2. MERLJIVE FUNKCIJE

2.1. Merljive preslikave

28. oktober, 2025

Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora. Preslikava $f: X \to Y$ je merljiva, če je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za vsak $B \in \mathcal{B}$.

Primer: Konstantne preslikave so merljive: $f \equiv b_0$

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset \ ; \ b \notin B \\ X \ ; \ b \in B \end{cases}$$

Lema: Kompozitum merljivih preslikav je merljiva preslikava.

Dokaz: $f: (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$, $g: (Y, \mathcal{B}) \longrightarrow (Z, \mathcal{C})$

$$C \in \mathcal{C}: \ (g \circ f)^{-1}(C) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(C)}_{\in \mathcal{B}})}_{\in \mathcal{A}} \qquad \blacksquare$$

Lema: Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor, Y mn. in $f: X \to Y$ preslikava.

i) $\mathcal{B}_0 = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ je σ-algebra na Y

ii) Če je $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostor in $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, potem je f merljiva $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ $\forall F \in \mathcal{F}$.

Dokaz: i) $\mathcal{B}_0$ je σ-algebra

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}_0$
- $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^c \in \mathcal{B}$

  $f^{-1}(B^c) = (\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}})^c \in \mathcal{A}$
- $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}(B_n)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

ii) $(\Rightarrow)$ ✓

$(\Leftarrow)$: $\mathcal{B}_0 := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$

$\mathcal{B}_0$ je σ-algebra po i)

Po predpostavkah je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_0 \Rightarrow \underbrace{\sigma(\mathcal{F})}_{\overset{\mathcal{B}}{\shortparallel}} \subseteq \mathcal{B}_0$

$\forall B \in \mathcal{B}$ velja $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Rightarrow f$ merljiva

<u>Posledica:</u> Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in Y topološki prostor. Tedaj je $f: (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ merljiva $\Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ $\forall U$ odp v Y.

<u>Posledica:</u> Vsaka zvezna preslikava med topološkima prostorama je merljiva glede na Borelovi σ-alg (na X in Y). ($f: (X, \mathcal{B}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ je merljiva, če je zvezna).

Merljive preslikave med topološkimi prostori, opremljenimi z Borelovimi σ-algebrami, bomo imenovali Borelove preslikave.

<u>Trditev:</u> Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f: X \to \mathbb{R}$ funkcija. NTSE:

i) f je $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ merljiva ($f: (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je merljiva).

ii) $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ ali $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

iii) $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ ali $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

iv) $f^{-1}([a, b)) \in \mathcal{A}$ $\forall a < b$ ali $f^{-1}([a, b)) \in \mathcal{A}$ $\forall a < b$

v) $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A}$ $\forall a < b$

vi) $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$ $\forall a < b$

2.2. Razširjena realna os

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} =: [-\infty, \infty]$

$-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (imamo največji ∞ in najmanjši $-\infty$ element)

Topologija na $\overline{\mathbb{R}}$:
- na $\mathbb{R}$ je običajna Evklidska topologija.
- bazni sistem okolic za ∞: $(a, \infty]$; $a \in \mathbb{R}$
- bazni sistem okolic za $-\infty$: $[-\infty, b)$; $b \in \mathbb{R}$

Topologija na $\mathbb{R}$ je natanko relativna topologija oz. inkluzija $i: \mathbb{R} \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je zvezna

Zanima nas $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \overset{?}{\longleftrightarrow} \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

Opomba: Topologija na $\overline{\mathbb{R}}$ pove, da je $x_r \longrightarrow \infty$ v smislu ANA1 natanko konvergenca v top. pr. $\overline{\mathbb{R}}$.

Trditev: Naj bo X topološki prostor in Y podprostor v X, opremljen z relativno topologijo. Tedaj je

$$\mathcal{B}(Y) := \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Dokaz: Oglejmo si $\mathcal{B} = \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{B}(X)\}$
Hitro se vidi, da je $\mathcal{B}$ σ-algebra. Po definiciji relativne topologije na Y, $\mathcal{B}$ vsebuje vse odprte množice iz Y. $\Rightarrow \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(Y)$ $\quad A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow Y \cap A \in \mathcal{B}(Y)$

$i: Y \longrightarrow X$ je zvezna, saj je Y opremljen z rel. top.

