  $\sigma$ -algebra  $\sigma(A)$  je monotoni razred

$$A \subseteq \sigma(A) \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(A) = \mathcal{M}$$

Dokaz: Po opombi zadostuje dokazati, da je  $\mathcal{M}$  algebra. Za  $A \in \mathcal{M}$  definiramo

$$\mathcal{M}(A) := \{B \in \mathcal{M} \mid A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M}\}.$$

tu lahko  
 vzememo  $x$   
 $\Rightarrow x \setminus B \in \mathcal{M}$   
 $B^c$

Za vsak  $A \in \mathcal{M}$  je  $\mathcal{M}(A)$  monotoni razred. (DN)

Opazimo še  $B \in \mathcal{M}(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}(B)$ .

Vzemimo  $A, B \in \mathcal{M}$   $\Rightarrow A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{M}(A) \quad \forall B \in \mathcal{M}$$

(vsebuje tudi najmanjši monotoni razred generiran z  $A$ )

$$\Rightarrow A \subseteq \mathcal{M}(A) \Rightarrow \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(A)$$

$\Rightarrow \mathcal{M}(A)$  je monotoni razred

$$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}. \exists C \in \mathcal{M}(A) \quad (A \text{ poljuben})$$

(A je poljuben)  $\Rightarrow$  vsebuje vsaj najmanjši monotoni razred)

$$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}. \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(B)$$

$$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{M}. A \in \mathcal{M}(B) : A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M}$$



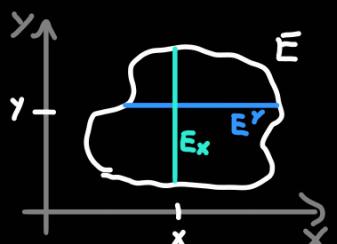
2. december 2025

Mali Fubinijev izrek: Naj bosta  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  in  $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$   $\sigma$ -končna merljiva prostora. Za  $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  sta funkciji

$$x \mapsto \lambda(E_x) \quad y \mapsto \mu(E^y)$$

merljivi in velja

$$(\mu \times \lambda)(E) = \int_X \lambda(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\lambda(y).$$



Formula se prebere lepše kot:

$$\iint_{X \times Y} \chi_E(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) = \int_X d\mu(x) \int_Y \chi_E(x, y) d\lambda(y)$$

$$= \int_Y d\lambda(y) \int_X \chi_E(x, y) d\mu(x)$$

Zato se ta izrek imenuje "mali Fubinijev izrek".

Dokaz: Definirajmo  $\Sigma \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  ... vse merljive množice, za katere izrek velja. Dokazali bomo  $\Sigma = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

Dokazali bomo: i)  $\Sigma$  vsebuje vse merljive pravokotnike

ii)  $\Sigma$  vsebuje končne disjunktne unije merljivih pravokotnikov

iii)  $\Sigma$  je monotón razred

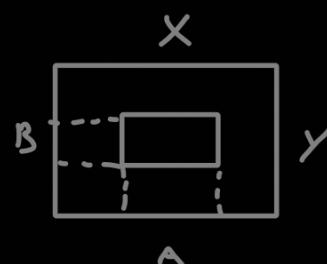
Recimo, da smo i), ii), iii) že dokazali. Tedaj je  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ , kjer je  $\Sigma_0$  algebra generirana z merljivimi pravokotniki. Naj bo  $\mathcal{M}$  monotón razred generiran z  $\Sigma$ . Tedaj je  $\mathcal{M}$   $\sigma$ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike. Tedaj velja  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \Sigma \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

i)  $\Sigma = A \times B; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$

$$E_x = \begin{cases} B & : x \in A \\ \emptyset & : x \notin A \end{cases} \quad \lambda(E_x) = \begin{cases} \lambda(B) & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \mapsto \lambda(E_x)$$

$$\uparrow \quad x \mapsto \lambda(B) \chi_A \quad \text{je } \mathcal{A}\text{-merljiva.}$$



Podobno  $y \mapsto \mu(E^y) \Leftrightarrow y \mapsto \mu(A) \chi_B$  je  $\mathcal{B}$ -merljiva

$$\int \lambda(E_x) d\mu(x) = \lambda(B) \int \chi_A d\mu = \lambda(B) \mu(A) \quad || \quad = (\mu \times \lambda)(A \times B)$$

$$\int \lambda(E^y) d\lambda(y) = \mu(A) \int \chi_B d\lambda = \mu(A) \lambda(B)$$

ii) Naj bosta  $C$  in  $D$  disjunktna merljiva pravokotnika. Ker je  $\chi_{C \cup D} = \chi_C + \chi_D$ .

