Teorija mere

Predavatelj: Marko Kandić

1. oktober 2025

Teorija mere ≈ realna analiza
ta predmet

1. MERE

1.1. σ-algebre

Naj bo X neprazna množica. Družina podmnožic $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je σ-algebra, če velja:

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Če namesto iii) zahtevamo iii'):

iii') $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$,

potem je $\mathcal{A}$ algebra.

Če je $\mathcal{A}$ σ-algebra, potem je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor.

Elementi $\mathcal{A}$ so merljive množice.

Opomba: i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Vsaka σ-algebra je algebra.

iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{cc} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$$

Primeri: i) X, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ ← trivialna σ-algebra

$(X, \mathcal{A})$ je trivialni merljiv prostor

ii) $(X, \mathcal{P}(X))$, $\mathcal{P}(X)$ potenčna σ-algebra

iii) X, $\mathcal{A} = \{E \subseteq X \mid E$ števna ali E^c števna$\}$

povezana s topologijo končnih komplementov

Če je X neštevna, je $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$.

Trditev: Naj bo B družina podmnožic množice X. Tedaj obstaja najmanjša σ-algebra na X, ki vsebuje B. Ta je enaka preseku vseh σ-algeber, ki B vsebujejo.

Oznaka: σ-algebro iz trditve označimo z $\sigma(B)$.

Dokaz: $\mathcal{C} := \{$vse σ-algebre, ki vsebujejo $B\}$

$$\mathcal{P}(X) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \neq \emptyset$$

Presek vseh σ-alg iz $\mathcal{C}$ je σ-algebra. (očitno)
Po definiciji mora biti najmanjša.

Borelove množice

(X, τ) topološki prostor

$\sigma(\tau)$ je Borelova σ-algebra; σ-algebra generirana z vsemi odprtimi množicami

Ker je $A = (A^c)^c$, je $\sigma(\tau)$ generirana z zaprtimi množicami. Namesto $\sigma(\tau)$ pišemo $\mathcal{B}(X)$ ali $\mathcal{B}_X$.

$A \in \mathcal{B}(X)$ je

- F_σ množica, če je števna unija zaprtih množic
- G_δ množica, če je števen presek odprtih množic

Primer:
$$[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \tfrac{1}{n}]$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \tfrac{1}{n}, b)$$

Trditev: $A \in \mathbb{R}^n$

i) A zaprta $\Rightarrow$ A je G_σ

ii) A odprta $\Rightarrow$ A je F_σ

Brez dokaza. Enostaven.

Trditev: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je generirana s katerokoli od spodnjih družin generatorjev:

i) $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$

ii) $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] \mid a < b\}$

iii) $\mathcal{E}_3 = \{[a, b) \mid a < b\}$

iv) $\mathcal{E}_4 = \{(a, b] \mid a < b\}$

v) $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$

vi) $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$

vii) $\mathcal{E}_7 = \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$

viii) $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$

Dokaz: i) $\mathcal{E}_1 \subseteq \tau \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ker je neka odprta mn. števna unija odprtih odprtih int., je $\tau \subseteq \delta(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \underbrace{\sigma(\tau)}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$

ii) Ker je vsak (a,b) št. unija zaprtih int oblike $[a, b)$, je $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.2. Pozitivne mere

7. oktober 2025

Definicija: Pozitivna mera (ali zaenkrat samo mere) je preslikava $\mu : \mathcal{A} : [0, \infty]$, ki ima naslednje lastnosti

σ-algebra

zaprt interval

razširitev realne osi z največjim elementom

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A_1, A_2, \dots$ paroma disjunktne iz $\mathcal{A}$, potem je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_n)$$

ii) se imenuje števna ali σ-aditivnost.

$(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor z mero oz. merljiv prostor oz. prostor z mero

Če vzamemo $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots$, potem dobimo končno aditivnost

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Primeri:

i) $X \neq \emptyset,\ x \in X \qquad (X, \mathcal{P}(X)$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

μ je mera, označimo jo z δ_x ... Diracova mera

ii) $X \neq \emptyset; \quad (X, \mathcal{P}(X))$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|; & |A| < \infty \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$ mera štetja točk

iii) Naj bo X neštevna in

$$\mathcal{A} = \{ A \subseteq X \mid A \text{ števna ali } A^c \text{ števna} \}$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ števna} \\ 1; & A^c \text{ steven} \end{cases}$$ je mera.

Dokaz na vajah.

iv) X neskončna mn.

$$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

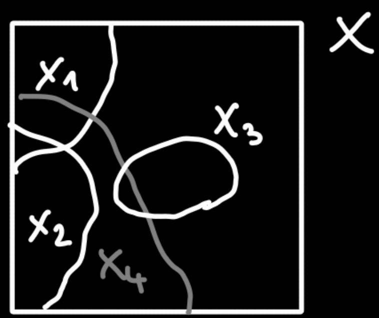
$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ števna} \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$

ni števno aditivna, je končno aditivna.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: Mera μ je **končna**, če je $\mu(X) < \infty$.

Mera μ je **σ-končna**, če

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n \quad \text{in} \quad \mu(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



V definiciji σ-končnosti lahko ekvivalentno zahtevamo

i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so paroma disj., z unijo X

ii) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je naraščajoče z unijo X

UPORABNO

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spl. $\rightsquigarrow X_1,\ X_1 \cup X_2,\ X_1 \cup X_2 \cup X_3, \dots$

iz splošnega zaporedja dobimo naraščajoče zaporedje

$\rightsquigarrow X_1,\ X_2 \setminus X_1,\ X_3 \setminus (X_2 \cup X_1), \dots$

št. unija paroma disjunktnih

<u>Lema</u>: Naj bo $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ končno aditivna funkcija na algebri $\mathcal{A}$. Tedaj velja:

$$A, B \in \mathcal{A} \text{ in } A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$ MONOTONOST

Dokaz: $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A) \qquad \blacksquare$$

Trditev: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Tedaj za $\forall$ zap. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: $B_1 := A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$
Tedaj so $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne iz $\mathcal{A}$.

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} B_j \quad \text{in} \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad \blacksquare$$

Trditev: Naj bo $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ končno aditivna funkcija, kjer je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Tedaj je μ mera $\Leftrightarrow$ $\forall$ naraščajoče zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih množic velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: $(\Rightarrow)$: Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje v $\mathcal{A}$.

$$B_1 := A_1, \; B_2 := A_2 \setminus A_1, \; B_3 := A_3 \setminus A_2, \dots$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(B_n)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \cdots + \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \right)$$

$\forall j .\ \mu(A_j) < \infty$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\mu(A_1) + \left(\mu(A_2) - \mu(A_1)\right) + \cdots + \left(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\right)\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

Če je $\mu(A_j) = \infty$, potem je $\mu(A_k) = \infty$ $\forall k \geq j$ in zaradi monotonosti mere velja enačaj v trditvi.

($\Leftarrow$): Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje paroma disjunktnih množic v $\mathcal{A}$.

$B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ Tedaj je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče v $\mathcal{A}$.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

$\blacksquare$

Trditev: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje mn. v $\mathcal{A}$. Če je $\mu(A_1) < \infty$, potem

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: Ker $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče je $(A_1 \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c) = A_1 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right) \overset{\text{prejšnja trditev}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n)$$

$\mu(A_1) < \infty$

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A_1) - \mu(A_n)\right)$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$ ▨

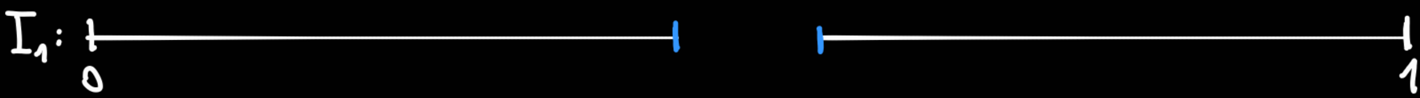
<u>Primer:</u> $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ šteje točke

$$A_n = \{n, n+1, \dots\}, \quad \mu(A_n) = \infty$$

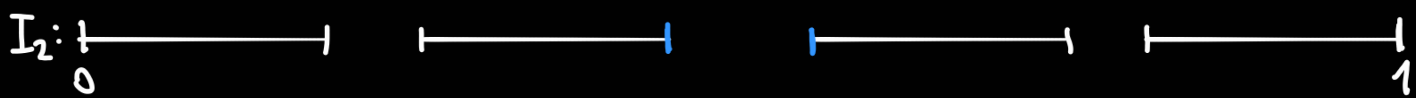
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

Ta primer pokaže, da prejšnja trditev ne velja nujno, če je $\mu(A_1) = \infty$.

<u>Primer:</u> Oglejmo si konstrukcijo posplošene Cantorjeve množice.



I_1: Izrežemo α_1-ti delež okoli $1/2$ za $0 < \alpha_1 < 1$.
I_2 dobimo tako, da od vsakega intervala iz I_1 izrežemo centralni interval deleža α_2 za $0 < \alpha_2 < 1$.



Postopek nadaljujemo. Dobimo množico I_n, ki je unija 2^n intervalov intervalov iste dolžine. Za $0 < \alpha_{n+1} < 1$ iz vsakega od teh intervalov izrežemo centralni interval deleža α_{n+1}. Če $1/3 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots$ dobimo Cantorjevo množico. Sicer v preseku $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ dobimo posplošeno Cantorjevo množico.

Zaenkrat predpostavimo obstoj Lebesgueove mere, ki se na intervalih ujema z njihovo dolžino.

$$m(I_0) = 1$$
$$m(I_1) = m(I_0) - m(I_0)\alpha = m(I_0)(1-\alpha_1) = 1-\alpha_1$$
$$m(I_2) = m(I_1)(1-\alpha_2) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$$
$$m(I_3) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)$$
$$\vdots$$
$$m(I_n) = \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)$$

Po prejšnji trditvi je

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(I_n) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k)$$

V primeru Cantorjeve množice je $1/3 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots$, zato je $m(C) = \prod_{k=1}^{\infty} 2/3 = 0$.

Izrek: Posplošena Cantorjeva množica je metrizabilen kompakten nikjer gost povsem nepovezan prostor brez izoliranih točk z mero $\prod_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k)$. To je lahko $> 1-\varepsilon$, ampak nikjer gosto!

Trditev: Posplošena Cantorjeva množica ima pozitivno mero $\iff \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ konvergira.

8. oktober 2025

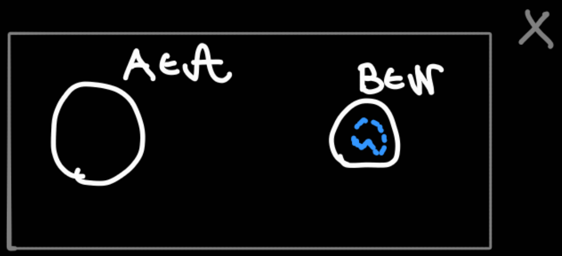
1.3. Napolnitev prostora z mero

Definicija: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. $A \in \mathcal{A}$ je μ-ničelna, če je $\mu(A) = 0$.

Označimo $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = 0\}$.

Lema: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}$

Dokaz: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$



Definicija: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je poln, če $\forall N \in \mathcal{N}$ in $B \subseteq N$ sledi $B \in \mathcal{A}$.

Izrek: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Naj bo

$$\bar{\mathcal{A}} := \{A \cup S \mid A \in \mathcal{A},\ \exists N \in \mathcal{N}.\ S \subseteq N\}.$$

Tedaj je $\bar{\mathcal{A}}$ σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Če za $A \cup S \in \bar{\mathcal{A}}$ definiramo $\bar{\mu}(A \cup S) := \mu(A)$ potem je $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ poln merljiv prostor.

Dokaz: $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$

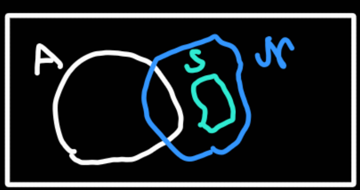
$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = A \cup \emptyset$

$\bar{\mathcal{A}}$ je σ-algebra

i) $X \in \bar{\mathcal{A}}$, ker $X = X \cup \emptyset$

ii) $A \cup S \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow (A \cup S)^c \in \bar{\mathcal{A}}$

$\exists N \in \mathcal{N}.\ S \subseteq N$



$$(A \cup S)^c = A^c \cap S^c = A^c \cap (N^c \cup N \setminus S) = \underbrace{(A^c \cap N^c)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(A^c \cap N \setminus S)}_{\subseteq N \in \mathcal{N}}$$

iii) $A_n \cup S_n \in \overline{\mathcal{A}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) \in \overline{\mathcal{A}}$

$\forall n \in \mathbb{N}.\ N_n \in \mathcal{N}.\ S_n \subseteq N_n$

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup S_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}$

$\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \longrightarrow [0, \infty]$ je dobro definirana pozitivna mera

$E \in \overline{\mathcal{A}}; \quad E = A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2$

$S_1 \subseteq N_1 \in \mathcal{N}, \quad S_2 \subseteq N_2 \in \mathcal{N}$

$\Rightarrow \overline{\mu}(A_1) = \overline{\mu}(A_2)$

$A_1 \subseteq A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2 \subseteq A_2 \cup N_2$

$\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup N_2) \leq \mu(A_2) + \mu(N_2) = \mu(A_2)$

Podobno $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$.

