

4. KOMPLEKSNE MERE

4.1. Totalna variacija mere

3. december 2025

Naj bo (X, \mathcal{A}) merljiv prostor. Preslikava $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ je kompleksna mera, če je števno aditivna za zaporedja paroma disjunktnih množic iz \mathcal{A} :

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}; A_n \cap A_m = \emptyset$ za $n \neq m$, potem

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

$$A_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\emptyset) \Rightarrow \lambda(\emptyset) = 0$$

Opozka: $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$

$$\text{II: } \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\pi(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{\pi(n)})$$

za vsako bijekcijo $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Iz analize 1 sledi, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{\pi(n)})$ konvergira absolutno.

Primer: Naj bo μ pozitivna mera na (X, \mathcal{A}) . Za $f \in L^1(\mu)$ definiramo:

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paroma disjunktne, potem

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \chi_{A_n} d\mu$$

LDK za vrste (DN)
 $\sum \leq \sum$

$\Rightarrow \lambda$ je kompleksna mera.

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu = 0$$

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$$

Zapišemo $\lambda \ll \mu$ (absolutna zveznost λ glede na μ).

Trditev: Preslikava $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ kompleksna mera natanko takrat, ko velja vsaj ena od naslednjih trditev:

i) λ je končno aditivna in $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$ za vsako naraščajoče zaporedje množic $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v \mathcal{A} .

ii) λ je končno aditivna in $\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$ za vsako padajoče zaporedje množic $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v \mathcal{A} .

Dokaz: Enako kot v primeru pozitivne mere. Za (ii) upoštevamo $\lambda(A_n) \in \mathbb{C}$. □

Naj bo $A \in \mathcal{A}$. Zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktnih množic iz \mathcal{A} imenujemo **(merljiva) particija** za A , če je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Totalna variacija mere λ je $|\lambda|$, definirana s predpisom $|\lambda|(A) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ particija za } A \right\}$.

Izkaže se, da velja naslednje: $f \in L^1(\mu)$; μ pozitivna mera,
 $\lambda(A) = \int f d\mu \Rightarrow |\lambda|(A) = \int |f| d\mu$.

$$A \in \mathcal{A}; A_1 = A, A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$$

$$\Rightarrow |\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| = |\lambda(A_n)|.$$

$$|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)$$

Definiramo: $(Re\lambda)(A) := Re\lambda(A)$, $(Im\lambda)(A) := Im\lambda(A)$.

Ker je λ kompleksna mera, sta $Re\lambda$ in $Im\lambda$ realni meri.

Vedno velja: $|\lambda| \leq |Re\lambda| + |Im\lambda|$.

$$\forall A \in \mathcal{A}: |\lambda|(A) \leq |Re\lambda|(A) + |Im\lambda|(A)$$

Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ particija za A . Tedaj velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |(Re\lambda + i Im\lambda)(A_n)|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Re}\lambda(A_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im}\lambda(A_n)| \\ \leq |\operatorname{Re}\lambda|(A) + |\operatorname{Im}\lambda|(A)$$

Naredimo supremum po vseh particijah $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$|\lambda|(A) \leq |\operatorname{Re}\lambda|(A) + |\operatorname{Im}\lambda|(A)$$

Velja tudi: $|\operatorname{Re}\lambda|, |\operatorname{Im}\lambda| \leq |\lambda|$.

Izrek: Za vsako kompleksno mero λ je $|\lambda|$ končna pozitivna mera.

9. december 2025

Dokaz: Dokaz v dveh korakih:

1. $|\lambda|$ je pozitivna mera.

$$|\lambda|(\emptyset) = 0 \quad \checkmark$$

Avt., $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne v A, da je

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow |\lambda|(A) = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n)$$

(\geq) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izberimo $a_n \geq 0$, da je $a_n \leq |\lambda|(A_n)$.

