

5. L^p -PROSTORI

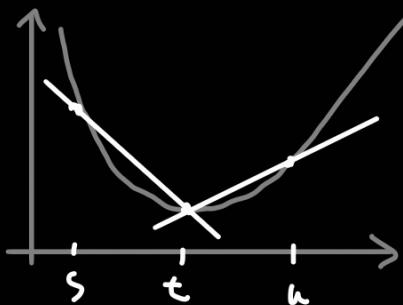
5.1. Konveksne Funkcije in neenakosti

$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna, če za vse $x, y \in (a, b)$ in $\lambda \in [0, 1]$ velja $\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
Pri nas je $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Pišemo $x = s$, $y = u$ in $t = (1-\lambda)s + \lambda u$ in dobimo

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}. \quad (*)$$

"Nakloni sekant rastejo."



Iz (*) se da dokazati, da je φ zvezna na odprttem intervalu, kar je pri nas (a, b) .

Jensenova neenakost: Naj bo (X, \mathcal{F}, μ) verjetnostni prostor in $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Naj bo $f \in L^1(\mu)$ takšna funkcija, da je njena zaloga vrednosti vsebovana v (a, b) . Tedaj velja

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Verjetnostna formulacija: (Ω, \mathcal{F}, P) , φ konveksna funkcija, ... predpostavke $X \leftrightarrow f$

Dokaz: Pišimo $t = \int_X f d\mu$

$$a \leq t \leq b \quad b > f(x) > a \quad | \int_X$$

$$b = \int_X b d\mu \geq \int_X f(x) d\mu = \int_X a d\mu = a$$

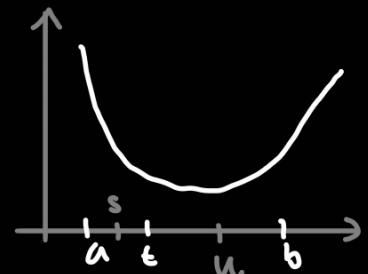
$$\Rightarrow a \leq t \leq b$$

Ali je $t = b$ oziroma $\int_X f d\mu = \int_X b d\mu$ oziroma $\int_X (b-f) d\mu = 0$
 $\Leftrightarrow b = f$ s.p., saj $b > f(x) \forall x$
 To ni mogočno. Podobno $a \leq t$.

Definiramo $\beta := \sup \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$

Ker za vse $s \in (a, t)$ in vse $u \in (t, b)$ velja

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \beta \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$



Dobimo $f(s) \geq f(t) + \beta(s-t)$ za vse $s \in (a, b)$.

$s = F(x)$:

$$f(F(x)) \geq f(t) + \beta(F(x) - t)$$

$$\int_X (\varphi \circ f) d\mu \geq \underbrace{\int_X f(t) d\mu}_{f(t) = f(\int_X f d\mu)} + \beta \underbrace{\int_X (F-x) d\mu}_0$$

□

Naj bo $X = \{p_1, \dots, p_n\}$ opredeljen s potenčno σ -algebra s in verjetnostno mero. Označimo $d_j = \mu(\{p_j\})$ in $x_j = f(p_j)$, kjer je f funkcija. Če je f konveksna, potem dobimo

$$f\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu$$

$$f\left(\sum_{j=1}^n f(p_j) \mu(\{p_j\})\right) \leq \sum_{j=1}^n (\varphi \circ f)(p_j) \mu(\{p_j\}).$$

$$f\left(\sum_{j=1}^n d_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n d_j f(x_j); \quad \sum_{j=1}^n d_j = 1, \quad 0 \leq d_j \leq 1$$

Naj bo $f(x) = e^x$ in $y_j = e^{x_j}$

$$y_1^{d_1} \cdots y_n^{d_n} \leq d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n \quad (***)$$

$$\text{Vzemimo } d_1 = \cdots = d_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \leq \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \quad \text{AG-neenakost}$$

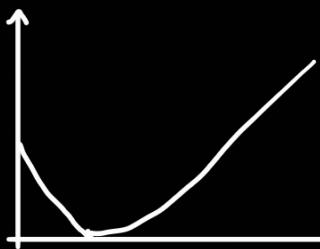
$$n=2, d_1=p, d_2=q \quad \vee \quad (***) \text{ in dobimo} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (p, q \text{ kanjugirana eksponentna})$$

$y_1 = x^p$, $y_2 = y^q$ dobimo $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ Youngova neenakost

Youngova neenakost lahko dokazemo tudi z ANA1:

