

Teorija mere

Predavatelj: Marko Kandić

Teorija mere \approx realna analiza
ta predmet

1. oktober 2025

1. MERE

1.1. σ -algebri

Naj bo X neprazna množica. Družina podmnožic $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je σ -algebra, če velja:

- i) $X \in \mathcal{A}$
- ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Če namesto iii) zahtevamo $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$:

- iii') $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A},$

potem je \mathcal{A} algebra.

Če je \mathcal{A} σ -algebra, potem je (X, \mathcal{A}) merljiv prostor.

Elementi \mathcal{A} so merljive množice.

Opomba: i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Vsaka σ -algebra je algebra.

iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$$

Primeri: i) $X, \mathcal{A} = \{\emptyset, X\} \leftarrow$ trivialna σ -algebra
 (X, \mathcal{A}) je trivialni merljiv prostor

- ii) $(X, \mathcal{P}(X))$, $\mathcal{P}(X)$ potenčna σ -algebra
 iii) X , $\mathcal{A} = \{E \subseteq X \mid E \text{ števna ali } E^c \text{ števna}\}$
 povezana s topologijo končnih komplementov

Če je X neštevna, je $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$.

Trditve: Naj bo B družina podmnožic množice X .
 Tedaj obstaja najmanjša σ -algebra na X , ki vsebuje B . Ta je enaka preseku vseh σ -algeber, ki B vsebujejo.

Oznaka: σ -algebra iz trditve označimo z $\sigma(B)$.

Dokaz: $\mathcal{C} := \{\text{vse } \sigma\text{-algebri, ki vsebujejo } B\}$
 $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \neq \emptyset$

Presek vseh σ -alg iz \mathcal{C} je σ -algebra. (ocitno)
 Po definiciji mora biti najmanjša.

Borelove množice

(X, τ) topološki prostor

$\sigma(\tau)$ je Borelova σ -algebra; σ -algebra generirana z vsemi odprtimi množicami

Ker je $A = (A^c)^c$, je $\sigma(\tau)$ generirana z zaprtimi množicami. Namesto $\sigma(\tau)$ pišemo $\mathcal{B}(X)$ ali \mathcal{B}_X .

$A \in \mathcal{B}(X)$ je

- F_σ množica, če je števna unija zaprtih množic
- G_σ množica, če je števen presek odprtih množic

Primer: $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$
 $= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$

Trditev: $A \in \mathbb{R}^n$

- i) A zaprta $\Rightarrow A$ je G_σ
- ii) A odprta $\Rightarrow A$ je F_σ

Brez dokaza. Enostaven.

Trditev: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je generirana s katerokoli od spodnjih družin generatorjev:

- i) $\Sigma_1 = \{(a, b) \mid a < b\}$
- ii) $\Sigma_2 = \{[a, b] \mid a < b\}$
- iii) $\Sigma_3 = \{[a, b) \mid a < b\}$
- iv) $\Sigma_4 = \{(a, b] \mid a < b\}$
- v) $\Sigma_5 = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$
- vi) $\Sigma_6 = \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$
- vii) $\Sigma_7 = \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$
- viii) $\Sigma_8 = \{(-\infty, a]\mid a \in \mathbb{R}\}$

Dokaz: i) $\Sigma_1 \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \sigma(\Sigma_1) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ker je neka odprta mn. števna unija odprtih odprtih int.,
je $\mathcal{T} \subseteq \delta(\Sigma_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\Sigma_1)$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$

ii) Ker je vsake (a, b) st. unija zaprtih int oblike
 $[a, b]$, je $\sigma(\Sigma_1) \subseteq \sigma(\Sigma_2) \Rightarrow \sigma(\Sigma_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.2. Pozitivne mere

7. oktober 2025

Definicija: Pozitivna mera (ali zaenkrat samo mera) je preslikava $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [\Omega, \infty]$, ki ima naslednje lastnosti

i) $\mu(\emptyset) = 0$

zaprt interval

razširitev realne osi z največjim elementom

ii) A_1, A_2, \dots paroma disjunktne iz \mathcal{A} , potem je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

iii) se imenuje števna ali σ -aditivnost.

(X, \mathcal{A}) merljiv prostor

(X, \mathcal{A}, μ) merljiv prostor z mero oz. merljiv prostor oz. prostor z mero

Če vzamemo $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \dots$, potem dobimo končno aditivnost

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Primeri:

i) $X \neq \emptyset, x \in X \quad (X, \mathcal{P}(X))$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

μ je mera, označimo jo z δ_x ... Diracova mera

ii) $X \neq \emptyset; \quad (X, \mathcal{P}(X))$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|; & |A| < \infty \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$

mera štetja točk

iii) Naj bo X neštevna in

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ števna ali } A^c \text{ števna}\}$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ števna} \\ 1; & A^c \text{ steven} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{je mera.} \\ \text{Dokaz na vajah.} \end{array}$$

iv) X neskončna mn.

$$\mu: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

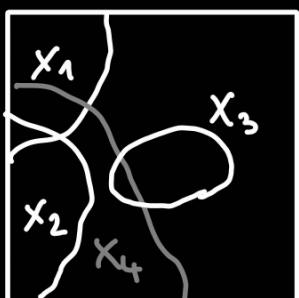
$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ števna} \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$

ni števno aditivna, je končno aditivna.

(X, \mathcal{A}, μ) : Mera μ je končna, če je $\mu(X) < \infty$.

Mera μ je σ -končna, če

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n \text{ in } \mu(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



X

V definiciji σ -končnosti lahko ekvivalentno zahtevamo

i) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so paroma disj., z unijo X

ii) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je naraščajoče z unijo X

UPORABNO

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spl. $\rightsquigarrow X_1, X_1 \cup X_2, X_1 \cup X_2 \cup X_3, \dots$
iz spljoščega zaporedja dobimo naraščajoče zaporedje $\rightsquigarrow X_1, X_2 \setminus X_1, X_3 \setminus (X_2 \cup X_1), \dots$
št. unija paroma disjunktnih

Lema: Naj bo $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ končno aditivna funkcija na algebri \mathcal{A} . Tedaj velja:

$$A, B \in \mathcal{A} \text{ in } A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B). \quad \text{MONOTONAST}$$

Dokaz: $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

□

Irditev: Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) prostor z mero. Tedaj za \forall zap. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$
Tedaj so $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne iz \mathcal{A} .

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j \text{ in } \bigvee_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} B_j$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Irditev: Naj bo $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ končna aditivna funkcija, kjer je (X, \mathcal{A}) merljiv prostor.
Tedaj je μ mera $\Leftrightarrow \forall$ naraščajoče zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih množic velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: (\Rightarrow): Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje v \mathcal{A} .



$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_2, \dots$$

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \mu(B_n) \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \dots + \mu(A_k \setminus A_{k-1}))$$

$$\forall j. \mu(A_j) < \infty \Rightarrow = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_1) + (\mu(A_2) - \mu(A_1)) + \dots + (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1}))) \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

Če je $\mu(A_j) = \infty$, potem je $\mu(A_k) = \infty \forall k \geq j$ in zaradi monotonoosti mere velja enakaj v trditvi.

(\Leftarrow): Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje paroma disjunktnih množic v \mathcal{A} .

$B_n := \bigcup_{k=1}^n A_k$ Tedaj je $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče v \mathcal{A} .

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \square$$

Irditev: Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) prostor z mero in $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče zaporedje mn. v \mathcal{A} . Če je $\mu(A_1) < \infty$, potem

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: Ker $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče je $(A_1 \setminus A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c) = A_1 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\mu(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right) \stackrel{\substack{\text{prejčna} \\ \text{trditve}}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n) \\ \stackrel{\text{II}}{=} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \stackrel{\text{II}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n))$$

$$\Rightarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

□

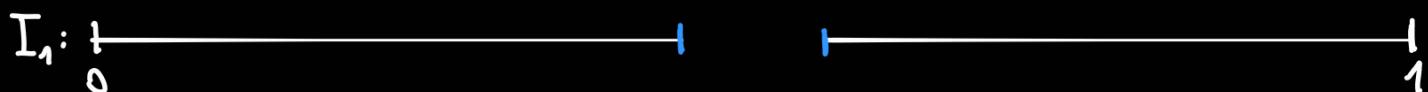
Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ šteje točke

$$A_n = \{n, n+1, \dots\}, \quad \mu(A_n) = \infty$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

Ta primer pokazuje, da prejšnja trditev ne velja nujno, če je $\mu(A_1) = \infty$.

Primer: Oglejmo si konstrukcijo posplošene Cantorjeve množice.



I₁: Izrežemo d₁-ti delež skoli $1/2$ za $0 < d_1 < 1$.

I₂ dobimo tako, da od vsakega intervala i ∈ I₁ izrežemo centralni interval deleža d₂ za $0 < d_2 < 1$.



Postopek nadaljujemo. Dobimo množico I_n, ki je unija 2^n intervalov iste dolžine. Za $0 < d_n < 1$ iz vsakega od teh intervalov izrežemo centralni interval deleža d_{n+1}. Če $d_3 = d_4 = d_5 = \dots$ dobimo Cantorjevo množico. Sicer v preseku $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ dobimo posplošeno Cantorjevo množico.

Zaenkrat predpostavimo obstoj Lebesgueove mere,

ki se na intervalih vjema z njihovo dolžino.

$$m(I_0) = 1$$

$$m(I_1) = m(I_0) - m(I_0)\alpha = m(I_0)(1-\alpha_1) = 1-\alpha_1$$

$$m(I_2) = m(I_1)(1-\alpha_2) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$$

$$m(I_3) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)$$

:

$$m(I_n) = \prod_{k=1}^n (1-\alpha_k)$$

Po prejšnji trditvi je

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1-\alpha_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_k)$$

V primeru Cantorjeve množice je $\frac{1}{3} = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots$, zato je $m(C) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3} = 0$.

Izrek: Posplošena Cantorjeva množica je metrizabilen kompakten nikjer gost povsem nepovezan prostor brez izoliranih točk z mero $\prod_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_k)$. To je lahko $> 1 - \varepsilon$, ampak nikjer gost!

Irditer: Posplošena Cantorjeva množica ima pozitivno mero $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ konvergira.

8. Oktober 2025

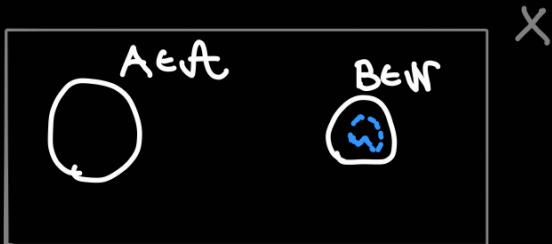
1.3. Napolnitveni prostori z mero

Definicija: (X, \mathcal{A}, μ) prostor z mero. A $\in \mathcal{A}$ je μ -ničelna, če je $\mu(A) = 0$.

Oznacimo $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = 0\}$.

Lema: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$

Dokaz: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$



Definicija: (X, \mathcal{U}, μ) je poln, če $\forall N \in \mathbb{N}$ in $B \subseteq N$ sledi $B \in \mathcal{A}$.

Izrek: Naj bo (X, \mathcal{U}, μ) prostor z mero. Naj bo

$$\bar{\mathcal{A}} := \{A \cup S \mid A \in \mathcal{A}, \exists N \in \mathbb{N}. S \subseteq N\}.$$

Tedaj je $\bar{\mathcal{A}}$ σ -algebra, ki vsebuje \mathcal{U} . Če za $A \cup S \in \bar{\mathcal{A}}$ definiramo $\bar{\mu}(A \cup S) := \mu(A)$ potem je $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ poln merljiv prostor.

Dokaz: $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{U}$

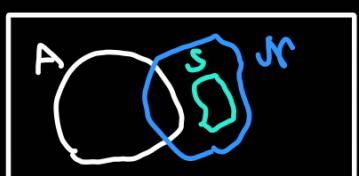
$$A \in \mathcal{U} \Rightarrow A = A \cup \emptyset$$

$\bar{\mathcal{A}}$ je σ -algebra.

i) $X \in \bar{\mathcal{A}}$, ker $X = X \cup \emptyset$

ii) $A \cup S \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow (A \cup S)^c \in \bar{\mathcal{A}}$.

$$\exists N \in \mathbb{N}. S \subseteq N$$



$$\begin{aligned} (A \cup S)^c &= A^c \cap S^c = A^c \cap (N^c \cup N \setminus S) \\ &= \underbrace{(A^c \cap N^c)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(A^c \cap N \setminus S)}_{S \subseteq N} \end{aligned}$$

$$\text{iii) } A_n \cup S_n \in \bar{\mathcal{A}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) \in \bar{\mathcal{A}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad N_n \in \mathcal{W}. \quad S_n \subseteq N_n$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{W}$$

$\bar{\mu}: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow [0, \infty]$ je dobro definirana pozitivna mera

$$E \in \bar{\mathcal{A}}; \quad E = A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2 \\ S_1 \subseteq N_1 \in \mathcal{W}, \quad S_2 \subseteq N_2 \in \mathcal{W} \\ \Rightarrow \bar{\mu}(A_1) = \bar{\mu}(A_2)$$

$$A_1 \subseteq A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2 \subseteq A_2 \cup N_2$$

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup N_2) \leq \mu(A_2) + \mu(N_2) = \mu(A_2)$$

Podobno $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$.

$\bar{\mu}$ je mera:

$$\cdot \bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$$

Najbo $(A_n \cup S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disj. zap. mn. v $\bar{\mathcal{A}}$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n)\right) &= \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n \cup S_n) \end{aligned}$$

$(X, \mathcal{F}, \bar{\mu})$ je poln

$$\bar{\mu}(N) = 0, \quad S \subseteq N \Rightarrow S \in \bar{\mathcal{A}}$$

$$N = A \cup \tilde{S}; \quad A \in \bar{\mathcal{A}}, \quad \tilde{S} \subseteq \tilde{N} \in \mathcal{N}$$

Po definiciji je $\bar{\mu}(N) = 0$
 $\|$
 $\mu(A) \Rightarrow A \in \mathcal{W}$

$$S = \emptyset \vee S ; S \subseteq N \subseteq A \cup \tilde{N} \in \mathcal{W}$$



Primer: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Izkaže se $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$. (Brez dokaza.)

Če je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ polna, potem so vse podmnožice Cantorjeve množice merljive. Ker $|\mathcal{C}| = |\mathbb{R}|$, bi bilo $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}}$ ~~✗~~
 Torej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ ni poln prostor.

Napolnitvev je Lebesgueova σ -algebra.

$$\Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| = 2^{\mathbb{R}}$$

$$\text{Ker } \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{ je } |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \leq 2^{\mathbb{R}}$$

$$\text{Imamo } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

\uparrow prava vsebovanost?

Primer: Pokazali bomo, da na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ pod privzetkom aksioma izbire ne obstaja translacijsko invariantna mera.
 μ je translacijsko invariantna, če za $\forall A$ velja $\mu(A+x) = \mu(A)$. $A+x = \{a+x \mid a \in A\}$.

Na \mathbb{R} vpeljemo relacijo \sim : $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$

\mathbb{R} razpade na ekvivalenčne razrede 14. oktober 2025

\mathbb{R}/\sim kvocientni prostor

Skonstruirali bomo tako množico, ki bo preprečila obstoj translacijsko inv. mere na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Sledil bi, da obstaja Lebesguev nemerljiv mn.