Izberimo $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja particija $(A_{n,j})_{j \in \mathbb{N}}$ za A_n , da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{n,j})| \geq a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Tedaj je $(A_{n,j})_{n,j \in \mathbb{N}}$ particija za A, zato velja

$$|\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{n,j})| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \varepsilon.$$

$$\text{Pošljemo } \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow |\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^k a_n$$

Za $n=1, 2, \dots, k$ pošljemo $a_n \rightarrow |\lambda|(A_n) \Rightarrow$

$$|\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n).$$

(\leq): Naj bo $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ particija za A $\Rightarrow (B_j \cap A_n)_{j \in \mathbb{N}}$ je particija za A_n .

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(B_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_j \cap A_n) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(B_j \cap A_n)| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(B_j \cap A_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n)$$

Po definiciji totalne variacije sledi $|\lambda|(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n)$.

2. $|\lambda|$ je končna (pozitivna) mera.

$$\lambda = \operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda, \quad |\operatorname{Re}\lambda|, |\operatorname{Im}\lambda| \leq |\lambda| \leq |\operatorname{Re}\lambda| + |\operatorname{Im}\lambda|$$

$$|\lambda| \text{ končna} \Leftrightarrow |\lambda|(X) < \infty$$

Zato je dovolj dokazati, da je totalna variacija realne mere vedno končna (pozitivna) mera.

BSS λ je realna mera

Predpostavimo, da je $|\lambda|(X) = \infty$. Po definiciji totalne variacije obstaja particija $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ za X , da je $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(X_n)|$ poljubno veliko.

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda(X_n) \geq 0\} \text{ in } T = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda(X_n) < 0\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(X_n)| = \sum_{n \in S} \lambda(X_n) - \sum_{n \in T} \lambda(X_n)$$

Zato je $\sum_{n \in S} \lambda(X_n)$ ali $\sum_{n \in T} \lambda(X_n)$ poljubno veliko po absolutni vrednosti.

Oglejmo si $E := \bigcup_{n \in S} X_n$ in $F := \bigcup_{n \in T} X_n$. Tedaj je $\lambda(E)$ ali $\lambda(F)$ poljubno veliko po absolutni vrednosti. Dokazali smo: Če je $Y \in \mathcal{A}$ in $|\lambda|(Y) = \infty$, potem $\exists Z \subseteq Y$ merljiva, da je $|\lambda(Z)|$ poljubno veliko.

Definiramo $A_1 := X \Rightarrow |\lambda|(A_1) = \infty \Rightarrow \exists Y_1 \subseteq A_1$ merljiva, da je $|\lambda(Y_1)| \geq |\lambda(A_1)| + 1$

Y_1	$ $	$A_1 \setminus Y_1$
-------	-----	---------------------

$$A_1 \Rightarrow |\lambda|(Y_1) = \infty \text{ ali } |\lambda|(A_1 \setminus Y_1) = \infty$$

Označimo $Z \subseteq A_2$ tisto množico med Y_1 in $A_1 \setminus Y_1$, da je $|\lambda|(A_2) = \infty$.

Če je $A_2 = Y_1$, potem je $|\lambda(A_2)| \geq 1$.

Če je $A_2 = A_1 \setminus Y_1$, potem je $|\lambda(A_2)| = |\lambda(A_1 \setminus Y_1)| = |\lambda(A_1) - \lambda(Y_1)| \geq |\lambda(A_1)| - |\lambda(Y_1)| \geq 1$

Torej $A_1 \rightarrow A_2 : |\lambda|(A_2) = \infty$ in $|\lambda(A_2)| \geq 1$.

Po prej dokazanem $\exists Y_2 \subseteq A_2$ merljiva, da je $|\lambda(Y_2)| \geq |\lambda(A_2)| + 2$.

Naj bo A_3 tista množica med Y_2 in $A_2 \setminus Y_2$, da je $|\lambda|(A_3) = \infty$.

Če je $A_3 = Y_2$, potem je $|\lambda(A_3)| = |\lambda(A_2)| \geq 2$.

Sicer $A_3 = A_2 \setminus Y_2$ in zato $|\lambda(A_3)| \geq |\lambda(A_2)| - |\lambda(Y_2)| \geq 2$.

Z indukcijo dokazemo obstoj pakljočega zaporedja množic $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da je $|\lambda(A_n)| = \infty$ in $|\lambda(A_n)| \geq n-1$.