$\overline{\mu}$ je mera:

- $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

Naj bo $(A_n \cup S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disj. zap. mn. v $\overline{\mathcal{A}}$

$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n)\right) = \overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_n\right)$

$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n \cup S_n)$

$(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ je poln

$\overline{\mu}(N) = 0, \quad S \subseteq N \Rightarrow S \in \overline{\mathcal{A}}$

$N = A \cup \tilde{S}; \quad A \in \overline{\mathcal{A}}, \quad \tilde{S} \subseteq \tilde{N} \in \mathcal{N}$

Po definiciji je $\underset{\mu(A)}{\overset{\bar{\mu}(N)=0}{\shortparallel}} \Rightarrow A \in \mathcal{N}$

$S = \emptyset \cup S$; $S \subseteq N \subseteq A \cup \tilde{N} \in \mathcal{N}$ $\blacksquare$

<u>Primer</u>: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Izkaže se $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$. (Brez dokaza.)

Če je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ polna, potem so vse podmnožice Cantorjeve množice merljive. Ker $|C| = |\mathbb{R}|$, bi bilo $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}}$ $\times$

Torej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ ni poln prostor.

Napolnitev je Lebesgueova σ-algebra.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}} \\ \text{Ker } \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{, je } |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \leq 2^{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| = 2^{\mathbb{R}}$$

Imamo $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

prava vsebovanost?

<u>Primer</u>: Pokazali bomo, da na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ pod privzetkom aksioma izbire ne obstaja translacijsko invariantna mera.

μ je translacijsko invariantna, če za $\forall A$ velja $\mu(A+x) = \mu(A)$. $A+x := \{a+x \mid a \in A\}$.

Na $\mathbb{R}$ vpeljemo relacijo $\sim$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ razpade na ekvivalenčne razrede

14. oktober 2025

$\mathbb{R}/_\sim$ kvocientni prostor

Skonstruirali bomo tako množico, ki bo preprečila obstoj translacijsko inv. mere na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Sledilo bo, da obstaja Lebesgueva nemerljiva mn.

$\forall x \in [-1,1]$ izberemo predstavnika ekv. razreda $[x]$, ki leži v $[-1,1]$. Tukaj uporabimo aksiom izbire. Naj bo S množica vseh ravnokar izbranih predstavnikov. Velja $S \subseteq [-1,1]$.

Def. $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q} \cap [-2,2]$.

Def. $\mathcal{F} = \{r + S \mid r \in \mathbb{Q}_1\}$ ← števna množica

Velja: i) $(r+S) \cap (r'+S) = \emptyset$ za $r \neq r'$

$$r+s = r'+s' \Rightarrow s'-s = r-r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow s' \sim s \quad \times$$

ii) $[-1,1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r+S)$

$x \in [-1,1]$. $\exists s \in S \subseteq [-1,1]$, da je $x \sim s$

$q := x - s \in \mathbb{Q}$

$|q| \leq |x| + |s| \leq 2 \quad \Rightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (r+s)$

Velja $[-1,1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r+S) \subseteq [-3,3]$.

Če bi obstajala transl. inv. mera na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ki se na intervalih ujema z dolžino, potem bi veljalo

$$2 \leq \mu\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r+S)\Big) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(r+S) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(S) \leq 6 \quad \times$$

Kasneje bomo skonstruirali Leb. mero, ki je definirana na Leb. σ-algebri. Ta je zaprta za translacijo, Leb. mera pa je transl. invariantna. Zato S ni Leb. merljiva.

1.4. Zunanja mera

Zunanja mera na množici X je funkcija $\xi : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$, za katero velja:

vedno def. na $\mathcal{P}(X)$

i) $\xi(\emptyset) = 0$

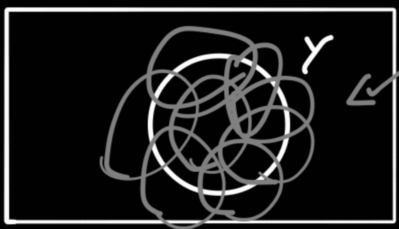
ii) $\xi(A) \leq \xi(B) \quad \forall A \subseteq B$

iii) $\xi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n)$ $\quad \xi(A \cup (B \setminus A)) \leq$

Trditev: Naj bo S družina podmnožic neprazne množice X, ki vsebuje $\emptyset$ in X. Naj bo $\mu: S \longrightarrow [0,\infty]$ funkcija za katero velja $\mu(\emptyset)$. Definiramo $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ s predpisom

$$\mu^*(Y) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \mid (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq S \text{ pokritje za } X \right\}.$$

Tedaj je μ^* zunanja mera.



pokritje z množicami iz S

Dokaz: i) $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

ii) $A \subseteq B$. neko pokritje za B je pokritje za A
$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

iii) Neenakost drži, če je $\mu^*(A_n) = \infty$ za neh $n \in \mathbb{N}$.
Predpostavimo, da je $\mu^*(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\varepsilon > 0$. Za $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ pokritje $(A_{n_j})_j$ za A_n, da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{n_j}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$$

$\Rightarrow (A_{n_j})_{n,j\in\mathbb{N}}$ je pokritje za $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

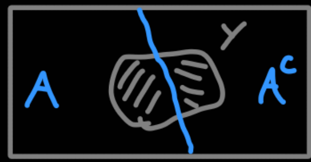
$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{n_j}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* + \varepsilon$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, dobimo števno subaditivnost. $\blacksquare$

Definicija: Naj bo ξ zunanja mera na $\mathcal{P}(X)$. Množica $A \subseteq X$ je **zunanje merljiva** oziroma **ξ-merljiva**, če je

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c)$$



za vsak $Y \subseteq X$.

Da preverimo $\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(X \cap A^c)$, moramo preveriti $\leq$ in $\geq$. $\leq$ sledi iz (iii) def. zunanje mere. Zato zadostuje preveriti:

$$\xi(Y) \geq \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c). \qquad (*)$$

Če $\xi(Y) = \infty$, potem $(*)$ velja, sicer moramo preveriti.

Carathéodoryjev izrek: Naj bo ξ zunanja mera na X. Tedaj je

$$\mathcal{A}_\xi = \{A \subseteq X \mid A \text{ je } \xi\text{-merljiva}\}$$

σ-algebra, trojica $(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$ pa je poln merljiv prostor.

Dokaz: $\mathcal{A}_\xi$ je σ-algebra

i) $Y \subseteq X \Rightarrow \xi(Y) \overset{?}{=} \xi(Y \cap \emptyset) + \xi(Y \cap \emptyset^c) = 0 + \xi(Y)$.
$\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_\xi$

ii) $\xi(Y) = \xi(Y \cap A^c) + \xi(\underbrace{Y \cap A^{cc}}_{Y \cap A}) \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\xi$

Najprej bomo dokazali, da je $\mathcal{A}_\xi$ zaprta za končne unije, torej algebra, zaprtost za števne unije pa bomo dokazali hkrati s števno aditivnostjo $\xi|_{\mathcal{A}_\xi}$ za števne disjunktne družine množic.

$A, B \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\xi$

$\xi((A \cup B) \cap Y) + \xi((A \cup B)^c \cap Y) = \xi((A \cup B \setminus A) \cap Y) + \xi((A \cup B \setminus A)^c \cap Y)$

$$= \xi(A\cap Y \cup B\cap A^c\cap Y) + \xi(A^c\cap B^c \cap Y)$$
$$\leq \xi(A\cap Y) + \xi(B\cap \underline{A^c\cap Y}) + \xi(B^c \cap \underline{A^c\cap Y})$$
$$\underset{B\in\mathcal{A}_\xi}{=} \xi(A\cap Y) + \xi(A^c\cap Y) \underset{A\in\mathcal{A}_\xi}{=} \xi(Y).$$

$\Rightarrow \mathcal{A}_\xi$ je algebra.

Naj bodo $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi$

$$A_1 = A_1,\quad A_1\cup A_2 = A_1 \cup (A_2\setminus A_1)$$
$$A_1\cup A_2\cup A_3 = A_1 \cup (A_2\setminus A_1)\cup (A_3\setminus (A_1\cup A_2))$$

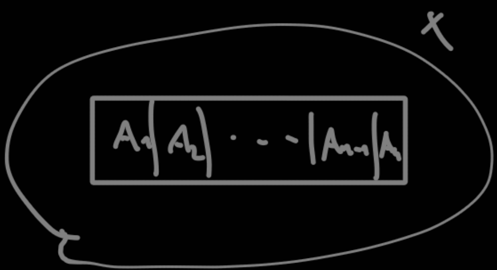
Dokazali bomo, da je $\mathcal{A}_\xi$ zaprta za števne disjunktne unije in ker je $\mathcal{A}_\xi$ algebra, bo sledilo, da je $\mathcal{A}_\xi$ σ-algebra.

Naj bodo $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktne mn. iz $\mathcal{A}_\xi$.

$$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi \quad \text{in} \quad \xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$$B_n := \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}_\xi$$

$$Y\subseteq X \Rightarrow \xi(Y\cap B_n) = \xi(Y\cap B_n\cap A_n) + \xi(Y\cap B_n\cap A_n^c)$$



$$= \xi(Y\cap A_n) + \xi(Y\cap B_{n-1})$$
$$= \ldots = \sum_{j=1}^{n} \xi(Y\cap A_j)$$

$$Y = B_n \Rightarrow \xi(B_n) = \sum_{j=1}^{n} \xi(A_j)$$

$\Rightarrow \xi$ je končno aditivna na $\mathcal{A}_\xi$

$$\xi(B) \geq \xi(B_n) = \sum_{j=1}^{n} \xi(A_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$\Rightarrow \xi(B) \geq \sum_{j=1}^{n} \xi(A_j)$ Ker ξ števno subaditivna, je

$$\xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$B \in \mathcal{A}_\xi$

$$\begin{aligned}
\xi(Y) &= \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c) \\
&\geq \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi(Y \cap A_j) + \xi(Y \cap B^c) \\
&\geq \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c).
\end{aligned}$$

Ker je ξ št. subaditivna je $\xi(Y) = \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c)$.
$\Rightarrow B \in \mathcal{A}_\xi$.

$(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$ je poln merljiv prostor

$M \in \mathcal{A}_\xi$ in $\xi(M) = 0$, $N \subseteq M$

$Y \subseteq X$. $\quad \underbrace{\xi(Y \cap N)}_{0} + \xi(Y \cap N^c) = \xi(Y \cap N^c) \underset{\text{monotonost}}{\leq} \xi(Y)$

$$\xi(Y) \underset{\text{subaditivnost}}{\leq} \xi(Y \cap N) + \xi(Y \cup N^c)$$

$\blacksquare$

1.5. Mere na algebri:

Mera na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je preslikava $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, za katero velja:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A_1, A_2, \ldots$ paroma dij. v $\mathcal{A}$ in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, potem

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Izrek: Naj bo μ mera na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Za $Y \subseteq X$ definiramo zunanjo mero

$$\mu^*(Y) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ je pokritje za } Y \right\}.$$

Tedaj je $\mu^*(A) = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Dokaz: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \cdots = \mu(A)$$

$\mu(A) \leq \mu^*(A)$

Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pokritje za A z množicami iz $\mathcal{A}$.

$B_1 = A \cap A_1$, $B_2 = A \cap (A_2 \setminus A_1)$, $B_3 = A \cap (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))$, ...

$B_i \cap B_j \neq \emptyset$ za $i \neq j$ in

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j = \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cap A \qquad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A$$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

To velja za vsako pokritje $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$, zato tudi v infinimumu dobimo isti neenačaj $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.

$\underline{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}}$ 15. oktober 2025

$A \in \mathcal{A}$ in $Y \subseteq X$. Da je $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ moramo preveriti, da je $\mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) \overset{=}{\underset{(*)}{}} \mu^*(Y)$ $\forall Y \subseteq X.\ \mu^*(Y) < \infty$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Po definiciji zunanje mere obstaja tako pokritje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ za Y, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Y) + \varepsilon.$$

Po definiciji zunanje mere velja

$$\mu^*(A \cap Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \text{ in } \mu^*(A^c \cap Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n).$$

$$\Rightarrow \mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(A \cap A_n) + \mu(A^c \cap A_n)\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu((A \cap A_n) \cup (A^c \cap A_n))$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^* + \varepsilon.$$

Pošljimo $\varepsilon \to 0$ in dobimo $(*)$. ▨

<u>Nekaj oznak:</u> $\mathcal{A}$ je algebra, μ_0 je mera na algebri, $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, $\mu := \mu_0^*|_{\mathcal{A}_{\mu_0^*}}$.
σ-algebra

Izrek: Naj bodo $\mathcal{A}, \mu_0, \mu_0^*, \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ in μ kot zgoraj.

i) Naj bo ν mera na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, ki razširja μ_0. Tedaj velja $\nu(A) \leq \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$.

ii) Če je $\mu(A) < \infty$, potem je $\nu(A) = \mu(A)$ za vsako razširitev mere μ_0.

iii) Če je μ_0 σ-končna mera na algebri, potem je μ enolično določena razširitev mere μ_0 do mere na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$.