Za fiksni $y > 0$ opazuješ $f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy$

$$f'(x) = x^{p-1} - y \Rightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}}$$



\Rightarrow globalni minimum za f je dosežen, ko je $x = y^{\frac{1}{p-1}}$

$$\Rightarrow f(x) = f(y^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}y^q - y^{\frac{1}{p-1}+1}$$

$$= \frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}} - y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}y^q$$

$$= \left(\frac{1}{p}-1\right)y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}y^q$$

$$< -\frac{1}{q}y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}y^q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{p}{p-1}}{p} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

Enakost v Youngovi neenakosti je dosežena \Leftrightarrow

$$x = y^{\frac{1}{p-1}} \text{ oziroma } x^p = y^{\frac{p}{p-1}} = y^p$$

5.2. L^p -prostori

23. december 2025

Naj bo (X, \mathcal{U}, μ) merljiv prostor s pozitivno mero. Za $p \in [1, \infty)$ definiramo $L^p(\mu)$ kot množico vseh merljivih funkcij $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, da je $|f|^p \in L^1(\mu)$.

$$|f|^p \in L^1(\mu) \Leftrightarrow \int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

Kasneje bomo pokazali, da je $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ polnorma na $L^p(\mu)$.

$L^p(\mu)$ je vektorski prostor

$$i) f, g \in L^p(\mu) \Rightarrow f + g \in L^p(\mu) \quad ii) f \in L^p(\mu), \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f \in L^p(\mu)$$

Primer $p=1$ je znani, zato BSS $1 < p < \infty$.

i) $t \mapsto t^p$ je konveksna na $[0, \infty]$

$$t_1, t_2 \geq 0 : \varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\varphi(t_1) + \frac{1}{2}\varphi(t_2)$$

$$\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}t_1^p + \frac{1}{2}t_2^p$$

$$F_1 = |f(x)|, \quad g_1 = |g(x)|$$

$$(|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq 2^{p-1} \left(\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu \right) < \infty$$

$$\|f+g\|_p^p \leq 2^{p-1} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

$$\text{ii)} \int_X |\lambda f|^p d\mu = |\lambda|^p \int_X |f|^p d\mu = |\lambda|^p \|f\|_p^p$$

$$\|\lambda f\|_p^p \Rightarrow \|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$$

$p \in (1, \infty) \Rightarrow$ če g zadostja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, g imenujemo konjugirani eksponent k p oziroma p in g sta konjugirana eksponenta.

$$p=q=2: \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \rightsquigarrow L^2(\mu)$$

Hölderjeva neenakost: Naj bosta $p, q \in (1, \infty)$ konjugirana eksponenta.

Naj bo $f \in L^p(\mu)$ in $g \in L^q(\mu)$. Tedaj je $fg \in L^1(\mu)$ in velja:

$$|\int_X fg d\mu| \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q}$$

oziroma

$$|\int_X fg d\mu| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Posledica: Za $f \in L^p(\mu)$ in $g \in L^q(\mu)$, kjer sta $1 < p, q < \infty$ konjugirana eksponenta, velja $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Dokaz Hölderjeve neenakosti: Najprej predpostavimo, da $f, g \geq 0$.

$$\text{Vpeljimo } A := \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}, \quad B := \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}.$$

$\Rightarrow 0 \leq A, B < \infty$

Naša neenakost: $0 \leq \int_X Fg d\mu \leq A \cdot B$

$A=0 \Rightarrow f^p=0$ s.p. $\Rightarrow f=0$ s.p. $\Rightarrow fg=0$ s.p. $\Rightarrow 0 \leq 0 \leq DB$ ✓

Če $B=0$, podobno.

Zato BSS $A, B \geq 0$. Definiramo $F := \frac{f}{A}$ in $G := \frac{g}{B}$.

$\Rightarrow F \in L^p(\mu)$, $\|F\|_p = 1$, $G \in L^q(\mu)$, $\|G\|_q = 1$

Po Youngovi neenakosti je

$$0 \leq FG \leq \frac{F^p}{p} + \frac{G^q}{q} / S$$

$$0 \leq \int_X FG d\mu \leq \int_X \left(\frac{F^p}{p} + \frac{G^q}{q} \right) d\mu = \underbrace{\frac{1}{p} \|F\|_p^p}_{1} + \underbrace{\frac{1}{q} \|G\|_q^q}_{1} = 1$$

$$\int_X \frac{f}{A} \frac{g}{B} d\mu \leq 1 \text{ ozirama } \int_X Fg d\mu \leq AB \leq \|f\|_p^p \cdot \|g\|_q^q$$

V splošnem: Če je $fg \in L^1$

$$\begin{aligned} \left| \int_X fg d\mu \right| &\leq \int_X |Fg| d\mu = \int_X |F| \cdot |g| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \\ &= \|f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

□

Lema: Naj bo sta $p, q \in (1, \infty)$ konjugirana eksponenta. Tedaj za $f \in L^p(\mu)$ velja $\|f\|_p = \sup \left\{ \left| \int_X fg d\mu \right| \mid \|g\|_q = 1 \right\}$.