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow |\lambda(A)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda(A_n)| \longrightarrow \infty.$$

Pratiskovje $\exists \lambda(A) \in \mathbb{R}$. Zato je $|\lambda|(x) < \infty$. □

Če sta λ in μ kompleksni meri na (X, \mathcal{U}) in $d \in \mathbb{C}$, potem definiramo $(\lambda + \mu)(E) := \lambda(E) + \mu(E)$
 $(d\mu)(E) := d\mu(E)$.

Preverimo lahko, da sta $\lambda + \mu$ in $d\lambda$ tudi kompleksni meri (DN).

Z $M(X)$ označimo prostor vseh kompleksnih mer. $M(X)$ je kompleksni vektorski prostor. V $M(X)$ vpeljemo $\|\lambda\| := |\lambda|(X)$.

Izrek: $(M(X), \|\cdot\|)$ je Banachov prostor.

V dokazu uporabimo naslednjo trditve: Normirani prostor je Banachov \Leftrightarrow vsaka absolutno konvergentna vrsta konvergira.

4.2. Absolutna zveznost in vzajemna singularnost mer

Naj bo μ pozitivna mera in λ kompleksna mera. Pravimo, da je λ **absolutno zvezna** glede na μ , če velja $\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$.

Oznaka: $\lambda \ll \mu$.

Lema: $\lambda \ll \mu \Leftrightarrow |\lambda| \ll \mu$.

Dokaz: (\Leftarrow): $\mu(E) = 0 \Rightarrow |\lambda|(E) = 0$

Ker je $|\lambda| \ll \mu$, je $|\lambda|(E) = 0$.

Ker $|\lambda|(E) \leq |\lambda|(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$

(\Rightarrow): $E : \mu(E) = 0 \Rightarrow |\lambda|(E) = 0$

Naj bo $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ particija za E .

$$\mu(E) \rightarrow \mu(E_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\lambda \ll \mu} \lambda(E_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| = 0 \quad \forall \text{ particijo } (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ za } E \Rightarrow \mu(E) = 0$$

□

Izrek: Naj bo λ kompleksna mera in μ pozitivna mera. Tedaj je $\lambda \ll \mu$ natanko tedaj, ko za $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \mu(A) < \delta \Rightarrow |\lambda(A)| < \varepsilon$.

Dokaz: (\Leftarrow): $\mu(E) = 0$

Po predpostavki $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \mu(A) < \delta \Rightarrow |\lambda(A)| < \varepsilon$. Ker je $\mu(E) = 0 < \delta$, je $|\lambda(E)| < \varepsilon$ za vsak $\varepsilon > 0$. Zato je $\lambda(E) = 0$.

(\Leftarrow): Predpostavimo, da $\varepsilon - \delta$ trditev ne drži. Torej

$\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists A. \mu(A) < \delta \text{ in } |\lambda(A)| \geq \varepsilon$.

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ najdemos takšen $A_n \in \mathcal{A}$, da je $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ in $|\lambda(A_n)| \geq \varepsilon$.

Definiramo $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Velja

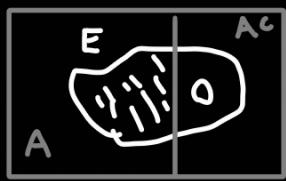
$$\mu(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = 0.$$

$$|\lambda|(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda|(B_n) \geq \varepsilon \quad (\underbrace{|\lambda|(B_n) \geq |\lambda|(A_n) \geq |\lambda(A_n)| \geq \varepsilon}_{\text{arrows}})$$

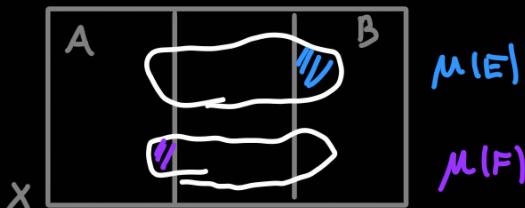
Zato $|\lambda| \ll \mu$, ozziroma $\lambda \ll \mu$. □

Naj bo λ mera. λ je skoncentrirana na $A \in \mathcal{A}$, če je $\lambda(E) = \lambda(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$.