<u>Dokaz</u>: i) Naj bo ν mera na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, ki razširja μ_0. Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pokritje za $A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ z množicami iz $\mathcal{A}$. Tedaj je

$$\nu(A) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Naredimo inf. po vseh pokritjih in po definiciji dobimo:

$$\nu(A) \leq \mu_0^*(A) = \mu(A).$$

ii) Naj bo $A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ in $\mu(A) < \infty$. Izberimo $\varepsilon > 0$ in poiščimo pokritje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za A z množicami iz $\mathcal{A}$, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu_0(A_n)}_{\mu(A_n)} < \underbrace{\mu_0^*(A)}_{\mu(A)} + \varepsilon.$$

$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\quad \nu(B) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$

$$\mu|_{\mathcal{A}} = \nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0 \longrightarrow = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$= \mu(B)$$

Ker je μ mera, je $\mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(A)$$

$$< \varepsilon$$

$$\mu(A) \leq \mu(B) = \nu(B)$$

$$= \nu(A) + \nu(B \setminus A)$$
$$\leq \nu(A) + \mu(B \setminus A)$$
$$< \nu(A) + \varepsilon$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, je $\mu(A) \leq \nu(A)$

iii) Naj bo μ_0 σ-končna, to pomeni

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad \underbrace{\mu_0(A_n)}_{\mu_0^*(A_n) = \mu(A_n)} < \infty$$

$$A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*} \Rightarrow A = A \cap X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$$

BŠS izberimo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne.

$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \overset{ii)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap A_n) = \nu(A) \quad \blacksquare$$

1.6. polmere in polalgebre

Definicija: **Polalgebra** je množica $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ki zadošča:
i) $\emptyset \in \mathcal{S}$.
ii) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$.
iii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^c$ je končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{S}$.

Primer: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{[a,b), (-\infty, b), [a, \infty) \mid a, b \in \mathbb{R}, a<b\} \cup \{\emptyset\}$
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je polalgebra (enostavno preveriti)

Definicija: Naj bo $\mathcal{S}$ polalgebra in $\mu: \mathcal{S} \to [0, \infty]$ preslikava. μ je **polmera**, če velja:
i) $\mu(\emptyset) = 0$
ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne in je $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$, potem je

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

iii) Če so $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne in je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, potem je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

21. oktober 2025

Trditev: Naj bo S polalgebra na množici X. Tedaj je algebra generirana z S, enaka družini vseh končnih disjunktnih unij iz S.

Simbolično: $\mathcal{S}$ ... polalgebra

$\mathcal{A} = \{A_1 \cup \cdots \cup A_n \mid n \in \mathbb{N}, A_i \in S \text{ paroma disjunktne}\}$

Dokaz: $\mathcal{A}$ je algebra, ki očitno vsebuje $\mathcal{S}$.

Po definiciji bo $\mathcal{A}$ vsebovala, algebro generirano z $\mathcal{S}$, zgornji opis pa pove tudi, da bo $\mathcal{A}$ vsebovana v algebri generirani s $\mathcal{S}$.

$\mathcal{A}$ je algebra

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ polagebra) ✓

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}^c$

iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Dokazali bomo iii) za končne preseke in nato še ii) "Nova" (ii) in (iii) sta skupaj ekvivalentna (ii)+(iii) zaradi de Morganovega pravila.

iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

$A = A_1 \cup \cdots \cup A_m, \quad i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n \quad i \neq j \quad B_i \cap B_j \neq \emptyset$

$\Rightarrow A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} A_i \cap B_j$

$\Rightarrow A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$, saj je $\mathcal{S}$ polalgebra in

$(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = (A_i \cap B_k) \cap (B_j \cap B_l)$

Če je $i \neq k$ ali $j \neq l$, je to prazen presek.

$\Rightarrow A \cap B$ je končna unija paroma disjunktnih $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$; $A_i \in \mathcal{S}$ paroma disj.

$A^c = \bigcap_{i=1}^{m} A_i^c$

Ker je A_i^c po def $\mathcal{A}$ in aks. za algebro v $\mathcal{A}$, je $A^c \in \mathcal{A}$ po iii). ▨

Trditev: Naj bo $\mathcal{S}$ polalgebra na mn. X in naj bo μ polmera na $\mathcal{S}$. Tedaj obstaja natanko ena razširitev μ do mere $\tilde{\mu}$ na algebri generirani s $\mathcal{S}$.

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ paroma disj., da je

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \mu(\tilde{A}) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Dokaz: vaje

Opomba: Točka iii) v def. polmere na polalgebri pravi:
$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ paroma disj. in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (*)$$

Ker se polmera na polalgebri razširi do mere na algebri, gen. z $\mathcal{S}$ je v $(*)$ enačaj.

1.7. Lebegue-Stieltjesove mere

Naj bo X topološki prostor. Mera je Borelova, če je definirana na Borelovi σ-algebri $\mathcal{B}(X)$.

Trditev: Naj bo μ Borelova mera na $\mathbb{R}$, ki je končna na vseh omejenih Borelovih množicah realne osi.
Def: $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu([0,\infty)); & x > 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ -\mu([x,0)); & x < 0 \end{cases}$$

Tedaj je F_μ naraščajoča in levozvezna.

i) $a<b \Rightarrow \mu([a,b)) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$

ii) Če je μ končna, potem je

$$F = F_\mu + \mu((-\infty,0)),$$

kjer je $F(x) = \mu(-\infty, x)$.

Dokaz: F_μ naraščajoča, saj je μ monotona

Dokažimo, da je F_μ levozvezna. Naj bo

$$x>0. \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty), \text{ da } x_n \nearrow x$$

$$F_\mu(x) = \mu([0,\infty)) = \lim_{n\to\infty} \mu([0,\infty)) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n).$$

Primera $x \leq 0$ se lotimo na podoben način.

i) $0<a<b$: $\mu([a,b)) = \mu([0,b) \setminus [0,a))$

$$= \mu([0,b)) - \mu([0,a))$$

$$= F_\mu(b) - F_\mu(a)$$

Podobno v ostalih primerih.

ii) $F(x)=\mu((-\infty,x)) = \mu((-\infty,0)\cup(0,x))$

$$= \mu((-\infty,0)) + F_\mu(x). \qquad \blacksquare$$

Cilj je dokazati obratno trditev: Vsaka naraščajoča levozvezna funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ porodi Borelovo mero. Naj bo torej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ naraščajoča levozvezna.
Tedaj obstajata

$$f(\infty):=\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{in} \quad f(-\infty):=\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Na polalgebri $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vseh intervalov oblike $[a,b)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$ in $\emptyset$ definiramo preslikavo μ_f s predpisom:

$$\mu_f(\emptyset):=0$$
$$\mu_f([a,b)):=f(a)-f(b)$$
$$\mu_f([a,\infty)):=f(\infty)-f(a)$$
$$\mu_f((-\infty,b):=f(b)-f(-\infty)$$

<u>Izrek</u> [Lebesgue-Stieltjes]: μ_f je polmera na polalgebri $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

<u>Dokaz</u>: (i): Po definiciji je $\mu_f(\emptyset)=0$.

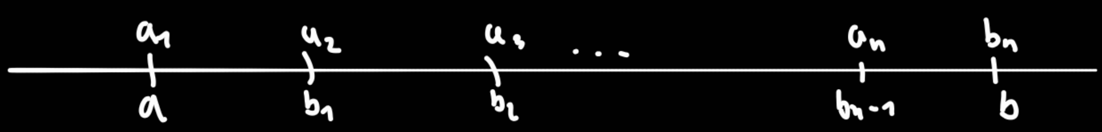
(ii) Naj bo $[a,b)$ končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{S}$:

$$[a,b)=\bigcup_{i=1}^{n}[a_j,b_j) \,; \qquad [a_j,b_j) \text{ so paroma disj.}$$

intervali so urejeni tako, da se nadaljujejo

$$\mu_f([a,b)) = \mu_f\Big(\bigcup_{i=1}^{n}[a_j,b_j)\Big).$$

$$F(b)-F(a) \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n}\big(f(b_j)-f(a_j)\big) = f(a_1)-f(b_n) = f(a)-f(b_n)$$



Na podoben način preverimo $[a,\infty)$ in $(-\infty,b)$. DN

(iii): Preverimo števno subaditivnost za μ_f.

Naj bo interval $I \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ števna disj. unija intervalov I_m iz $\mathcal{J}(\mathbb{R})$.

$$\mu_f(I) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu_f(I_m)$$

1. primer: $I=[a,b) \Rightarrow I_m=[a_m,b_m)$.
Izberimo $\varepsilon>0$. Ker je f levo zvezna, obstaja $c<b$ in $c_j<a_j$, da je $f(c)>f(b)-\varepsilon/2$ in $f(c_j)>f(a_j)-\frac{\varepsilon}{2\cdot 2^j}$

Kompaktni interval $[a,c]$ pokrijemo z odprtimi intervali $\{(c_j,b_j) \mid j\in\mathbb{N}\}$. Obstaja končno podpokritje.

Točka a je vsebovana v nekem (c_j,b_j). BŠS $a\in(c_1,b_1)$

Če je $b_1>c$, potem je $[a,c]\subseteq(c_1,b_1)$, sicer imamo BŠS $b_1\in(c_2,b_2)$

Če je $b_2>c$, potem je $[a,c]\subseteq(c_1,b_1)\cup(c_2,b_2)$, sicer

Postopek nadaljujemo. Po končno korakih (po preštevilčenju), dobimo intervale $(c_1,b_1),(c_2,b_2),\dots,(c_n,b_n)$, da je $c_1<a$, $c_{j+1}<b_j$ za $j=1,\dots,n-1$, $b_n>c$

$$\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\big(f(b_m)-f(a_m)\big)}_{\text{indeksi na začetku}} \geq \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\big(f(b_j)-f(a_j)\big)}_{\text{indeksi po preimenovanju}}$$

$$\geq \left(\sum_{j=1}^{n} f(b_j)-f(c_j)\right) - \varepsilon/2$$

$$= -f(c_1) + \left(\sum_{j=2}^{n-1} \underbrace{\big(f(b_j)-f(c_{j-1})\big)}_{\geq 0}\right) + f(b_n) - \varepsilon/2$$

$$\geq -f(a) + 0 + f(c) - \varepsilon/2$$

$$> -f(a) + \big(f(b) - \varepsilon/2\big) - \varepsilon/2$$

$$= f(b) - f(a) - \varepsilon$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, je

$$\sum_{m=1}^{\infty}\big(f(b_m)-f(a_m)\big) \geq f(b) - f(a)$$

<u>2. primer</u>: $[a,\infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j)$

$$f(\infty) - f(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\big(f(b_j)-f(a_j)\big)$$

Za $n \in \mathbb{N}$: $[a,n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, \min\{n, b_j\})$

Po prejšnjem primeru velja:

$$f(n) - f(a) = \sum_{j=1}^{\infty}\big(f(\min\{b_j, n\}) - f(a_j)\big)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} f(\infty) - f(a)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}\big(f(b_j) - f(a_j)\big).$$

Ostali primeri DN. $\blacksquare$

Na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ imamo polmero μ_f:

$\mu_f(\emptyset) = 0$, $\mu_f([a,b)) = f(a) - f(b)$, $\mu_f([a,\infty)) = f(\infty) - f(a)$, $\mu_f([-\infty,b)) = f(b) - f(-\infty)$

Po izreku lahko μ_f razširimo na en sam način do mere μ_f na algebro $\mathcal{A}$ generirano z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tvorimo zunanjo mero μ_f^* na $\mathbb{R}$. Po Caratheodorijevem izreku je množica $\mathcal{A}_{\mu_f^*}$ vseh μ_f^* merljivih množic σ-algebra, ki vsebuje vse intervale oblike $[a,b)$. Torej $\mathcal{A}_{\mu_f^*} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Dodatno: $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mu_f^*}, \mu_f^*|_{\mathcal{A}_{\mu_f^*}})$ je poln merljiv prostor.

$\Rightarrow \mathcal{A}_{\mu_f^*} \supseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ... Lebesgueva σ-algebra, ki je napolnitev Borelove σ-algebre.

Mera $\mu_f^* =: \mu$ je Lebesgue-Stieltjesova mera. Po izreku od zadnjič je ta mera enolična razširitev mere iz alg. gen. z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, saj je tista mera σ-končna.

<u>Poseben primer</u>: $f(x) = x \Rightarrow$ Dobimo Lebesgueovo mero. Označimo jo z m.

22. oktober 2025

<u>Posledica</u>: Naj bo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ in $x \in \mathbb{R}$. Tedaj velja $m(x+A) = m(A)$ in $m(x \cdot A) = |x| m(A)$.

<u>Dokaz</u>: Naj bo m_x definirana na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ s predpisom

$$m_x(A) := m(x+A).$$

m_x je polmera na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $x + [a_1, b_1) \cup \dots \cup [a_n, b_n) = \bigcup_{i=1}^{n} (x + [a_i, b_i))$
ki se ujema z m na na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Če je $\mathcal{A}$ alg. gen. z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, potem se m_x in m ujemata tudi na $\mathcal{A}$. Uporabimo Caratheodorija za $(\mathcal{A}, m)$ in $(\mathcal{A}, m_x)$. V obeh primerih dobimo σ-algebro, ki vsebuje $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Ker sta m in m_x σ-končni na $(X, \mathcal{A})$, sta enolično razširljivi na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Dokaz druge enakosti podobno. $\blacksquare$

Spomnimo se: $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mu_f) \rightsquigarrow (\mathcal{A}, \mu_f) \rightsquigarrow \left(\mathcal{A}_{\mu_f^*}, \mu_f^*|_{\mathcal{A}_{\mu_f^*}}\right)$

polmera na polalgebri — mera na algebri — $\overset{\shortparallel}{\mu}$

$$A \in \mathcal{A}_{\mu_f^*} \rightsquigarrow \mu(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n) \mid (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ in } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}.$$

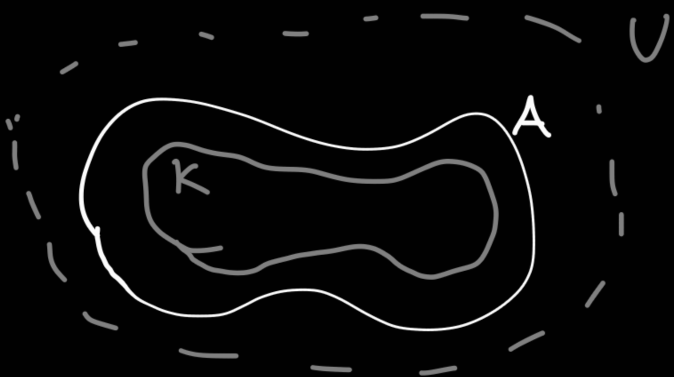
$A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n$ je končna disjunktna unija intervalov oblike $[a,b)$, $(-\infty, b)$, $[a,\infty)$.