Opozba: $f \in L^p(\mu) \Rightarrow \varphi_f(g) := \int_X Fg d\mu$; $g \in L^q(\mu)$ in p, q konjugirani eksponenti. Ta φ_f je omejen linearen funkcional na $L^q(\mu)$, saj je $|\varphi_f(g)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (Hölder) $\Rightarrow \|\varphi_f\| \leq \|f\|_p$.

Po lemi je $\|\varphi_f\| = \|f\|_p$.

Dokaz: Označimo $s := \sup \left\{ \left| \int_X fg d\mu \right| \mid \|g\|_q = 1 \right\}$. Po Hölderjevi neenakosti je $\|f\|_p \geq s$. Definirajmo

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} \cdot \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & ; f(x) \neq 0 \\ 0 & ; f(x) = 0 \end{cases}$$

Funkcija g je dobro definirana, če $f \neq 0$ s.p. Če je $f=0$ s.p,

potem katerikali $g \in \{g\|_p = 1\}$ deluje.

BSS $f \neq 0$ s.p.

$$\|g\|_2^2 = \int_X |g|^2 d\mu = \int_{\{x | f(x) \neq 0\}} \frac{|f|^{(p-1)2}}{\|f\|_p^{(p-1)2}} d\mu$$

$$(p-1)g - pg - g = p$$

$$= \int_{\{x | f(x) \neq 0\}} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_X |f|^p d\mu = 1$$

$$\begin{aligned} \int_X fg d\mu &= \int_{\{x | f(x) \neq 0\}} f(x) \frac{|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} \cdot \frac{\bar{f(x)}}{|f(x)|} d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}} \int_X |f(x)|^p d\mu \\ &= \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}} \cdot \|f\|_p^p = \|f\|_p. \end{aligned}$$

□

Neenakost Minkovskega: Naj bo $1 \leq p < \infty$. Tedaj za $f, g \in L^p(\mu)$ velja $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ oziroma

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Dokaz: Naj bosta $f, g \in L^p(\mu)$. Naj bo $h \in L^\infty(\mu)$ tak, da je $\|h\|_2 = 1$. $\left| \int_X (f+g)h d\mu \right| \leq \int_X |f h + g h| d\mu \leq \int_X |f h| d\mu + \int_X |g h| d\mu$

$$\text{Ker je } \left| \int_X f h d\mu \right| \leq \int_X |f h| d\mu \leq \|f\|_p^p, \text{ je}$$

$$\left| \int_X (f+g)h d\mu \right| \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Po lemi, ko naredimo supremum po vseh $h \in L^2(\mu) \in \{h\|_2 = 1\}$, dobimo $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

□

Opomba: Alternativni dokaz neenakosti Minkovskega (ideja): $f, g \geq 0$

$$\int_X (f+g)^p d\mu = \int_X (f+g)(f+g)^{p-1} d\mu = \int_X f(f+g)^{p-1} d\mu + \int_X g(f+g)^{p-1} d\mu$$

2x uporabimo Hölderjev in prekladams norme in $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} - 1$.

□

$p = \infty$, $L^\infty = ?$

merljiva $f \in L^\infty(\mu) \Leftrightarrow \exists M \geq 0$. $|f(x)| \leq M$ za skoraj vsak $x \in X$.

Elementi $L^\infty(\mu)$ so t.i. bistveno omejene funkcije.

Za $f \in L^\infty(\mu)$ definiramo

$$\|f\|_\infty := \inf \{M \geq 0 \mid |f(x)| \leq M \text{ za skoraj vsak } x \in X\}$$

$\|f\|_\infty$ se imenuje bistveni supremum funkcije f in ga včasih označimo $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$.

Lema: Naj bo $f \in L^\infty(\mu)$. Tedaj je $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ za skoraj vsak $x \in X$.