$\forall x \in [-1, 1]$ izberemo predstavniku ekv. razreda $[x]$, ki leži v $[-1, 1]$. Tukaj uporabimo aksiom izbire. Naj bo S množica vseh ravnskark izbranih predstavnikov. Velja $S \subseteq [-1, 1]$.

Def. $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q} \cap [-2, 2]$.

Def. $\tilde{F} = \{r + S \mid r \in \mathbb{Q}_1\} \leftarrow \text{števna množica}$

Velja: $(r + S) \cap (r' + S) = \emptyset$ za $r = r'$

$$r + S = r' + S \Rightarrow S - S = r - r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow S \sim S \quad \times$$

ii) $[-1, 1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + S)$

$x \in [-1, 1], \exists s \in S \subseteq [-1, 1]$, da je $x \sim s$

$$g := x - s \in \mathbb{Q}$$

$$|g| \leq |x| + |s| \leq 2 \Rightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (r + S)$$

Velja $[-1, 1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + S) \subseteq [-3, 3]$.

Če bi obstajala transl. inv. mera na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ki se na intervalih ujema z dolžino, potem bi veljalo

$$2 \leq \mu\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r + S)\right) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(r + S) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(S) \leq 6 \quad \times$$

Kasneje bomo skonstruirali Leb. mero, ki je definirana na Leb. σ -algebri. Ta je zaprta za translacijo, Leb. mera pa je transl. invariantna. Zato S ni Leb. merljiva.

1.4. Zunanja mera

Zunanja mera na množici X je funkcija $\xi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$, za katere velja:

i) $\xi(\emptyset) = 0$

ii) $\xi(A) \leq \xi(B) \quad \forall A \subseteq B$

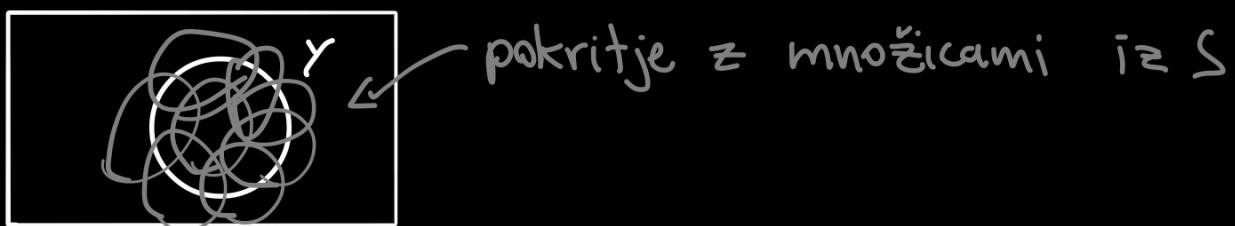
iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n) \quad \xi(A \cup (B \setminus A)) \leq$

vedno def. na
 $\mathcal{P}(X)$

Irditer: Naj bo S družina podmnožic neprazne množice X , ki vsebuje \emptyset in X . Naj bo $\mu: \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty]$ funkcija za katero velja $\mu(\emptyset) = 0$. Definiramo $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ s predpisom

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \mid (A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq S \text{ pokritje za } Y \right\}.$$

Tedaj je μ^* zunanjia mera.



Dokaz: i) $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

ii) $A \subseteq B$. neko pokritje za B je pokritje za A
 $\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) Neenakost drži, če je $\mu^*(A_n) = \infty$ za nek $n \in \mathbb{N}$.

Predpostavimo, da je $\mu^*(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\varepsilon > 0$. Tu $n \in \mathbb{N}$ \exists pokritje $(A_{nj})_j$ za A_n , da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{nj}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$\Rightarrow (A_{nj})_{n, j \in \mathbb{N}}$ je pokritje za $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{nj}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* + \varepsilon \end{aligned}$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, dobimo števno subadditivnost. □

Definicija: Naj bo ξ zunanjja mera na $\mathcal{P}(X)$. Množica $A \subseteq X$ je zunanje merljiva oziroma ξ -merljiva, če je

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c)$$

za vsak $Y \subseteq X$.



Da preverimo $\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c)$, moramo preveriti \leq in \geq . Sledi iz (iii) def. zunanjih mera. Zato zadostuje preveriti:

$$\xi(Y) \geq \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c). \quad (*)$$

Če $\xi(Y) = \infty$, potem (*) velja, sicer moramo preveriti.

Carathéodoryjev izrek: Naj bo ξ zunanjja mera na X . Tedaj je

$$\mathcal{A}_\xi = \{A \subseteq X \mid A \text{ je } \xi\text{-merljiva}\}$$

σ -algebra, trojica $(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$ pa je poln merljiv prostor.

Dokaz: \mathcal{A}_ξ je σ -algebra

$$\begin{aligned} i) Y \subseteq X &\Rightarrow \xi(Y) = \xi(Y \cap \emptyset) + \xi(Y \cap \emptyset^c) = 0 + \xi(Y). \\ &\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_\xi \end{aligned}$$

$$ii) \xi(Y) = \xi(Y \cap A^c) + \xi(Y \cap A^c)^c = \xi(Y \cap A) \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\xi$$

Najprej bomo dokazali, da je \mathcal{A}_ξ zaprt za končne unije, torej algebra, zaprtost za števne unije pa bomo dokazali hkrati s števno aditivnostjo $\xi|_{\mathcal{A}_\xi}$ za števne disjunktne družine množic.

$$A, B \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_\xi$$

$$\xi((A \cup B) \cap Y) + \xi((A \cup B)^c \cap Y) = \xi((A \cap Y) \cup (B \cap Y)) + \xi((A \cap Y)^c \cup (B \cap Y)^c)$$

$$\begin{aligned}
 &= \xi(A \cap Y \cup B \cap A^c \cap Y) + \xi(A^c \cap B^c \cap Y) \\
 &\leq \xi(A \cap Y) + \xi(B \cap A^c \cap Y) + \xi(B^c \cap A^c \cap Y) \\
 &= \xi(A \cap Y) + \xi(A^c \cap Y) = \xi(Y).
 \end{aligned}$$

$\nearrow B \in \mathcal{A}_\xi$ $\uparrow A \in \mathcal{A}_\xi$

$\Rightarrow \mathcal{A}_\xi$ je algebra.

$$\text{Naj bodo } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi$$

$$A_1 = A_1, \quad A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))$$

Dokazali bomo, da je \mathcal{A}_ξ zaprta za števne disjunktne unije in ker je \mathcal{A}_ξ algebra, bo sledilo, da je \mathcal{A}_ξ σ -algebra.

Naj bodo $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne mn. iz \mathcal{A}_ξ .

$$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi \quad \text{in} \quad \xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$$B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}_\xi$$

$$Y \subseteq X \Rightarrow \xi(Y \cap B_n) = \xi(Y \cap B_n \cap A_n) + \xi(Y \cap B_n \cap A_n^c)$$

$$\begin{aligned}
 &\quad \boxed{A_1 | A_2 | \cdots | A_n | \cdots} \quad X \\
 &= \xi(Y \cap A_n) + \xi(Y \cap B_{n-1}) \\
 &= \cdots = \sum_{j=1}^n \xi(Y \cap A_j)
 \end{aligned}$$

$$Y = B_n \Rightarrow \xi(B_n) = \sum_{j=1}^n \xi(A_j)$$

$\Rightarrow \xi$ je končno aditivna na \mathcal{A}_ξ

$$\xi(B) \geq \xi(B_n) = \sum_{j=1}^n \xi(A_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$$\Rightarrow \xi(B) \geq \sum_{j=1}^n \xi(A_j) \quad \text{Ker } \xi \text{ stevno subaditivna, je}$$

$$\xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$B \in A_\xi$

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c)$$

$$\geq \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c)$$

$$= \sum_{j=1}^n \xi(Y \cap A_j) + \xi(Y \cap B^c)$$

$$\geq \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c).$$

Ker je ξ st. svbaditvna je $\xi(Y) = \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c)$.

$\Rightarrow B \in A_\xi$.

$(X, A_\xi, \xi|_{A_\xi})$ je poln merljiv prostor

$M \in A_\xi$ in $\xi(M) = 0$, $N \subseteq M$

$$Y \subseteq X. \quad \underbrace{\xi(Y \cap N)}_{\substack{\text{monotonost} \\ \text{svbaditivnost}}} + \xi(Y \cap N^c) = \xi(Y \cap N^c) \leq \xi(Y)$$

$$\xi(Y) \leq \xi(Y \cap N) + \xi(Y \cap N^c)$$



1.5. Mera na algebri:

Mera na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je preslikava $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, za katero velja:

$$i) \mu(\emptyset) = 0$$

ii) A_1, A_2, \dots paroma dij. v it in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, potem

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Izrek: Naj bo μ mera na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Za $Y \subseteq X$ definiramo zunanjš mero

$$\mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ je pokritje za } Y \right\}.$$

Tedaj je $\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Dokaz: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A)$$

$$\mu(A) \leq \mu^*(A).$$

Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pokritje za A z mnogicami iz \mathcal{A} .

$$B_1 = A \cap A_1, \quad B_2 = A \cap (A_2 \setminus A_1), \quad B_3 = A \cap (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)), \dots$$

$B_i \cap B_j \neq \emptyset$ za $i \neq j$ in

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \cap A \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A$$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

To velja za vsako pokritje $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$, zato tudi v infimumu dobimo isti neenacuj $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$$

15. oktober 2025

$A \in \mathcal{A}$ in $Y \subseteq X$. Da je $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ moramo preveriti, da je $\mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) \stackrel{(*)}{=} \mu^*(Y) \quad \forall Y \subseteq X, \mu^*(Y) < \infty$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Po definiciji zunanje mere obstaja tako pokritje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ za Y , da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Y) + \varepsilon.$$

Po definiciji zunanje mere velja

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap Y) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \text{ in } \mu^*(A^c \cap Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n). \\ \Rightarrow \mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A \cap A_n) + \mu(A^c \cap A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu((A \cap A_n) \cup (A^c \cap A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^* + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pošljimo $\varepsilon \rightarrow 0$ in dobimo $(*)$. □

Nekaj oznak: \mathcal{A} je algebra, μ_0 je mera na algebri, $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, $\mu := \mu_0^*|_{\mathcal{A}_{\mu_0^*}}$.

Izrek: Naj bodo $\mathcal{A}, \mu_0, \mu_0^*, \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ in μ kot zgoraj.

- i) Naj bo γ mera na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, ki razširjuje μ_0 . Tedaj velja $\gamma(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$.
- ii) Če je $\mu(A) < \infty$, potem je $\gamma(A) = \mu(A)$ za vsako razširitev mere μ_0 .

(iii) Če je μ_0 σ -končna mera na algebri, potem je μ enolično določena razširitev mere μ_0 do mere na $\mathcal{A}\mu_0^*$.

Dokaz: i) Naj bo γ mera na $\mathcal{A}\mu_0^*$, ki razširja μ_0 .
 Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pokritje za $A \in \mathcal{A}\mu_0^*$ z množicami iz \mathcal{A} . Tedaj je

$$\gamma(A) \leq \gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Naredimo inf. po vseh pokritjih in po definiciji dobimo:

$$\gamma(A) \leq \mu_0^*(A) = \mu(A).$$

ii) Naj bo $A \in \mathcal{A}\mu_0^*$ in $\mu(A) < \infty$. Izberimo $\varepsilon > 0$ in poiščimo pokritje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ za A z množicami iz \mathcal{A} , da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu_0(A_n)}_{\mu(A_n)} < \underbrace{\mu_0^*(A)}_{\mu(A)} + \varepsilon.$$

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \gamma(B) = \gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

$$\begin{aligned} \mu|_{\mathcal{A}} = \gamma|_{\mathcal{A}} = \mu_0 &\xrightarrow{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \mu(B) \end{aligned}$$

Ker je μ mera, je $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(A) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$\mu(A) \leq \mu(B) = \gamma(B)$$

$$\begin{aligned}
 &= V(A) + V(B \setminus A) \\
 &\leq V(A) + \mu(B \setminus A) \\
 &< V(A) + \epsilon
 \end{aligned}$$

Ker je $\epsilon > 0$ poljuben, je $\mu(A) \leq V(A)$

iii) Naj bo μ_0 σ -končna, to pomeni

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad \mu_0(A_n) < \infty$$

$\mu_0^*(A_n) = \mu(A_n)$

$$A \in \mathcal{A}, \mu_0^* \Rightarrow A = A \wedge X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \wedge A_n)$$

BSS izberimo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne.

$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \wedge A_n) \stackrel{\text{ii)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} V(A \wedge A_n) = V(A) \quad \blacksquare$$

1.6. polmere in polalgebri

Definicija: Polalgebra je množica $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ki zadosti:

i) $\emptyset \in \mathcal{S}$.

ii) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$.

iii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^C$ je končna disjunktna unija množic iz \mathcal{S} .

Primer: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{[a, b], (-\infty, b), [a, \infty) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je polalgebra (enostavno preveriti)

Definicija: Naj bo \mathcal{S} polalgebra in $\mu: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ preslikava. μ je polmera, če velja:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne in je $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$, potem je

$$\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

iii) Če so $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne in je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, potem je

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

21. oktober 2025

Irditev: Nuj bo S polalgebra na množici X . Tedaj je algebra generirana z S , enaka družini vseh končnih disjunktivnih unij iz S .

Simbolično: $\mathcal{J} \dots$ podalgebra

$$\mathcal{A} = \{A_1 \cup \dots \cup A_n \mid n \in \mathbb{N}, A_i \in S \text{ paroma disjunktne}\}$$

Dokaz: \mathcal{A} je algebra, ki ocenjuje vsebuje \mathcal{J} .

Po definiciji bo \mathcal{A} vsebovala, algebro generirano \mathcal{J} , zgornji opis pa pove tudi, da bo \mathcal{A} vsebovala v algebri generirani s \mathcal{J} .

\mathcal{A} -je algebra

- i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ (A polalgebra) ✓
- ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}^c$
- iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Dokazali bomo iiii) za končne preseke in nato še ii) "Novu" (ii) in iii) sta skupaj ekvivalentna (ii)+(iii) zaradi de Morganovega pravila.

$$iui) A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m, \quad i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_n \quad i \neq j \quad B_i \cap B_j \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n A_i \cap B_j$$

$\Rightarrow A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$, saj je \mathcal{S} polalgebra in

$$(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = (A_i \cap B_k) \cap (B_j \cap B_l)$$

Če je $i \neq k$ ali $j \neq l$, je to prazen presek.

$\Rightarrow A \cap B$ je končna unija paroma disjunktivnih $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

$$iii) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i ; A_i \in \mathcal{S} \text{ paroma disj.}$$

$$A^c = \bigcap_{i=1}^m A_i^c$$

Ker je A_i^c po def. \mathcal{A} in alk. za algebro v \mathcal{A} , je $A^c \in \mathcal{A}$ po iii).



Irditev: Naj bo \mathcal{S} polalgebra na mn. X in naj bo μ polmera na \mathcal{S} . Tedaj obstaja natanko ena razširitev μ do mere $\tilde{\mu}$ na algebri generirani s \mathcal{S} .

