Delno urejene množice

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

3. april 2025

1 Osnovni pojmi

Definicija 1.1

Množica A skupaj z relacijo $\leq$ je *delna urejenost*, če je relacija $\leq$:

- refleksivna: $\forall a \in A.\ a \leq a$,
- tranzitivna: $\forall a, b, c \in A.\ a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$,
- antisimetrična: $\forall a, b \in A.\ a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$.

Primer. Naj bo X končna množica. Potem je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ delna urejenost.

Primer. Naj bo $X \subseteq \mathbb{N}$. Potem je $(X, |)$ delna urejenost.

Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost. Elementa $a, b \in A$ sta *primerljiva*, če velja $a \leq b$ ali $b \leq a$, sicer sta *neprimerljiva*. *Veriga* delne urejenosti je podmnožica, v kateri so vsi pari elementov primerljivi, *antiveriga* pa podmnožica v kateri so vsi pari elementov neprimerljivi.

Naj bosta $P = (A, \leq)$ in $P' = (A', \leq')$ delni urejenosti. Preslikava $\varphi\colon A \to A'$ je *izomorfizem* delnih urejenosti, če je bijekcija in velja

$$a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq' \varphi(b).$$

Naloga 1.1. Pokažite, da delni urejenosti $(\mathbb{N}, \leq)$ in $(\mathbb{Z}, \leq)$ nista izomorfni.

Delna urejenost je *linearna urejenost*, če je strogo sovisna: $\forall x, y \in A.\ x \leq y \vee y \leq x$.

Naloga 1.2. Naj bo $(A, \leq)$ linearna urejenost, kjer je $|A| = n$. Dokažite izomorfnost $(A, \leq)$ in $([n], \leq)$.[1]

Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je $L = (A, \leq')$ *linearna razširitev* od P, če je L linearna urejenost in velja $a \leq b \Rightarrow a \leq' b$.

Naloga 1.3. Naj bosta p in q različni praštevili, n naravno število in A množica deliteljev števila $p^{n-1}q$. Koliko linearnih razširitev ima delna urejenost $(A, |)$?

[1] Oznaka: $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

Naloga 1.4. Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost, ki ni linearna. Naj bosta x in y neprimerljiva elementa. Dokažite, da obstaja takšna linearna razširitev $L = (A, \leq')$, da velja $x \leq' y$.

2 Dilworthov in Spernerjev izrek

Naloga 2.1. Naj bo P končna delna urejenost, v kateri je najdaljša veriga dolžine m. Dokažite, da lahko elemente v P pokrijemo z m antiverigami.

Izrek 2.1: Dilworth

Najmanjše število (disjunktnih) verig, s katerimi lahko pokrijemo vse elemente končne delne urejenosti, je enako velikosti največje antiverige.

Naloga 2.2. Naj bo n naravno število in S množica $n^2 + 1$ naravnih števil z lastnostjo, da vsaka $(n + 1)$-elementna podmnožica S vsebuje dve števili, od katerih je eno deljivo z drugim. Dokažite, da množica S vsebuje $n + 1$ različnih števil $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, tako da velja $a_i \mid a_{i+1}$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$.

Izrek 2.2: Sperner

Velikost največje antiverige v $(\mathcal{P}([n]), \subseteq)$ je natanko $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Naloga 2.3. Naj bo $N = p_1 p_2 \cdots p_n$, kjer so p_i različna praštevila. Pokažite, da ima N kvečjemu $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ deliteljev, med katerimi nobeden ne deli drugega.

Naloga 2.4. Dana so realna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ki so vsa večja ali enaka 1. Pokažite, da tedaj obstaja kvečjemu $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ vsot oblike $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, ki so po absolutni vrednosti manjše od 1.

3 Dodatni naloge

Naloga 3.1. Naj bosta m in n naravni števili ter S podmnožica množice $\{1, 2, \ldots, 2^m n\}$ z $(2^m - 1)n + 1$ elementi. Dokažite, da S vsebuje $m+1$ takšnih različnih števil $a_0, a_1, \ldots, a_m$, da velja $a_{k-1} \mid a_k$ za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Naloga 3.2. Naj bo k pozitivno celo število in S končna družina intervalov na realni premici. Predpostavimo, da ima vsaka množica $k + 1$ teh intervalov vsaj dva intervala z neničnim presekom. Dokažite, da obstaja množica k točk na realni premici, ki seka vsak interval iz S.