Dokaz: $A_n := \{x \in X \mid |f(x)| \geq \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\}$. Po definiciji je $\mu(A_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. $\{x \in X \mid f(x) \geq \|f\|_\infty\} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c$
ker $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$, je $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ s.p. □

Dopolnjena Hölderjeva neenakost: Naj bo $p \in [1, \infty]$ in naj bo q konjugirani eksponent k p . Potem za $f \in L^p(\mu)$ in $g \in L^q(\mu)$ velja $|\int_X fg d\mu| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Dokaz: i) $p \in (1, \infty) \rightsquigarrow$ Hölder

$$\text{ii)} p=1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow q = p^\infty, \quad \infty \Rightarrow q = 1$$

$$|\int_X fg d\mu| \leq \int_X |fg| d\mu = \int_X |f| \cdot |g| d\mu = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$
 □

Lema: Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \vee L^\infty(\mu)$.

i) Če je $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjeva $\vee L^\infty(\mu)$, potem $\exists A \in \mathcal{A}$, da je $\mu(A^c) = 0$ in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enakovremeno Cauchyjeva na A .

ii) Če $f_n \rightarrow f \vee L^\infty(\mu)$, potem $\exists A \in \mathcal{A}$, da je $\mu(A^c) = 0$ in $f_n \rightarrow f$ enakovremeno na A .

Cauchyjev pogoj: $\forall \varepsilon > 0. \exists N_\varepsilon. \forall m, n \geq N_\varepsilon. \|f_n - f_m\|_\infty < \infty$.

Dokaz: i) Za $n, m \in \mathbb{N}$ definiramo $A_{n,m} = \{x \in A \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$.

Po definiciji bistvene norme in po lemi, je $\mu(A_{n,m}) = 0$.

Definiramo $B := \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m}$. Tedaj $\mu(B) = 0$, ko $A := B^c$, pa velja $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ paščd.

ii) Podobno kot i).

□

Naj bo $p \in [1, \infty]$. V $L^p(\mu)$ vpeljemo relacijo \sim :

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ s.p.}$$

To je ekvivalenčna relacija. $L^p(\mu)/\sim := L^p(\mu)$ zbraba notacije

$$[f] \in L^p(\mu) \Rightarrow \|[f]\|_p := \|f\|_p.$$

$$\text{Če } 1 \leq p < \infty \text{ in } f \sim g \Rightarrow \int_X |f|^p d\mu = \int_X |g|^p d\mu \\ \|f\|_p^p \quad \|g\|_p^p$$

$$p = \infty \text{ in } f \sim g \Rightarrow f = g \text{ s.p.}$$

$$g(x) = f(x) \stackrel{s.p.}{\sim} \stackrel{s.p.}{\sim} \|f\|_\infty \Rightarrow \|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

$$\text{Podobno } \|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty.$$

$$\text{Definiramo } [f] + [g] := [f+g] \text{ in } \lambda[f] := [\lambda f].$$

$$f \sim f' \text{ in } g \sim g', \text{ potem } f+g \sim f'+g' \text{ in } \lambda f \sim \lambda f'.$$

Zato je $L^p(\mu)$ tudi vektorski prostor in $\|\cdot\|_p$ na $L^p(\mu)$ je norma za $p \in [1, \infty)$.

$$p = \infty: [f], [g] \in L^\infty(\mu):$$

$$\|[f] + [g]\|_\infty \stackrel{?}{\leq} \|[f]\|_\infty + \|[g]\|_\infty$$

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ s.p.}$$

Po definiciji bistvene norme je $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

$$\|\lambda f\|_{\infty} = |\lambda| \|f\|_{\infty}$$

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_{\infty} \text{ s.p. } \Rightarrow \|\lambda f\|_{\infty} \leq |\lambda| \|f\|_{\infty}$$

$$\text{Če } \lambda \neq 0 : |f(x)| = \left| \frac{1}{\lambda} \lambda f(x) \right| = \frac{1}{|\lambda|} |\lambda f(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_{\infty} \text{ s.p.}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{\infty} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_{\infty} \text{ oziroma } |\lambda| \|f\|_{\infty} \leq \|\lambda f\|_{\infty}.$$

Izrek: $L^p(\mu)$ je Banachov prostor za $1 \leq p \leq \infty$.

Dokaz: $p=1$ (znano), $1 < p < \infty$ (podobno kot $p=1$).

$p=\infty$: Naj bo $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyjev zaporedje v $L^\infty(\mu)$.