Po domači: λ je skoncentrirana na $A \Leftrightarrow \lambda(B) = 0$ za vsako mrežico $B \subseteq A^c$ ozziroma "λ živi v A".

Meri λ in μ sta vzajemno singularni, če obstajata disjunktni množici $A, B \in \mathcal{A}$, du je λ skoncentrirana na A , μ pa na B .



Zato dostikrat v definiciji lahko avtomatično privzamemo, da je $A \cup B = X$.

Irditev: Naj bosta λ in μ kompleksni meri.

- i) Če je λ pozitivna, potem je λ skoncentrirana na $A \Leftrightarrow \lambda(A^c) = 0$.
- ii) λ je skoncentrirana na $A \Leftrightarrow |\lambda|$ skoncentrirana na A .
- iii) $\lambda \perp \mu$ vsejemo singularni $\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A}. |\lambda|(A) = 0$ in $|\mu|(A^c) = 0$.

Dokaz: (ii) \Leftrightarrow : $\lambda(B) = 0 \forall B \subseteq A^c$
 $|\lambda|(B) \leq |\lambda|(B) = 0$

$$\Leftrightarrow B \subseteq A^c \Rightarrow |\lambda|(B) = 0$$

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ particija za B $\lambda(B_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(B_n)| = 0$

Supremum po vseh particijah: $|\lambda|(B) = 0$.

(i) in (iii) DN. □

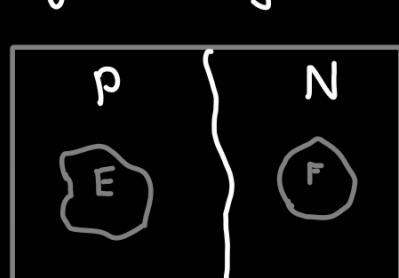
4.3. Razcep realne mere

Naj bo λ realna mera na (X, \mathcal{A}) .



$E \subseteq A$, $\lambda(E) \in \mathbb{R}$
 $\lambda(E) > 0$, $\lambda(E) = 0$ ali $\lambda(E) < 0$
 Recimo $\lambda(E) \geq 0$. $F \subseteq E$ merljiva
 Ali je $\lambda(E) \geq 0$?

Velja naslednje:



Imamo razcep:
 $X = P \cup N$; $P, N \in \mathcal{A}$, $P \cap N = \emptyset$
 $\forall E \subseteq P$. $\forall F \subseteq N$ merljivi:
 $\lambda(E) \geq 0$ in $\lambda(F) \leq 0$

Naj bo (X, \mathcal{A}) merljiv prostor in λ kompleksna mera. Množicu $A \in \mathcal{A}$ je:

10. december 2025

- λ -pozitivna, če je $\lambda(E) \geq 0$ za vsako merljivo množico $E \subseteq A$,
- λ -negativna, če je $\lambda(E) \leq 0$ za vsako merljivo množico $E \subseteq A$,
- λ -ničelna, če je $\lambda(E) = 0$ za vsako merljivo množico $E \subseteq A$.

Presek λ -pozitivne in λ -negativne množice je λ -ničelna množica. Vsaka λ -ničelna množica je λ -pozitivna in λ -negativna.

Lema: Naj bo λ realna mera na merljivem prostoru (X, \mathcal{A}) . Tedaj vsaka merljiva množica E vsebuje λ -pozitivno množico P za katero velja $\lambda(P) \geq \lambda(E)$.

Dokaz: Najprej dokazimo, da za vsako merljivo množico A in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšna merljiva množica $P_\varepsilon \subseteq A$, da je $\lambda(P_\varepsilon) \geq \lambda(A)$ in $\lambda(B) \geq -\varepsilon$ za vsako merljivo množico $B \subseteq P_\varepsilon$.

S protisporjem: recimo, da obstaja takšen $\varepsilon > 0$, da za vsako takšno merljivo množico $C \subseteq A$, za katero velja $\lambda(C) \geq \lambda(A)$, obstaja takšna merljiva množica $B \subseteq C$, da je $\lambda(B) < -\varepsilon$.