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ paroma disj., da je

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \Rightarrow \tilde{\mu}(A) := \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Dokaz: vaje

Opomba: Točka iii) v def. polmere na polalgebri pravi:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S} \text{ paroma disj. in } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (*)$$

Ker se polmera na polalgebri razširi do mere na algebri, gen. z \mathcal{S} je v $(*)$ enačaj.

1.7. Lebegue - Stieltjesove mere

Naj bo X topološki prostor. Mera je **Borelova**, če je definirana na Borelovi σ -algebri $\mathcal{B}(X)$.

Irditev: Naj bo μ Borelova mera na \mathbb{R} , ki je končna na vseh omejenih Borelovinih množicah realne osi.

Def: $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu([0, \infty)) & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -\mu([x, 0)) & ; x < 0 \end{cases}$$

Tedaj je F_μ naraščajoča in levozvezna.

i) $a < b \Rightarrow \mu([a, b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$

ii) Če je μ končna, potem je

$$F = F_\mu + \mu(-\infty, 0),$$

kjer je $F(x) = \mu(-\infty, x)$.

Dokaz: F_μ naraščajoča, saj je μ monotona

Dokazimo, da je F_μ levozvezna. Naj bo

$$x > 0. \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty), \text{ da } x_n \nearrow x$$

$$F_\mu(x) = \mu([0, \infty)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([0, x_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu(x_n).$$

Primera $x \leq 0$ se lotimo na podoben način.

i) $0 < a < b : \mu([a, b]) = \mu([0, b] \setminus [0, a])$
 $= \mu([0, b]) - \mu([0, a])$
 $= F_\mu(b) - F_\mu(a)$

Podobno v ostalih primerih.

$$\text{ii) } F(x) = \mu((-\infty, x)) = \mu((-\infty, 0) \cup (0, x)) \\ = \mu((-\infty, 0)) + F_\mu(x).$$

□

Cilj je dokazati obratno trditev: Vsaka naraščajoča levozvezna funkcija $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ porodi Borelovo mero. Naj bo torej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naraščajoča levozvezna. Tedaj obstajata

$$f(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{in} \quad f(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Na polalgebri $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ vseh intervalov oblike $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ in \emptyset definiramo preslikavo μ_f s predpisom:

$$\mu_f(\emptyset) := 0$$

$$\mu_f([a, b]) := f(b) - f(a)$$

$$\mu_f([a, \infty)) := f(\infty) - f(a)$$

$$\mu_f((-\infty, b]) := f(b) - f(-\infty)$$

Izrek [Lebesgue-Stieltjes]: μ_f je polmera na polalgebra $\mathcal{J}(\mathbb{R})$.

Dokaz: (i): Po definiciji je $\mu_f(\emptyset) = 0$.

(ii) Naj bo $[a, b]$ končna disjunktna unija množic iz \mathcal{J} :

$$[a, b] = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j], \quad [a_j, b_j] \text{ so parne disj.}$$

$$\mu_f([a, b]) = \mu_f\left(\bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]\right) \quad \begin{array}{l} \text{intervali so urejeni tako, da} \\ \text{se nadaljujejo} \end{array}$$

$$f(b) - f(a) \stackrel{?}{=} \sum_{j=1}^n (f(b_j) - f(a_j)) = f(a_1) - f(b_n) = f(a) - f(b)$$



Na podoben način preverimo $[a, \infty)$ in $(-\infty, b)$. DN

(iii): Preverimo stevno svbaditivnost za M_f .

Naj bo interval $I \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ Števna disj. unija intervalov $I_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$M_f(I) \leq \sum_{m=1}^{\infty} M_f(I_m)$$

1. primer: $I = [a, b] \Rightarrow I_m = [a_m, b_m]$.

Izberimo $\varepsilon > 0$. Ker je f levozvezna, obstaja $c < b$ in $c_j < a_j$, da je $f(c) > f(b) - \frac{\varepsilon}{2}$ in $f(c_j) > f(a_j) - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j}$



Kompaktni interval $[a, c]$ pokrijemo z odprtimi intervali $\{(c_j, b_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$. Obstaja končno podpokritje.

Točka a je vključena v nekem (c_j, b_j) . BSS $a \in (c_1, b_1)$



Če je $b_1 > c_1$, potem je $[a, c] \subseteq (c_1, b_1)$, sicer imamo BSS $b_1 \in (c_2, b_2)$



Če je $b_2 > c_1$, potem je $[a, c] \subseteq (c_1, b_1) \cup (c_2, b_2)$, sicer

Postopek nadaljujemo. Po končnih korakih (po preštevilčenju), dobimo intervale $(c_1, b_1), (c_2, b_2), \dots, (c_n, b_n)$, da je $c_1 < a_1, c_{j+1} < b_j$ za $j = 1, \dots, n-1$, $b_n > c$

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) &\geq \sum_{j=1}^n (f(b_j) - f(a_j)) \quad \text{indeksi po preimenovanju} \\
 &\geq \left(\sum_{j=1}^n f(b_j) - f(c_j) \right) - \varepsilon/2 \\
 &= -f(c_1) + \left(\sum_{j=2}^{n-1} \underbrace{(f(b_j) - f(c_{j-1}))}_{\geq 0} \right) + f(b_n) - \varepsilon/2 \\
 &\geq -f(a) + 0 + f(c) - \varepsilon/2 \\
 &> -f(a) + (f(b) - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 \\
 &= f(b) - f(a) - \varepsilon
 \end{aligned}$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, je

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) \geq f(b) - f(a)$$

2. primer: $[a, \infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$

$$f(\infty) - f(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (f(b_j) - f(a_j))$$

$$\text{Za } n \in \mathbb{N}: [a, n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, \min\{n, b_j\})$$

Po prejšnjem primeru velja:

$$\begin{aligned}
 f(n) - f(a) &= \sum_{j=1}^{\infty} (f(\min\{b_j, n\}) - f(a_j)) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\infty) - f(a)
 \end{aligned}$$

Ostali primeri DN.



Na $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ imamo polmora μ_f :

$$\mu_f(\emptyset) = 0, \mu_f([a, b]) = f(a) - f(b), \mu_f([a, \infty)) = f(\infty) - f(a), \mu_f((-\infty, b)) = f(b) - f(-\infty)$$

Po izreku lahko na razširimo na en sam način da vnesemo μ_f na algebra ut generiran z $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Tvorimo zunanj mera μ_f^* na \mathbb{R} . Po Carathéodoryjevem izreku je množica $A_{\mu_f^*}$ vseh μ_f^* mernjivih množic σ -algebra, ki vsebuje vsi intervale oblike $[a, b]$. Torej $A_{\mu_f^*} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Dodatno: $(\mathbb{R}, A_{\mu_f^*}, \mu_f^*|_{A_{\mu_f^*}})$ je poln merljiv prostor.

$\Rightarrow A_{\mu_f^*} \supseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$... Lebesgueva σ -algebra, ki je napolnitev Borelove σ -algebri.

Mera $\mu_f^* := \mu$ je Lebesgue-Stieltjesova mera. Po izreku sl zadnjici je ta mera enolična razširitev mere iz alg. gen. z $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, saj je tista mera σ -končna.

Poseben primer: $f(x) = x \Rightarrow$ Dobimo Lebesgueovo mero.
Označimo jo z m .

22. oktober 2025

Posledica: Naj bo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ in $x \in \mathbb{R}$. Tedaj velja $m(x+A) = m(A)$ in $m(x \cdot A) = |x|m(A)$.

Dokaz: Naj bo m_x definirana na $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ s predpisom

$$m_x(A) := m(x+A).$$

m_x je polmera na $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, $x + [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n] = \bigcup_{i=1}^n (x + [a_i, b_i])$ ki se ujema z m na $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Če je ut alg. gen. z $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, potem se m_x in m ujemata tudi na ut. Uporabimo Carathéodoryja za (\mathbb{R}, m) in (ut, m_x) .

Vseh primerih dobimo σ -algebra, ki vsebuje $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Ker sta m in m_x σ -končni na (\mathbb{R}, ut) , sta enolična razširiljivi na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Dokaz druge enakosti podobno. □

Spomnimo se: $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu_f) \rightsquigarrow (\mathcal{A}, \mu_f) \rightsquigarrow (\mathcal{A}_{\mu_f^*}, \mu_f^*)$

polmera na
polalgebri mera na
algebri μ

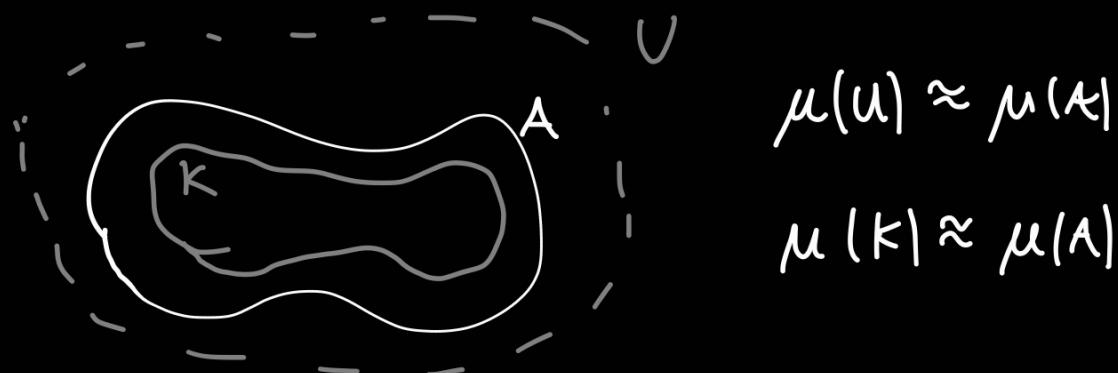
$$A \in \mathcal{A}_{\mu_f^*} \rightsquigarrow \mu(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ in } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

$A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n$ je končna disjunktna unija intervalov oblike $[a, b], (-\infty, b), [a, \infty)$.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \mu_f([a_m, b_m]) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} f(b_m) - f(a_m) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \right\} \end{aligned}$$

Trditev: Naj bo μ_f Lebesgue-Stieltjesova mera na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, porojeni z naraščajočo levozvezno funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tedaj je

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) \mid A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (a_m, b_m) \right\}.$$



Dokaz: Označimo desno stran z $\gamma(A)$.

Vsek interval (a_n, b_n) je števna disjunktna unija intervalov oblike $[a_{n,m}, b_{n,m}]$. Po definiciji infimuma je $\mu(A) \leq \gamma(A)$.

Za obratno neenakost pa potrebujemo levozveznost funkcije f . Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ in naj bo $\mu(A) < \infty$. Tedaj za $\forall \epsilon > 0$. $\exists [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$, da je

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \text{ in}$$



$$\mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f([a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a_n))$$

Ker je f levozvezna, za $\forall n \in \mathbb{N}. \exists a'_n < a_n$, da je

$$f(a'_n) > f(a_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

$$\Rightarrow \mu(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a'_n)) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a'_n)) \right) - \varepsilon$$



$$\Rightarrow \mu(A) + 2\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n) - f(a'_n))$$

Zaradi monotonosti mere je potem $\mu(A) = \nu(A)$. □

Izrek: Za $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ velja

$$m(A) = \inf \{ m(V) \mid A \subseteq V^{\text{odp}} \} \quad (*)$$

$$= \sup \{ m(K) \mid K^{\text{komp}} \subseteq A \} \quad (**)$$

Dokaz [prva enakost]: (druga možče karneje - Rieszov izrek).

$$A \subseteq V \Rightarrow m(A) \leq m(V)$$

$$\Rightarrow m(A) \leq \inf \{ m(V) \mid V^{\text{odp}} \supseteq A \}$$

Prej smo dokazali, da je:

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n)) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right\}$$

$$V := \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \Rightarrow m(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n, b_n))$$



(*) ... zunanjja regularnost mere, (**)... notranja regularnost mere
 (inf. po odprtih mn.) (sup. po komp. mn)

2. MERLJIVE FUNKCIJE

28. oktober, 2025

2.1. Merljive preslikave

Naj bojstu (X, \mathcal{A}) in (Y, \mathcal{B}) merljiva prostora. Preslikava $f: X \rightarrow Y$ je merljiva, če je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za vsak $B \in \mathcal{B}$.

Primer: Konstantne preslikave so merljive: $f \equiv b_0$.

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & ; b \notin B \\ X & ; b \in B \end{cases}$$

Lema: Kompozitum merljivih preslikav je merljiva preslikava.

Dokaz: $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$, $g: (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (Z, \mathcal{C})$

$$c \in \mathcal{C}: (g \circ f)^{-1}(c) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(c)}_{\in \mathcal{B}}) \quad \square$$

Lema: Naj bo (X, \mathcal{A}) merljiv prostor, Y mn. in $f: X \rightarrow Y$ preslikava.

- i) $\mathcal{B}_0 = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ je σ -algebra na Y
- ii) Če je (Y, \mathcal{B}) merljiva prostor in $\mathcal{B} = \sigma(F)$, potem je F merljiva $\Leftrightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{A} \quad \forall F \in \mathcal{F}$.

Dokaz: i) \mathcal{B}_0 je σ -algebra

$$\cdot f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}_0$$

$$\cdot B \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow B^c \in \mathcal{B}_0$$

$$f^{-1}(B^c) = (\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}})^c \in \mathcal{A}$$

$$\cdot (B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \underbrace{\in \mathcal{A}}_{G \mathcal{A}}$$

ii) $\Leftrightarrow \checkmark$

$$\Leftrightarrow: \mathcal{B}_0 := \{ B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

\mathcal{B}_0 je σ -algebra po i)

\mathcal{B}
"

Po predpostavkah je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}_0 \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}_0$

$\forall B \in \mathcal{B}$ velja $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Rightarrow f$ merljiva

Posledica: Naj bo (X, \mathcal{A}) merljiv prostor in Y topološki prostor.

Tedaj je $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ merljiva $\Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ $\forall V$ očlp v Y .

Posledica: Vsaka zvezna preslikava med topološkima prostoroma je merljiva glede na Borelovi σ -alg (na X in Y). ($f: (X, \mathcal{B}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ je merljiva, če je zvezna).

Merljive preslikave med topološkimi prostori, opredeljenimi z Borelovimi σ -algebrami, bomo imenovali **Borelove preslikave**.

Irditev: Naj bo (X, \mathcal{A}) merljiv prostor in $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. NTSE:

i) f je $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ merljiva ($f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je merljiva).

ii) $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$ ali $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

iii) $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$ ali $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

iv) $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A} \quad \forall a < b$ ali $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A} \quad \forall a < b$

v) $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A} \quad \forall a < b$

vi) $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A} \quad \forall a < b$

2.2. Razširjena realna QS

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} =: [-\infty, \infty]$$

$-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (imamo največji in najmanjši element)

Topologija na $\bar{\mathbb{R}}$:

- na \mathbb{R} je običajna Evklidska topologija.
- bazni sistem okolic za ∞ : $(a, \infty]$; $a \in \mathbb{R}$
- bazni sistem okolic za $-\infty$: $[-\infty, b)$; $b \in \mathbb{R}$

Topologija na $\bar{\mathbb{R}}$ je natanko relativna topologija oz. inkluzija $i: \mathbb{R} \hookrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ je zvezna

Zanimu nas $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$

Dpomba: Topologija na $\bar{\mathbb{R}}$ pove, da je $x_r \rightarrow \infty$ v smislu ANA1 natanko konvergenca v top. pr. $\bar{\mathbb{R}}$.