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n_0. \forall n, m \geq n_0. \|[f_n] - [f_m]\|_{\infty} < \varepsilon$$

$$\|[f_n] - [f_m]\|_{\infty}$$

$$\|f_n - f_m\|_{\infty}$$

$\exists A \in \mathcal{A}. \mu(A^c) = 0$ in $(f_n|_A)_{n \in \mathbb{N}}$ enakomerno Cauchyjev

Naj bo $F := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n|_A$ ← enakomerna limita na A

Ker so $f_n|_A$ merljiva, je F mertljiva na A .

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} F(x) & |x \in A \\ 0 & |x \in A^c \end{cases}$$

je merljiva na X in velja $\|f_n - \tilde{f}\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Torej $[f_n] \rightarrow [\tilde{f}]$. □

Opomba: Nuj bo (X, \mathcal{A}, μ) merljiv prostor in $s: X \rightarrow \mathbb{C}$ merljiva stopničasta funkcija. Naj bo $s = \sum_{k=1}^n d_k \chi_{E_k}$ kononična oblika za s . Tedaj je $|s| = \sum_{k=1}^n |d_k| \chi_{E_k}$ in zato

$$\int_X |s|^p d\mu = \int_X \left(\sum_{k=1}^n |d_k|^p \chi_{E_k} \right) d\mu = \sum_{k=1}^n |d_k|^p \mu(E_k)$$

$s \in L^p(\mu) \Leftrightarrow \{x | s(x) \neq 0\}$ ima končno mero.

Posledica: Za $1 \leq p < \infty$ je množica vseh stopničastih funkcij iz $L^p(\mu)$ gusto v $L^\infty(\mu)$.

Dokaz: Najprej naj bo $F \geq 0$ v $L^p(\mu)$. Tedaj obstaja zaporedje $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stopničastih funkcij, da $0 \leq s_n \nearrow F$ po točkah.

$$\|F - s_n\|_p^p = \int |F - s_n|^p d\mu \xrightarrow{\text{glej spodaj}} 0$$

$$0 \leq s_n \nearrow F \Rightarrow F - s_n \downarrow 0 \quad (\Rightarrow \|F - s_n\|_p^p \downarrow 0, \quad F \in L^p(\mu), \text{ LDK.})$$

□

Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$; μ šteje točke

$$L^\infty(\mu) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$$

$$f \in L^\infty(\mu) : |f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ s.p.}$$

Ker je $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$, je f omejena.

$$F \hookrightarrow (f(n))_{n \in \mathbb{N}}$$

$$L^\infty(\mu) \hookrightarrow \ell^\infty \text{ Banachov prostor } \cong \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

$$1 \leq p < \infty : L^p(\mu) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

$$\int_X |f|^p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p$$

$$F \hookrightarrow (f(n))_{n \in \mathbb{N}}$$

$$L^p \hookrightarrow \ell^p \text{ Bahnhov prostor } \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Kaj je $L^\infty(\mu)$?

$$\text{Kaj je } \ell^\infty ? \quad \ell^\infty = C_b(\mathbb{N}) \underset{\substack{\text{Stone-Čech} \\ \downarrow \\ \mathbb{N} \text{ disk. top.}}}{\cong} C(\beta \mathbb{N})$$

$$L^\infty(\mu) \cong C(K) \quad (\text{brez dokazu})$$

5.3 Dualnost med L^p prostori

6. januar 2025

$$\begin{array}{ccccccccc} L^1 & L^2 & \underbrace{L^3, \dots, L^p}_{\substack{\text{zelo lepi} \\ \text{refleksivni}}} & L^\infty & & & & & \\ \text{lep} & \text{Hilbertov} & & & & & & & \\ \text{lepo} & & & & & & & & \\ \text{narma} & & & & & & & & \end{array}$$

X normirani prostor. Vprašanje: Ali na X obstaja zvezen linearni funkcional?

Dai: po Hahn-Banachovem izreku obstaja veliko zveznih linearnih funkcionalov.

Definicija: Nuj bo X normiran prostor in $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ (Rali C) linearni funkcional. f je **omejen**, če $\exists M \geq 0$, da je $|f(x)| \leq M \cdot \|x\|$.

Trditev: Nuj bo $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ linearni funkcional. NTSE

i) f je omejen	iv) f je Lipshitzer
ii) f je zvezen	v) f je zvezen v 0
iii) f je enakomerno zvezen	vi) f je zvezen v neki točki

"Najmanjši" možni M , ki ga lahko vstavimo v neenakost imenjuemo norma funkcionala f in jo označimo z $\|f\|$.

$$\|f\| = \inf \{M \geq 0 \mid |f(x)| \leq M \|x\| \forall x \in X\}$$

$$= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

operatorska norma
funkcionala

$$= \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

$$= \sup_{\|x\| < 1} |f(x)|$$

Irditev: Če je X normiran, potem je $X^* := \{\text{omejeni linearni funkcionali na } X\}$ Banachov prostor glede na operatorsko normo.

