3. INTEGRAL

3.1. Integracija stopničastih funkcij

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Za stopničasto funkcijo

$$s := \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j} \qquad (s \text{ merljiva})$$

definiramo $\int_X s \, d\mu := \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j)$.

Če je $s = \chi_A$, potem $\int_X s \, d\mu = \mu(A)$.

Izkaže se, da je $\int_X s \, d\mu$ neodvisen od izbire A_j in c_j. Torej lahko dostikrat predpostavimo, da je s zapisan v kanonični obliki.

Če je A merljiva, definiramo $\int_A s \, d\mu := \int_X s \chi_A \, d\mu$.

Lema: Naj bo $s: X \longrightarrow [0, \infty)$ merljiva stopničasta funkcija. Tedaj je z $\nu(A) := \int_A s \, d\mu$ definirana pozitivna mera $(X, \mathcal{A})$.

Dokaz: $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset s \, d\mu = \int_X s \chi_\emptyset \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0$

Naj bodo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne merljive množice in naj bo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. $\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$

Naj bo $s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ kanonična oblika za s.

$$s \chi_A = \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j} \right) \chi_A = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j \cap A}$$

$$\Rightarrow \quad \nu(A) = \int_A s \, d\mu = \int_X s \chi_A \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(E_j \cap A)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} c_j \mu(E_j \cap A_i)$$

$$\overset{\text{ANA 1}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(E_j \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} s \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(A_i)$$ ▨

Lema: Naj bosta $s, t : X \to [0, \infty]$ merljivi stopničasti funkciji in naj bo $c \in [0, \infty]$. Tedaj velja:

i) $\int_X (s+t) \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu$

ii) $\int_X cs \, d\mu = c \int_X s \, d\mu$

Dokaz: i) $s := \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{E_i}$, $t := \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{F_j}$ zapisa v kanonični obliki

Tedaj je $s + t = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_i + d_j) \chi_{E_i \cap F_j}$.

Čeprav so množice $E_i \cap F_j$ paroma disjunktne, to ni nujno kanonična oblika za $s+t$. Velja pa

$$\int_X (s+t) \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_i + d_j) \mu(E_i \cap F_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_j \mu(E_i \cap F_j)$$

$\bigcup_{j=1}^{n} F_j = X$

$\bigcup_{i=1}^{m} E_i = X$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^{n} d_j \sum_{i=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^{n} d_j \mu(F_j)$$

$$= \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu$$

ii) $\int_X cs \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} c c_i \mu(E_i) = c \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(E_i) = c \int_X s \, d\mu$ ▨

Lema: Naj bosta s,t taksni merljivi stopničasti funkciji, da velja $0 \le s \le t$. Tedaj je $0 \le \int_X s\,d\mu \le \int_X t\,d\mu$.

Dokaz: $t = t-s+s$. Po prejšnji lemi:

$$\int t\,d\mu = \int_X (t-s)\,d\mu + \int_X s\,d\mu \ge \int_X s\,d\mu \ge 0 \qquad \square$$

3.2. Integral nenegativne merljive funkcije

Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $f: X \to [0,\infty]$ merljiva.
Z $\mathcal{S}_f$ definiramo množico $\{s \mid 0 \le s \le f$ merljiva stopničasta funkcija$\}$.
Definiramo:

$$\int_X f\,d\mu := \sup\left\{ \int_X s\,d\mu \mid s \in \mathcal{S}_f \right\}.$$

Lema: Naj bosta $0 \le f \le g$ merljivi. Potem je $0 \le \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$.

Dokaz: $\mathcal{S}_f \subseteq \mathcal{S}_g \Rightarrow$ supremum po $\mathcal{S}_f \le$ supremum po $\mathcal{S}_g$ $\qquad \square$

Primer: $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$, δ_{x_0} Diracova mera

$f \ge 0 \Rightarrow \int_X f\,d\delta_{x_0} = f(x_0)$

$0 \le s \le f \Rightarrow \int_X f\,d\delta_{x_0} \ge \int_X s\,d\delta_{x_0}$ $\qquad s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ kanonična oblika

$$\int_X s\,d\delta_{x_0} = \sum_{j=1}^{n} c_j\,\delta_{x_0}(E_j) = \underset{(x_0 \in E_k)}{c_k \cdot 1} = s(x_0)$$

Ker $s_n \nearrow f$ po točkah (izrek o aproksimaciji), dobimo $\int_X f\,d\delta_{x_0} \ge f(x_0)$.

$$\int_X s\,d\delta_{x_0} = s(x_0) \le f(x_0)$$

Naredimo supremum po vseh $s \in \mathcal{S}_f$.