$\Rightarrow i: (Y, \mathcal{B}(Y)) \longrightarrow (X, \mathcal{B}(X))$

$A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow \underbrace{i^{-1}(A)}_{Y \cap A} \in \mathcal{B}(Y)$

Trditev: Velja $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ in

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ B \subseteq \{-\infty, \infty\}\}. \quad (*)$$

Dokaz: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \mathbb{R} \cap B, \quad B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

$\mathbb{R}$ odprta v $\overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \Rightarrow A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$(*), (\supseteq)$: B je zaprta v $\overline{\mathbb{R}} \Rightarrow B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$(\subseteq)$: $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

$A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A = (A \cap \mathbb{R}) \cup C; \quad C \subseteq \{-\infty, \infty\}$ $\blacksquare$

Trditev: Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f: X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funkcija. Tedaj je f merljiva $\Leftrightarrow f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A} \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Posledica: Če je $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ merljiva, potem je λf tudi merljiva za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dokaz: $\lambda = 0$: $\lambda f = 0$ je merljiva ✓

$\lambda > 0$: $(\lambda f^{-1})([-\infty, a]) = \{x \in X \mid (\lambda f)(x) \in [-\infty, a]\}$

$$= \{x \in X \mid f(x) \in [-\infty, \tfrac{a}{\lambda}]$$

$$= f^{-1}([-\infty, \tfrac{a}{\lambda}]) \in \mathcal{A}$$

$\lambda < 0$: podobno $\blacksquare$

Primer: $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Merljivost χ_A; $A \subseteq X$.

$$\chi_A^{-1}([-\infty, a]) = \begin{cases} X : & a \geq 1 \\ A^c : & 0 \leq a < 1 \\ \emptyset : & a < 0 \end{cases}$$

χ_A merljiva $\Leftrightarrow A^c$ merljiva $\Leftrightarrow A$ merljiva

2.3. Produktna σ-algebra

$$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}) \rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

$A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \times B$ merljiv pravokotnik

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ... σ-algebra generirana z vsemi merljivimi pravokotniki

Lema: Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora.

i) Produktna σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je najmanjša σ-algebra na $X \times Y$, da sta projekciji $\pi_1 : X \times Y \to X$ in $\pi_2 : X \times Y \to Y$ merljivi.

ii) Če je $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ in $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, potem je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ generirana z

$$\mathcal{G} := \{A \times Y \mid A \in \mathcal{E}\} \times \{X \times B \mid B \in \mathcal{F}\}$$

Dokaz: (i): Naj bosta $q_1 : X \times Y \to X$ in $q_2 : X \times Y \to Y$ merljivi glede na neko σ-algebro $\mathcal{C}$ na $X \times Y$.

$A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \underbrace{q_1^{-1}(A)}_{\in \mathcal{C}} \cap \underbrace{q_2^{-1}(B)}_{\in \mathcal{C}} \in \mathcal{C}$$

$\Rightarrow$ Po definiciji: $\mathcal{C}$ vsebuje $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

(ii): Vsi elementi $\mathcal{G}$ so merljivi pravokotniki $\Rightarrow \sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{G})$:

$$\mathcal{Z} := \{A \subseteq X \mid q_1^{-1}(A) \subseteq \sigma(\mathcal{G})\}, \quad q_1 : X \times Y \to X$$

Po lemi je $\mathcal{Z}$ σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{E} \Rightarrow \underbrace{\sigma(\mathcal{E})}_{= \mathcal{A}} \subseteq \mathcal{Z}$

$$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}: \underbrace{q_1^{-1}(A)}_{= A \times Y} \in \sigma(\mathcal{G})$$

Podobno $\forall B \in \mathcal{B}$: $X \times B \in \sigma(\mathcal{G})$

$$\Rightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \in \sigma(\mathcal{G}) \Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{G}).$$

Trditev: Naj bosta X in Y topološka prostora. Produkt $X \times Y$ opremimo s produktno σ-algebro. Tedaj velja:

i) $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}(X \times Y)$

ii) Če sta X, Y 2-števna, potem $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$.
iii) Če sta X, Y separabilna metrična prostora, potem je
$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y).$$

<u>Dokaz</u>: iii) V metričnih prostorih je separabilnost $\Leftrightarrow$ 2-števnost.