Izrek: Za $\forall x \in X$. $\exists f \in X^*$, $\|f\|=1$, da je $f(x) = \|x\|$.

Posledica: X^* loči točke na X .

Dokaz: $x, x' \in X$ in $x \neq x'$

$$\exists f \in X^*, \|f\|=1 \quad f(x-x') = \|x-x'\| \neq 0$$

$f(x) - f(x')$



$$(L^p)^* \cong L^{3/2} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = 3/2$$

$$(L^p)^* \cong L^q \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu); \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty \quad \text{in} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\text{Hölder:} \quad |\int_X fg d\mu| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

$$g \in L^q(\mu) \rightsquigarrow \varphi_g(f) = \int_X f g d\mu, \quad \varphi_g: L^p(\mu) \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$|\varphi_g(f)| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \Rightarrow \varphi_g \in L^p(\mu)^* \text{ in } \|\varphi_g\| \leq \|g\|_q.$$

Trditve: Za $g \in L^q(\mu)$ je $\varphi_g \in L^p(\mu)^*$ in $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$.

Trditve: Naj bosta p in q konjugirana eksponenta. Tedaj za $g \in L^q(\mu)$ velja naslednje:

i) Če je $q \in [1, \infty)$, potem je $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$.

ii) Če $q = \infty$ in je μ σ -končna, potem je $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

Opomba: Pod predpostavkami trditve je $L^q(\mu) \xrightarrow{\text{lin. izom.}} L^p(\mu)^*$.

Dokaz: i) Če $q \in (1, \infty)$ potem vemo po posledici Hölderjeve neenakosti, da je $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$.

$$\|\varphi_g\| = \sup \left\{ \left| \int_X f g d\mu \right| \mid \|f\|_p = 1 \right\} = \|g\|_q.$$

ii): $g = 0 \Rightarrow \varphi_g = 0$

$$g \neq 0 \text{ s.p.} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\|g\|_\infty}; & g(x) \neq 0 \\ 0; & \text{dicer} \end{cases}$$

$\Rightarrow f \in L^\infty(\mu)$ in $\|f\|_\infty = 1$ (bistvena norma)

$$\varphi_g(f) = \int_X f g d\mu = \int_X |g| d\mu = \|g\|_1.$$

iii) $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$

Če je $g = 0$ s.p. $\Rightarrow \varphi_g = 0$ in $\|\varphi_g\| = 0$

• BSS $g \neq 0$ s.p., $\varepsilon > 0$

$$F := \{x \in X \mid |g(x)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon\}$$

Po definiciji bistvenega supremuma je $\mu(F) > 0$.

Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje merljivih množic s končno mero in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap F) \Rightarrow \mu(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cap F)$$

$\exists n \in \mathbb{N}. 0 < \mu(\underbrace{A_n \cap F}_A) < \infty$

Definiramo $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\mu(A)} \chi_A(x) \frac{g(x)}{|g(x)|} & ; g(x) \neq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$.

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_A |\chi_A| d\mu = 1$$

$$\|\varphi_g f\| \geq \|\varphi_g(f)\| = \left| \int_X f g d\mu \right| = \frac{1}{\mu(A)} \int_A |g| d\mu \geq \frac{1}{\mu(A)} (\|g\|_\infty - \varepsilon) \mu(A) = \|g\|_\infty - \varepsilon$$

Pošljimo $\varepsilon \rightarrow 0$: $\|\varphi_g f\| \geq \|g\|_\infty$. Obretno vedno velja. \square

Izrek: Naj bo μ σ -končna mera in $p \in [1, \infty)$. Tedaj za $\forall f \in L^p(\mu)^*$ obstaja skoraj vsod enolično določena funkcija $g \in L^q(\mu)$, da je $f = \varphi_g$.

Dokaz: Želimo poiskati funkcijo $g \in L^q(\mu)$, da je

$$\varphi(f) = \int_X f g d\mu.$$

Enoličnost: Če $\varphi_g = \varphi_{g'}$, potem je $\varphi_{g-g'} = 0$.

$$0 = \|\varphi_{g-g'}\| = \|g - g'\|_q \Leftrightarrow g - g' = 0 \text{ s. p.}$$

Eksistencija: Najprej predpostavimo, da je μ končna mera.