<u>Primer</u>: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$: μ steje točke

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

$$f(n) \longleftrightarrow a_n \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Izrek [Lebesguov izrek o monotoni konvergenci (LMK)]: Naj bo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\mu$.

<u>Dokaz</u>: Ker je $\left(\int_X f_n \, d\mu\right)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje, obstaja

$$a := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu$$

$$a = \int_X f \, d\mu \; ; \quad f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

$a \leq \int_X f \, d\mu$, saj $f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a \geq \int_X f \, d\mu \iff a \geq \int_X cs \, d\mu \quad \forall c \in (0,1) \, \forall s \in \mathcal{S}_f$$

$(\Rightarrow)$: ✓ zaradi monotonosti

$(\Leftarrow)$: sledi iz dejstva, da najprej naredimo supremum po $c \in (0,1)$ in nato supremum po vseh $s \in \mathcal{S}_f$.

Izberimo $c \in (0,1)$ in $s \in \mathcal{S}_f$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$A_n := \{x \in X \mid cs(x) \leq f_n(x)\}.$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{in} \quad A_n \subseteq A_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Definiramo mero ν s predpisom $\nu(B) = \int_B cs \, d\mu$. To je mera po lemi iz razdelka o stopničastih funkcijah.

$$\int_X cs \, d\mu = \nu(X) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} cs \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = a \quad ▨$$

saj $f_n \geq cs$ na A_n

Izrek: Naj bodo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativne merljive funkcije. Tedaj velja
$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz: Najprej dokažimo $\int_X (f_1+f_2)d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$.

$\exists$ zaporedje $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih merljivih stopničastih funkcij, da $0 \le s_n \nearrow f_1$ in $0 \le t_n \nearrow f_2$ po točkah.
$\Rightarrow 0 \le \underbrace{s_n + f_n}_{\text{stopničasta funkcija}} \nearrow f_1 + f_2$ po točkah

$$\begin{aligned}
\int_X (f_1+f_2)d\mu &\overset{\text{LMK}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n+t_n)d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu \\
&\underset{2\times\text{LMK}}{=} \int_X f_1 d\mu + \int_X f_n d\mu
\end{aligned}$$

V splošnem: $g_n := f_1 + \dots + f_n \Rightarrow 0 \le g_n \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$
$$\int_X \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big) d\mu \overset{\text{LMK}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu$$

12. november 2025

Posledica: Naj bo $f: X \to [0,\infty]$ merljiva in $c \ge 0$. Tedaj velja
$$\int_X cf d\mu = c \cdot \int_X f d\mu.$$

Dokaz: Naj bodo $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takšne merljive stopničaste funkcije, da $0 \le s_n \nearrow f$. Vemo, da velja

$$\int_X cf d\mu \xleftarrow{\text{LMK za } 0\le c s_n \nearrow cf} \int_X c s_n d\mu = c \cdot \int_X s_n d\mu \xrightarrow{\text{LMK za } 0 \le s_n \nearrow f} c \cdot \int_X f d\mu$$

Trditev: Naj bo $f: X \to [0, \infty]$ merljiva. Definiramo
$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$; $A \in \mathcal{A}$. Velja:

i) ν je pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.
ii) Če je $\mu(A) = 0$, potem je $\nu(A) = 0$.
iii) Če je $g: X \to [0, \infty]$ merljiva, potem $\int_X g \, d\nu = \int_X f \cdot g \, d\mu$.

Opomba: (a) Pogoj $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, se imenuje absolutna zveznost mere ν glede na mero μ.
(b) Če je ν glede na μ absolutno zvezna, to zapišemo $\nu \ll \mu$, f iz trditve pa zapišemo kot $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. ("$\int_A f d\mu = \int_A d\nu = \nu(A)$")

Dokaz: i) $\cdot$ $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \, d\mu = \int_X f \chi_\emptyset \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = \mu(X) \cdot 0 = 0$

Če so $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne in $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, potem

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_X f \chi_A \, d\mu = \int_X \left(f \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n} \right) d\mu$$
$$= \int_X \sum_{n=1}^\infty f \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f \chi_{A_n} \, d\mu$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$$

ii) Naj bo $\mu(A) = 0$.
$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_X f \chi_A \, d\mu$$