Trditev: Naj bo X topološki prostor in Y podprostir v X , opremljen z relativno topologijo. Tedaj je

$$\mathcal{B}(Y) := \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Dokaz: Oglejmo si $\mathcal{B} = \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{B}(X)\}$

Hkrat se vidi, da je \mathcal{B} σ -algebra. Po definiciji relativne topologije na Y , \mathcal{B} vsebuje vsi odprti množice iz Y . $\Rightarrow \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}$

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(Y) \quad A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow Y \cap A \in \mathcal{B}(Y)$$

$i: Y \rightarrow X$ je zvezna, saj je Y opremljen z rel. top.
 $\Rightarrow i(Y, \mathcal{B}(Y)) \rightarrow (X, \mathcal{B}(X))$

$$A \in \mathcal{B}(X) \Rightarrow i^{-1}(A) \in \mathcal{B}(Y)$$

$$Y \cap A$$



Irditev: Velja $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ in

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \{A \cup B \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \subseteq \{-\infty, \infty\}\}. \quad (*)$$

Dokaz: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \mathbb{R} \cap B, \quad B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}).$$

$$\mathbb{R} \text{ odprta} \vee \bar{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \Rightarrow A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$$

(*) (2): B je zaprta v $\bar{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$
 $\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$

(\subseteq): $A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$

$$A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow A = (A \cap \mathbb{R}) \cup C; \quad C \subseteq \{-\infty, \infty\}$$

□

Irditev: Naj bo (X, \mathcal{A}) merljiv prostor in $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ funkcija. Tedenj je f merljiva $\Leftrightarrow f^{-1}(-\infty, a]) \in \mathcal{A} \forall a \in \mathbb{R}$.

Posledica: Če je $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ merljiva, potem je λf tudi merljiva za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dokaz: $\lambda = 0$: $\lambda f = 0$ je merljiva ✓

$\lambda > 0$: $(\lambda f)^{-1}(-\infty, a]) = \{x \in X \mid (\lambda f)(x) \in (-\infty, a]\}$
 $= \{x \in X \mid f(x) \in [-\infty, \frac{a}{\lambda}]\}$
 $= f^{-1}(-\infty, \frac{a}{\lambda}]) \in \mathcal{A}$

$\lambda < 0$: podobno

□

Primer: (X, \mathcal{A}) merljiv prostor. Merljivost χ_A ; $A \subseteq X$.

$$\chi_A^{-1}(-\infty, a]) = \begin{cases} X: a \geq 1 \\ A^c: 0 \leq a \leq 1 \\ \emptyset: a < 0 \end{cases}$$

χ_A merljiva $\Leftrightarrow A^c$ merljiva $\Leftrightarrow A$ merljiva

2.3. Produktna σ -algebra

$$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}) \rightsquigarrow (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \times B$ merljiv pravokotnik

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$... σ -algebra generirana z vsemi merljivimi pravokotniki

Lema: Naj bosta (X, \mathcal{A}) in (Y, \mathcal{B}) merljiva prostora.

- i) Produktna σ -algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je najmanjša σ -algebra na $X \times Y$, da sta projekciji $\Pi_1: X \times Y \rightarrow X$ in $\Pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ merljivi.
- ii) Če je $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ in $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$, potem je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ generirana z $G := \{A \times B \mid A \in \mathcal{E}\} \times \{X \times B \mid B \in \mathcal{F}\}$

Dokaz: (i): Naj bosta $g_1: X \times Y \rightarrow X$ in $g_2: X \times Y \rightarrow Y$ merljivi glede na neko σ -algebra \mathcal{C} na $X \times Y$.

$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = g_1^{-1}(A) \cap g_2^{-1}(B) \in \mathcal{C}$$

\Rightarrow Po definiciji: \mathcal{C} vsebuje $A \otimes B$.

(ii): Vsi elementi G so merljivi pravokotniki $\Rightarrow \sigma(G) \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(G)$:

$$\tilde{\mathcal{Z}} := \{A \subseteq X \mid g_1^{-1}(A) \subseteq \sigma(G)\}, \quad g_1: X \times Y \rightarrow X$$

Po lemi je $\tilde{\mathcal{Z}}$ σ -algebra, ki vsebuje $\mathcal{E} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \tilde{\mathcal{Z}}$

$$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}: g_1^{-1}(A) \in \sigma(G)$$

$A \subseteq X$

Podobno $\forall B \in \mathcal{B}: X \times B \in \sigma(G)$

$$\Rightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \in \sigma(G) \Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(G).$$

Trditev: Naj bosta X in Y topološka prostora. Produkt $X \times Y$ opremimo s produktno σ -algeoero. Tedaj velja:

i) $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}(X \times Y)$

- (i) Če sta X, Y 2-števnu, potem $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$.
(ii) Če sta X, Y separabilna metrična prostora, potem je $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$.

Dokaz: (ii) V metričnih prostorih je separabilnost \Leftrightarrow 2-števnost.

29. oktober 2025

i) Naj bo \mathcal{C} σ -algebra generirana z

$$\mathcal{F} := \{U \times Y \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times V \mid V \in \mathcal{T}_Y\}$$

Po prejšnji lemi \mathcal{F} ravno generira produktno σ -algebro $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. Ker $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}_{X \times Y}$, je $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{T}_{X \times Y}) = \mathcal{B}(X \times Y)$.

$$\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$$

ii) $\mathcal{B}(X \times Y) \subseteq \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$

Topološki prostor je 2-števen, če obstaja števna baza za topologijo. To pomeni, da obstaja števna družina odprtih množic, da je vsaka odprta množica unija neke poddružine.

Pokažali bomo, da je vseh odprtih množic v $X \times Y$ vsebovana v $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. Ker je vsaka odprta množica v $X \times Y$ števnu unijo odprtih pravokotnikov, je potrebno "dokazati", da je $\bigcup_{V \in \mathcal{T}_X, U \in \mathcal{T}_Y} (U \times V)$ za $V \in \mathcal{T}_Y, U \in \mathcal{T}_X$. ■

Recimo, da imamo $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ in (Z, \mathcal{C}) .

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightsquigarrow ((X \times Y) \times Z, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C})$$

Podobno lahko tvorimo ostale možne produkte. Da se videti, da je $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \otimes \mathcal{C}$ generirana z

$$\{(A \times B) \times C \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

V duhu identifikacij pišemo $(X \times Y \times Z, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$.

Podobno za več prostorov.

Posledica: Za $n \in \mathbb{N}$ velja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Dokaz: $n=2$ po trditvi, saj je \mathbb{R} separabilen metrični prostor.

$$\begin{aligned}\underline{n \rightarrow n+1}: \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}) &= \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

□

V duhu identifikacije $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, velja:

Posledica: $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Irditev: Naj bosta (Y_1, \mathcal{B}_1) in (Y_2, \mathcal{B}_2) merljiva prostora, $Y_1 \times Y_2$ opremlimo s produktno σ -algebro. Če je (A, \mathcal{A}) merljiv prostor in $f: A \rightarrow Y_1 \times Y_2$ preslikava, tedaj je f (A, \mathcal{A}) -merljiva $\Leftrightarrow g_1 \circ f$ in $g_2 \circ f$ sta z uporedoma (A, \mathcal{A}) - in (Y_i, \mathcal{B}_i) -merljivi.

Dokaz: (\Rightarrow): Naj bo $f: A \rightarrow Y_1 \times Y_2$ (A, \mathcal{A}) -merljiva

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y_1 \times Y_2 \\ & \searrow g_i \circ f & \downarrow g_i \\ & & Y_i \end{array}$$

Ker je g_i $(Y_1 \times Y_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ -merljiva, je $g_i \circ f$ (A, \mathcal{A}) -merljiva.

(\Leftarrow): Naj bosta $g_1 \circ f$ in $g_2 \circ f$ merljivi. Označimo

$$\mathcal{C} := \{ B \subseteq Y_1 \times Y_2 \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

Vemo, da je \mathcal{C} σ -algebra. Če \mathcal{C} vsebuje vse merljive pravokotnike, potem je $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{C}$.

$B = B_1 \times B_2$, $B_1 \in \mathcal{B}_1$, $B_2 \in \mathcal{B}_2$

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \{x \in X \mid f_1(x) \in B_1 \text{ in } f_2(x) \in B_2\} \\ &= \{x \in X \mid f_1(x) \in B_1\} \cap \{x \in X \mid f_2(x) \in B_2\} \\ &= f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

saj sta f_1 in f_2 merljivi.

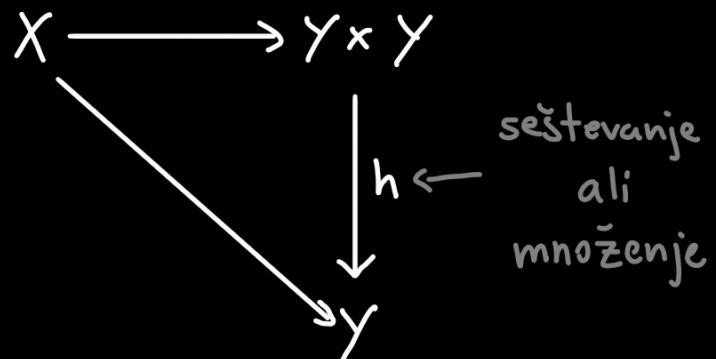
□

Posledica: Naj bo (X, \mathcal{A}) merljiv prostor in $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, [0, \infty]\}$.

Če sta $f, g: X \rightarrow Y$ merljivi, potem sta merljivi tudi $f+g$ in $f \cdot g$.

Dokaz: $F: X \rightarrow Y \times Y$

$$x \mapsto (f(x), g(x))$$



h je zvezna, zato je $h: (Y \times Y, \mathcal{B}(Y \times Y)) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$

merljiva. Ker sta $f, g: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ merljivi, je tudi $F: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y \times Y, \mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y))$.

$\mathcal{B}(Y \times Y) = \mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y)$, ker Y 2-števen

□

Irditev: Linearne kombinacije merljivih preslikav z vrednosti v \mathbb{R} ali \mathbb{C} so merljive.

Posledica: Naj bo $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ merljiva. Tedaj sta $\text{Re } f$ in $\text{Im } f$ tudi merljivi.

Velja tudi obrat, saj je $f = \text{Re } f + i \text{Im } f$.

2.4. Zaporedja merljivih funkcij

4. november 2025

Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [-\infty, \infty]$ zaporedje. Definiramo $\tilde{a}_n := \sup_{k \geq n} a_k$. Tedaj je $(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče zaporedje in zato ima limito $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n$ v $[-\infty, \infty]$. To limito označimo z

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k.$$

Podobno obstaja limes inferior in velja:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k.$$

Naj bo dano zaporedje $f_n: X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Definiramo naslednje funkcije:

$$(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

$$(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

$$(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Primer: Naj bo X neštevna množica in \mathcal{A} σ -algebra števnskoštvenih (števna ali komplement števen) podmnožic v X . Naj bo $E \subseteq X$ takšna množica, da niti E niti E^c ni števna. Torej $E \notin \mathcal{A} \Rightarrow \chi_E$ ni merljiva.

$\chi_E = \sup \{\chi_{\{x\}} \mid x \in E\}$ je supremum družine merljivih funkcij, vendar ni merljiva.

Lema: Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij iz $X \rightarrow [-\infty, \infty]$.

- i) Tedaj sta $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ in $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ merljivi funkciji.
- ii) Tedaj sta $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ in $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ merljivi funkciji.
- iii) Če $f_n \rightarrow f$ po točkah, potem je f merljiva.

Dokaz: i) Označimo $g := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$.

$$\begin{aligned} g^{-1}([-∞, a]) &= \{x \in X \mid g(x) \leq a\} \\ &= \{x \in X \mid f_n(x) \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) \leq a\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-∞, a]) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

saj so f_n merljive.

Funkcija $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -\sup_{n \in \mathbb{N}} (-f_n)$ je merljiva po zgornjem.

ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n \leftarrow$ merljivo po i)
 $g_n \dots$ merljivo po i)

Podobno $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$.

iii) Če $f_n \rightarrow f$ po točkah, potem $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$. \blacksquare

2.5. Aproximacija s stopničastimi funkcijami

Funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ je **stopničasta**, če ima končno založno vrednosti.

Če $Z_f = \{a_1, \dots, a_n\}$, pri čemer $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$, potem

$$F = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \chi_{f^{-1}(\{a_k\})} = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k},$$

kjer je $A_k = f^{-1}(\{a_k\})$.

Opozka: f merljiva $\Leftrightarrow A_k$ merljive $\forall k = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz: (\Leftarrow): A_k merljiva $\Rightarrow \chi_{A_k}$ merljiva $\Rightarrow f$ merljiva kot linearna kombinacija merljivih

(\Rightarrow): Naj bo U_k odprta množica, ki vsebuje a_i , ne vsebuje a_j za $j \neq k$. $f^{-1}(U_k) = A_k$ (Lahko razumeš singleton) $\Rightarrow A_k$ merljiva. \square

Zgoraj je f v kanonični obliki: a_k paroma različni, A_k paroma disjunktne in $\bigcup_{k=1}^m A_k = X$.

Vektorski prostor vseh omejenih merljivih funkcij opreminimo s supremum normo.

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Dobimo normirani prostor.

Irditev: Prostор vseh omejenih merljivih funkcij na X je Banachov prostor glede na $\|\cdot\|_\infty$.

Dokaz: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjeva $\Rightarrow (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentna v \mathcal{C}
 $\Rightarrow \exists f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ je enakovredna limita

$$\left(\begin{array}{l} |f_n(x) - f_m(y)| < \varepsilon \quad \text{za } m, n \geq n_0 \quad \forall x, y \in X \\ |f(x) - f_m(x)| \stackrel{\downarrow}{\leq} \varepsilon \end{array} \right)$$

$\Rightarrow f$ je limita po točkah zaporedja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\Rightarrow f$ merljiva \square

Iz naslednjega izreka bo sledilo, da je vektorski prostor vseh stopničastih merljivih funkcij gost v prostoru vseh omejenih merljivih funkcij.

$$S(X) \text{ gosta v } B(X)$$

↑ ↑
stop. merlj. om. merlj.

Izrek: Naj bo $f: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva. Tedaj obstaja naraščajoče zaporedje nenegativnih merljivih stopničastih funkcij $f_n: X \rightarrow [0, \infty)$, da $f_n \nearrow f$ po točkah. Ta konvergenca je enakovredna na vsaki množici, kjer je f omejena.

Opoomba: Če je f omejena, potem $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$; $f_n: X \rightarrow [0, \infty)$ stopnicaste in $f_n \rightarrow f$ enakomerno.

$F: X \rightarrow \mathbb{C}$ merljiva $\Rightarrow F = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F = (\operatorname{Re} F^+ - \operatorname{Re} F^-) + i(\operatorname{Im} F^+ - \operatorname{Im} F^-)$.

$\operatorname{Re} F^+, \operatorname{Re} F^-, \operatorname{Im} F^+, \operatorname{Im} F^-: X \rightarrow [0, \infty)$ so omejene, če je f omejena.