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \mu_f([a_m, b_m)) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m)\right\}$$

$$= \inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} f(b_m) - f(a_m) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m)\right\}$$

<u>Trditev</u>: Naj bo μ_f Lebesgue-Stieltjesova mera na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, porojena z naraščajočo levozvezno funkcijo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Tedaj je

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (a_m, b_m)\right\}.$$



$\mu(U) \approx \mu(A)$

$\mu(K) \approx \mu(A)$

<u>Dokaz</u>: Označimo desno stran z $\gamma(A)$.
Vsak interval (a_n, b_n) je števna disjunktna unija intervalov oblike $[a_{n,m}, b_{n,m})$. Po definiciji infimuma je $\mu(A) \leq \gamma(A)$.

Za obratno neenakost pa potrebujemo levozveznost funkcije f. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ in naj bo $\mu(A) < \infty$. Tedaj za $\forall \varepsilon > 0$. $\exists [a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}$, da je

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \text{ in}$$

$$\mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f([a_n, b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n))$$

Ker je f levozvezna, za $\forall n \in \mathbb{N}. \exists a_n' < a_n$, da je

$$f(a_n') > f(a_n) - \varepsilon/2^n$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

$$\Rightarrow \mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(f(b_n) - f(a_n') - \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n')) \right) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu(A) + 2\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n'))$$

Zaradi monotonosti mere je potem $\mu(A) \geq \nu(A)$. ▨

Izrek: Za $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ velja

$$m(A) = \inf \{ m(U) \mid A \subseteq U^{odp} \} \quad (*)$$

$$= \sup \{ m(K) \mid K^{komp} \subseteq A \} \quad (**)$$

Dokaz [prva enakost]: (druga mogoče kasneje - Rieszov izrek].

$$A \subseteq U \Rightarrow m(A) \leq m(U)$$

$$\Rightarrow m(A) \leq \inf \{ m(U) \mid U^{odp} \supseteq A \}$$

Prej smo dokazali, da je:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n)) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}$$

$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \Rightarrow m(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n))$$ ▨

(*)... zunanja regularnost mere, (inf. po odprtih mn.) (**)... notranja regularnost mere (sup. po komp. mn)

2. MERLJIVE FUNKCIJE

28. oktober, 2025

2.1. Merljive preslikave

Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora. Preslikava $f: X \to Y$ je merljiva, če je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za vsak $B \in \mathcal{B}$.

Primer: Konstantne preslikave so merljive: $f \equiv b_0$

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset \ ; & b \notin B \\ X \ ; & b \in B \end{cases}$$

Lema: Kompozitum merljivih preslikav je merljiva preslikava.

Dokaz: $f: (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$, $g: (Y, \mathcal{B}) \longrightarrow (Z, \mathcal{C})$

$$C \in \mathcal{C}: \ (g \circ f)^{-1}(C) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(C)}_{\in \mathcal{B}})}_{\in \mathcal{A}}$$ ▨

Lema: Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor, Y mn. in $f: X \to Y$ preslikava.
i) $\mathcal{B}_0 = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ je σ-algebra na Y
ii) Če je $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostor in $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, potem je f merljiva $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ $\forall F \in \mathcal{F}$.

Dokaz: i) $\mathcal{B}_0$ je σ-algebra

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}_0$
- $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^c \in \mathcal{B}$

  $f^{-1}(B^c) = (\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}})^c \in \mathcal{A}$

- $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(B_n)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

ii) ($\Rightarrow$) ✓

$(\Leftarrow)$: $\mathcal{B}_0 := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$

$\mathcal{B}_0$ je σ-algebra po i)

Po predpostavkah je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_0 \Rightarrow \underbrace{\sigma(F)}_{} \overset{\mathcal{B}}{=} \subseteq \mathcal{B}_0$

$\forall B \in \mathcal{B}$ velja $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Rightarrow f$ merljiva

<u>Posledica</u>: Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in Y topološki prostor. Tedaj je $f: (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ merljiva $\Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ $\forall U$ odp v Y.

<u>Posledica</u>: Vsaka zvezna preslikava med topološkima prostorama je merljiva glede na Borelovi σ-alg (na X in Y). ($f: (X, \mathcal{B}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ je merljiva, če je zvezna).

Merljive preslikave med topološkimi prostori, opremljenimi z Borelovimi σ-algebrami, bomo imenovali Borelove preslikave.

<u>Trditev</u>: Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f: X \to \mathbb{R}$ funkcija. NTSE:

i) f je $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ merljiva ($f: (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je merljiva).

ii) $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ ali $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

iii) $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ ali $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

iv) $f^{-1}([a, b)) \in \mathcal{A}$ $\forall a < b$ ali $f^{-1}([a, b)) \in \mathcal{A}$ $\forall a < b$

v) $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A}$ $\forall a < b$

vi) $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$ $\forall a < b$

2.2. Razširjena realna os

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} =: [-\infty, \infty]$

$-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (imamo največji in najmanjši element)

(nad "največji": ∞, nad "najmanjši": $-\infty$)

Topologija na $\overline{\mathbb{R}}$:

- na $\mathbb{R}$ je običajna Evklidska topologija.
- bazni sistem okolic za ∞: $(a, \infty]$; $a \in \mathbb{R}$
- bazni sistem okolic za $-\infty$: $[-\infty, b)$; $b \in \mathbb{R}$

Topologija na $\mathbb{R}$ je natanko relativna topologija oz. inkluzija $i : \mathbb{R} \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je zvezna

Zanima nas $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{?}{\leftrightsquigarrow} \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

Opomba: Topologija na $\overline{\mathbb{R}}$ pove, da je $x_r \longrightarrow \infty$ v smislu ANA1 natanko konvergenca v top. pr. $\overline{\mathbb{R}}$.

Trditev: Naj bo X topološki prostor in Y podprostor v X, opremljen z relativno topologijo. Tedaj je

$$\mathcal{B}(Y) := \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Dokaz: Oglejmo si $\mathcal{B} = \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{B}(X)\}$

Hitro se vidi, da je $\mathcal{B}$ σ-algebra. Po definiciji relativne topologije na Y, $\mathcal{B}$ vsebuje vse odprte množice iz Y. $\Rightarrow \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(Y)$ $\quad A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow Y \cap A \in \mathcal{B}(Y)$

$i : Y \longrightarrow X$ je zvezna, saj je Y opremljen z rel. top.

$\Rightarrow i (Y, \mathcal{B}(Y)) \longrightarrow (X, \mathcal{B}(X))$

$A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow \underbrace{i^{-1}(A)}_{Y \cap A} \in \mathcal{B}(Y)$

Trditev: Velja $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ in

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ B \subseteq \{-\infty, \infty\}\}. \quad (*)$$

Dokaz: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \mathbb{R} \cap B, \quad B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

$\mathbb{R}$ odprta v $\overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \Rightarrow A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$(*), (\supseteq)$: B je zaprta v $\overline{\mathbb{R}} \Rightarrow B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$(\subseteq)$: $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A = (A \cap \mathbb{R}) \cup C; \quad C \subseteq \{-\infty, \infty\}$ ▨

Trditev: Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funkcija. Tedaj je f merljiva $\Leftrightarrow f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Posledica: Če je $f : X \to \mathbb{R}$ merljiva, potem je λf tudi merljiva za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dokaz: $\lambda = 0$: $\lambda f = 0$ je merljiva ✓

$\lambda > 0$: $(\lambda f^{-1})([-\infty, a]) = \{x \in X \mid (\lambda f)(x) \in [-\infty, a]\}$

$$= \{x \in X \mid f(x) \in [-\infty, \tfrac{a}{\lambda}]\}$$

$$= f^{-1}([-\infty, \tfrac{a}{\lambda}]) \in \mathcal{A}$$

$\lambda < 0$: podobno ▨

Primer: $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Merljivost χ_A; $A \subseteq X$.

$$\chi_A^{-1}([-\infty, a]) = \begin{cases} X : & a \geq 1 \\ A^c : & 0 \leq a < 1 \\ \emptyset : & a < 0 \end{cases}$$

χ_A merljiva $\Leftrightarrow A^c$ merljiva $\Leftrightarrow A$ merljiva

2.3. Produktna σ-algebra

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}) \rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$

$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \times B$ merljiv pravokotnik

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ... σ-algebra generirana z vsemi merljivimi pravokotniki

Lema: Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora.

i) Produktna σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je najmanjša σ-algebra na $X \times Y$, da sta projekciji $\pi_1 : X \times Y \to X$ in $\pi_2 : X \times Y \to Y$ merljivi.

ii) Če je $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ in $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, potem je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ generirana z

$$\mathcal{G} := \{A \times Y \mid A \in \mathcal{E}\} \times \{X \times B \mid B \in \mathcal{F}\}$$

Dokaz: (i): Naj bosta $q_1 : X \times Y \to X$ in $q_2 : X \times Y \to Y$ merljivi glede na neko σ-algebro $\mathcal{C}$ na $X \times Y$.

$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \underbrace{q_1^{-1}(A)}_{\in \mathcal{C}} \cap \underbrace{q_2^{-1}(B)}_{\in \mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$

$\Rightarrow$ Po definiciji: $\mathcal{C}$ vsebuje $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

(ii): Vsi elementi $\mathcal{G}$ so merljivi pravokotniki $\Rightarrow \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$:

$$\mathcal{Z} := \{A \subseteq X \mid q_1^{-1}(A) \subseteq \sigma(\mathcal{G})\}, \quad q_1 : X \times Y \to X$$

Po lemi je $\mathcal{Z}$ σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{E} \Rightarrow \underbrace{\sigma(\mathcal{E})}_{= \mathcal{A}} \subseteq \mathcal{Z}$

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}: \underbrace{q_1^{-1}(A)}_{= A \times Y} \in \sigma(\mathcal{G})$

Podobno $\forall B \in \mathcal{B}: X \times B \in \sigma(\mathcal{G})$

$$\Rightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \in \sigma(\mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{G}).$$

Trditev: Naj bosta X in Y topološka prostora. Produkt $X \times Y$ opremimo s produktno σ-algebro. Tedaj velja:

i) $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}(X \times Y)$

ii) Če sta X, Y 2-števna, potem $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$.
iii) Če sta X, Y separabilna metrična prostora, potem je
$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y).$$

<u>Dokaz</u>: iii) V metričnih prostorih je separabilnost $\Leftrightarrow$ 2-števnost.

29. oktober 2025

i) Naj bo $\mathcal{C}$ σ-algebra generirana z
$$\mathcal{F} := \{U \times Y \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times V \mid V \in \mathcal{T}_Y\}$$

Po prejšnji lemi $\mathcal{F}$ ravno generira produktno σ-algebro $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. Ker $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}_{X \times Y}$, je $\underbrace{\sigma(\mathcal{F})}_{=\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)} \subseteq \sigma(\mathcal{T}_{X \times Y}) = \mathcal{B}(X \times Y)$.

ii) $\mathcal{B}(X \times Y) \subseteq \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$
Topološki prostor je 2-števen, če obstaja števna baza za topologijo. To pomeni, da obstaja števna družina odprtih množic, da je vsaka odprta množica unija neke poddružine.
Pokazali bomo, da je vsaka odprta množica v $X \times Y$ vsebovana v $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. Ker je vsaka odprta množica v $X \times Y$ števna unija odprtih pravokotnikov, je potrebno "dokazati", da je $U \times V \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ za $U \in \mathcal{T}_X$, $V \in \mathcal{T}_Y$. ▨

Recimo, da imamo $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ in $(Z, \mathcal{C})$.
$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightsquigarrow ((X \times Y) \times Z, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C})$$
Podobno lahko tvorimo ostale možne produkte. Da se videti, da je $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}$ generirana z
$$\{(A \times B) \times C \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$
V duhu identifikacij pišemo $(X \times Y \times Z, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$.
Podobno za več prostorov.

Posledica: Za $n \in \mathbb{N}$ velja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Dokaz: $\underline{n=2}$ po trditvi, saj je $\mathbb{R}$ separabilen metrični prostor.