29. oktober 2025

i) Naj bo $\mathcal{C}$ σ-algebra generirana z
$$\mathcal{F} := \{ U \times Y \mid U \in \mathcal{T}_X \} \cup \{ X \times V \mid V \in \mathcal{T}_Y \}$$
Po prejšnji lemi $\mathcal{F}$ ravno generira produktno σ-algebro $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. Ker $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}_{X \times Y}$, je $\underset{\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)}{\sigma(\mathcal{F})} \subseteq \sigma(\mathcal{T}_{X \times Y}) = \mathcal{B}(X \times Y)$.

ii) $\mathcal{B}(X \times Y) \subseteq \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$
Topološki prostor je 2-števen, če obstaja števna baza za topologijo. To pomeni, da obstaja števna družina odprtih množic, da je vsaka odprta množica unija neke poddružine.
Pokazali bomo, da je vsaka odprta množica v $X \times Y$ vsebovana v $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. Ker je vsaka odprta množica v $X \times Y$ števna unija odprtih pravokotnikov, je potrebno "dokazati", da je $U \times V \in \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ za $U \in \mathcal{T}_X$, $V \in \mathcal{T}_Y$. ▨

Recimo, da imamo $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ in $(Z, \mathcal{C})$.
$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightsquigarrow ((X \times Y) \times Z, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C})$$
Podobno lahko tvorimo ostale možne produkte. Da se videti, da je $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}$ generirana z
$$\{ (A \times B) \times C \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C} \}$$
V duhu identifikacij pišemo $(X \times Y \times Z, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$.
Podobno za več prostorov.

Posledica: Za $n \in \mathbb{N}$ velja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Dokaz: $n=2$ po trditvi, saj je $\mathbb{R}$ separabilen metrični prostor.

$n \longrightarrow n+1$:
$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) &= \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ &= \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ &= \bigotimes_{i=1}^{n+1} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$
$\blacksquare$

V duhu identifikacije $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, velja:

Posledica: $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Trditev: Naj bosta $(Y_1, \mathcal{B}_1)$ in $(Y_2, \mathcal{B}_2)$ merljiva prostora, $Y_1 \times Y_2$ opremimo s produktno σ-algebro. Če je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f: X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ preslikava, tedaj je f $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$-merljiva $\Leftrightarrow$ $g_1 \circ f$ in $g_2 \circ f_2$ sta zaporedoma $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1)$- in $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_2)$-merljivi.

Dokaz: $(\Rightarrow)$: Naj bo $f: X \to Y_1 \times Y_2$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$-merljiva

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g_i \circ f"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "g_i"] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

Ker je g_i $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_i)$-merljiva, je $g_i \circ f$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_i)$-merljiva.

$(\Leftarrow)$: Naj bosta $g_1 \circ f$ in $g_2 \circ f$ merljivi. Označimo
$$\mathcal{C} := \{B \subseteq Y_1 \times Y_2 \mid f^{-1}(B) = \mathcal{A}\}$$

Vemo, da je $\mathcal{C}$ σ-algebra. Če $\mathcal{C}$ vsebuje vse merljive pravokotnike, potem je $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{C}$.

$B = B_1 \times B_2$, $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$

$$
\begin{aligned}
F^{-1}(B) &= \{x \in X \mid F(x) \in \mathcal{B}\} = \{x \in X \mid f_1(x) \in B_1 \text{ in } f_2(x) \in B_2\} \\
&= \{x \in X \mid f_1(x) \in B_1\} \cap \{x \in X \mid f_2(x) \in B_2\} \\
&= f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2) \in \mathcal{A},
\end{aligned}
$$

saj sta f_1 in f_2 merljivi. $\blacksquare$

Posledica: Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, [0, \infty]\}$. Če sta $f, g : X \longrightarrow Y$ merljivi, potem sta merljivi tudi $f + g$ in $f \cdot g$.

Dokaz: $F : X \longrightarrow Y \times Y$

$x \longmapsto (f(x), g(x))$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \times Y \arrow[d, "h"] \\
 & Y
\end{tikzcd}
$$

seštevanje ali množenje

h je zvezna, zato je $h : (Y \times Y, \mathcal{B}(X, Y)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(X))$ merljiva. Ker sta $f, g : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ merljivi, je tudi $F : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y \times Y, \mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y))$.