\Rightarrow Najdemo $B_1 \subseteq A$, da je $\lambda(B_1) < -\varepsilon$. Ker je $\lambda(A \setminus B_1) = \lambda(A) - \lambda(B_1) > \lambda(A) + \varepsilon$, obstaja takšen $B_2 \subseteq A \setminus B_1$, da je $\lambda(B_2) < -\varepsilon$. Z indukcijo konstruiramo zaporedje takšnih paroma disjunktnih množic $(B_n)_n$, da je $\lambda(B) < -\varepsilon$ in $B_n \subseteq A \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$.

$$\Rightarrow B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = -\infty \quad \times$$

Po ravnomer dokažanem $\exists P_1 \subseteq A$ merljiva, da $\lambda(P_1) \geq \lambda(A)$ in $\lambda(B) \geq -\frac{1}{2}$ $\forall B \subseteq P_1$ merljivo. ...
 $\exists P_2 \subseteq P_1$ merljiva, da $\lambda(P_2) \geq \lambda(P_1) \geq \lambda(A)$ in $\lambda(B) \geq -\frac{1}{2}$ $\forall B \subseteq P_2$ merljiv.

$\Rightarrow \exists$ indukcijo konstruiramo padajoče zaporedje $(P_n)_n$ mernjivih množic, da $\lambda(P_n) \geq \lambda(A)$ $\forall n$ in $\forall B \subseteq P_n$ mernjiv je $\lambda(B) \geq -\frac{1}{n}$. Definiramo $P := \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$. Tedaj je $\lambda(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(P_n) \geq \lambda(A)$ in če je $B \subseteq P$ mernjivo, potem $B \subseteq P \subseteq P_n \Rightarrow \lambda(B) \geq -\frac{1}{n} \rightarrow 0$. $\Rightarrow \lambda(B) \geq 0$. Torej je P λ -pozitivna. ■

Izrek [Hahnov razcep realne mere]:

Naj bo λ realna mera na (X, \mathcal{A}) . Tedaj obstaja takšna λ -pozitivna množica P in takšna λ -negativna množica N , da je $X = P \cup N$ in $P \cap N = \emptyset$.

Če obstaja še en takšen par (\tilde{N}, \tilde{P}) , potem sta $(P \setminus \tilde{P}) \cup (\tilde{P} \setminus P)$ in $(N \setminus \tilde{N}) \cup (\tilde{N} \setminus N)$ λ -ničelni množici.

Dokaz: Definirajmo $s := \sup \{ \lambda(A) \mid A \text{ } \lambda\text{-pozitivna} \}$. Ker je $\lambda(A) \geq 0$ in $\lambda(A) \leq |\lambda|(A) \leq |\lambda|(X)$, je $s \in [0, \infty)$.

Obstaja P λ -pozitivna, da je $\lambda(P) = s$.

Obstajajo A_n ; A_n je λ -pozitivna in $\lambda(A_n) \rightarrow s$. Definirajmo $P_1 = A_1$, $P_2 = A_1 \cup A_2$, ..., $P_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

$\Rightarrow P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots$ in $\forall n$ je P_n λ -pozitivna in $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ je tudi λ -pozitivna.

Ker je $(P_n)_n$ naraščajoče: $\lambda(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(P_n) = s$. $\begin{matrix} s & \geq & \lambda(P_n) & \geq & \lambda(A_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ s & & s & & s \end{matrix}$

$N := X \setminus P$ je λ -negativna

Če to ni res $\exists E \subseteq N$ mernjiva; $\lambda(E) > 0$. Po prejšnji lemi obstaja $P' \subseteq E$ λ -pozitivna, da je $\lambda(P') \geq \lambda(E) > 0$.

$\Rightarrow P' \cup P$ je λ -pozitivna in $\lambda(P' \cup P) = \lambda(P') + \lambda(P) > \lambda(P) = s$, kar je v protishrovju z definicijo s.