$\underline{n \longrightarrow n+1}$:
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
$$= \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
$$= \bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \qquad \blacksquare$$

V duhu identifikacije $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, velja:

Posledica: $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Trditev: Naj bosta $(Y_1, \mathcal{B}_1)$ in $(Y_2, \mathcal{B}_2)$ merljiva prostora, $Y_1 \times Y_2$ opremimo s produktno σ-algebro. Če je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f: X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ preslikava, tedaj je f $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$-merljiva $\Leftrightarrow$ $g_1 \circ f$ in $g_2 \circ f_2$ sta zaporedoma $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1)$- in $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_2)$-merljivi.

Dokaz: ($\Rightarrow$): Naj bo $f: X \to Y_1 \times Y_2$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$-merljiva

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g_i \circ f"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "g_i"] \\
& Y_i
\end{tikzcd}$$

Ker je g_i $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_i)$-merljiva, je $g_i \circ f$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_i)$-merljiva.

($\Leftarrow$): Naj bosta $g_1 \circ f$ in $g_2 \circ f$ merljivi. Označimo
$$\mathcal{C} := \{ B \subseteq Y_1 \times Y_2 \mid f^{-1}(B) = \mathcal{A} \}$$

Vemo, da je $\mathcal{C}$ σ-algebra. Če $\mathcal{C}$ vsebuje vse merljive pravokotnike, potem je $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{C}$.

$B = B_1 \times B_2$, $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$

$$
\begin{aligned}
F^{-1}(B) &= \{x \in X \mid F(x) \in \mathcal{B}\} = \{x \in X \mid f_1(x) \in B_1 \text{ in } f_2(x) \in B_2\} \\
&= \{x \in X \mid f_1(x) \in B_1\} \cap \{x \in X \mid f_2(x) \in B_2\} \\
&= f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2) \in \mathcal{A},
\end{aligned}
$$

saj sta f_1 in f_2 merljivi. $\blacksquare$

<u>Posledica:</u> Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, [0, \infty]\}$. Če sta $f, g : X \longrightarrow Y$ merljivi, potem sta merljivi tudi $f + g$ in $f \cdot g$.

<u>Dokaz:</u>
$$
\begin{aligned}
F : X &\longrightarrow Y \times Y \\
x &\longmapsto (f(x), g(x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \times Y \arrow[d, "h"] \\
& Y
\end{tikzcd}
$$

seštevanje ali množenje

h je zvezna, zato je $h : (Y \times Y, \mathcal{B}(Y, Y)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ merljiva. Ker sta $f, g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ merljivi, je tudi $F : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y \times Y, \mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y))$.

$\mathcal{B}(Y \times Y) = \mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y)$, ker Y 2-števen $\blacksquare$

<u>Trditev:</u> Linearne kombinacije merljivih preslikav z vrednosti v $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ so merljive.

<u>Posledica:</u> Naj bo $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ merljiva. Tedaj sta $\mathrm{Re} f$ in $\mathrm{Im} f$ tudi merljivi.

Velja tudi obrat, saj je $f = \mathrm{Re} f + i \, \mathrm{Im} f$.

2.4. Zaporedja merljivih funkcij

4. november 2025

Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [-\infty, \infty]$ zaporedje. Definiramo $\tilde{a}_n := \sup_{n\geq k} a_k$. Tedaj je $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje in zato ima limito v $[-\infty, \infty]$. To limito označimo z

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Podobno obstaja limes inferior in velja:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Naj bo dano zaporedje $f_n : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$. Definiramo naslednje funkcije:

$$\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

$$\left(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

$$\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

<u>Primer:</u> Naj bo X neštevna množica in $\mathcal{A}$ σ-algebra števno-koštevnih (števna ali komplement števen) podmnožic v X. Naj bo $E \subseteq X$ taka množica, da niti E niti E^c ni števna. Torej $E \notin \mathcal{A} \Rightarrow \chi_E$ ni merljiva.

$\chi_E = \sup\{\chi_{\{x\}} \mid x \in E\}$ je supremum družine merljivih funkcij, vendar ni merljiva.

<u>Lema:</u> Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij iz X v $[-\infty, \infty]$.

i) Tedaj sta $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ in $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ merljivi funkciji.

ii) Tedaj sta $\limsup_{n\to\infty} f_n$ in $\liminf_{n\to\infty} f_n$ merljivi funkciji.

iii) Če $f_n \longrightarrow f$ po točkah, potem je f merljiva.

<u>Dokaz:</u> i) Označimo $g := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

$$g^{-1}([-\infty, a]) = \{x\in X \mid g(a) \leq a\}$$
$$= \{x\in X \mid f_n(x) \leq a \ \forall n\in\mathbb{N}\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x\in X \mid f_n(a) \leq a\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A},$$

saj so f_n merljive.

Funkcija $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$ je merljiva po zgornjem.

ii) $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n$ ← merljivo po i)

g_n ... merljivo po i)

Podobno $\liminf_{n\to\infty} f_n$.

iii) Če $f_n \longrightarrow f$ po točkah, potem $f = \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$. ▨

2.5. Aproksimacija s stopničastimi funkcija

Funkcija $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ je stopničasta, če ima končno zalogo vrednosti.

Če $Z_f = \{a_1, \dots, a_n\}$, pri čemer $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$, potem
$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \chi_{f^{-1}(\{a_k\})} = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k},$$
kjer je $A_k = f^{-1}(\{a_k\})$.

<u>Opazka:</u> f merljiva $\iff$ A_k merljive $\forall k = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz: ($\Leftarrow$): A_k merljiva $\Rightarrow$ χ_{A_k} merljiva $\Rightarrow$ f merljiva kot linearna kombinacija merljivih

($\Rightarrow$): Naj bo U_k odprta množica, ki vsebuje a_k, ne vsebuje a_j za $j \neq k$. $f^{-1}(U_k) = A_k$ (Lahko vzameš singleton) $\Rightarrow$ A_k merljiva. ▨

Zgoraj je f v kanonični obliki: a_k paroma različni, A_k paroma disjunktne in $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$.

Vektorski prostor vseh omejenih merljivih funkcij opremimo s supremum normo.

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Dobimo normiran prostor.

Trditev: Prostor vseh omejenih merljivih funkcij na X je Banachov prostor glede na $\|\cdot\|_\infty$.

Dokaz: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo $\Rightarrow$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno v $\mathbb{C}$
$\Rightarrow \exists f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ je enakomerna limita

$$\left(\begin{array}{l} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{za } m, n \geq n_\varepsilon \ \forall x \in X \\ \downarrow \\ |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ f je limita po točkah zaporedja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\Rightarrow$ f merljiva ▨

Iz naslednjega izreka bo sledilo, da je vektorski prostor vseh stopničastih merljivih funkcij gost v prostoru vseh omejenih merljivih funkcij.

$$\underset{\text{stop. merlj.}}{\underset{\uparrow}{S(X)}} \text{ gosta v } \underset{\text{om. merlj.}}{\underset{\uparrow}{B(X)}}$$

Izrek: Naj bo $f: X \to [0, \infty]$ merljiva. Tedaj obstaja naraščajoče zaporedje nenegativnih merljivih stopničastih funkcij $f_n: X \to [0, \infty)$, da $f_n \nearrow f$ po točkah. Ta konvergenca je enakomerna na vsaki množici, kjer je f omejena.

Opomba: Če je f omejena, potem $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $f_n : X \longrightarrow [0,\infty)$ stopničasta in $f_n \to f$ enakomerno.

$f : X \to \mathbb{C}$ merljiva $\Rightarrow f = \mathrm{Re}f + \mathrm{Im}f = (\mathrm{Re}f^+ - \mathrm{Re}f^-) + i(\mathrm{Im}f^+ - \mathrm{Im}f^-)$.

$\mathrm{Re}f^+, \mathrm{Re}f^-, \mathrm{Im}f^+, \mathrm{Im}f^- : X \to [0,\infty)$ so omejene, če f omejena.

Po zgornjem $\exists (u_n)_n, (v_n)_n, (\varsigma)_n, (\zeta_n)_n$ zap. neneg. stop. merlj. funk., da so konvergence $u_n \to \mathrm{Re}f^+$, $v_n \to \mathrm{Re}f^-$; $\varsigma_n \to \mathrm{Im}f^+$, $\zeta_n \to \mathrm{Im}f^-$ enakomerne. $\Rightarrow \underbrace{u_n - v_n + i(\varsigma_n - \zeta_n)}_{\text{stop. kompl. merlj. funkcija}} \longrightarrow f$ enakomerno

Dokaz (izreka o aproksimaciji):

Za $\forall n \in \mathbb{N}$ in $k = 1, 2, \dots, n\cdot 2^n$ definiramo merljive množice

$$E_{n,k} := \left\{ x \in X \,\middle|\, \frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right)$$

in

$$F_n := \{ x \in X \mid f(x) \ge n \} = f^{-1}([n,\infty]).$$

Definiramo

$$f_n = \left(\sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} \right) + n\chi_{F_n}.$$

f_n so stopničaste, nenegativne in merljive. Da se videti, da je $f_n \le f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Za $x \in f^{-1}([0,n])$ velja $|f(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2^n}$.

Če $f(x) < \infty$, potem od nekod dalje velja $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$.

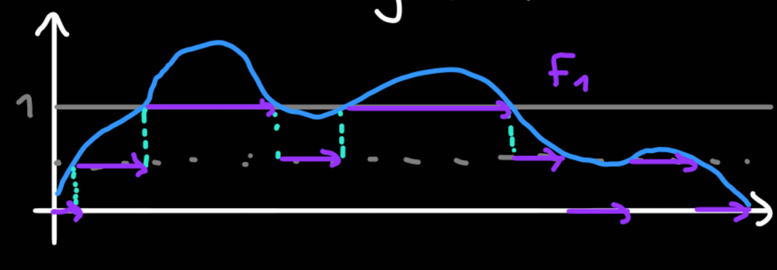
Torej $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow f(x)$ oziroma $f_n(x) \nearrow f(x)$.

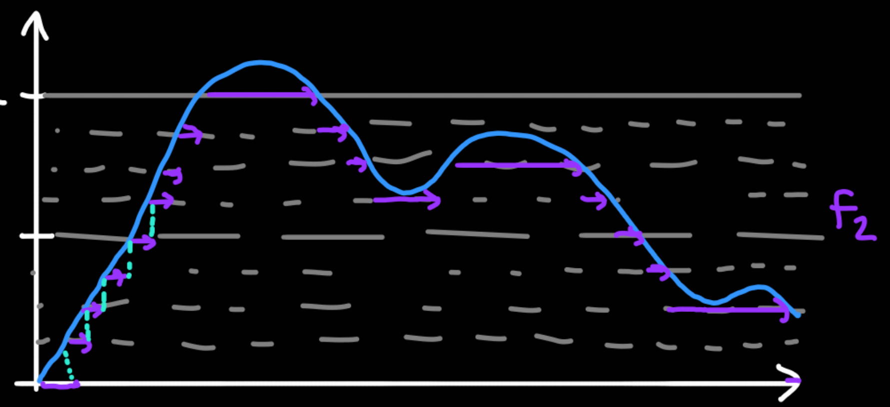
Če $f(x) = \infty$, potem je $s_n(x) = n \longrightarrow \infty$. Torej $f_n \nearrow f$.

Naj bo $A \subseteq X$ taka, da je $f|_A$ omejena. Tedaj je $A \cap F_n = \emptyset$ od nekod dalje. Od prej: vsak $x \in A$ zadošča

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^n} \quad \forall n \ge n_0.$$

To je enakomerna konvergenca. ▨





Posledica: Naj bo $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ merljiva. Tedaj obstaja zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ merljivih stopničastih funkcij, da velja $0 \leq |f_1| \leq |f_2| \leq \cdots$ in $f_n \longrightarrow f$ po točkah. Konvergenca je enakomerna na vsaki množici, na kateri je f omejena.
Dokaz: DN

2.6. Načini konvergence

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljivi prostor in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij. Pravimo, da $f_n \longrightarrow f$ skoraj enakomerno, če za $\forall \varepsilon > 0$. $\exists A \in \mathcal{A}$, da $\mu(A^c) < \varepsilon$ in $f_n \longrightarrow f$ enakomerno na A.
Pravimo, da $f_n \longrightarrow f$ skoraj povsod, če ima množica $\{x \in X \mid f_n(x) \not\longrightarrow f(x)\}$ ničelno mero. Lahko se zgodi, da limitna ni merljiva.

Trditev: Če $f_n \longrightarrow f$ skoraj enakomerno, potem $f_n \longrightarrow f$ skoraj povsod.

Dokaz: Za $\forall m \in \mathbb{N}. \exists A_m. \ \mu(A_m^c) < \frac{1}{m}$ in $f_n \longrightarrow f$ enakomerno na A_m. Zato $f_n \longrightarrow f$ po točkah na A_m.
$\Rightarrow f_n \longrightarrow f$ po točkah na $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. Velja

$$\mu\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)^c\right) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m^c\right) \leq \frac{1}{m} \longrightarrow 0$$

$\blacksquare$

skoraj povsod $\rightsquigarrow$ s.p.
almost everywhere $\rightsquigarrow$ a.e.] tipične okrajšave

5. november 2025

Lastnost $\mathcal{P}$ velja skoraj povsod, če ima komplement množice vseh $x \in X$, za katere $\mathcal{P}$ velja, mero nič.

<u>Primer</u>: i) konvergenca skoraj povsod $f_n \to f$ skoraj povsod:

$$\mathcal{P} \ldots f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

ii) $f \geq 0$ skoraj povsod

$$\mathcal{P} \ldots \quad f(x) \geq 0$$

<u>Izrek [Jegorov]</u>: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s končno mero. Če so $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljive in $f_n \longrightarrow f$ skoraj povsod, kjer je f merljiva, potem $f_n \longrightarrow f$ skoraj enakomerno.