$\mathcal{B}(Y \times Y) = \mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y)$, ker Y 2-števen $\blacksquare$

Trditev: Linearne kombinacije merljivih preslikav z vrednosti v $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ so merljive.

Posledica: Naj bo $f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ merljiva. Tedaj sta $\operatorname{Re} f$ in $\operatorname{Im} f$ tudi merljivi.

Velja tudi obrat, saj je $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$.

2.4. Zaporedja merljivih funkcij

Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [-\infty, \infty]$ zaporedje. Definiramo $\tilde{a}_n := \sup_{n\geq k} a_k$. Tedaj je $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje in zato ima limito v $[-\infty, \infty]$. To limito označimo z

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Podobno obstaja limes inferior in velja:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Naj bo dano zaporedje $f_n : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$. Definiramo naslednje funkcije:

$$\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

$$\left(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

$$\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

<u>Primer</u>: Naj bo X neštevna množica in $\mathcal{A}$ σ-algebra števno-koštevnih (števna ali komplement števen) podmnožic v X. Naj bo $E \subseteq X$ taka množica, da niti E niti E^c ni števna. Torej $E \notin \mathcal{A} \Rightarrow \chi_E$ ni merljiva.

$\chi_E = \sup\{\chi_{\{x\}} \mid x \in E\}$ je supremum družine merljivih funkcij, vendar ni merljiva.

<u>Lema</u>: Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij iz X v $[-\infty, \infty]$.

i) Tedaj sta $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ in $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ merljivi funkciji.

ii) Tedaj sta $\limsup_{n\to\infty} f_n$ in $\liminf_{n\to\infty} f_n$ merljivi funkciji.

iii) Če $f_n \longrightarrow f$ po točkah, potem je f merljiva.

<u>Dokaz:</u> i) Označimo $g := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

$$\begin{aligned} g^{-1}([-\infty, a]) &= \{x\in X \mid g(a) \leq a\} \\ &= \{x \in X \mid f_n(x) \leq a \ \ \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x\in X \mid f_n(a) \leq a\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

saj so f_n merljive.

Funkcija $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$ je merljiva po zgornjem.

ii) $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\sup_{k\geq n} f_k}_{g_n \ldots \text{ merljivo po i)}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n \leftarrow$ merljivo po i)

Podobno $\liminf_{n\to\infty} f_n$.

iii) Če $f_n \longrightarrow f$ po točkah, potem $f = \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$. ▨

2.5. Aproksimacija s stopničastimi funkcija

Funkcija $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ je stopničasta, če ima končno zalogo vrednosti.

Če $Z_f = \{a_1, \ldots, a_n\}$, pri čemer $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$, potem

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \chi_{f^{-1}(\{a_k\})} = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k},$$

kjer je $A_k = f^{-1}(\{a_k\})$.

<u>Opazka:</u> f merljiva $\Leftrightarrow$ A_k merljive $\forall k = 1, 2, \ldots, n$.

<u>Dokaz:</u> ($\Leftarrow$): A_k merljiva $\Rightarrow$ χ_{A_k} merljiva $\Rightarrow$ f merljiva kot linearna kombinacija merljivih

($\Rightarrow$): Naj bo U_k odprta množica, ki vsebuje a_k, ne vsebuje a_j za $j \neq k$. $f^{-1}(U_k) = A_k$ (Lahko vzameš singleton) $\Rightarrow$ A_k merljiva. ▨

Zgoraj je f v kanonični obliki: a_k paroma različni, A_k paroma disjunktne in $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$.

Vektorski prostor vseh omejenih merljivih funkcij opremimo s supremum normo.

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Dobimo normiran prostor.

<u>Trditev:</u> Prostor vseh omejenih merljivih funkcij na X je Banachov prostor glede na $\|\cdot\|_\infty$.