$x \mapsto \lambda((C \cup D)_x) = \lambda(C_x \times D_x) = \lambda(C_x) + \lambda(D_x)$  je vsota merljivih funkij, zato je merljiva. Podobno za  $y \mapsto \mu((C \cup D)^y)$ .

Za enakost integralov upoštevamo aditivnost domene: če  $Z, W$  disjunktne, potem  $\int_{Z \cup W} = \int_Z + \int_W$ .

Za poljubno končno disjunktno unijo uporabimo indukcijo.

iii) Naj bo  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  naraščajoče zaporedje v  $\mathcal{E}$ .

Označimo  $E := \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ .

$x \mapsto \lambda(E_x)$ ,  $y \mapsto \mu(E^y)$  merljivi

Ker je  $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$ , je  $\lambda(E_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda((E_n)_x)$ . Zato je f:  $x \mapsto \lambda(E_x)$  limita po točkah zaporedja funkcij  $f_i: x \mapsto \lambda((E_n)_x)$ . Ker je limita merljivih funkuj merljiva, je g:  $x \mapsto \lambda(E_x)$  merljiva.

Podobno je  $y \mapsto \mu(E^y)$  merljiva.

$$\int \mu(E^y) d\lambda(y) \stackrel{\text{LMK za } g_n \text{ in } g}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu((E_n)^y) d\lambda(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \times \lambda)(E_n) \stackrel{E_n \in \mathcal{E}}{=} (\mu \times \lambda)(E)$$

Podobno za  $\int_x \lambda(E_x) d\mu(x) = (\mu \times \lambda)(E)$ .

Predpostavimo, da sta  $\mu$  in  $\lambda$  končni, t.j.  $\mu(x) < \infty, \mu(y) < \infty$ .  
 Naj bo sedaj  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  padačoče zaporedje množic v  $\mathcal{E}$  in naj bo  $E$  njihov presek. Funkciji  $x \mapsto \lambda(E_x)$  in  $y \mapsto \mu(E^y)$  sta merljivi kot prej. Enakost integralov sledi iz istega računa kot prej, le da argument z LMK nadomestimo z LDK, kjer je dominirajoča funkcija  $y \mapsto \mu(E_1^y)$ , za zadnjo limito pa uporabimo dejstvo, da je mera presek limita mer, če je ena od mer množic končna. Podobno za  $x \mapsto \lambda(E_x)$ .

V splošnem zapisemo  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n; \mu(X_n) < \infty, \lambda(Y_n) < \infty$  in  $X_n \subseteq X_{n+1}, Y_n \subseteq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Izberimo  $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Tedaj je  $E \cap (X_j \times Y_j)$  vsebovana v  $\mathcal{A}|_{X_j} \otimes \mathcal{B}|_{Y_j}$ . Tedaj sta funkciji  $x \mapsto \lambda(E_x \cap Y_j), y \mapsto \mu(E^y \cap X_j)$  merljivi. V limiti, ko  $j \rightarrow \infty$ , dobimo  $x \mapsto \lambda(E_x \cap Y) = \lambda(E_x)$  in  $y \mapsto \mu(E^y \cap X) = \mu(E^y)$ , ki sta merljivi funkciji. Preverimo še enakost dvakratnih integralov in produktne mere. Po zgornji dokazanem velja  $(\mu \times \lambda)(E \cap (X_j \times Y_j)) = \int_{X_j} \lambda(E_x \cap Y_j) d\mu(x) = \int_{Y_j} \mu(E^y \cap X_j) d\lambda(y)$ .

Funkcijo razširimo z 0 na  $Y_j^c$  in  $X_j^c$  in dobimo posledično enacaj. □

Tonelli-Fubinijev izrek: Naj bosta  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  in  $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$   $\sigma$ -končna prostora. Tedaj velja:

Tonelli: Naj bo  $F: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  merljiva funkcija in naj bosta  $g(x) := \int_Y F(x, y) d\lambda(y)$  in  $h(y) := \int_X F(x, y) d\mu(x)$ . Tedaj sta  $g$  in  $h$  merljivi glede na  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}$  in velja

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) &= \int_Y d\lambda(y) \int_X f(x, y) d\mu(x) \\ &= \int_X d\mu(x) \int_Y f(x, y) d\lambda(y). \end{aligned}$$

Fubini: Naj bo  $f \in L^1(\mu \times \lambda)$ . Tedaj je  $f_x \in L^1(\lambda)$  za skoraj vsak  $x \in X$  in  $f^y \in L^1(\mu)$  za skoraj vsak  $y \in Y$ . Funkciji  $g$  in  $h$  sta v  $L^1(\mu)$  in  $L^1(\lambda)$ . Oba dvakratna integrala sta enaka drugnjemu.