Naj bo sedaj (\tilde{P}, \tilde{N}) še en tak razcep prostora $(\tilde{P} \lambda\text{-poz}, \tilde{N} \lambda\text{-neg})$.

$$\Rightarrow (P \setminus P') \cup (P' \setminus P) = (P \cap \tilde{P}'^c) \cup (\tilde{P} \cap P^c)$$

$$= \underbrace{(P \cap N)}_{\lambda \text{-ničelni}} \cup \underbrace{(P \cap N^c)}_{\lambda \text{-ničelni}}$$

\Rightarrow tudi unija je λ -ničelna. Podobno $(N \cap N^c) \cup (N^c \cap N)$. □

Vsek par (P, N) iz izreka imenujemo **Hahnov razcep** prostora X glede na λ ozziroma Hahnov razcep realne mere λ .

16. december 2025

Jordanov razcep realne mere:

Naj bo λ realna mera na (X, \mathcal{A}) . Tedaj obstajata enolična določeni pozitivni meri λ^+ in λ^- na (X, \mathcal{A}) , da je $\lambda^+ \perp \lambda^-$ in velja $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.

Opomba: λ^+ in λ^- se zaporedoma imenujeta **pozitivni** in **negativni** del mere λ .

Dokaz: Naj bo (P, N) nek Hahnov razcep za λ . To pomeni, da je P λ -pozitivna množica, N je λ -negativna množica, $P \cup N = X$ in $P \cap N = \emptyset$.

Definiramo $\lambda^+(A) := \lambda(A \cap P)$ in $\lambda^-(A) := -\lambda(A \cap N)$ za $A \in \mathcal{A}$. λ^+ in λ^- sta pozitivni meri, saj sta P in N λ -poz. in λ -neg množice. Ker sta λ^+ in λ^- zaporedoma skoncentrirani na P in N , je $\lambda^+ \perp \lambda^-$.

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda(A \cap P) + \lambda(A \cap P^c) = \lambda(A \cap P) + \lambda(A \cap N) \\ &= \lambda^+(A) + \lambda^-(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Dokazimo enoličnost Jordanskega razcepa. Naj bo $\lambda = \mu_1 - \mu_2$, kjer sta μ_1 in μ_2 vsejemo singularni pozitivni meri. Naj bo μ_1 skoncentrirana na E , μ_2 pa na F ($E, F \in \mathcal{A}$).

$$\mu_1(A) = \mu_1(A \cap E), \quad \mu_2(A) = \mu_2(A \cap F); \quad A \in \mathcal{A}$$

E			F

Če zamenjamo E z $E \cup (E \cup F)^c$, lahko BSS predpostavim, da je $E \cup F = X$.

Sledi, da je (E, F) še en Hahnov razcep realne mere λ .
 Po izreku je $P \Delta E$ in $N \Delta F$ λ -ničelni množici
 $\mu_1 = \lambda^+$ in $\mu_2 = \lambda^-$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}: \mu_1(A) &= \mu_1(A \cap E) = \mu_1(A \cap E) - \mu_1(A \cap E^c) = \\ &= \lambda(A \cap E) = \lambda(A \cap E \cap P) + \lambda(A \cap E \cap P^c) = \\ &= \lambda(A \cap E \cap P) = \lambda(A \cap E \cap P) + \lambda(A \cap E^c \cap P) \\ &= \lambda(A \cap P) \\ &= \lambda^+(A) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \lambda^+ \Rightarrow \mu_2 = \mu_1 - \lambda = \lambda^+ - \lambda = \lambda^-$$

□

4.4. Lebesgue-Radon-Nikodýmov izrek

Motivacija: $f \in L^1(\mu)$ in μ pozitivna mera, potem definiramo λ :

$$\lambda(A) := \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{A})$$

Tedaj je λ kompleksna mera in $\lambda \ll \mu$.