Po zgornjem $\exists (u_n)_n, (v_n)_n, (s)_n, (\zeta_n)_n$ zap. neneg. stop. merlj. funk., da so konvergencije $u_n \rightarrow \operatorname{Re} F^+$, $v_n \rightarrow \operatorname{Re} F^-$; $s_n \rightarrow \operatorname{Im} F^+$, $\zeta_n \rightarrow \operatorname{Im} F^-$ enakomerne. $\Rightarrow \underbrace{u_n - v_n + i(s_n - \zeta_n)}_{\text{stop. kompl. merlj. funkcija}} \rightarrow f$ enakomerno

Dokaz (izreka o aproksimaciji):

Za $\forall n \in \mathbb{N}$ in $k=1, 2, \dots, n \cdot 2^n$ definiramo merljive množice

$$E_{n,k} := \left\{ x \in X \mid \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]\right)$$

$$\text{in } F_n := \left\{ x \in X \mid f(x) \geq n \right\} = f^{-1}([n, \infty)).$$

$$\text{Definiramo } f_n = \left(\sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} \right) + n \chi_{F_n}.$$

f_n so stopnicaste, nenegetivne in merljive. Da se videti, da je $f_n \leq f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Za $x \in f^{-1}([0, n])$ velja $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. Če $f(x) < \infty$, potem od nekod dalje velja $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$.

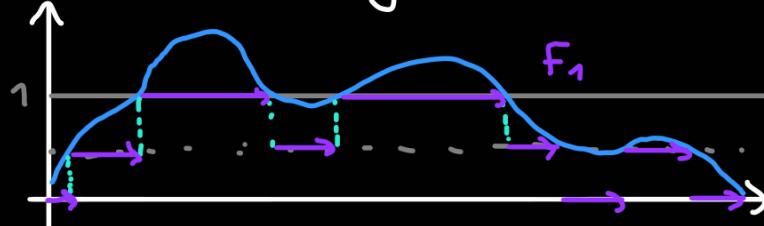
Torej $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f_n(x) \rightarrow f(x)$ oziroma $f_n(x) \nearrow f(x)$.

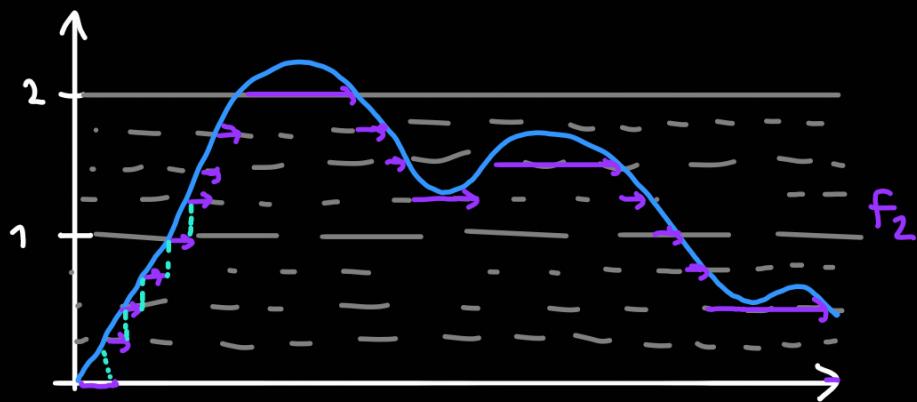
Če $f(x) = \infty$, potem je $s_n(x) = n \rightarrow \infty$. Torej $f_n \nearrow f$.

Naj bo $A \subseteq X$ taka, da je $f|_A$ omejena. Tedaj je $A \cap F_n = \emptyset$ od nekod dalje. Od prej: vsak $x \in A$ zadostca

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq n_0.$$

To je enakomerna konvergenca. □





$$2 \cdot 2^2 = 8 \text{ niwojev}$$

Posledica: Naj bo $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ merljiva. Tedaj obstaja zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih stopničastih funkcij, da velja $0 \leq |f_1| \leq |f_2| \leq \dots$ in $f_n \rightarrow f$ po točkah. Konvergenca je enakomerna na vseki množici, na kateri je f omejena.

Dokaz: DN

2.6. Načini konvergencije

Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) merljivi prostor in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij. Pravimo, da $f_n \rightarrow f$ skoraj enakomerno, če za $\forall \varepsilon > 0$. $\exists A \in \mathcal{A}$, da $\mu(A^c) < \varepsilon$ in $f_n \rightarrow f$ enakomerno na A . Pravimo, da $f_n \rightarrow f$ skoraj povsod, če ima množica $\{x \in X \mid f_n(x) \neq f(x)\}$ ničelno mero. Lahko se zgodi, da limitna ni merljiva.

Irditev: Če $f_n \rightarrow f$ skoraj enakomerno, potem $f_n \rightarrow f$ skoraj povsod.

Dokaz: Za $\forall m \in \mathbb{N}$. $\exists A_m$. $\mu(A_m^c) < \frac{1}{m}$ in $f_n \rightarrow f$ enakomerno na A_m . Zato $f_n \rightarrow f$ po točkah na A_m . $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ po točkah na $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. Velja

$$\mu\left(\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)^c\right) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m^c\right) \leq \frac{1}{m} \rightarrow 0$$



skoraj povsod \rightsquigarrow s.p.
almost everywhere \rightsquigarrow a.e.

tipične
okrajšave

5. november 2025

Lastnost P velja skoraj povsod, če ima komplement množice vseh $x \in X$, za katere P velja, mero nič.

Primer: i) konvergenca skoraj povsod $f_n \rightarrow f$ skoraj povsod:
 $P \dots f_n(x) \rightarrow f(x)$

ii) $f \geq 0$ skoraj povsod

$$P \dots f(x) \geq 0$$

Izrek [Jegorov]: Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) prostor s končno mero. Če so $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljive in $f_n \rightarrow f$ skoraj povsod, kjer je f merljiva, potem $f_n \rightarrow f$ skoraj enakomerno.

Dokaz: $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow f_n - f \rightarrow 0$ (velja za skoraj povsod in skoraj enakomerno)

BSS. $f_n \rightarrow 0$ skoraj povsod.

Zapišimo $X = X' \cup N$; $\mu(N) = 0$ in $f_n \rightarrow f$ na X' po točkah. Če dokazemo, da $f_n \rightarrow 0$ skoraj enakomerno na X' , potem gre $f_n \rightarrow 0$ skoraj enakomerno na X .

BSS $f_n \rightarrow 0$ po točkah na X .

Vpeljimo množice

$$A_{k,m} = \{x \in X \mid |f_n(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \forall n \geq k\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,m} = X \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$x \in X : f_n(x) \rightarrow 0$$

$$\forall m \in \mathbb{N}. \exists k \in \mathbb{N}. |f_n(x)| \leq \frac{1}{m} \quad \forall n > k \Rightarrow x \in A_{k,m}$$

$$\text{Hkrati } A_{k,m} \subseteq A_{k+1,m} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \forall k \in \mathbb{N}$$

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,m}; \quad A_{k,m} \subseteq A_{k+1,m} \Rightarrow \mu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (A_{k,m}) \quad (*)$$

Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Iz ($*$) sledi, da za $m \in \mathbb{N}$. $\exists k_m \in \mathbb{N}$.

$$\mu(A_{k_m, m}) \geq \mu(x) - \frac{\varepsilon}{2^m}$$

$$\text{Definirajmo } A := \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{k_m, m} \Rightarrow \mu(A^c) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{k_m, m}^c)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (\mu(x) - \mu(A_{k_m, m}))$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.$$

$f_n \rightarrow 0$ enakomerne na A

$x \in A \Rightarrow x \in A_{k_m, m} \forall n \in \mathbb{N}$

$\delta > 0 \exists m \in \mathbb{N}. \frac{1}{m} < \delta$

$x \in A_{k_m, m} \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{1}{m} < \delta \quad \forall n \geq k_m$

To je definicija enakomerne konvergencije na A . □

Zuporedje merljivih funkcij $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ konvergira po meri proti merljivi funkciji f , če za vsak $\varepsilon > 0$ velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Primer: i) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$

$$f_n = \chi_{(n, n+1]}$$

$$f_n(x) = \chi_{(n, n+1)}(x) = \begin{cases} 1; & x \in (n, n+1) \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n \rightarrow 0$ po točkah

$f_n \not\rightarrow 0$ po meri:

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in X \mid \chi_{(n, n+1)}(x) \geq \varepsilon\}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \{x \in X \mid \chi_{(n, n+1)}(x) \geq \frac{1}{2}\} = (n, n+1)$$

$$m(\{x \in X \mid \chi_{(n, n+1)}(x) \geq \frac{1}{2}\}) = 1 \not\rightarrow 0$$

$f_n \rightarrow 0$ skoraj enakomerno

$$|f_n(x) - 0| = |\chi_{(n,n+1)}(x) - 0| = \begin{cases} 1; & x \in (n, n+1) \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Če bi za $\varepsilon = 1/2$, A borelva, da $m(A^c) < 1/2$ in $f_n \rightarrow 0$ enak na A. Iz zgornjega sledi, da tak A ne obstaja.

ii) $[0,1]$, Leb.-mera (ozirama njena zožitev na $[0,1]$)

$$f_1 = \chi_{[0,1]},$$

$$f_2 = \chi_{[0,1/2]}, f_3 = \chi_{[1/2,1]}$$

$$f_4 = \chi_{[0,1/4]}, f_5 = \chi_{[1/4,1/2]}, f_6 = \chi_{[1/2,3/4]}, f_7 = \chi_{[3/4,1]}$$

⋮ ⋮

Za $\forall x \in [0,1]$ ima zaporedje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ neskončno mnogo 1 in 0. Torej ne konvergira po točkah (v nobeni točki).

$f_n \rightarrow 0$ po meri

$$\{x \in X \mid |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}$$

Ta množica ima mero enako meri ustreznegra intervala, ki definira f_n . Ker te mere konvergirajo proti 0, velja $f_n \rightarrow 0$ po meri

Opomba: Izrek Jegorova ne velja nujno, če je $\mu(X) = \infty$.

11. november 2025

Irditev: Naj bo $(X, (A, \mu))$ prostor z mero in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij in f merljiva.

i) $f_n \rightarrow f$ skoraj enakomerno $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ po meri

ii) $\mu(X) < \infty$ in $f_n \rightarrow f$ skoraj presel $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ po meri

Dokaz: i) Glej vaje.

ii) $\mu(X) < \infty \stackrel{\text{Jegorov}}{\Rightarrow} f_n \rightarrow f$ skoraj enak. $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ po meri.



3. INTEGRAL

3.1. Integracija stopničastih funkcij

Naj bo (X, \mathcal{A}, μ) prostor z mero. Za stopničasto funkcijo

$$s := \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j} \quad (\text{s merljiva})$$

definiramo $\int_X s d\mu := \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j)$.

Če je $s = \chi_A$, potem $\int_X s d\mu = \mu(A)$.

Izkazuje se, da je $\int_X s d\mu$ neodvisen od izbire A_j in c_j . Torej lahko dostikrat prevzamemo, da je s zapisan v kanonični obliki.

Če je A merljiv, definiramo $\int_A s d\mu := \int_X s \chi_A d\mu$.

Lema: Naj bo $s: X \rightarrow [0, \infty)$ merljiva stopničasta funkcija. Tedaj je z $\gamma(A) := \int_A s d\mu$ definirana pozitivna mera (X, \mathcal{A}) .

Dokaz: $\gamma(\emptyset) = \int_{\emptyset} s d\mu = \int_X s \chi_{\emptyset} d\mu = \int_X 0 d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0$

Naj bodo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne merljive množice in naj bo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. $\gamma(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n)$

Naj bo $s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$ kanonična oblika za s .

$$s \chi_A = \left(\sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j} \right) \chi_A = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j \cap A}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma(A) &= \int_A s d\mu = \int_X s \chi_A d\mu = \sum_{j=1}^n c_j \mu(E_j \cap A) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_j \mu(E_j \cap A_i) \\
 \xrightarrow{\text{ANA 1}} \quad &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mu(E_j \cap A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_X s d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(A_i)
 \end{aligned}$$

□

Lema: Naj bosta $s, t : X \rightarrow [0, \infty]$ merljivi stopničasti funkciji in naj bo $c \in [0, \infty]$. Tedaj velja:

$$i) \int_X (s+t) d\mu = \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

$$ii) \int_X c s d\mu = c \int_X s d\mu$$

Dokaz: i) $s := \sum_{i=1}^m c_i \chi_{E_i}$, $t := \sum_{j=1}^n d_j \chi_{F_j}$ zapisa v kanonični obliki

$$\text{Tedaj je } s+t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_i + d_j) \chi_{E_i \cap F_j}.$$

Čeprav so množice $E_i \cap F_j$ paroma disjunktne, to ni nujno kanonična oblika za $s+t$. Velja pa

$$\begin{aligned}
 \int_X (s+t) d\mu &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_i + d_j) \mu(E_i \cap F_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_j \mu(E_i \cap F_j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{j=1}^n F_j &= X \\
 \bigcup_{i=1}^m E_i &= X \\
 &= \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^n d_j \sum_{i=1}^m \mu(E_i \cap F_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m c_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^n d_j \mu(F_j)
 \end{aligned}$$

$$= \int_X s d\mu + \int_X t d\mu$$

$$ii) \int_X c s d\mu = \sum_{i=1}^m c c_i \mu(E_i) = c \sum_{i=1}^m c_i \mu(E_i) = c \int_X s d\mu$$

□

Lema: Naj bosta s, t takšni merljivi stopničasti funkciji, da velja $0 \leq s \leq t$. Tedaj je $0 \leq \int_X s d\mu \leq \int_X t d\mu$.

Dokaz: $t = t - s + s$. Po prejšnji lemi :

$$\int_X t d\mu = \int_X (t - s) d\mu + \int_X s d\mu \geq \int_X s d\mu \geq 0$$

□

3.2. Integral nenegetivne merljive funkije

Naj bo $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ prostor z mero in $f: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva.

Z \mathcal{I}_f definiramo množico $\{s \mid 0 \leq s \leq f \text{ merljiva stopničasta funkcija}\}$.

Definiramo : $\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid s \in \mathcal{I}_f \right\}$.

Lema: Naj bosta $0 \leq f \leq g$ merljivi. Potem je $0 \leq \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Dokaz: $\mathcal{I}_f \subseteq \mathcal{I}_g \Rightarrow \text{supremum po } \mathcal{I}_f \leq \text{supremum po } \mathcal{I}_g$

Primer: $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$, δ_{x_0} Diracova mera

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

$$0 \leq s \leq f \Rightarrow \int_X s d\delta_{x_0} \geq \int_X s d\delta_{x_0} \quad \text{||} \quad s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j} \quad \begin{matrix} \text{kanonična} \\ \text{obična} \end{matrix}$$

$$\sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_0}(E_j) = c_k \cdot 1 = s(x_0) \quad (x_0 \in E_k)$$

Ker $s_n \nearrow f$ po točkah (izrek o apriksimaciji), dobimo $\int_X f d\delta_{x_0} \geq f(x_0)$.

$$\int_X s d\delta_{x_0} = s(x_0) \leq f(x_0)$$

Naredimo supremum po vseh $s \in \mathcal{I}_f$.

Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$: μ steje točke

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

$$f(n) \leftrightarrow a_n \leadsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Izrek [Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci (LMK)]:

Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$.

Dokaz: Ker je $(\int_X f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje, obstaja

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$$

$$a = \int_X f d\mu ; \quad f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

$$a \leq \int_X f d\mu, \text{ saj } f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a \geq \int_X f d\mu \Leftrightarrow a \geq \int_X c s d\mu \quad \forall c \in (0,1) \quad \forall s \in \mathcal{F}$$

\Leftarrow : √ zaradi monotonosti

\Leftarrow : sledi iz dejstva, da najprej naredimo supremum po $c \in (0,1)$ in nato supremum po vseh $s \in \mathcal{F}$.

Izberimo $c \in (0,1)$ in $s \in \mathcal{F}$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$A_n := \{x \in X \mid c s(x) \leq f_n(x)\}.$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{in} \quad A_n \subseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definiramo mero ν s predpisom $\nu(B) = \int_X c s d\mu$. To je mera po lemi iz razdelka o stopničastih funkcijah.

$$\int_X c s d\mu = \nu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} c s d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = a$$

sa $f_n \geq c s$ na A_n



Izrek: Naj bodo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nenegativne merljive funkcije. Tedaj velja

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz: Najprej dokazimo $\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$.

\exists zaporedje $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nenegativnih merljivih stopničastih funkcij, da $0 \leq s_n \nearrow f_1$ in $0 \leq t_n \nearrow f_2$ po tičkah.

$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{s_n + t_n}_{\text{stopničasta funkcija}} \nearrow f_1 + f_2$ po tadih

stopničasta
funkcija

$$\begin{aligned} \int_X (f_1 + f_2) d\mu &\stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \\ &\stackrel{2 \text{ LMK}}{=} \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu \end{aligned}$$

V splošnem: $g_n := f_1 + \dots + f_n \Rightarrow 0 \leq g_n \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu \stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu$$

12. november 2025

Postledica: Naj bo $f: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva in $c \geq 0$. Tedaj velja

$$\int_X c f d\mu = c \cdot \int_X f d\mu.$$

Dokaz: Naj bodo $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takšne merljive stopničaste funkcije, da $0 \leq s_n \nearrow f$. Vemo, da velja

$$\int_X c s_n d\mu = c \cdot \int_X s_n d\mu \stackrel{\text{LMK za } 0 \leq s_n \nearrow f}{\longrightarrow} c \cdot \int_X f d\mu$$

$\int_X c f d\mu$



Trditev: Naj bo $f: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva. Definiramo

$$\gamma(A) = \int_A f d\mu; \quad A \in \mathcal{A}. \quad \text{Velja:}$$

- i) γ je pozitivna mera na (X, \mathcal{A}) .
- ii) Če je $\mu(A) = 0$, potem je $\gamma(A) = 0$.
- iii) Če je $g: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva, potem $\int_X g d\gamma = \int_X f \cdot g d\mu$.

Doprime: (a) Pogoj $\mu(A) = 0 \Rightarrow \gamma(A) = 0$, se imenuje **absolutna zveznost** mere γ glede na mero μ .

(b) Če je γ glede na μ absolutno zvezna, to zapišemo $\gamma \ll \mu$, f iz trditve pa zapišemo kot $f = \frac{d\gamma}{d\mu}$. (" $\int_A f d\mu = \int_A d\gamma = \gamma(A)$ ")

Dokaz: i) $\gamma(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = \int_X f \chi_{\emptyset} d\mu = \int_X 0 d\mu = \mu(X) \cdot 0 = 0$

Če so (A_n) neskončna paroma disjunktne in $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, potem

$$\begin{aligned} \gamma(A) &= \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu = \int_X \left(f \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \right) d\mu \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \chi_{A_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(A_n) \end{aligned}$$

ii) Naj bo $\mu(A) = 0$.

$$\gamma(A) = \int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu$$

Naj bodo $0 \leq s_n \leq f \chi_A$; s merljive stopničaste

$$s = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n} \quad (\text{kanonična oblika})$$

$$f \chi_A = 0 \text{ na } A^c \Rightarrow s = 0 \text{ na } A^c \Rightarrow s = s \chi_A$$

$$\Rightarrow s = \lambda_1 \chi_{A_1 \cap A} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n \cap A}$$

$$\Rightarrow \int_X s d\mu = \lambda_1 \mu(A_1 \cap A) + \dots + \lambda_n \mu(A_n \cap A) = 0$$

$$\Rightarrow \int_X f \chi_A d\mu = 0 \quad (\text{po definiciji integrala nenegativne funkcije})$$

iii) Dokazali bomo najprej za karakteristične funkcije, nato stopničaste in nato nenegativne z uporabo LMK.

a) $g = \chi_A$; A merljiva

$$\int_X g d\gamma = \int_X \chi_A d\gamma = \gamma(A)$$

$$\int_X f g d\mu = \int_X \chi_A f d\mu = \int_A f d\mu = \gamma(A)$$

b) $g = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$: A_1, \dots, A_n merljive

$$\begin{aligned} \int_X g d\gamma &= \int_X \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i} d\gamma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i} d\gamma \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i} f d\mu \\ &= \int_X \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i} \right)}_g f d\mu \end{aligned}$$

c) $g \geq 0$ merljiva: Vemo, da obstaja zaporedje $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih stopničastih funkcij: $0 \leq s_n \nearrow g$.

$$\begin{array}{ccc} \forall n \in \mathbb{N}: \int_X s_n d\gamma & = \int_X s_n f d\mu & \\ \downarrow \begin{matrix} \text{LMK za } \gamma \\ \text{in } 0 \leq s_n \nearrow f \end{matrix} & & \downarrow \begin{matrix} \text{LMK za } \mu \text{ in } 0 \leq s_n f \nearrow g f \\ \int_X g f d\mu \end{matrix} \\ \int_X g d\gamma & & \end{array}$$

Fatovjeva lema: Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja: $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Dokaz: $g_n := \inf_{k \geq n} f_k \stackrel{\leq f_n}{\longrightarrow} 0 \leq g_n \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$

$$\begin{aligned} \text{LMK: } \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \\ &\quad \text{||} \\ &\quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \end{aligned}$$

$(\liminf a_n = \lim a_n, \text{ če limita obstaja})$
 $(\text{in } a_n \leq b_n \Rightarrow \liminf a_n \leq \liminf b_n)$

Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ šteje točke

$$f_n = \chi_{\{n, n+1, \dots\}} \longrightarrow \chi_{\emptyset} = 0$$

$$\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu = \infty, \quad \int_{\mathbb{N}} \chi_{\emptyset} d\mu = 0$$

\Rightarrow V Fatoujevi lemi lahko imamo strogi neenakaj.

18. november 2025

Če je (X, \mathcal{A}, μ) merljiv prostor in $\mu(A) = 0$, potem je $\int_A f d\mu = 0$ za vsako merljivo funkcijo $f \geq 0$.

DN. Stopničaste funkcije in definicija integrala ali LMK.

Irditev: Naj bo $f: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva. Tedaj velja:

$$i) \int_X f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0.$$

$$ii) \int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ s.p.}$$

Dokaz: i) $A := \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$

$$0 \leq \infty \chi_A \leq f \Rightarrow 0 \leq \infty \mu(A) \leq \int_X f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(A) = 0$$

ii) (\Leftarrow): $f(0)$ s.p. $\Rightarrow X = E \cup E^c$, $\mu(E) = 0$; $f|_{E^c} \equiv 0$

$$\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \int_{E^c} f d\mu = 0 + 0 = 0.$$

↑ int. po
meri σ ↑ int. ničelne
funkcije

(\Rightarrow): Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $A_n := \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. To je merljiva množica, saj je presliku zaprtega intervala.

$$0 = \int_X f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \frac{1}{n} \int_{A_n} 1 d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n)$$

$$\Rightarrow \mu(A_n) = 0, \quad \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0.$$



3.3. Integral kompleksne merljive funkcije

Demotivirajoči primer: Recimo, da integral že znamo vpeljati. Kaj bi bil integral ad $\chi_E - \chi_F$.

$$\text{Naivno: } \int_X (\chi_E - \chi_F) d\mu = \mu(E) - \mu(F)$$

Težava: lahko dobimo $\infty - \infty$, kar ni ok.

Merljiva funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ je integrabilna, če je integral $\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu < \infty$. Če je $\|f\|_1 < \infty$, potem pišemo $f \in L^1(\mu)$. Z $L^0(\mu)$ označimo vektorski prostor vseh kompleksnih merljivih funkcij.

Kako preverimo, da je $f \in L^1(\mu)$? Preverimo $\int_X |f| d\mu < \infty$.

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \Rightarrow |f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 \\ \Rightarrow |f| \geq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$$

$$f \in L^1(\mu) \Rightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^1(\mu).$$

$$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^1(\mu) \Rightarrow |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \Rightarrow f \in L^1(\mu).$$

g realna merljiva funkcija $\Rightarrow g = g^+ - g^-$; g^+, g^- merljivi

$$\int_X g d\mu = \int_X g^+ d\mu + \int_X g^- d\mu \quad \min\{g^+, g^-\} = 0$$

$$\Rightarrow (g \in L^1(\mu) \Leftrightarrow g^+, g^- \in L^1(\mu))$$

$f \in L^1(\mu)$:

$$\int_X f d\mu := \int_X (\operatorname{Re} f)^+ d\mu + \int_X (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \left(\int_X (\operatorname{Im} f)^+ d\mu + \int_X (\operatorname{Im} f)^- d\mu \right)$$

Lema: Če $\mathbb{L}^1(\mu)$ opredimo z operacijami po točkah, potem je $\mathbb{L}^1(\mu)$ vektorski prostor, $\|\cdot\|_1$ pa je polnorma na $\mathbb{L}^1(\mu)$.

Dokaz: $f, g \in \mathbb{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\|\alpha f + \beta g\| &= \int_X |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int_X (\|\alpha\| |f| + \|\beta\| |g|) d\mu \\ &= |\alpha| \int_X |f| d\mu + |\beta| \int_X |g| d\mu < \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathbb{L}^1(\mu)$ in $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ (tričotniška neenakost)

$\|\cdot\|_1$ je polnorma:

i) $\|f\|_1 \geq 0 \quad \forall f \in \mathbb{L}^1(\mu) \quad \checkmark$

ii) $\|\alpha f\| = \int_X |\alpha f| d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu = |\alpha| \cdot \|f\|_1$

iii) tričotniška neenakost \checkmark

□

Opomba: V splošnem $\mathbb{L}^1(\mu)$ ni normirani prostor:

$$X = \mathbb{R}, \mu = m, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

C... Cantorjeva množica $\neq m(C) = 0$

$$\|\chi_C\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \chi_C dm = m(C) = 0$$

Prostor ni normirani (v splošnem), lahko mu pa priredimo normirani prostor, ki "vsebuje vse informacije o $\mathbb{L}^1(\mu)$ ".

Vpeljimo relacijo \sim na $\mathbb{L}^1(\mu)$: $f \sim g : \Leftrightarrow f = g \text{ s.p.}$

• $f \sim f \quad \checkmark$

• $f \sim g \Rightarrow g \sim f \quad \checkmark$

• $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f = g \text{ na } A, g = h \text{ na } B$

$\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0 \Rightarrow f = h \text{ na } A \cap B \text{ in } \mu((A \cap B)^c) \leq \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0$

Definiramo: $\mathbb{L}^1(\mu) = \mathbb{L}^1(\mu)/\sim$:

$$\begin{aligned}\| [f] \|_1 &:= \|f\|_1 \\ [f] + [g] &:= [f+g] \\ \alpha [f] &:= [\alpha f]\end{aligned}$$

Ali sta operaciji določeni definirani? Da.

$$\cdot F \sim F', g \sim g' : [F] + [g] = [F+g], [F'] + [g'] = [F'+g']$$

$F \sim f'$, $g \sim g' \Rightarrow F = f$ na A , $g' = g$ na B

$$\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0 \Rightarrow F+g = f'+g' \text{ na } A \cap B \text{ in} \\ \mu((A \cap B)^c) \leq \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0$$

$$\Rightarrow F+g \sim f'+g'$$

$$\cdot d[F] = [dF] \text{ DN.}$$

Posledica: $L^1(\mu)$ je normirani prostor.

Dokaz: Vse lastnosti se dedujejo iz $\mathcal{L}^1(\mu)$ na $L^1(\mu)$.

$$\|[F]\|_1 = 0 \Rightarrow \|f\|_1 = 0 \Rightarrow |f| = 0 \text{ s.p.}$$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ s.p.} \Rightarrow f \sim 0 \Rightarrow [f] \sim [0]$$

□

Zakaj je norma $\|[F]\|_1$ dobro definirana?

$$[f] = [f'] \Rightarrow f \sim f' = f = f' \text{ s.p.} \Rightarrow |f| = |f'| \text{ s.p.}$$

$$\Rightarrow \int_X |f| d\mu = \int_X |f'| d\mu \Rightarrow \|f\|_1 = \|f'\|_1$$

Irditev: Za \mathcal{L}^1 -funkcije velja naslednje:

i) Integral je linearen funkcional na $\mathcal{L}^1(\mu)$.

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.$$

ii) Če sta $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ in $f \leq g$, potem je

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu. \quad \text{Kaj pomeni } f \leq g?$$

$$\text{iii)} |\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

$$\frac{f \leq g \text{ pri tehah}}{f \leq g \text{ s.p.} \Leftrightarrow f \leq g \vee L^0(\mu)} \\ [f] \leq [g]$$

$$\text{Dokaz: i) } \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

F, g realni: $(f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^-$

Raje pišimo $h := f+g$

$$h = h^+ - h^-$$

$$f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$$

$$\Rightarrow \int_X (f^+ + g^+ + h^-) d\mu = \int_X (f^- + g^- + h^+) d\mu$$

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu = \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu + \int_X h^+ d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu$$

$$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu = \int_X \underbrace{(f+g)}_h d\mu$$

Za kompleksne funkcije DN ($f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$).

Množenje s skalarji: le za $\lambda \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_X \lambda f d\mu &= \int_X \lambda (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) d\mu \\ &= \int_X \lambda \operatorname{Re} f d\mu + \int_X \lambda \operatorname{Im} f d\mu \\ &= \int_X (\lambda (\operatorname{Re} f)^+ - \lambda (\operatorname{Re} f)^-) d\mu + i \int_X (\lambda (\operatorname{Im} f)^+ - \lambda (\operatorname{Im} f)^-) d\mu \\ &= \underbrace{\int_X \lambda (\operatorname{Re} f)^+ d\mu}_{\text{Preostanek (i)}} - \underbrace{\int_X \lambda (\operatorname{Re} f)^- d\mu}_{\text{izpustimo}} + i \underbrace{\int_X \lambda \operatorname{Im} f^+ d\mu}_{\geq 0} - i \underbrace{\int_X \lambda \operatorname{Im} f^- d\mu}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Preostanek (i) izpustimo.

$$(ii) g = g^- - f + f$$

$$\Rightarrow \int_X g d\mu = \int_X \underbrace{(g-f)}_{\geq 0} d\mu + \int_X f d\mu$$

$\int_a^b f(x) dx$ Riemann
 $\int_a^b f dm$ Lebesgue
 ↳ nekateri pogoji
 $\int_a^b f dx$
 $\{c_i, b_i\}$
 Huszu zložba
 $\int_a^b f(x) dx$
 Možete bi moralisati: celo
 $\int_X f(x) d\mu(x)$

(ii) Če je $\int_X f d\mu = 0$, potem neenakost drži.