<u>Dokaz:</u> $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo $\Rightarrow$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno v $\mathbb{C}$
$\Rightarrow \exists f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ je enakomerna limita

$$\left(\begin{array}{ll} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon & \text{za } m,n \geq n_\varepsilon \ \forall x \in X \\ \downarrow & \\ |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon & \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ f je limita po točkah zaporedja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\Rightarrow$ f merljiva ▨

Iz naslednjega izreka bo sledilo, da je vektorski prostor vseh stopničastih merljivih funkcij gost v prostoru vseh omejenih merljivih funkcij.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{stop. merlj.}}}{S(X)} \text{ gosta v } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{om. merlj.}}}{B(X)}$$

<u>Izrek:</u> Naj bo $f: X \to [0,\infty]$ merljiva. Tedaj obstaja naraščajoče zaporedje nenegativnih merljivih stopničastih funkcij $f_n: X \to [0,\infty)$, da $f_n \nearrow f$ po točkah. Ta konvergenca je enakomerna na vsaki množici, kjer je f omejena.

Opomba: Če je f omejena, potem $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $f_n : X \to [0,\infty)$ stopničasta in $f_n \to f$ enakomerno.

$f: X \to \mathbb{C}$ merljiva $\Rightarrow f = \mathrm{Re}f + \mathrm{Im}f = (\mathrm{Re}f^+ - \mathrm{Re}f^-) + i(\mathrm{Im}f^+ - \mathrm{Im}f^-)$.

$\mathrm{Re}f^+, \mathrm{Re}f^-, \mathrm{Im}f^+, \mathrm{Im}f^- : X \to [0,\infty)$ so omejene, če f omejena.

Po zgornjem $\exists (u_n)_n, (v_n)_n, (\rho)_n, (\zeta_n)_n$ zap. neneg. stop. merlj. funk., da so konvergence $u_n \to \mathrm{Re}f^+$, $v_n \to \mathrm{Re}f^-$; $\rho_n \to \mathrm{Im}f^+$, $\zeta_n \to \mathrm{Im}f^-$ enakomerne. $\Rightarrow \underbrace{u_n - v_n + i(\rho_n - \zeta_n)}_{\text{stop. kompl. merlj. funkcija}} \longrightarrow f$ enakomerno

Dokaz (izreka o aproksimaciji):

Za $\forall n \in \mathbb{N}$ in $k = 1, 2, \dots, n\cdot 2^n$ definiramo merljive množice

$$E_{n,k} := \{x \in X \mid \tfrac{k-1}{2^n} \le f(x) < \tfrac{k}{2^n}\} = f^{-1}([\tfrac{k-1}{2^n}, \tfrac{k}{2^n}])$$

in
$$F_n := \{x \in X \mid f(x) \ge n\} = f^{-1}([n, \infty]).$$

Definiramo
$$f_n = \left(\sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}}\right) + n\chi_{F_n}.$$

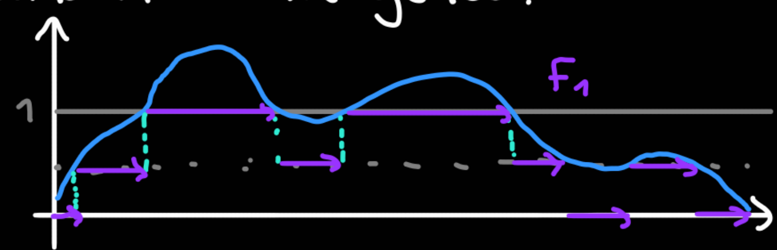
f_n so stopničaste, nenegativne in merljive. Da se videti, da je $f_n \le f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Za $x \in f^{-1}([0,n])$ velja $|f(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2^n}$.

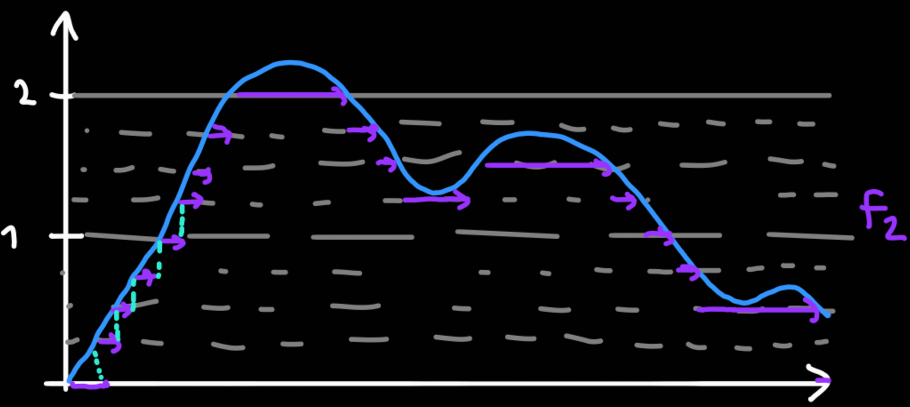
Če $f(x) < \infty$, potem od nekod dalje velja $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$.