Vprašanje: Naj bo μ σ -končna pozitivna mera in λ kompleksna mera, da je $\lambda \ll \mu$. Ali obstaja $f \in L^1(\mu)$, da je

$$\lambda(A) := \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{A}) ? \quad \text{Da.}$$

Lema: Naj bosta μ in λ končni pozitivni meri. Tedaj je bodisi $\lambda \perp \mu$ bodisi obstaja $\varepsilon > 0$ in $E \in \mathcal{A}$, da je $\mu(E) > 0$ in $\lambda \geq \varepsilon \mu$ na E .

Dokaz: Naj bo $X = P_n \vee N_n$ Hahnov razcep za $\lambda - \frac{1}{n}\mu$. Definiramo $P := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ in $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n$. N je negativna množica za mero $\lambda - \frac{1}{n}\mu$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Velja $0 \leq \lambda(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N) \rightarrow 0$.

$\Rightarrow \lambda(N) = 0$. Zato je λ shkoncentrirana na $N^c = P$. Če je $\mu(P) = 0$, je μ shkoncentrirana na $P^c = N$ in zato $\lambda \perp \mu$. Če je $\mu(P) > 0$, sledi $\mu(P_n) > 0$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Zato tudi velja $\lambda \geq \frac{1}{n}\mu$ na P_n . □

Lema: Naj bo $f \in L^1(\mu)$. Tedaj je $f=0$ s.p. na $X \Leftrightarrow \int_A f d\mu = 0 \forall A \in \mathcal{A}$.

Dokaz: (\Rightarrow): \checkmark

$$\Leftrightarrow: \int_A f d\mu = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$\int_A Re f d\mu + i \int_A Im f d\mu \Rightarrow \int_A Re f d\mu = \int_A Im f d\mu = 0$$

Naj bo $g \in L^1(\mu)$ takšna, da je $\int_A g d\mu = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

$$g = g^+ + g^- \quad X^+ = \{x \mid g(x) \geq 0\}, \quad X^- = \{x \mid g(x) < 0\}.$$

$$X^+ \cup X^- = X, \quad X^+ \cap X^- = \emptyset$$

$$\int_{X^+} g d\mu = 0 \text{ in } g \geq 0 \text{ na } X^+ \Rightarrow g \equiv 0 \text{ s.p. na } X^+$$

Počesno $g \equiv 0$ s.p. na X^- . Zato $g \equiv 0$ s.p. \square

Izrek [Lebesgue-Radon-Nikodym]: Naj bo λ kompleksna mera in μ σ -končna mera na (X, \mathcal{A}) . Tedaj obstajata enolično določeni kompleksni meri λ_a in λ_s , da je $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ in $\lambda_s \perp \mu$. Dodatno obstaja še ena enolično določena funkcija $f \in L^1(\mu)$, da je $\lambda_a(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$.

Funkcija f se imenuje **Radon-Nikodymov odvod** mere λ_a po meri μ . Dostikrat zapisemo $f = \frac{d\lambda_a}{d\mu} \quad (\Leftrightarrow f d\mu = d\lambda_a)$

$$\Leftrightarrow \int_E f d\mu = \int_E d\lambda_a \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow \int_E f d\mu = \lambda_a(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Opomba: Naj bo sta μ in λ σ -končni pozitivni meri. Če je $\lambda \ll \mu$, potem $\exists f \geq 0$ merljiva, da je $\lambda(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$.

Opomba: Razcep $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ je **Lebesgueov razcep** mere.

$$d\lambda_a = f d\mu \rightarrow \text{Radon-Nikodymov izrek.}$$

Dokaz: Enoličnost: Recimo $\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda'_a + \lambda'_s$ za $\lambda, \lambda'_a, \lambda'_s$ komp. mere, da je $\lambda_a, \lambda'_a \ll \mu$, $\lambda_s, \lambda'_s \perp \mu$.

$$\underbrace{\lambda_a - \lambda'_a}_{\lambda_1} = \underbrace{\lambda'_s - \lambda_s}_{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_1 \ll \mu, \quad \lambda_2 \perp \mu$$

Ker $\lambda_1 = \lambda_2$, je $\lambda_1 \ll \mu$ in $\lambda_1 \perp \mu$, zato $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$
 $\Rightarrow \lambda_a = \lambda'_a$ in $\lambda_s = \lambda'_s$.