BSS. da := $\int_X f d\mu \neq 0 \Rightarrow \exists w. |w| \text{ in } w\lambda = |\lambda|$.

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= |\lambda| = w\lambda = w \cdot \int_X f d\mu = \int_X wf d\mu = \operatorname{Re} \int_X wf d\mu \\ &= \int_X \operatorname{Re}(wf) d\mu \leq \int_X |wf| d\mu = \int_X |f| d\mu \end{aligned}$$

$|w|=1$

Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci (LDK): angleščina: (LDC)

Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij, ki po točkah s.p. konvergirajo proti merljivi funkciji f . Če $\exists g \in L^1(\mu)$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ za skoraj vsak } x,$$

potem velja

$$\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \text{ in } \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Opoomba: $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ v } L^1(\mu)$.

Dokaz: Kot v dokazu izreka degerove, lahko BSS predpostavimo, da $f_n \rightarrow f$ po točkah in $|f_n| \leq g \quad \forall n$ povsod na X .

$$\begin{aligned} h_n &:= 2g - |f_n - f| \\ |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g \end{aligned} \quad \Rightarrow h_n \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Po Fatoujevi lemi: } \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu \\ \int_X 2g d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu = \end{aligned}$$

$$= \int_X 2g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (-|f_n - f|) d\mu = \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$ in je enaka 0

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0$$

19. november 2025 □

Kako v praksi preverimo, da je normirani prostor Banachov?

i) Vsaka Cauchyjeva zaporedje konvergira (poisčemo limito).

ii) Dokazemo, da vsaka absolutno konvergirajoča vrsta tudi konvergira.

Irditev: Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takšna zaporedje L^1 -funkcij, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira skoraj povsod proti neki L^1 -funkciji f .

Velja še

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz: Definiramo $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Tedaj je $g: X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva in

$$\int_X g d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

$\Rightarrow g(x) < \infty$ za skoraj vsak $x \in X$

\Rightarrow za skoraj vsak $x \in X$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira absolutno \Rightarrow konvergira

Definiramo $g_n := f_1 + \dots + f_n \Rightarrow |g_n| \leq \sum_{k=1}^n |f_k| \leq g \in L^1(\mu) \quad g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ zkorba navedej ...

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \int_X f_j d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu$$

LDK
S=I

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

□

Riesz-Fisherjev izrek: Prostor $L^1(\mu)$ je Banachov prostor. Če $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, potem obstaja $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, da $f_{n_k} \rightarrow f$ skoraj povsod.

Opomba: Veliko podobnih izrekov se tudi imenuje Riesz-Fisherjev izrek.

Opoomba: $p \geq 1$, $\ell^p = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ ($p \neq \infty$)

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \Rightarrow (\ell^p, \|\cdot\|_p) \text{ je Banachov}$$

ℓ^∞ ← omejena zaporedja

$$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^\infty \subseteq \ell^\infty \quad 1 \leq p \leq \infty$$

$$\mu(x) < \infty \Rightarrow L^\infty(\mu) \subseteq L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu)$$

tega še ne poznamo

Dokaz [Riesz-Fisher]: $L^1(\mu)$ je poln:

Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje v $L^1(\mu)$. Našli bomo ustrezeno podzaporedje, ki bo konvergiralo v $L^1(\mu)$. Po izreku iz metričnih prostorov bo ta limita tvrdi limita prvotnega zaporedja.

Ker je $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjevo, obstaja strogo naraščajoče zaporedje $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ indeksov, da $\|f_n - f_{n_k}\|_1 \leq 2^{-k} \quad \forall m, n \geq n_k$.

Po trditvi od prej $f := f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ konvergira skoraj povsod proti neki funkciji $f \in L^1(\mu)$.

Ker velja: $f_{n_1} + \sum_{j=1}^k (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) = f_{n_{k+1}}$, podzaporedje $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergira proti f skoraj povsod. Ker pa velja

$$|f_{n_{k+1}}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \in L^1(\mu),$$

po LDK dobimo $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f| d\mu = 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_{k+1}} - f\|_1.$$

Torej $f_{n_{k+1}} \rightarrow f$ v $L^1(\mu)$.



3.4 Riemannov in Lebesgueov integral

25. november 2025

Naj bo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Za particijo P
 $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

intervala $[a, b]$ definiramo

$$m_j := \inf_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x) \quad \text{in} \quad M_j := \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x).$$

Definiramo spodnjo in zgornjo Darbouxova vsoto:

$$S_p := \sum_{j=1}^n m_j \Delta_j \quad \text{in} \quad Z_p := \sum_{j=1}^n M_j \Delta_j,$$

kjer je $\Delta_j := x_j - x_{j-1}$. Iz Analize 1 vemo, da je f Riemannova integrabilna $\Leftrightarrow \sup_{P \text{ part}} S_p = \inf_{P \text{ part}} Z_p$.

V primeru, ko je f Riemannova integrabilna, to število označimo z $\int_a^b f(x) dx$.

Za vsak $j = 1, \dots, n$ in vsak $x \in [x_{j-1}, x_j]$ velja $m_j \leq f(x) \leq M_j$.

Izrek: Riemannova integrabilna funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je Lebesguevo integrabilna in velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\mu.$$

Dokaz: Za particijo P definiramo

$$\Delta_p := \sum_{j=1}^n m_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]} + f(b) \chi_{\{b\}} \quad \text{in} \quad Z_p := \sum_{j=1}^n M_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]} + f(b) \chi_{\{b\}}.$$

$\Rightarrow \Delta_p \leq f \leq Z_p$ za vsako particijo P .

$$\text{Velja } \int_{[a, b]} \Delta_p dm = S_p \quad \text{in} \quad \int_{[a, b]} Z_p dm = Z_p$$

Ker je f Riemannova integrabilna, obstaja naraščajoče zaporedje particij $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tako, da je vsaka finejša od predhodne in velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{P_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{P_k} = \int_a^b f(x) dx$$

(Tukaj zvezka dolžine najširših intervalov delitve gredo proti 0.)

Ker je P_{n+1} finejša od P_n , je torej $s_n \leq s_{n+1} \leq f \leq z_{n+1} \leq z_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Torej $\Delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$ in $z := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ po točkah dobimo $s_n \leq s \leq f \leq z \leq z_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
 s_n, z_n merljive $\Rightarrow s$ in z merljivi

$$\begin{array}{cccc} \int_{[a,b]} s dm & \leq \int_{[a,b]} s dm & \leq \int_{[a,b]} z dm & \leq \int_{[a,b]} z dm \\ \downarrow & & & \downarrow \\ \int_a^b f(x) dx & & & \int_a^b F(x) dx \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} s dm = \int_a^b F(x) dx = \int_{[a,b]} z dm \Rightarrow \int_{[a,b]} (z-s) dm = 0$$

$\Rightarrow z-s=0$ s.p. na $[a,b]$, saj je $z \geq s$.

$\Rightarrow f = z = s$ s.p. na $[a,b]$

$\Rightarrow f$ je Lebesgueova merljiva, saj je Lebesgueova σ -algebra polna

$f = z$	$m(B) = 0$
$f^{-1}(U) \cap A$	$z^{-1}(U) \cap B$
$z^{-1}(U) \cap A$	$\subseteq B$

Skica:

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} z dm = \int_{[a,b]} s dm = \int_a^b f(x) dx$$

Izrek: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ je Riemannova integrabilna \Leftrightarrow Lebesgueova mera točk neveznosti funkcije f je 0.
 $(f$ je skoraj povsod zvezna na $[a,b]$)

Brez dokazu.

Primer: Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

$$\frac{1}{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1; & 0 \leq x < 1 \\ 2; & x = 1 \end{cases} \quad (\text{zgorajje meja je } +\infty)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{dm}{1+x^n} \stackrel{\text{L DK}}{=} \int_{[0,1]} f dm = \int_{[0,1]} f dm \\ &= 1 \cdot m([0,1]) + 0 \cdot m(\{1\}) = 1 \end{aligned}$$

3.5 Produktna mera (in Fubinijev izrek)

Naj bosta (X, \mathcal{A}, μ) in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ merljiva prostora.

Produktna σ -algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je najmanjša σ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike.

Kako definirati produktno mero na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$?

Naj bo $\mathcal{S} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Definiramo

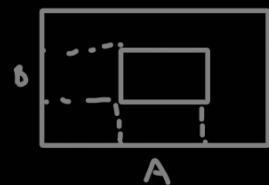
$$\Theta(A \times B) = \mu(A) \cdot \lambda(B).$$

Trditev: \mathcal{S} je polalgebra in $\Theta: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ je polmerna.

Dokaz: i) $X \times Y \in \mathcal{S}$ ✓

ii) $A \times B \in \mathcal{S} \Rightarrow (A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (A \times B^c)$

$$\text{Velja } (A^c \times Y) \cap (A \times B^c) = \emptyset.$$



iii) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

Θ je polmerna na \mathcal{S}

i) $\Theta(\emptyset) = \Theta(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset) \cdot \lambda(\emptyset) = 0$

ii) in iii) Naj bo $A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) \in \mathcal{S}$ in naj bodo $(A_n \times B_n)$ paroma disjunktne iz \mathcal{S} .

$$\Theta(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(A_n \times B_n) \quad \text{oziroma} \quad \mu(A) \lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \lambda(B_n)$$

$$\chi_{A \times B}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y), \text{ sij je } \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) = A \times B \text{ dijunktna unija}$$

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$$

Fiksirajmo $x \in X$:

$$\int_X \chi_A(x) \int_Y \chi_B(y) d\lambda = \int_Y \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y) d\lambda$$

$$\chi_A(x) \lambda(B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \leftarrow \Sigma = \Sigma$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \int_Y \chi_{B_n}(y) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \lambda(B_n)$$

$$\Rightarrow \lambda(B) \chi_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \chi_{A_n}(x) \quad \forall x \in X$$

Integrirajmo po x in kot zgoraj dobimo

$$\lambda(B) \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) \mu(A_n).$$



Izrek: Polmerca $\Theta: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ se da razširiti do mere $A \otimes B$. Če sta μ in λ σ -končni, potem je razširitev ena sama.

Dokaz: Najprej na en sam način Θ razširimo do mere na algebri, generirani z \mathcal{S} . Ta razširitev je ena suma. Po Caratheodorijskem izreku obstaja mera na σ -algebri vseh zunanjih množic, ki razširja Θ .

Če sta μ in λ σ -končni, potem je

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n; \quad \mu(X_n) < \infty \quad \text{in } X_n \subseteq X_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n; \quad \lambda(Y_n) < \infty \quad \text{in } Y_n \subseteq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \times Y_n); \quad \Theta(X_n \times Y_n) = \mu(X_n) \lambda(Y_n) < \infty \quad \text{in } X_n \times Y_n \subseteq X_{n+1} \times Y_{n+1}$$

\Rightarrow mera na algebri je σ -končna. Po izreku je razširitev na Caratheodorijsko σ -algebra ena sama.

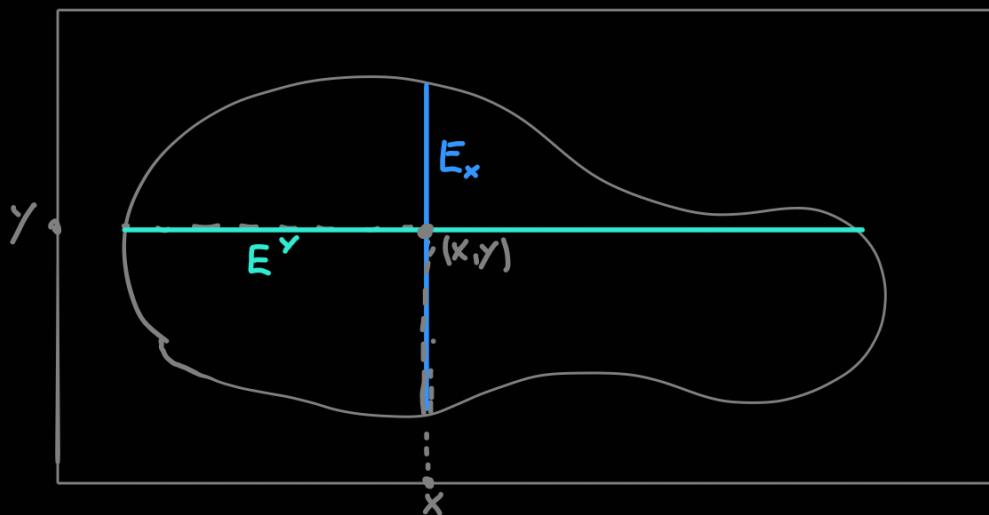


V primeru, ko sta X in Y σ -končna, dobijemo enačbo mero imenujemo produktna mera in jo označimo z $\mu \times \lambda$ ozziroma lahko tudi $\mu \otimes \lambda$.

Fubini iz Analize 2: $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna:

$$\begin{aligned} \int_P f(x,y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y) dx \\ &= \int_a^b dx \int_c^d f_x(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f^y(x) dx \end{aligned}$$

Naj bo $E \subseteq X \times Y$. Za $x \in X$ in $y \in Y$ definiramo preseza E_x in E^y z $E_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in E\}$ in $E^y := \{x \in X \mid (x,y) \in E\}$.



Podobno za $f: X \times Y \rightarrow Z$ definiramo $f_x: Y \rightarrow Z$ in $f^y: X \rightarrow Z$ s predpisoma $f_x(y) = f(x,y) = f^y(x)$.

26. november 2025

Primer: Naj bo $E \subseteq X \times Y$. Tedaj za vse $x \in X$ in $y \in Y$ velja $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$ in $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$.

$$(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$$

$$(\chi_E)_x(y) = \chi_E(x,y) = \begin{cases} 1; & (x,y) \in E \\ 0; & (x,y) \notin E \end{cases} \stackrel{x \text{ fiksen}}{\downarrow} = \begin{cases} 1; & y \in E_x \\ 0; & y \notin E_x \end{cases} = \chi_{E_x}$$

Podobno $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$.

Irditev: i) Naj bo $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tedaj je $E_x \in \mathcal{B}$ in $E^y \in \mathcal{A}$ za vse $x \in X$ in $y \in Y$.

ii) Če je f merljiva glede na produktno σ -algebra $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ na $X \times Y$, potem sta f_x in f^y merljivi glede na \mathcal{B} in \mathcal{A} .

Dokaz: Naj bo \mathcal{C} družina vseh podmnožic v $X \times Y$, da $\forall E \in \mathcal{C}$ velja $E_x \in \mathcal{B}$ in $E^y \in \mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ je σ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B} \Rightarrow E = A \times B \in \mathcal{C}$

$$x \in X: x \in A \Rightarrow E_x = B \in \mathcal{B}$$

$$x \notin A \Rightarrow E_x = \emptyset \in \mathcal{B}$$

Podobno $E^y \in \mathcal{A} \quad \forall y \in \mathcal{C}$.