Za $A \subseteq X$ merljiva definiramo

$$\lambda(A) := \varphi(\chi_A). \quad (\text{ok. definirana, saj } \mu(A) < \infty \Leftrightarrow \chi_A \in L^p)$$

λ je kompleksna mera

$$\lambda(\emptyset) = \varphi(\chi_\emptyset) = \varphi(0) = 0$$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne $\vee \wedge$ in $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \Leftrightarrow \varphi(\chi_A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\chi_{A_n})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\chi_{A_n}) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}\right) ?$$

Ker je φ zvezna, moramo preveriti, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$ konvergira v $L^p(\mu)$.

$$\begin{aligned} \|\chi_A - \sum_{j=1}^n \chi_{A_j}\|_p^p &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \int_X \chi_{A_j}^p d\mu \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu(A_j) \longrightarrow 0, \text{ saj } \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

Zato $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$ konvergira in po zveznosti

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\chi_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Torej je λ kompleksna mera.

$$\lambda \ll \mu$$

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \chi_A = 0 \vee L^p(\mu) \Rightarrow \lambda(A) = \varphi(\chi_A) = \varphi(0) = 0$$

Po Radon-Nikodymovem izreku $\exists g \in L^1(\mu)$, enolično določena s.p., da je

$$\lambda(A) = \int_A g d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$\varphi(\chi_A) = \int_X \chi_A g d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$\text{Torej } \varphi(f) = \int_X f g d\mu \quad \forall f \text{ karakteristična} \quad (f = \chi_A)$$

Zaradi linearnosti je $\varphi(s) = \int_X s g d\mu \quad \forall s \in L^p(\mu)$ stopničasta.

Če dokužemo, da je $g \in L^q(\mu)$, potem se zvezna funkcionala $F \mapsto \varphi(F)$ in $F \mapsto \int_X f g d\mu$ ujemata na stopničnih funkcijah iz $L^p(\mu)$. Ker so te funkcije goste v $L^p(\mu)$, se zaradi zveznosti funkcij ujemata porsod. Zato $\varphi(f) = \int_X f g d\mu \quad \forall f \in L^p(\mu)$.

$$g \in L^q(\mu)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ definiramo } X_n := \{x \in X \mid |g(x)| \leq n\}$$

$\mu(X_n) < \infty \Rightarrow g_n := \chi_{X_n} \cdot g \in L^q(\mu)$, saj omejena in X_n ima končno mero

(Intermezzo: $A \subseteq X$ merljiva $\Rightarrow L^p(A) \overset{\text{izometrično}}{\hookrightarrow} L^p(X)$ na naraven način)
 $f \in L^p(\mu) \longleftrightarrow \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in A \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$

Definirajmo φ_n na $L^p(\mu)$: $\varphi_n(f) = \int_X f g_n d\mu$ je omejen, saj $g_n \in L^q(\mu)$
 in $\|\varphi_n\| = \|g_n\|_q = \|g\|_{X_n}\|_q$.

Oglejmo si $A \subseteq X_n$ merljiva. $\varphi(X_A) = \int_A g d\mu = \varphi_n(X_A)$

$\varphi(s) = \varphi_n(s) \quad \forall s \in L^p(X_n)$ stopničasta

φ in φ_n sta omejena in se ujemata na stopničastih funkcijah v $L^p(X_n)$. Po omejenosti je $\varphi|_{L^p(X_n)} = \varphi_n$.

$$\|g\|_{X_n}\|_q = \|\varphi_n\| = \|\varphi|_{L^p(X_n)}\| \leq \|\varphi\|$$

$$\|g\|_{X_n}\|_q \longrightarrow \|g\|_q$$

$$|g|_{X_n} \nearrow |g| \stackrel{\text{UMS}}{\Rightarrow} \int_X |g|^q \chi_{A_n} d\mu \nearrow \int_X |g|^q d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X |g| d\mu \nearrow \|\varphi\|$$

$$\Rightarrow g \in L^q(\mu)$$

7. januar 2026

Naj bo sedaj μ σ -končna. Tedaj $\exists (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naravljajoče zaporedje množic s končno mero v A , da je $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \hookrightarrow L^p(X_1) \subseteq L^p(X_2) \subseteq L^p(X_3) \subseteq \dots$$

$A \subseteq B \iff L^p(A) \subseteq L^p(B)$ pri čemer $f \in L^p(A)$ razširimo $\not\equiv 0$ na $B \setminus A$.