Torej $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow f(x)$ oziroma $f_n(x) \nearrow f(x)$.

Če $f(x) = \infty$, potem je $s_n(x) = n \longrightarrow \infty$. Torej $f_n \nearrow f$.

Naj bo $A \subseteq X$ taka, da je $f|_A$ omejena. Tedaj je $A \cap F_n = \emptyset$ od nekod dalje. Od prej: vsak $x \in A$ zadošča
$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^n} \quad \forall n \ge n_0.$$
To je enakomerna konvergenca. ▨





$2 \cdot 2^2 = 8$ nivojev

Posledica: Naj bo $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ merljiva. Tedaj obstaja zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ merljivih stopničastih funkcij, da velja $0 \le |f_1| \le |f_2| \le \cdots$ in $f_n \longrightarrow f$ po točkah. Konvergenca je enakomerna na vsaki množici, na kateri je f omejena.

Dokaz: DN

2.6. Načini konvergence

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljivi prostor in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij. Pravimo, da $f_n \longrightarrow f$ skoraj enakomerno, če za $\forall \varepsilon > 0$. $\exists A \in \mathcal{A}$, da $\mu(A^c) < \varepsilon$ in $f_n \longrightarrow f$ enakomerno na A.
Pravimo, da $f_n \longrightarrow f$ skoraj povsod, če ima množica $\{x \in X \mid f_n(x) \not\longrightarrow f(x)\}$ ničelno mero. Lahko se zgodi, da limitna ni merljiva.

Trditev: Če $f_n \longrightarrow f$ skoraj enakomerno, potem $f_n \longrightarrow f$ skoraj povsod.

Dokaz: Za $\forall m \in \mathbb{N}. \exists A_m.\ \mu(A_m^c) < \frac{1}{m}$ in $f_n \longrightarrow f$ enakomerno na A_m. Zato $f_n \longrightarrow f$ po točkah na A_m.
$\Rightarrow f_n \longrightarrow f$ po točkah na $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. Velja

$$\mu\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)^c\right) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m^c\right) \le \frac{1}{m} \longrightarrow 0 \qquad \blacksquare$$

skoraj povsod $\rightsquigarrow$ s.p.
almost everywhere $\rightsquigarrow$ a.e] tipične okrajšave

5. november 2025

Lastnost $\mathcal{P}$ velja skoraj povsod, če ima komplement množice vseh $x \in X$, za katere $\mathcal{P}$ velja, mero nič.

<u>Primer</u>: i) konvergenca skoraj povsod $f_n \to f$ skoraj povsod:

$$\mathcal{P} \dots f_n(x) \longrightarrow f(x)$$

ii) $f \geq 0$ skoraj povsod

$$\mathcal{P} \dots \quad f(x) \geq 0$$

<u>Izrek [Jegorov]</u>: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s končno mero. Če so $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljive in $f_n \longrightarrow f$ skoraj povsod, kjer je f merljiva, potem $f_n \longrightarrow f$ skoraj enakomerno.

<u>Dokaz</u>: $f_n \longrightarrow f \iff f_n - f \longrightarrow 0$ (velja za skoraj povsod in skoraj enakomerno)
BŠS. $f_n \longrightarrow 0$ skoraj povsod.
Zapišimo $X = X' \cup N$; $\mu(N) = 0$ in $f_n \longrightarrow f$ na X' po točkah.
Če dokažemo, da $f_n \longrightarrow 0$ skoraj enakomerno na X', potem gre $f_n \longrightarrow 0$ skoraj enakomerno na X.
BŠS $f_n \longrightarrow 0$ po točkah na X.
Vpeljimo množice

$$A_{k,m} = \{x \in X \mid |f_n(x)| \leq \tfrac{1}{m} \quad \forall n \geq k\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,m} = X \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$x \in X$: $f_n(x) \longrightarrow 0$

$$\forall m \in \mathbb{N}. \exists k \in \mathbb{N}. \ |f_n(x)| \leq \tfrac{1}{m} \quad \forall n > k \Rightarrow x \in A_{k,m}$$