$\Rightarrow \mathcal{C}$ vsebuje vse merljive pravokotnike $\Rightarrow X \times Y \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{C} \Rightarrow (E^c)_X &= \{y \in Y \mid (x, y) \in E^c\} \\ &= \{y \in Y \mid (x, y) \notin E\} \\ &= \{y \in Y \mid y \notin E_x\} \\ &= (E_x)^c \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da velja $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_X$ in podobno za y -prereze. (DN)

$$\Rightarrow \mathcal{C} \supseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

ii) Naj bo $D \subseteq Z$ merljiva množica. Izberimo $x \in X$. Ker je f merljiva, je $f^{-1}(D) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f^{-1}(D))_x &\in \mathcal{B} \quad \text{in } (f^{-1}(D))^y \in \mathcal{A} \\ &\stackrel{\text{II?}}{(f_x^{-1})(D)} \quad \stackrel{\text{II?}}{(f^y)^{-1}(D)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (f_x^{-1})(D) = \{y \in Y \mid f_x(y) \in D\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{y \in Y \mid f(x, y) \in D\} \\
 &= \{y \in Y \mid (x, y) \in f^{-1}(D)\} \\
 &= \{y \in Y \mid y \in (f^{-1}(D))_x\} \\
 &= (f^{-1}(D))_x
 \end{aligned}$$

Podobno za y -prereze.



Družine podmnožic M dane množice je monoton razred, če velja naslednje:

i) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$; $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M$

ii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$; $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in M$

Ker je presek neprazne družine monotonih razredov zopet monoton razred, vedno obstaja najmanjši monoton razred, ki vsebuje dano družino.

* Vsaka σ -algebra je monoton razred.

* Vsaka algebra, ki je monoton razred, je σ -algebra.

Dokaz: $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ algebra

Definiramo $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \quad \uparrow \text{monoton razred}$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

Lema [o monotonem razredu]: Naj bo \mathcal{A} algebra podmnožic množice X . Tedaj je monoton razred M , generiran z \mathcal{A} , σ -algebra.

Dopomba: Ta monoton razred je dejansko σ -algebra, generirana z \mathcal{A} .

$$A \subseteq \mathcal{M}, A \subseteq \sigma(A) \Rightarrow A \subseteq \mathcal{M} \subseteq \sigma(A)$$

$\Downarrow \leftarrow \mathcal{M}$ je σ -algebra $\sigma(A)$ je monotoni razred

$$A \subseteq \sigma(A) \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(A) = \mathcal{M}$$

Dokaz: Po opombi zadostuje dokazati, da je \mathcal{M} algebra. Za $A \in \mathcal{M}$ definiramo

$$\mathcal{M}(A) := \{B \in \mathcal{M} \mid A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M}\}.$$

tu lahko
 vzememo x
 $\Rightarrow x \setminus B \in \mathcal{M}$
 B^c

Za vsak $A \in \mathcal{M}$ je $\mathcal{M}(A)$ monotoni razred. (DN)

Opazimo še $B \in \mathcal{M}(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}(B)$.

Vzemimo $A, B \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M}$

$$\Rightarrow B \in \mathcal{M}(A) \quad \forall B \in \mathcal{M}$$

(vsebuje tudi najmanjši monotoni razred generiran z A)

$$\Rightarrow A \subseteq \mathcal{M}(A) \Rightarrow \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(A) \Rightarrow \mathcal{M}(A)$$

$\Rightarrow \mathcal{M}(A)$ je monotoni razred

$$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}. \exists C \in \mathcal{M}(A) \quad (A \text{ poljuben}) \Rightarrow \text{vsebuje vsaj najmanjši monotoni razred}$$

$$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}. \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(B) \Rightarrow \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{M}. A \in \mathcal{M}(B) : A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M}$$



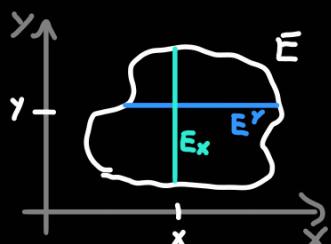
2. december 2025

Mali Fubinijev izrek: Naj bosta (X, \mathcal{A}, μ) in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ σ -končna merljiva prostora. Za $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sta funkciji

$$x \mapsto \lambda(E_x) \quad y \mapsto \mu(E^y)$$

merljivi in velja

$$(\mu \times \lambda)(E) = \int_X \lambda(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\lambda(y).$$



Formula se prebere lepše kot:

$$\iint_{X \times Y} \chi_E(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) = \int_X d\mu(x) \int_Y \chi_E(x, y) d\lambda(y)$$

$$= \int_Y d\lambda(y) \int_X \chi_E(x, y) d\mu(x)$$

Zato se ta izrek imenuje "mali Fubinijev izrek".

Dokaz: Definirajmo $\Sigma \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$... vse merljive množice, za katere izrek velja. Dokazali bomo $\Sigma = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Dokazali bomo: i) Σ vsebuje vse merljive pravokotnike

ii) Σ vsebuje končne disjunktne unije merljivih pravokotnikov

iii) Σ je monotón razred

Recimo, da smo i), ii), iii) že dokazali. Tedaj je $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, kjer je Σ_0 algebra generirana z merljivimi pravokotniki. Naj bo \mathcal{M} monotón razred generiran z Σ . Tedaj je \mathcal{M} σ -algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike. Tedaj velja $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \Sigma \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

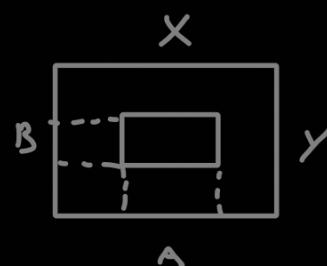
i) $\Sigma = A \times B; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$

$$E_x = \begin{cases} B & : x \in A \\ \emptyset & : x \notin A \end{cases} \quad \lambda(E_x) = \begin{cases} \lambda(B) & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \mapsto \lambda(E_x)$$



$$x \mapsto \lambda(B) \chi_A \quad \text{je } \mathcal{A}\text{-merljiva.}$$



Podobno $y \mapsto \mu(E^y) \Leftrightarrow y \mapsto \mu(A) \chi_B$ je \mathcal{B} -merljiva

$$\int \lambda(E_x) d\mu(x) = \lambda(B) \int \chi_A d\mu = \lambda(B) \mu(A) \quad || \quad = (\mu \times \lambda)(A \times B)$$

$$\int \lambda(E^y) d\lambda(y) = \mu(A) \int \chi_B d\lambda = \mu(A) \lambda(B)$$

ii) Naj bosta C in D disjunktna merljiva pravokotnika. Ker je $\chi_{C \cup D} = \chi_C + \chi_D$.

$x \mapsto \lambda((C \cup D)_x) = \lambda(C_x \times D_x) = \lambda(C_x) + \lambda(D_x)$ je vsota merljivih funkij, zato je merljiva. Podobno za $y \mapsto \mu((C \cup D)^y)$.

Za enakost integralov upoštevamo aditivnost domene: če Z, W disjunktne, potem $\int_{Z \cup W} = \int_Z + \int_W$.

Za poljubno končno disjunktno unijo uporabimo indukcijo.

iii) Naj bo $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje v \mathcal{E} .

Označimo $E := \sum_{n=1}^{\infty} E_n$.

$x \mapsto \lambda(E_x)$, $y \mapsto \mu(E^y)$ merljivi

Ker je $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$, je $\lambda(E_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda((E_n)_x)$. Zato je f: $x \mapsto \lambda(E_x)$ limita po točkah zaporedja funkcij $f_i: x \mapsto \lambda((E_n)_x)$. Ker je limita merljivih funkuj merljiva, je g: $x \mapsto \lambda(E_x)$ merljiva.

Podobno je $y \mapsto \mu(E^y)$ merljiva.

$$\int \mu(E^y) d\lambda(y) \stackrel{\text{LMK za } g_n \text{ in } g}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu((E_n)^y) d\lambda(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \times \lambda)(E_n) \stackrel{E_n \in \mathcal{E}}{=} (\mu \times \lambda)(E)$$

Podobno za $\int_x \lambda(E_x) d\mu(x) = (\mu \times \lambda)(E)$.

Predpostavimo, da sta μ in λ končni, t.j. $\mu(x) < \infty, \mu(y) < \infty$.
 Naj bo sedaj $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padačoče zaporedje množic v \mathcal{E} in naj bo E njihov presek. Funkciji $x \mapsto \lambda(E_x)$ in $y \mapsto \mu(E^y)$ sta merljivi kot prej. Enakost integralov sledi iz istega računa kot prej, le da argument z LMK nadomestimo z LDK, kjer je dominirajoča funkcija $y \mapsto \mu(E_1^y)$, za zadnjo limito pa uporabimo dejstvo, da je mera presek limita mer, če je ena od mer množic končna. Podobno za $x \mapsto \lambda(E_x)$.

V splošnem zapisemo $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n; \mu(X_n) < \infty, \lambda(Y_n) < \infty$ in $X_n \subseteq X_{n+1}, Y_n \subseteq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Izberimo $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tedaj je $E \cap (X_j \times Y_j)$ vsebovana v $\mathcal{A}|_{X_j} \otimes \mathcal{B}|_{Y_j}$. Tedaj sta funkciji $x \mapsto \lambda(E_x \cap Y_j), y \mapsto \mu(E^y \cap X_j)$ merljivi. V limiti, ko $j \rightarrow \infty$, dobimo $x \mapsto \lambda(E_x \cap Y) = \lambda(E_x)$ in $y \mapsto \mu(E^y \cap X) = \mu(E^y)$, ki sta merljivi funkciji. Preverimo še enakost dvakratnih integralov in produktne mere. Po zgornji dokazanem velja $(\mu \times \lambda)(E \cap (X_j \times Y_j)) = \int_{X_j} \lambda(E_x \cap Y_j) d\mu(x) = \int_{Y_j} \mu(E^y \cap X_j) d\lambda(y)$.

Funkcijo razširimo z 0 na Y_j^c in X_j^c in dobimo pravilk enacaj. □

Tonelli-Fubinijev izrek: Naj bosta (X, \mathcal{A}, μ) in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ σ -končna prostora. Tedaj velja:

Tonelli: Naj bo $F: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ merljiva funkcija in naj bosta $g(x) := \int_Y F(x, y) d\lambda(y)$ in $h(y) := \int_X F(x, y) d\mu(x)$. Tedaj sta \mathcal{A} in \mathcal{B} merljivi glede na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ in velja

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) &= \int_Y d\lambda(y) \int_X f(x, y) d\mu(x) \\ &= \int_X d\mu(x) \int_Y f(x, y) d\lambda(y). \end{aligned}$$

Fubini: Naj bo $f \in L^1(\mu \times \lambda)$. Tedaj je $f_x \in L^1(\lambda)$ za skoraj vsak $x \in X$ in $f^y \in L^1(\mu)$ za skoraj vsak $y \in Y$. Funkciji g in h sta v $L^1(\mu)$ in $L^1(X)$. Oba dvakratna integrala sta enaka drugnjemu.

Opomba: $f \in L^1(\mu \times \lambda) \Leftrightarrow \int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \lambda) < \infty$ preverimo s Tonellijem.

Dokaz: Tonelli: Po malem Fubinijevem izreku Tonelli-jev izrek velja, ko je $f = \chi_E$ za $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Če je $0 \leq s$ stopničasta funkcija, za enakost integralov uporabimo aditivnost in nenegativno homogenost. Za merljivost uporabljajo dejstvo, da so linearne kombinacije merljivih funkcij merljive.

Naj bo sedaj F splošna nenegativna merljiva funkcija. Po izreku o aproksimaciji obstaja zaporedje nenegativnih stopničastih s_n , da $0 \leq s_n \nearrow F$.

$$s_n \nearrow F \Rightarrow (s_n)_x \nearrow f_x \stackrel{\text{LMK}}{\Rightarrow} \int_Y (s_n)_x d\lambda \nearrow \int_Y f_x d\lambda$$

Zato je $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y (s_n)_x d\lambda$ in zato merljiva. Podobno je h merljiva

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} F(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) &\stackrel{\text{LMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} s_n(x, y) d(\mu \times \lambda)(x, y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X d\mu(x) \int_Y \underbrace{F_x(y) d\lambda(y)}_{(s_n)_x(y)} \\ &\stackrel{\text{LMK}}{=} \int_X d\mu(x) \int_Y F_x(y) d\lambda(y) \end{aligned}$$

$$= \int_X d\mu(x) \int_Y f(x,y) d\lambda(y).$$

Podobno druga enakost.

$$\begin{aligned} \text{Fubini: } f \in L^1(\mu \times \lambda) &\Leftrightarrow \int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \lambda) < \infty \\ &\Leftrightarrow \int_X d\mu(x) \underbrace{\int_Y |f(x,y)| d\lambda(y)}_{\tilde{g}(x)} < \infty \\ &\Leftrightarrow \int_X \tilde{g}(x) d\mu(x) < \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{g}(x) < \infty \text{ skoraj parsod} \Rightarrow \int_Y |f(x,y)| d\lambda(y) < \infty \text{ skoraj parsod}$$

$\Rightarrow f_x \in L^1(\lambda)$ za skoraj vsak x .

Podobno $f^y \in L^1(\mu)$ za skoraj vsak y .

Ker je $\int_X \tilde{g}(x) d\mu(x) < \infty$, je $g \in L^1(\mu)$. Podobno $h \in L^1(\lambda)$.

Enakost med dvostruknima in dvojnim integralom pa preverimo tako, da zapisemo $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i((\operatorname{Im} f)^+ - (\operatorname{Im} f)^-)$, upoštevamo linearnost integralov za L^1 funkcije in večkrat Tonelliijev izrek. \blacksquare

Primer: $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \overset{\mu}{m})$ in $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, λ šteje točke.

Naj bo Δ diagonalna v $[0,1] \times [0,1]$; $\Delta = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$.

Δ je v $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Ali velja Tonelli za χ_Δ ?

$$\int_X d\mu(x) \int_Y \chi_\Delta(x,y) d\lambda(y) = \int_Y 1 d\mu(x) = 1$$

$$\int_Y d\lambda(y) \int_X \chi_\Delta(x,y) d\mu(x) = \int_X 0 d\lambda(y) = 0$$

Problem: λ ni σ -končna. Obstajajo tudi drugi primeri.

Opomba: Kaj narediti v primeru, ko mera ni σ -končna?

Če $f \in L^1(\mu)$: $X = \underbrace{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}_C \cup \underbrace{\{x \in X \mid f(x) = 0\}}_N$.

$$\int_X f d\mu = \int_C f d\mu$$

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in X \mid |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}}_{\text{homogene Mengen}} =: C_n$$

$$\infty > \int_X |f| d\mu \geq \int_{C_n} |f| d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(C_n)$$

Če imamo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(\mu)$: $F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (\|f_n\|_1 + 1)} \cdot |f_n|$

$f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$

Kerje $|F_n| \leq 2^n (\|f_n\|_1 + 1) \cdot f$ je $|f_n|_{C^0} = 0$.

Zu integral je $\int_X F_n d\mu = \int_X f_n d\mu$.