<u>Dokaz</u>: $f_n \longrightarrow f \iff f_n - f \longrightarrow 0$ (velja za skoraj povsod in skoraj enakomerno)

BŠS. $f_n \longrightarrow 0$ skoraj povsod.

Zapišimo $X = X' \cup N$; $\mu(N) = 0$ in $f_n \longrightarrow f$ na X' po točkah.

Če dokažemo, da $f_n \longrightarrow 0$ skoraj enakomerno na X', potem gre $f_n \longrightarrow 0$ skoraj enakomerno na X.

BŠS $f_n \longrightarrow 0$ po točkah na X.

Vpeljimo množice

$$A_{k,m} = \{x \in X \mid |f_n(x)| \leq \tfrac{1}{m} \ \forall n \geq k\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,m} = X \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$x \in X$: $f_n(x) \longrightarrow 0$

$$\forall m \in \mathbb{N}. \exists k \in \mathbb{N}. \ |f_n(x)| \leq \tfrac{1}{m} \quad \forall n > k \Rightarrow x \in A_{k,m}$$

Hkrati $A_{k,m} \subseteq A_{k+1,m}$ $\forall m \in \mathbb{N}. \forall k \in \mathbb{N}$

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,m}; \quad A_{k,m} \subseteq A_{k+1,m} \Rightarrow \mu(X) = \lim_{k \to \infty} (A_{k,m}) \qquad (*)$$

Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Iz $(*)$ sledi, da za $m \in \mathbb{N}$. $\exists\, k_m \in \mathbb{N}$.

$$\mu(A_{k_m,m}) \geq \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^m}$$

Definirajmo $A := \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{k_m,m} \Rightarrow \mu(A^c) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A^c_{k_m,m})$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\mu(X) - \mu(A_{k_m,m})\right)$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.$$

$f_n \longrightarrow 0$ enakomerno na A

$x \in A \Rightarrow x \in A_{k_m,m} \ \forall m \in \mathbb{N}$

$\delta > 0. \exists\, m \in \mathbb{N}. \frac{1}{m} < \delta$

$x \in A_{k_m,m} \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{m} < \delta \quad \forall n \geq k_m$

To je definicija enakomerne konvergence na A. $\blacksquare$

Zaporedje merljivih funkcij $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ **konvergira po meri** proti merljivi funkciji f, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

<u>Primer</u>: i) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$

$f_n = \chi_{(n,n+1]}$

$$f_n(x) = \chi_{(n,n+1]}(x) = \begin{cases} 1; & x \in (n,n+1] \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n \longrightarrow 0$ po točkah

$f_n \not\longrightarrow 0$ po meri:

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in X \mid \chi_{(n,n+1]}(x) \geq \varepsilon\}$$

$\varepsilon = 1/2 \Rightarrow \{x \in X \mid \chi_{(n,n+1]}(x) \geq 1/2\} = (n, n+1]$

$$m(\{x \in X \mid \chi_{(n,n+1]}(x) \geq 1/2\}) = 1 \not\longrightarrow 0$$

$f_n \not\rightrightarrows 0$ skoraj enakomerno

$$|f_n(x) - 0| = |\chi_{(n,n+1)}(x) - 0| = \begin{cases} 1; & x \in (n, n+1) \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Če bi za $\varepsilon = 1/2$, A bi bila, da $m(A^c) < 1/2$ in $f_n \to 0$ enak. na A. Iz zgornjega sledi, da tak A ne obstaja.

ii) $[0,1]$, Leb. mera (oziroma njena zožitev na $[0,1]$)

$f_1 = \chi_{[0,1]}$,

$f_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_3 = \chi_{[1/2,1]}$

$f_4 = \chi_{[0,1/4]}$, $f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}$, $f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}$, $f_7 = \chi_{[3/4,1]}$

$\vdots \quad \ddots$

Za $\forall x \in [0,1]$ ima zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neskončno mnogo 1 in 0. Torej ne konvergira po točkah (v nobeni točki).

$f_n \longrightarrow 0$ po meri

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}$$

Ta množica ima mero enako meri ustreznega intervala, ki definira f_n. Ker te mere konvergirajo proti 0, velja $f_n \longrightarrow 0$ po meri

Opomba: Izrek Jegorova ne velja nujno, če je $\mu(X) = \infty$.

11. november 2025

Trditev: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij in f merljiva.

i) $f_n \to f$ skoraj enakomerno $\Rightarrow f_n \to f$ po meri

ii) $\mu(X) < \infty$ in $f_n \to f$ skoraj povsod $\Rightarrow f_n \to f$ po meri

Dokaz: i) Glej vaje.

ii) $\mu(X) < \infty \overset{\text{Jegorov}}{\Rightarrow} f_n \to f$ skoraj enak. $\overset{\text{i)}}{\Rightarrow} f_n \to f$ po meri. ∎

3. INTEGRAL

3.1. Integracija stopničastih funkcij

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Za stopničasto funkcijo

$$s := \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j} \qquad (s \text{ merljiva})$$

definiramo $\displaystyle\int_X s\,d\mu := \sum_{j=1}^{n} c_j\, \mu(A_j)$.

Če je $s = \chi_A$, potem $\displaystyle\int_X s\,d\mu = \mu(A)$.

Izkaže se, da je $\int_X s\,d\mu$ neodvisen od izbire A_j in c_j. Torej lahko dostikrat prevzamemo, da je s zapisan v kanonični obliki.

Če je A merljiva, definiramo $\displaystyle\int_A s\,d\mu := \int_X s\chi_A\,d\mu$.

Lema: Naj bo $s : X \longrightarrow [0, \infty)$ merljiva stopničasta funkcija. Tedaj je z $\nu(A) := \int_A s\,d\mu$ definirana pozitivna mera $(X, \mathcal{A})$.

Dokaz: $\displaystyle\nu(\emptyset) = \int_\emptyset s\,d\mu = \int_X s\chi_\emptyset\,d\mu = \int_X 0\,d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0$

Naj bodo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktne merljive množice in naj bo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. $\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$

Naj bo $s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ kanonična oblika za s.

$$s\chi_A = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}\right)\chi_A = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j \cap A}$$

$$\Rightarrow \quad \nu(A) = \int_A s\,d\mu = \int_X s\chi_A\,d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \mu(E_j \cap A)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} c_j \mu(E_j \cap A_i)$$

ANA 1

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(E_j \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} s \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$ ▨

Lema: Naj bosta $s, t : X \to [0, \infty]$ merljivi stopničasti funkciji in naj bo $c \in [0, \infty]$. Tedaj velja:

i) $\int_X (s+t) \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu$

ii) $\int_X cs \, d\mu = c \int_X s \, d\mu$

Dokaz: i) $s := \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{E_i}$, $t := \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{F_j}$ zapisa v kanonični obliki

Tedaj je $s+t = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_i + d_j) \chi_{E_i \cap F_j}$.

Čeprav so množice $E_i \cap F_j$ paroma disjunktne, to ni nujno kanonična oblika za $s+t$. Velja pa

$$\int_X (s+t) \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_i + d_j) \mu(E_i \cap F_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_j \mu(E_i \cap F_j)$$

$\bigcup_{j=1}^{n} F_j = X$

$\bigcup_{i=1}^{m} E_i = X$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^{n} d_j \sum_{i=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^{n} d_j \mu(F_j)$$

$$= \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu$$

ii) $\int_X cs \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} c c_i \mu(E_i) = c \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(E_i) = c \int_X s \, d\mu$ ▨

Lema: Naj bosta s,t taksni merljivi stopničasti funkciji, da velja $0 \le s \le t$. Tedaj je $0 \le \int_X s\,d\mu \le \int_X t\,d\mu$.

Dokaz: $t = t-s+s$. Po prejšnji lemi:

$$\int t\,d\mu = \int_X (t-s)\,d\mu + \int_X s\,d\mu \ge \int_X s\,d\mu \ge 0$$ ▨

3.2. Integral nenegativne merljive funkcije

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $f: X \to [0,\infty]$ merljiva.
Z $\mathcal{S}_f$ definiramo množico $\{s \mid 0 \le s \le f \text{ merljiva stopničasta funkcija}\}$.
Definiramo:
$$\int_X f\,d\mu := \sup\left\{\int_X s\,d\mu \mid s \in \mathcal{S}_f\right\}.$$

Lema: Naj bosta $0 \le f \le g$ merljivi. Potem je $0 \le \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$.

Dokaz: $\mathcal{S}_f \subseteq \mathcal{S}_g \Rightarrow$ supremum po $\mathcal{S}_f \le$ supremum po $\mathcal{S}_g$ ▨

Primer: $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$, δ_{x_0} Diracova mera

$f \ge 0 \Rightarrow \int_X f\,d\delta_{x_0} = f(x_0)$

$0 \le s \le f \Rightarrow \int_X f\,d\delta_{x_0} \ge \int_X s\,d\delta_{x_0}$ $\qquad s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ kanonična oblika

$$\int_X s\,d\delta_{x_0} = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{x_0}(E_j) = \underset{(x_0 \in E_k)}{c_k \cdot 1} = s(x_0)$$

Ker $s_n \nearrow f$ po točkah (izrek o aproksimaciji), dobimo $\int_X f\,d\delta_{x_0} \ge f(x_0)$.

$$\int_X s\,d\delta_{x_0} = s(x_0) \le f(x_0)$$

Naredimo supremum po vseh $s \in \mathcal{S}_f$.

Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$: μ steje točke

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

$$f(n) \longleftrightarrow a_n \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Izrek [Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci (LMK)]:
Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$.

Dokaz: Ker je $\left(\int_X f_n d\mu\right)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje, obstaja

$$a := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu$$

$$a = \int_X f d\mu \ ; \quad f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

$a \leq \int_X f d\mu$, saj $f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$a \geq \int_X f d\mu \iff a \geq \int_X cs \, d\mu \quad \forall c \in (0,1) \ \forall s \in \mathcal{S}_f$

($\Rightarrow$): ✓ zaradi monotonosti

($\Leftarrow$): sledi iz dejstva, da najprej naredimo supremum po $c \in (0,1)$ in nato supremum po vseh $s \in \mathcal{S}_f$.

Izberimo $c \in (0,1)$ in $s \in \mathcal{S}_f$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$A_n := \{x \in X \mid cs(x) \leq f_n(x)\}.$$

$\Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in $A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Definiramo mero ν s predpisom $\nu(B) = \int_B cs \, d\mu$. To je mera po lemi iz razdelka o stopničastih funkcijah.

$$\int_X cs \, d\mu = \nu(X) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} cs \, d\mu \underset{\text{saj } f_n \geq cs \text{ na } A_n}{\leq} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = a \qquad \blacksquare$$

Izrek: Naj bodo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativne merljive funkcije. Tedaj velja
$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Dokaz: Najprej dokažimo $\int_X (f_1+f_2)\,d\mu = \int_X f_1\,d\mu + \int_X f_2\,d\mu$.

$\exists$ zaporedje $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih merljivih stopničastih funkcij, da $0 \le s_n \nearrow f_1$ in $0 \le t_n \nearrow f_2$ po točkah.
$\Rightarrow 0 \le \underbrace{s_n + t_n}_{\text{stopničasta funkcija}} \nearrow f_1 + f_2$ po točkah

$$\int_X (f_1+f_2)\,d\mu \overset{\text{LMK}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n+t_n)\,d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_X s_n\,d\mu + \int_X t_n\,d\mu\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,d\mu + \int_X t_n\,d\mu$$
$$\underset{2\times\text{LMK}}{=} \int_X f_1\,d\mu + \int_X f_n\,d\mu$$

V splošnem: $g_n := f_1 + \dots + f_n \Rightarrow 0 \le g_n \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$
$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) d\mu \overset{\text{LMK}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\,d\mu$$

12. november 2025

Posledica: Naj bo $f: X \to [0,\infty]$ merljiva in $c \ge 0$. Tedaj velja
$$\int_X cf\,d\mu = c \cdot \int_X f\,d\mu.$$

Dokaz: Naj bodo $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takšne merljive stopničaste funkcije, da $0 \le s_n \nearrow f$. Vemo, da velja

$$\int_X cs_n\,d\mu = c\cdot\int_X s_n\,d\mu$$

LMK za $0 \le cs_n \nearrow cf$: $\int_X cs_n\,d\mu \to \int_X cf\,d\mu$

LMK za $0 \le s_n \nearrow f$: $c\cdot\int_X s_n\,d\mu \to c\cdot\int_X f\,d\mu$

Trditev: Naj bo $f: X \to [0, \infty]$ merljiva. Definiramo $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$; $A \in \mathcal{A}$. Velja:

i) ν je pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.
ii) Če je $\mu(A) = 0$, potem je $\nu(A) = 0$.
iii) Če je $g: X \to [0, \infty]$ merljiva, potem $\int_X g\,d\nu = \int_X f \cdot g\,d\mu$.