Hkrati $A_{k,m} \subseteq A_{k+1,m}$ $\forall m \in \mathbb{N}. \forall k \in \mathbb{N}$

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,m}; \quad A_{k,m} \subseteq A_{k+1,m} \Rightarrow \mu(X) = \lim_{k \to \infty} (A_{k,m}) \qquad (*)$$

Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Iz $(*)$ sledi, da za $m \in \mathbb{N}$. $\exists\, k_m \in \mathbb{N}$.

$$\mu(A_{k_m,m}) \geq \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2^m}$$

Definirajmo $A := \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{k_m,m} \Rightarrow \mu(A^c) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A^c_{k_m,m})$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\mu(X) - \mu(A_{k_m,m})\right)$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.$$

$f_n \longrightarrow 0$ enakomerno na A

$x \in A \Rightarrow x \in A_{k_m,m}\ \forall m \in \mathbb{N}$

$\delta > 0.\ \exists m \in \mathbb{N}.\ \frac{1}{m} < \delta$

$x \in A_{k_m,m} \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{m} < \delta\ \ \forall n \geq k_m$

To je definicija enakomerne konvergence na A. $\blacksquare$

Zaporedje merljivih funkcij $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ **konvergira po meri** proti merljivi funkciji f, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Primer: i) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$

$f_n = \chi_{(n,n+1]}$

$$f_n(x) = \chi_{(n,n+1]}(x) = \begin{cases} 1; & x \in (n,n+1] \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n \longrightarrow 0$ po točkah

$f_n \not\longrightarrow 0$ po meri:

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in X \mid \chi_{(n,n+1]}(x) \geq \varepsilon\}$$

$\varepsilon = 1/2 \Rightarrow \{x \in X \mid \chi_{(n,n+1]}(x) \geq 1/2\} = (n, n+1]$

$$m(\{x \in X \mid \chi_{(n,n+1]}(x) \geq 1/2\}) = 1 \not\longrightarrow 0$$

$f_n \not\rightarrow 0$ skoraj enakomerno

$$|f_n(x) - 0| = |\chi_{(n,n+1)}(x) - 0| = \begin{cases} 1; & x \in (n, n+1) \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Če bi za $\varepsilon = 1/2$, A borelova, da $m(A^c) < 1/2$ in $f_n \to 0$ enak. na A. Iz zgornjega sledi, da tak A ne obstaja.

ii) $[0,1]$, Leb. mera (oziroma njena zožitev na $[0,1]$)

$f_1 = \chi_{[0,1]}$,

$f_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_3 = \chi_{[1/2,1]}$

$f_4 = \chi_{[0,1/4]}$, $f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}$, $f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}$, $f_7 = \chi_{[3/4,1]}$

$\vdots \quad \ddots$

Za $\forall x \in [0,1]$ ima zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ neskončno mnogo 1 in 0. Torej ne konvergira po točkah (v nobeni točki).

$f_n \longrightarrow 0$ po meri

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}$$

Ta množica ima mero enako meri ustreznega intervala, ki definira f_n. Ker te mere konvergirajo proti 0, velja $f_n \longrightarrow 0$ po meri

Opomba: Izrek Jegorova ne velja nujno, če je $\mu(X) = \infty$.

11. november 2025

Trditev: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij in f merljiva.

i) $f_n \to f$ skoraj enakomerno $\Rightarrow f_n \to f$ po meri

ii) $\mu(X) < \infty$ in $f_n \to f$ skoraj povsod $\Rightarrow f_n \to f$ po meri

Dokaz: i) Glej vaje.

ii) $\mu(X) < \infty \overset{\text{Jegorov}}{\Longrightarrow} f_n \to f$ skoraj enak. $\overset{i)}{\Longrightarrow} f_n \to f$ po meri. $\blacksquare$