$\varphi(L^p(X))^* \ni \varphi_n := \varphi|_{L^p(X_n)}$ je omejen funkcional.

Velja $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$.

$\mu(X_n) < \infty \Rightarrow \exists g_n \in L^q(X_n); g_n$ enolično določena skoraj povsod,
 da je $\varphi_n(F) = \int_X f g_n d\mu \quad \forall F \in L^p(X_n)$.

ker je $\varphi|_{L^p(X_n)} = \varphi_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ in $\varphi_n|_{L^p(X_m)} = \varphi_m \quad \forall n \neq m$, je

$g_n|_{X_m} = g_m$ skoraj povsod na X_m .

Zato obstaja množica N z nikelno mero, da je $\forall n \in N$

$$g_n|_{X_m} = g_m \quad \text{povsod na } A := N^c \quad (*)$$

$$x \in X \Rightarrow g(x) = \begin{cases} g_n(x); & x \in X_n \cap A \\ 0; & x \notin N \end{cases}$$

Zaradi (*) je g dobro definiran.

$$\text{Ker } |g_n| \nearrow |g|, \text{ je } \int_X |g_n|^q d\mu \stackrel{\text{Lok}}{\nearrow} \int_X |g|^q d\mu \Rightarrow \|g\|_q \leq \|f\|$$

$$\|f_n\|^2 \leq \|f\|^2$$

$$\varphi(F) = \int_X f g d\mu \quad \forall F \in L^p(\mu)$$

$$\varphi_n(F) = \int_X \chi_{X_n} F g_n d\mu \quad \forall F \in L^p(X_n)$$

$$F \in L^p(X) \rightarrow \chi_{X_n} F \in L^p(X_n)$$

$$\varphi(\chi_{X_n} F) = \varphi_n(\chi_{X_n} F) = \int_X \chi_{X_n} F g_n d\mu$$

$$\chi_{X_n} F \rightarrow F \text{ v } L^p(\mu)$$

$$\|F \chi_{X_n} - F\|_p^p = \int_X |F \chi_{X_n} - F|_p^p d\mu \xrightarrow{\text{LOK}} 0$$

$$|F \chi_{X_n} - F|^p \leq |F|^p \in L^1(\mu)$$

φ omejen (zvezen) $\Rightarrow \chi_{X_n} F \rightarrow F \Rightarrow \varphi(\chi_{X_n} F) \rightarrow \varphi(F).$

$$\int_X \chi_{X_n} f g_n d\mu \rightarrow \int_X f g d\mu$$

$$\chi_{X_n} f g_n \rightarrow f g \text{ po točkah}$$

$$|\chi_{X_n} f g_n| \leq |f| |g| \in L^1(\mu)$$

Zato po LOK velja



Opomba: i) $1 < p < \infty$ in μ σ -končna

$$(L^p(\mu))^* \cong L^q(\mu) \text{ izometrično, izomorfen}$$

$$f \in (L^p(\mu))^* \Leftrightarrow \exists g \in L^q(\mu): \varphi(f) = \int_X f g d\mu$$

ii) $1 < p < \infty$: potem i) vedno drži (brez σ -končnosti), torej

$$(L^p(\mu))^* \cong L^q(\mu)$$

$Y \subseteq X$ σ -končna podmnožica

$$\varphi|_{L^p(Y)} =: \varphi_Y \quad \varphi_Y(f) = \int_Y f g_Y d\mu_Y$$

$$\Rightarrow \|g_Y\| = \|\varphi_Y\| \leq \|\varphi\| \quad g_Y \text{ z max. normo je iskani } g$$

iii) $L^1(\mu) \hookrightarrow (L^\infty(\mu))^*$ izometrično, „redko surjetivno“

$X = \{0, 1\}$: $\mu(\{0\}) = 1, \mu(\{1\}) = \infty$

$L^\infty(\mu)$ je 2-dim.

$$f \in L^1(\mu) \Leftrightarrow \int_X |f| d\mu = |f(0)| \cdot 1 + |f(1)| \cdot \infty < \infty$$

$$f \in L^1(\mu) \Leftrightarrow f(1) = 0$$

$$\Rightarrow L^1(\mu) \cong \mathbb{F}, L^\infty(\mu) \cong \mathbb{F}^2$$

iv) $L^\infty(\mu) \hookrightarrow (L^1(\mu))^*$ ni izometrično, če μ ni lepa
(μ ni semi-končna)