Opomba: (a) Pogoj $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, se imenuje absolutna zveznost mere ν glede na mero μ.
(b) Če je ν glede na μ absolutno zvezna, to zapišemo $\nu \ll \mu$, f iz trditve pa zapišemo kot $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. ("$\int_A f\,d\mu = \int_A d\nu = \nu(A)$")

Dokaz: i) $\cdot\ \nu(\emptyset) = \int_\emptyset f\,d\mu = \int_X f \chi_\emptyset\,d\mu = \int_X 0\,d\mu = \mu(X) \cdot 0 = 0$

Če so $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne in $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, potem

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu = \int_X f \chi_A\,d\mu = \int_X \Big(f \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}\Big)d\mu$$
$$= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f \chi_{A_n}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \chi_{A_n}\,d\mu$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

ii) Naj bo $\mu(A) = 0$.

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu = \int_X f \chi_A\,d\mu$$

Naj bodo $0 \leq s_n \leq f\chi_A$; s merljive stopničaste
$s = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$ (kanonična oblika)
$f\chi_A \equiv 0$ na $A^c \Rightarrow s \equiv 0$ na $A^c \Rightarrow s = s\chi_A$
$\Rightarrow s = \lambda_1 \chi_{A_1 \cap A} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n \cap A}$
$\Rightarrow \int_X s\,d\mu = \lambda_1 \mu(A_1 \cap A) + \dots + \lambda_n \mu(A_n \cap A) = 0$
$\Rightarrow \int_X f \chi_A\,d\mu = 0$ (po definiciji integrala nenegativne funkcije)

iii) Dokazali bomo najprej za karakteristične funkcije, nato stopničaste in nato nenegativne z uporabo LMK.

a) $g = \chi_A$; A merljiva

$$\int_X g\,d\nu = \int_X \chi_A\,d\nu = \nu(A)$$

$$\int_X fg\,d\mu = \int_X \chi_A f\,d\mu = \int_A f\,d\mu = \nu(A)$$

b) $g = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$; $A_1, \dots, A_n$ merljive

$$\int_X g\,d\nu = \int_X \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}\,d\nu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i}\,d\nu$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i} f\,d\mu$$

$$= \int_X \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}\right)}_{= g} f\,d\mu$$

c) $g \geq 0$ merljiva: Vemo, da obstaja zaporedje $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ merljivih stopničastih funkcij: $0 \leq s_n \nearrow g$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \int_X s_n\,d\nu = \int_X s_n f\,d\mu$$

$$\int_X s_n\,d\nu \xrightarrow{\text{LMK za } \nu \text{ in } 0 \leq s_n \nearrow f} \int_X g\,d\nu \qquad \int_X s_n f\,d\mu \xrightarrow{\text{LMK za } \mu \text{ in } 0 \leq s_n f \nearrow gf} \int_X gf\,d\mu$$

Fatoujeva lema: Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja: $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

Dokaz: $g_n := \inf_{k \geq n} f_k \; (\leq f_n) \longrightarrow 0 \leq g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n$

LMK: $$\int_X \lim_{n\to\infty} g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

$$\int_X \lim_{n\to\infty} g_n\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

($\liminf a_n = \lim a_n$, če limita obstaja; in $a_n \leq b_n \Rightarrow \liminf a_n \leq \liminf b_n$)

<u>Primer</u>: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ šteje točke

$$f_n = \chi_{\{n, n+1, \dots\}} \longrightarrow \chi_{\emptyset} = 0$$

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \infty \, , \quad \int_{\mathbb{N}} \chi_{\emptyset} \, d\mu = 0$$

$\Rightarrow$ V Fatoujevi lemi lahko imamo strogi neenačaj.

18. november 2025

Če je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $\mu(A) = 0$, potem je $\int_A f \, d\mu = 0$ za vsako merljivo funkcijo $f \geq 0$.

DN. Stopničaste funkcije in definicija integrala ali LMK.

<u>Trditev</u>: Naj bo $f: X \longrightarrow [0, \infty]$ merljiva. Tedaj velja:

i) $\int_X f \, d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0$.

ii) $\int_X f \, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ s.p.

<u>Dokaz</u>: i) $A := \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$

$0 \leq \infty \chi_A \leq f \Rightarrow 0 \leq \infty \mu(A) \leq \int_X f \, d\mu < \infty \Rightarrow \mu(A) = 0$

ii) ($\Leftarrow$): $f(0)$ s.p. $\Rightarrow X = E \cup E^c$, $\mu(E) = 0$; $f|_{E^c} = 0$

$$\int_X f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_{E^c} f \, d\mu = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. po} \\ \text{meri } 0}}{0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. ničelne} \\ \text{funkcije}}}{0} = 0 .$$

($\Rightarrow$): Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $A_n := \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. To je merljiva množica, saj je preslika zaprtega intervala.

$$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_{A_n} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \int_{A_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n)$$

$\Rightarrow \mu(A_n) = 0$, $\quad \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$.

3.3. Integral kompleksne merljive funkcije

Demotivirajoči primer: Recimo, da integral že znamo vpeljati. Kaj bi bil integral od $\chi_E - \chi_F$.

Naivno: $\int_X (\chi_E - \chi_F) d\mu = \mu(E) - \mu(F)$

Težava: lahko dobimo $\infty - \infty$, kar ni ok.

Merljiva funkcija $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ je integrabilna, če je integral $\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu < \infty$. Če je $\|f\|_1 < \infty$, potem pišemo $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Z $\mathcal{L}^0(\mu)$ označimo vektorski prostor vseh kompleksnih merljivih funkcij.

Kako preverimo, da je $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$? Preverimo $\int_X |f| d\mu < \infty$.

$f = \mathrm{Re} f + i \mathrm{Im} f \Rightarrow |f|^2 = (\mathrm{Re} f)^2 + (\mathrm{Im} f)^2$

$\Rightarrow |f| \geq |\mathrm{Re} f| + |\mathrm{Im} f|$

$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

$\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow |f| \leq |\mathrm{Re} f| + |\mathrm{Im} f| \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

g realna merljiva funkcija $\Rightarrow g = g^+ - g^-$; g^+, g^- merljivi

$\min\{g^+, g^-\} = 0$

$$\int_X g \, d\mu = \int_X g^+ d\mu + \int_X g^- d\mu$$

$\Rightarrow \left(g \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow g^+, g^- \in \mathcal{L}^1(\mu)\right)$

$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$:

$$\int_X f d\mu := \int_X (\mathrm{Re} f)^+ d\mu + \int_X (\mathrm{Re} f)^- d\mu + i\left(\int_X (\mathrm{Im} f)^+ d\mu + \int_X (\mathrm{Im} f)^- d\mu\right)$$

Lema: Če $\mathcal{L}^1(\mu)$ opremimo z operacijami po točkah, potem je $\mathcal{L}^1(\mu)$ vektorski prostor, $\|\cdot\|_1$ pa je polnorma na $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Dokaz: $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\|\alpha f + \beta g\| = \int_X |\alpha f + \beta g| \, d\mu \leq \int_X (|\alpha||f| + |\beta||g|) \, d\mu$$
$$= |\alpha| \int_X |f| \, d\mu + |\beta| \int_X |g| \, d\mu < \infty$$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ in $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ (trikotniška neenakost)

$\|\cdot\|_1$ je polnorma:

i) $\|f\|_1 \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ✓

ii) $\|\alpha f\| = \int_X |\alpha f| \, d\mu = |\alpha| + \int_X |f| \, d\mu = |\alpha| \cdot \|f\|_1$

iii) trikotniška neenakost ✓

Opomba: V splošnem $\mathcal{L}^1(\mu)$ ni normiran prostor:

$X = \mathbb{R}$, $\mu = m$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$C \ldots$ Cantorjeva množica z $m(C) = 0$

$$\|\chi_C\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \chi_C \, dm = m(C) = 0$$

Prostor ni normiran (v splošnem), lahko mu pa priredimo normiran prostor, ki "vsebuje vse informacije o $\mathcal{L}^1(\mu)$".

Vpeljimo relacijo $\sim$ na $\mathcal{L}^1(\mu)$: $f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ s.p.

- $f \sim f$ ✓
- $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ ✓
- $f \sim g$, $g \sim h \Rightarrow f = g$ na A, $g = h$ na B

  $\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0 \Rightarrow f = h$ na $A \cap B$ in $\mu((A \cap B)^c) \leq \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0$

Definiramo: $L^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu)/\sim$:

$\|[f]\|_1 := \|f\|_1$

$[f] + [g] := [f+g]$

$\alpha[f] := [\alpha f]$

Ali sta operaciji dobro definirani? Da.

• $f \sim f'$, $g \sim g'$: $[f]+[g]=[f+g]$
$[f']+[g']=[f'+g']$ $\overset{?}{||}$

$f \sim f'$, $g \sim g'$ $\Rightarrow f = f'$ na A, $g' \sim g'$ na B

$\mu(A^c)=\mu(B^c)=0 \Rightarrow f+g = f'+g'$ na $A \cap B$ in

$$\mu((A\cap B)^c) \leq \mu(A^c)+\mu(B^c) = 0$$

$\Rightarrow f+g \sim f'+g'$

• $\alpha[f]=[\alpha f]$ DN.

Posledica: $L^1(\mu)$ je normiran prostor.

Dokaz: Vse lastnosti se dedujejo iz $\mathcal{L}^1(\mu)$ na $L^1(\mu)$.

$$\|[f]\|_1 = 0 \Rightarrow \|f\|_1 = 0 \Rightarrow |f| = 0 \text{ s.p.}$$
$$\Rightarrow f = 0 \text{ s.p.} \Rightarrow f \sim 0 \Rightarrow [f] \sim [0]$$ ▨

Zakaj je norma $\|[f]\|_1$ dobro definirana?

$$[f]=[f'] \Rightarrow f \sim f' = f = f' \text{ s.p.} \Rightarrow |f| = |f'| \text{ s.p.}$$
$$\Rightarrow \int_X |f| d\mu = \int_X |f'| d\mu \Rightarrow \|f\|_1 = \|f'\|_1$$

Trditev: Za $\mathcal{L}^1$-funkcije velja naslednje:

i) Integral je linearen funkcional na $\mathcal{L}^1(\mu)$.

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

ii) Če sta $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ v $\mathcal{L}^1(\mu)$ in $f \leq g$, potem je

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Kaj pomeni $f \leq g$?
$f \leq g$ po točkah

iii) $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$f \leq g$ s.p. $\Leftrightarrow f \leq g$ v $L^1(\mu)$
$\Updownarrow$
$[f] \leq [g]$

<u>Dokaz:</u> i) $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$

$\int_a^b f(x)\,dx$ Riemann

$\int_{[a,b]} f\,dm$ Lebesgue

↳ nekateri pišejo $\int_{[a,b]} f\,dx$

Hujša zloraba $\int_a^b f(x)\,dx$

Mogoče bi morali pisati celo $\int_X f(x)\,d\mu(x)$

<u>f, g realni:</u> $(f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^-$

Raje pišimo $h := f+g$

$$h = h^+ - h^-$$
$$f+g = f^+ - f^- + g^+ - f^-$$

$$\Rightarrow f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$$

$$\Rightarrow \int_X (f^+ + g^+ + h^-)\,d\mu = \int_X (f^- + g^- + h^+)\,d\mu$$

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu = \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu + \int_X h^+ d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu$$

$$\int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu = \int \underbrace{(f+g)}_{h}\,d\mu$$

Za kompleksne funkcije DN $(f = \mathrm{Re} f + i \mathrm{Im} f)$.

Množenje s skalarji: le za $\alpha \geq 0$:

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \int_X \alpha(\mathrm{Re}f + i\,\mathrm{Im}f)\,d\mu$$
$$= \int_X \alpha\,\mathrm{Re}f\,d\mu + \int_X \alpha\,\mathrm{Im}f\,d\mu$$
$$= \int_X (\alpha(\mathrm{Re}f)^+ - \alpha(\mathrm{Re}f)^-)\,d\mu + i\int_X (\alpha(\mathrm{Im}f)^+ - \alpha(\mathrm{Im}f)^-)\,d\mu$$
$$= \int_X \alpha(\mathrm{Re}f)^+ d\mu - \int \alpha(\mathrm{Re}f)^- d\mu + i\int_X \alpha\,\mathrm{Im}f^+ d\mu - i\int_X \alpha\,\mathrm{Im}f^- d\mu$$

Preostanek (i) izpustimo.

(ii) $g = g - f + f$

$$\Rightarrow \int_X g\,d\mu = \underbrace{\int_X (g-f)\,d\mu}_{\geq 0} + \int_X f\,d\mu$$

iii) Če je $\int_X f\,d\mu = 0$, potem neenakost drži.

BŠS. $\alpha := \int_X f\,d\mu \neq 0 \Rightarrow \exists w.\ |w|$ in $w\alpha = |\alpha|$.

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| = |\alpha| = w\alpha = w \cdot \int_X f\,d\mu = \int_X wf\,d\mu = \mathrm{Re}\int_X wf\,d\mu$$

$$= \int_X \mathrm{Re}(wf)\,d\mu \leq \int_X |wf|\,d\mu \underset{|w|=1}{=} \int |f|\,d\mu$$

Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci (LDK): angleščina: (LDC)

Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij, ki po točkah s.p. konvergirajo proti merljivi funkciji f. Če $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ za skoraj vsak } x,$$

potem velja

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu \to 0 \text{ in } \int_X f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu.$$

Opomba: $\int_X |f_n - f|\,d\mu \to 0 \Leftrightarrow \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \to f$ v $L^1(\mu)$.