Naj bodo $0 \leq s_n \leq f \chi_A$; s merljive stopničaste
$s = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$ (kanonična oblika)
$f \chi_A \equiv 0$ na $A^c \Rightarrow s \equiv 0$ na $A^c \Rightarrow s = s \chi_A$
$\Rightarrow s = \lambda_1 \chi_{A_1 \cap A} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n \cap A}$
$\Rightarrow \int_X s \, d\mu = \lambda_1 \mu(A_1 \cap A) + \dots + \lambda_n \mu(A_n \cap A) = 0$
$\Rightarrow \int_X f \chi_A \, d\mu = 0$ (po definiciji integrala nenegativne funkcije)

iii) Dokazali bomo najprej za karakteristične funkcije, nato stopničaste in nato nenegativne z uporabo LMK.

a) $g = \chi_A$; A merljiva

$$\int_X g\,d\nu = \int_X \chi_A\,d\nu = \nu(A)$$

$$\int_X fg\,d\mu = \int_X \chi_A f\,d\mu = \int_A f\,d\mu = \nu(A)$$

b) $g = \lambda_1 \chi_{A_1} + \dots + \lambda_n \chi_{A_n}$; $A_1, \dots, A_n$ merljive

$$\int_X g\,d\nu = \int_X \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}\,d\nu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i}\,d\nu$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_X \chi_{A_i} f\,d\mu$$

$$= \int_X \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}\Big)}_{= g} f\,d\mu$$

c) $g \geq 0$ merljiva: Vemo, da obstaja zaporedje $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ merljivih stopničastih funkcij: $0 \leq s_n \nearrow g$.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\int_X s_n\,d\nu = \int_X s_n f\,d\mu$

$$\int_X s_n\,d\nu \xrightarrow{\text{LMK za } \nu \text{ in } 0 \leq s_n \nearrow f} \int_X g\,d\nu \qquad \int_X s_n f\,d\mu \xrightarrow{\text{LMK za } \mu \text{ in } 0 \leq s_n f \nearrow gf} \int_X gf\,d\mu$$

<u>Fatoujeva lema</u>: Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih merljivih funkcij. Tedaj velja: $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

<u>Dokaz</u>: $g_n := \inf_{k\geq n} \overset{\leq f_n}{f_k} \longrightarrow 0 \leq g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n$

LMK: $\int_X \lim_{n\to\infty} g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$

$\quad = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu$

(liminf a_n = lim a_n, če limita obstaja
in $a_n \leq b_n \Rightarrow \liminf a_n \leq \liminf b_n$)

Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ šteje točke

$$f_n = \chi_{\{n, n+1, \ldots\}} \longrightarrow \chi_{\emptyset} = 0$$

$$\int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \infty, \quad \int_{\mathbb{N}} \chi_{\emptyset} \, d\mu = 0$$

$\Rightarrow$ V Fatoujevi lemi lahko imamo strogi neenačaj.

18. november 2025

Če je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $\mu(A) = 0$, potem je $\int_A f \, d\mu = 0$ za vsako merljivo funkcijo $f \geq 0$.

DN. Stopničaste funkcije in definicija integrala ali LMK.

Trditev: Naj bo $f: X \longrightarrow [0, \infty]$ merljiva. Tedaj velja:

i) $\int_X f \, d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) = \infty\}) = 0$.

ii) $\int_X f \, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ s.p.

Dokaz: i) $A := \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$

$$0 \leq \infty \chi_A \leq f \Rightarrow 0 \leq \infty \mu(A) \leq \int_X f \, d\mu < \infty \Rightarrow \mu(A) = 0$$

ii) ($\Leftarrow$): $f(0)$ s.p. $\Rightarrow X = E \cup E^c$, $\mu(E) = 0$; $f|_{E^c} = 0$

$$\int_X f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_{E^c} f \, d\mu = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. po} \\ \text{meri } 0}}{0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{int. ničelne} \\ \text{funkcije}}}{0} = 0.$$

($\Rightarrow$): Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $A_n := \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. To je merljiva množica, saj je preslika zaprtega intervala.

$$0 = \int_X f \, d\mu \geq \int_{A_n} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \int_{A_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n)$$

$\Rightarrow \mu(A_n) = 0$, $\quad \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0.$

3.3. Integral kompleksne merljive funkcije

Demotivirajoči primer: Recimo, da integral že znamo vpeljati. Kaj bi bil integral od $\chi_E - \chi_F$.

Naivno: $\int_X (\chi_E - \chi_F) d\mu = \mu(E) - \mu(F)$

Težava: lahko dobimo $\infty - \infty$, kar ni ok.