Če obstaja še en $\tilde{f} \in L^1(\mu)$, da je

$$\lambda_a(E) = \int_E \tilde{f} d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

$$\Rightarrow \lambda_a(E) = \int_E \tilde{f} d\mu = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A} \Rightarrow \int_E (\tilde{f} - f) d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Po prejšnji lemi je $\tilde{f} - f = 0$ s.p. na X.

Eksistenza: Dokaz prevedemo na pozitivne mere. Če je γ komp., potem $\gamma \ll \mu \Leftrightarrow \operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma \ll \mu$

$$\gamma \ll \mu \Leftrightarrow \operatorname{Re} \gamma, \operatorname{Im} \gamma \perp \mu$$

Če je γ realna, potem $\gamma \ll \mu \Leftrightarrow \gamma^+, \gamma^- \ll \mu$ in
 $\gamma \perp \mu \Leftrightarrow \gamma^+, \gamma^- \perp \mu$.

Zato se omejimo na primer, ko je λ pozitivna mera.

(λ realna \rightsquigarrow uporabimo L-R-N za λ^+, λ^- ; λ komp. \rightsquigarrow $\operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Im} \lambda$).

Brez škode za splošnost je λ pozitivna mera.

1. korak: μ je končna (pozitivna mera)

Definiramo $\mathcal{D} := \{g: X \rightarrow [0, \infty] \text{ merljiva, da je } \int_A g d\mu \leq \lambda(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}\}$.

Izkazuje se, da bo iskan tisti $g \in \mathcal{D}$, ki ima $\int_X g d\mu$ največji.

$$g_1, g_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow g := \max\{g_1, g_2\} \in \mathcal{D}$$

$$E := \{x \in X \mid g_1(x) \geq g_2(x)\}$$

$$\begin{aligned} \int_A g d\mu &= \int_{A \cap E} g d\mu + \int_{A \cap E^c} g d\mu \leq \int_{A \cap E} g_1 d\mu + \int_{A \cap E^c} g_2 d\mu \\ &\leq \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap E^c) = \lambda(A) \end{aligned}$$

Če je $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ in $g_n \nearrow g$, potem je po LMK za $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\int_A g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu \leq \lambda(A).$$

Definiramo $s := \sup \left\{ \int_X g d\mu \mid g \in D \right\}.$

Obstaja zaporedje funkcij $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$, da $\int_X g_n d\mu \rightarrow s$.

$$f_n := \max\{g_1, \dots, g_n\} \in D$$

$$f = \sup f_n \in D : s \geq \int_X f d\mu \geq \int_X f_n d\mu = \int_X g_n d\mu$$

Definiramo λ_a kot $\lambda_a(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$. Tako $\lambda_a \ll \mu$.

Definiramo $\lambda_s := \lambda - \lambda_a$.

$$\lambda_s \perp \mu$$

Če $\lambda_s \not\ll \mu$, potem $\exists \varepsilon > 0$ in $E \in \mathcal{A}$, da je $\mu(E) > 0$ in $\lambda_s \geq \varepsilon \mu$ na E (na (E, \mathcal{A}_E)).

$$\begin{aligned} \varepsilon \chi_E d\mu &\leq d\lambda_s = d\lambda - d\lambda_a = d\lambda - f d\mu \\ \Rightarrow (\varepsilon \chi_E + f) d\mu &\leq d\lambda \text{ na } (X, \mathcal{A}) \\ \Rightarrow \varepsilon \chi_E + f &\in D \text{ in } \int_X (\varepsilon \chi_E + f) d\mu = s + \mu(E) > s \quad \times \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_s \perp \lambda$$

2.korak: μ σ -končna $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \cap X_m = \emptyset$, $m \neq n$ in $\mu(X_n) < \infty$

Vporabimo ravnskar dokazano na nekem kosu X_n in nato dobljene mere in funkcije "seštejemo".

Zato je $f \in L^1(\mu)$:

$$\lambda_a(X) = \int_X f d\mu \leq \lambda(X) < \infty \quad (\text{z končnimi poz. meri})$$