Dokaz: Kot v dokazu izreka Jegorova, lahko BŠS predpostavimo, da $f_n \to f$ po točkah in $|f_n| \leq g$ $\forall n$ povsod na X.

$$\left.\begin{aligned} h_n &:= 2g - |f_n - f| \\ |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g \end{aligned}\right\} \Rightarrow h_n \geq 0$$

Po Fatovjevi lemi: $\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n\,d\mu$

$$\int_X 2g\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)\,d\mu =$$

$$= \int_X 2g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X (-|f_n - f|)\,d\mu = \int_X 2g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup \int_X |f_x - f|\,d\mu \leq 0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu$ in je enaka 0

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$$

19. november 2025

Kako v praksi preverimo, da je normiran prostor Banachov?
i) Vsako Cauchyjevo zaporedje konvergira (poiščemo limito).
ii) Dokažemo, da vsaka absolutno konvergirajoča vrsta tudi konvergira.

Trditev: Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takšno zaporedje L^1-funkcij, da velja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira skoraj povsod proti neki L^1-funkciji f.
Velja še
$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Dokaz: Definiramo $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Tedaj je $g: X \to [0, \infty]$ merljiva in
$$\int_X g \, d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

$\Rightarrow g(x) < \infty$ za skoraj vsak $x \in X$
$\Rightarrow$ za skoraj vsak $x \in X$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira absolutno $\Rightarrow$ konvergira

Definiramo $g_n := f_1 + \cdots + f_n \Rightarrow |g_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k| \leq g \in L^1(\mu)$

zbraba notacije... $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_X f_j \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu$$

$$\overset{\text{LDK}}{\underset{\text{SE}\{x\}}{\Longrightarrow}} \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu.$$

Riesz-Fisherjev izrek: Prostor $L^1(\mu)$ je Banachov prostor. Če $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, potem obstaja $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da $f_{n_k} \longrightarrow f$ skoraj povsod.

Opomba: Veliko podobnih izrekov se tudi imenuje Riesz-Fisherjev izrek.

Opomba: $p \geq 1$, $\quad \ell^p = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ $\quad (p \neq \infty)$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \Rightarrow (\ell^p, \|\cdot\|_p) \text{ je Banachov}$$

$\ell^\infty \leftarrow$ omejena zaporedja

$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq \ell^\infty \qquad 1 \leq p \leq q$

$\mu(X) < \infty \Rightarrow L^\infty(\mu) \subseteq L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu)$

tega še ne poznamo

Dokaz [Riesz-Fisher]: $L^1(\mu)$ je poln:

Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje v $L^1(\mu)$. Našli bomo ustrezno podzaporedje, ki bo konvergiralo v $L^1(\mu)$. Po izreku iz metričnih prostorov bo ta limita tudi limita prvotnega zaporedja.

Ker je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo, obstaja strogo naraščajoče zaporedje $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ indeksov, da $\|f_n - f_m\|_1 < 2^{-k}$ $\forall m, n \geq n_k$.

Po trditvi od prej $f := f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ konvergira skoraj povsod proti neki funkciji $f \in L^1(\mu)$.

Ker velja: $f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) = f_{n_{k+1}}$, podzaporedje $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira proti f skoraj povsod. Ker pa velja

$$|f_{n_{k+1}}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \quad \in L^1(\mu),$$

po LDK dobimo $\lim_{k\to\infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f| \, d\mu = 0$

$$\lim_{k\to\infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f| \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_{k+1}} - f\|_1 .$$

Torej $f_{n_{k+1}} \longrightarrow f$ v $L^1(\mu)$. $\blacksquare$

3.4 Riemannov in Lebesgueov integral

25. november 2025

Naj bo $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ funkcija. Za particijo P

$$P: a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$$

intervala $[a,b]$ definiramo

$$m_j := \inf_{x_{j-1}\le x\le x_j} f(x) \quad \text{in} \quad M_j := \sup_{x_{j-1}\le x\le x_j} f(x).$$

Definiramo spodnjo in zgornjo Darbouxovo vsoto:

$$S_P := \sum_{j=1}^{n} m_j\Delta_j \quad \text{in} \quad Z_P := \sum_{j=1}^{n} M_j\Delta_j,$$

kjer je $\Delta_j := x_j - x_{j-1}$. Iz Analize 1 vemo, da je f Riemannovo integrabilna $\iff \sup_{P \text{ part}} S_P = \inf_{P \text{ part}} Z_P$.

V primeru, ko je f Riemannovo integrabilna, to število označimo z $\int_a^b f(x)dx$.

Za vsak $j=1,\dots,n$ in vsak $x\in[x_{j-1},x_j]$ velja $m_j\le f(x)\le M_j$.

Izrek: Riemannovo integrabilna funkcija $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ je Lebesgueovo integrabilna in velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f\,d\mu.$$

Dokaz: Za particijo P definiramo

$$s_P := \sum_{j=1}^{n} m_j\chi_{[x_{j-1},x_j)} + f(b)\chi_{\{b\}} \quad \text{in} \quad z_P := \sum_{j=1}^{n} M_j\chi_{[x_{j-1},x_j)} + f(b)\chi_{\{b\}}.$$

$\Rightarrow s_P\le f\le z_P$ za vsako particijo P.

Velja $\int_{[a,b]} s_P\,dm = S_P$ in $\int_{[a,b]} z_P\,dm = Z_P$

Ker je f Riemannovo integrabilna, obstaja naraščajoče zaporedje particij $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tako, da je vsaka finejša od predhodne in velja

$$\lim_{k\to\infty} S_{P_k} = \lim_{n\to\infty} Z_{P_k} = \int_a^b f(x)\,dx$$

(Tukaj seveda dolžine najsirših intervalov delitve gredo proti 0.)
Ker je P_{n+1} finejša od P_n, je torej $s_n \le s_{n+1} \le f \le z_{n+1} \le z_n$ za vsak $n\in\mathbb{N}$.
Torej $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ in $z := \lim_{n\to\infty} z_n$ po točkah dobimo
$s_n \le s \le f \le z \le z_n$ za vsak $n\in\mathbb{N}$.
s_n, z_n merljive $\Rightarrow$ s in z merljivi

$$\int_{[a,b]} s_n\,dm \le \int_{[a,b]} s\,dm \le \int_{[a,b]} z\,dm \le \int_{[a,b]} z_n\,dm$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad\qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} s\,dm = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} z\,dm \Rightarrow \int_{[a,b]} (z-s)\,dm = 0$$

$\Rightarrow z - s \equiv 0$ s.p. na $[a,b]$, saj je $z \ge s$.
$\Rightarrow f = z = s$ s.p. na $[a,b]$
$\Rightarrow f$ je Lebesgueovo merljiva, saj je Lebesgueova σ-algebra polna

$f=z$	$m(B)=0$
$f^{-1}(U)\cap A = z^{-1}(U)\cap A$	$z^{-1}(U)\cap B \subseteq B$

Skica:

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} f\,dm = \int_{[a,b]} z\,dm = \int_{[a,b]} s\,dm = \int_a^b f(x)\,dx$$

Izrek: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna $\Leftrightarrow$ Lebesgueova mera točk nezveznosti funkcije f je 0.
(f je skoraj povsod zvezna na $[a,b]$)
Brez dokaza.

Primer: Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$.

$$\frac{1}{1+x^n} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 1; & 0 \le x < 1 \\ 2; & x = 1 \end{cases}$$

(Izgornje meja je $f \equiv 2$)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \frac{dm}{1+x^n} \overset{LDK}{=} \int_{[a,b]} f\,dm = \int_{[a,b]} f\,dm$$

$$= 1 \cdot m([0,1)) + 0 \cdot m(\{1\}) = 1$$

3.5 Produktna mera (in Fubinijev izrek)

Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ merljiva prostora. Produktna σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike.

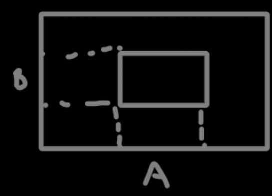
Kako definirati produktno mero na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$?

Naj bo $\mathcal{S} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Definiramo

$$\Theta(A \times B) = \mu(A) \cdot \lambda(B).$$

Trditev: $\mathcal{S}$ je polalgebra in $\Theta: \mathcal{S} \longrightarrow [0, \infty]$ je polmera.

Dokaz: i) $\emptyset, X \times Y \in \mathcal{S}$ ✓



ii) $A \times B \in \mathcal{S} \Rightarrow (A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (A \times B^c)$

Velja $(A^c \times Y) \cap (A \times B^c) = \emptyset$.

iii) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

Θ je polmera na $\mathcal{S}$

i) $\Theta(\emptyset) = \Theta(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset) \cdot \lambda(\emptyset) = 0$

ii) in iii) Naj bo $A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) \in \mathcal{S}$ in naj bodo $(A_n \times B_n)$ paroma disjunktne iz $\mathcal{S}$.

$\Theta(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(A_n \times B_n)$ oziroma $\mu(A)\lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\lambda(B_n)$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{\chi_A(x)\cdot\chi_B(y)}}{\chi_{A\times B}(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\,\chi_{B_n}(y), \text{ saj je } \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\times B_n)=A\times B$$ dijunktna unija

Fiksirajmo $x\in X$:
$$\chi_A(x)\int_Y \chi_B(y)\,d\lambda = \int_Y \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\,d\lambda$$
$$\shortparallel$$
$$\chi_A(x)\,\lambda(B)$$
$$\shortparallel \qquad \textstyle\int\sum=\sum\int$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}(x)\int_Y \chi_{B_n}(y)\,d\lambda = \sum_{n=1}\chi_{A_n}(x)\,\lambda(B_n)$$

$\Rightarrow\ \lambda(B)\,\chi_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(B_n)\,\chi_{A_n}(x) \quad \forall x\in X$

Integrirajmo po x in kot zgoraj dobimo
$$\lambda(B)\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(B_n)\mu(A_n).$$ ▨

Izrek: Polmera $\Theta:\mathcal{S}\to[0,\infty]$ se da razširiti do mere $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Če sta μ in λ σ-končni, potem je razširitev ena sama.

Dokaz: Najprej na en sam način Θ razširimo do mere na algebri, generirani z $\mathcal{S}$. Ta razširitev je ena sama. Po Caratheodorijevem izreku obstaja mera na σ-algebri vseh zunanje merljivih množic, ki razširja Θ.
Če sta μ in λ σ-končni, potem je
$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\ ;\quad \mu(X_n)<\infty \quad \text{in} \quad X_n\subseteq X_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$
$$Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}Y_n\ ;\quad \lambda(Y_n)<\infty \quad \text{in} \quad Y_n\subseteq Y_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$
$\Rightarrow X\times Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n\times Y_n)$; $\Theta(X_n\times Y_n)=\mu(X_n)\lambda(X_n)<\infty$ in $X_n\times Y_n\subseteq X_{n+1}\times Y_{n+1}$

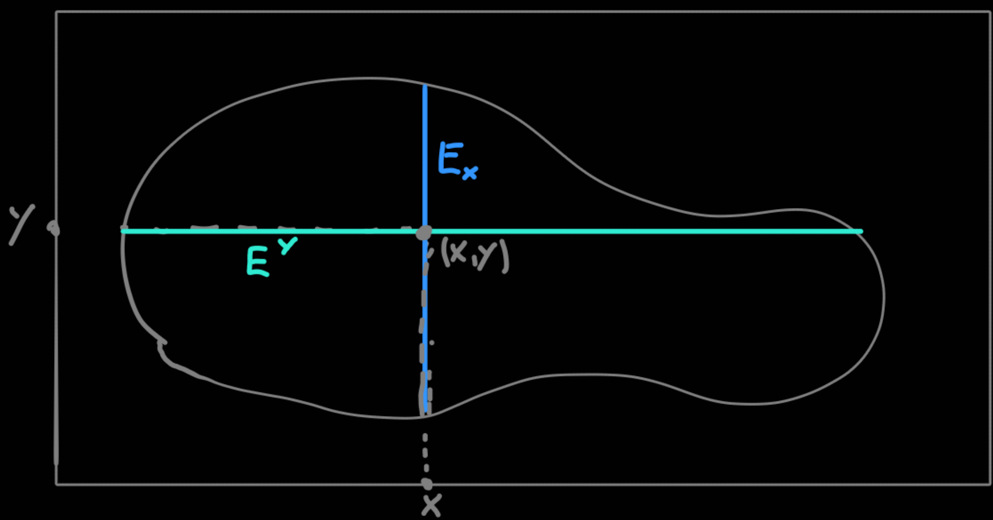
$\Rightarrow$ mera na algebri je σ-končna. Po izreku je razširitev na Caratheodorijevo σ-algebro ena sama. ▨

V primeru, ko sta X in Y σ-končna, dobljeno enolično mero imenujemo **produktna mera** in jo označimo z $\mu \times \lambda$ oziroma lahko tudi $\mu \otimes \lambda$.

Fubini iz Analize 2: $f:[a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ zvezna:

$$\int_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$
$$= \int_a^b dx \int_c^d f_x(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f^y(x)\,dx$$

Naj bo $E \subseteq X \times Y$. Za $x \in X$ in $y \in Y$ definiramo **prereza** E_x in E^y z $E_x := \{ y \in Y \mid (x,y) \in E \}$ in $E^y := \{ x \in X \mid (x,y) \in E \}$.



Podobno za $f: X \times Y \longrightarrow Z$ definiramo $f_x: Y \longrightarrow Z$ in $f^y: X \longrightarrow Z$ s predpisoma $f_x(y) = f(x,y) = f^y(x)$.

26. november 2025