Merljiva funkcija $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ je integrabilna, če je integral $\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu < \infty$. Če je $\|f\|_1 < \infty$, potem pišemo $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Z $\mathcal{L}^0(\mu)$ označimo vektorski prostor vseh kompleksnih merljivih funkcij.

Kako preverimo, da je $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$? Preverimo $\int_X |f| d\mu < \infty$.

$$f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f \Rightarrow |f|^2 = (\mathrm{Re}f)^2 + (\mathrm{Im}f)^2$$
$$\Rightarrow |f| \geq |\mathrm{Re}f| + |\mathrm{Im}f|$$

$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

$\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow |f| \leq |\mathrm{Re}f| + |\mathrm{Im}f| \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

g realna merljiva funkcija $\Rightarrow g = g^+ - g^-$; g^+, g^- merljivi

$\min\{g^+, g^-\} = 0$

$$\int_X g\, d\mu = \int_X g^+ d\mu + \int_X g^- d\mu$$

$$\Rightarrow \left(g \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow g^+, g^- \in \mathcal{L}^1(\mu)\right)$$

$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$:

$$\int_X f d\mu := \int_X (\mathrm{Re}f)^+ d\mu + \int_X (\mathrm{Re}f)^- d\mu + i\left(\int_X (\mathrm{Im}f)^+ d\mu + \int_X (\mathrm{Im}f)^- d\mu\right)$$

Lema: Če $\mathcal{L}^1(\mu)$ opremimo z operacijami po točkah, potem je $\mathcal{L}^1(\mu)$ vektorski prostor, $\|\cdot\|_1$ pa je polnorma na $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Dokaz: $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\|\alpha f + \beta g\| = \int_X |\alpha f + \beta g| \, d\mu \leq \int_X (|\alpha||f| + |\beta||g|) \, d\mu$$
$$= |\alpha| \int_X |f| \, d\mu + |\beta| \int_X |g| \, d\mu < \infty$$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ in $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ (trikotniška neenakost)

$\|\cdot\|_1$ je polnorma:

i) $\|f\|_1 \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ✓

ii) $\|\alpha f\| = \int_X |\alpha f| \, d\mu = |\alpha| + \int_X |f| \, d\mu = |\alpha| \cdot \|f\|_1$

iii) trikotniška neenakost ✓

Opomba: V splošnem $\mathcal{L}^1(\mu)$ ni normiran prostor:

$$X = \mathbb{R}, \quad \mu = m, \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$C \dots$ Cantorjeva množica z $m(C) = 0$

$$\|\chi_C\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \chi_C \, dm = m(C) = 0$$

Prostor ni normiran (v splošnem), lahko mu pa priredimo normiran prostor, ki "vsebuje vse informacije o $\mathcal{L}^1(\mu)$".

Vpeljimo relacijo $\sim$ na $\mathcal{L}^1(\mu)$: $f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ s.p.

- $f \sim f$ ✓
- $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ ✓
- $f \sim g$, $g \sim h \Rightarrow f = g$ na A, $g = h$ na B

$\mu(A^c) = \mu(B^c) = 0 \Rightarrow f = h$ na $A \cap B$ in $\mu((A \cap B)^c) \leq \mu(A^c) + \mu(B^c) = 0$

Definiramo: $L^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu)/\sim$:

$$\|[f]\|_1 := \|f\|_1$$
$$[f] + [g] := [f+g]$$
$$\alpha [f] := [\alpha f]$$

Ali sta operaciji dobro definirani? Da.

• $f\sim f'$, $g\sim g'$: $\quad [f]+[g]=[f+g]$
$\qquad [f']+[g']=[f'+g']$ ||?

$f\sim f'$, $g\sim g'$ $\Rightarrow f=f$ na A, $g'\sim g'$ na B
$\mu(A^c)=\mu(B^c)=0 \Rightarrow f+g=f'+g'$ na $A\cap B$ in
$$\mu((A\cap B)^c)\leq \mu(A^c)+\mu(B^c)=0$$
$\Rightarrow f+g\sim f'+g'$

• $\alpha[f]=[\alpha f]$ DN.

Posledica: $L^1(\mu)$ je normiran prostor.