Opomba:  $f \in L^1(\mu \times \lambda) \Leftrightarrow \int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \lambda) < \infty$  preverimo s Tonellijem.

Dokaz: Tonelli: Po malem Fubinijevem izreku Tonellijev izrek velja, ko je  $f = \chi_E$  za  $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Če je  $0 \leq s$  stopničasta funkcija, za enakost integralov uporabimo aditivnost in nenegativno homogenost. Za merljivost uporabljajo dejstvo, da so linearne kombinacije merljivih funkcij merljive.

Naj bo sedaj  $f$  splošna nenegativna merljiva funkcija. Po izreku o aproksimaciji obstaja zaporedje nenegativnih stopničastih  $s_n$ , da  $0 \leq s_n \nearrow f$ .

$$s_n \nearrow f \Rightarrow (s_n)_x \nearrow f_x \stackrel{\text{LMK}}{\Rightarrow} \int_Y (s_n)_x d\lambda \nearrow \int_Y f_x d\lambda$$

Zato je  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y (s_n)_x d\lambda$  in zato merljiva. Podobno je  $h$  merljiva

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) &\stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} s_n(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X d\mu(x) \int_Y s_n(x, y) d\lambda(y) \\ &\stackrel{\text{LMK}}{=} \int_X d\mu(x) \int_Y f_x(y) d\lambda(y) \end{aligned}$$

$$= \int_x d\mu(x) \int_y f(x,y) d\lambda(y).$$

Podobno druga enakost.

$$\begin{aligned} \text{Fubini: } f \in L^1(\mu \times \lambda) &\Leftrightarrow \int_{x \times y} |f| d(\mu \times \lambda) < \infty \\ &\Leftrightarrow \int_x d\mu(x) \underbrace{\int_y |f(x,y)| d\lambda(y)}_{\tilde{g}(x)} < \infty \\ &\Leftrightarrow \int_x \tilde{g}(x) d\mu(x) < \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(x) < \infty \text{ skoraj parsod} \Rightarrow \int_y |f(x,y)| d\lambda(y) < \infty \text{ skoraj parsod}$$

$\Rightarrow f_x \in L^1(\lambda)$  za skoraj vsak  $x$ .

Podobno  $f^y \in L^1(\mu)$  za skoraj vsak  $y$ .

Ker je  $\int_x \tilde{g}(x) d\mu(x) < \infty$ , je  $g \in L^1(\mu)$ . Podobno  $h \in L^1(\lambda)$ .

Enakost med dvostruknima in dvojnim integralom preverimo tako, da zapisemo  $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i((\operatorname{Im} f)^+ - (\operatorname{Im} f)^-)$ , upoštevamo linearnost integralov za  $L^1$  funkcije in večkrat Tonelliijev izrek.  $\blacksquare$

Primer:  $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \overset{\mu}{m})$  in  $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ,  $\lambda$  šteje točke.

Naj bo  $\Delta$  diagonalna v  $[0,1] \times [0,1]$ ;  $\Delta = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$ .

$\Delta$  je v  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ .

Ali velja Tonelli za  $\chi_\Delta$ ?

$$\int_x d\mu(x) \int_y \chi_\Delta(x,y) d\lambda(y) = \int_y 1 d\mu(x) = 1$$

$$\int_y d\lambda(y) \int_x \chi_\Delta(x,y) d\mu(x) = \int_y 0 d\lambda(y) = 0$$

Problem:  $\lambda$  ni  $\sigma$ -končna. Obstajajo tudi drugi primeri.

Opomba: Kaj narediti v primeru, ko mera ni  $\sigma$ -končna?

Če  $f \in L^1(\mu)$ :  $X = \underbrace{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}_C \cup \underbrace{\{x \in X \mid f(x) = 0\}}_N$ .

$$\int_X f d\mu = \int_C f d\mu$$

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}}_{\text{homogene Mengen}} =: C_n$$

$$\infty > \int_X |f| d\mu \geq \int_{C_n} |f| d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(C_n)$$

Če imamo  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(\mu)$ :  $F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (\|f_n\|_1 + 1)} \cdot |f_n|$

$f \in L^1(\mu)$ ,  $f \geq 0$

$\ker f = |F_n| \leq 2^n (\|f_n\|_1 + 1) \cdot f \quad f \in F_n|_{C^c} = 0$ .

Za integral  $\int_X f_n d\mu = \int f d\mu$ .