

# Hamiltonovi cikli

Jan Pantner ([jan.pantner@gmail.com](mailto:jan.pantner@gmail.com))

23. 2. 2023

Kombinatorične naloge lahko včasih poenostavimo tako, da jih prevedemo v jezik teorije grafov. Pomemben pojem v teoriji grafov so Hamiltonovi cikli. Tukaj bomo navedli definicijo in osnovni izrek. Pogledali si bomo tudi primer uporabe na nalogi, ki smo jo na alternativen način rešili tudi na predavanju 13. 2. 2023.

## Definicija

Naj bo  $G$  graf. Cikel  $C$  v grafu  $G$  je *Hamiltonov cikel*, če obišče vsa vozlišča grafa  $G$  oziroma  $V(G) = V(C)$ .

## Izrek: Dirac

Naj bo  $G$  graf z vsaj tremi vozlišči. Recimo, da za vsako vozlišče  $v \in V(G)$  velja  $\deg v \geq \frac{|V(G)|}{2}$ . Tedaj ima graf  $G$  Hamiltonov cikel.

## Naloga

Na zabavo je povabljenih  $2n$  diplomatov. Vsak diplomat ima kvečjemu  $n - 1$  sovražnikov. Dokažite, da lahko diplomate posedemo okoli okrogle mize tako, da nihče ne sedi poleg svojega sovražnika.

*Rešitev.* Če je  $n = 1$ , potem ni sovražnikov. Recimo sedaj, da  $n \geq 2$ .

Diplomate identificiramo s točkami. Dva diplomata povežemo, če nista sovražnika. Sedaj je naloga, kjer je  $n \geq 2$ , ekvivalentna temu, da ima naš graf Hamiltonov cikel. Diplomate lahko tedaj posedemo v takšnem zaporedju, kot se pojavijo v Hamiltonovem ciklu.

Ker je  $n \geq 2$ , ima graf več kot 3 vozlišča. Vsako vozlišče je stopnje  $n + 1 > 2n/2$ . Torej smo končali po Diracovem izreku.  $\square$