Dokaz: Vse lastnosti se dedujejo iz $\mathcal{L}^1(\mu)$ na $L^1(\mu)$.
$$\|[f]\|_1=0 \Rightarrow \|f\|_1=0 \Rightarrow |f|=0 \text{ s.p.}$$
$$\Rightarrow f=0 \text{ s.p.} \Rightarrow f\sim 0 \Rightarrow [f]\sim[0] \quad \blacksquare$$

Zakaj je norma $\|[f]\|_1$ dobro definirana?
$$[f]=[f'] \Rightarrow f\sim f' = f=f' \text{ s.p.} \Rightarrow |f|=|f'| \text{ s.p.}$$
$$\Rightarrow \int_X |f|d\mu=\int_X |f'|d\mu \Rightarrow \|f\|_1=\|f'\|_1$$

Trditev: Za $\mathcal{L}^1$-funkcije velja naslednje:

i) Integral je linearen funkcional na $\mathcal{L}^1(\mu)$.
$$\int_X(\alpha f+\beta g)\,d\mu=\alpha\int f d\mu+\beta\int g d\mu.$$

ii) Če sta $f,g:X\longrightarrow\mathbb{R}$ v $\mathcal{L}^1(\mu)$ in $f\leq g$, potem je
$$\int_X f d\mu\leq\int_X g d\mu.$$

Kaj pomeni $f\leq g$?
$f\leq g$ po točkah
$f\leq g$ s.p. $\Leftrightarrow f\leq g$ v $L^1(\mu)$
$\Updownarrow$
$[f]\leq[g]$

iii) $\left|\int_X f d\mu\right|\leq\int_X |f|\,d\mu \quad \forall f\in\mathcal{L}^1(\mu)$

Dokaz: i) $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$

$\int_a^b f(x)\,dx$ Riemann

$\int_{[a,b]} f\,dm$ Lebesgue

↳ nekateri pišejo $\int_{[a,b]} f\,dx$

Hujša zloraba $\int_a^b f(x)\,dx$

Mogoče bi morali pisati celo $\int_X f(x)\,d\mu(x)$

f, g realni: $(f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^-$

Raje pišimo $h := f+g$

$$h = h^+ - h^-$$

$$f+g = f^+ - f^- + g^+ - f^-$$

$$\Rightarrow f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$$

$$\Rightarrow \int_X (f^+ + g^+ + h^-)\,d\mu = \int_X (f^- + g^- + h^+)\,d\mu$$

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu + \int_X h^- d\mu = \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu + \int_X h^+ d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \int_X h^+ d\mu - \int_X h^- d\mu$$

$$\int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu = \int \underbrace{(f+g)}_{h}\,d\mu$$

Za kompleksne funkcije DN $(f = \mathrm{Re} f + i \mathrm{Im} f)$.

Množenje s skalarji: le za $\alpha \geq 0$:

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \int_X \alpha(\mathrm{Re} f + i \mathrm{Im} f)\,d\mu$$

$$= \int_X \alpha \mathrm{Re} f\,d\mu + \int_X \alpha \mathrm{Im} f\,d\mu$$

$$= \int_X \left(\alpha(\mathrm{Re} f)^+ - \alpha(\mathrm{Re} f)^-\right) d\mu + i \int_X \left(\alpha(\mathrm{Im} f)^+ - \alpha(\mathrm{Im} f)^-\right) d\mu$$

$$= \int_X \alpha(\mathrm{Re} f)^+ d\mu - \int \alpha(\mathrm{Re} f)^- d\mu + i \int_X \alpha \mathrm{Im} f^+ d\mu - i \int_X \alpha \mathrm{Im} f^- d\mu$$

Preostanek (i) izpustimo.

(ii) $g = g - f + f$

$$\Rightarrow \int_X g\,d\mu = \underbrace{\int_X (g-f)\,d\mu}_{\geq 0} + \int_X f\,d\mu$$

iii) Če je $\int_X f\,d\mu = 0$, potem neenakost drži.

BŠS. $\alpha := \int_X f\,d\mu \neq 0 \Rightarrow \exists w.\ |w|$ in $w\alpha = |\alpha|$.

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| = |\alpha| = w\alpha = w\cdot\int_X f\,d\mu = \int_X wf\,d\mu = \operatorname{Re}\int_X wf\,d\mu$$

$$= \int_X \operatorname{Re}(wf)\,d\mu \leq \int_X |wf|\,d\mu \underset{|w|=1}{=} \int |f|\,d\mu$$

__Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci (LDK):__ angleščina: (LDC)

Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij, ki po točkah s.p. konvergirajo proti merljivi funkciji f. Če $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ za skoraj vsak } x,$$

potem velja

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu \to 0 \text{ in } \int_X f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu.$$

__Opomba:__ $\int_X |f_n - f|\,d\mu \to 0 \Leftrightarrow \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0 \Leftrightarrow f_n \to f$ v $L^1(\mu)$.

__Dokaz:__ Kot v dokazu izreka Jegorova, lahko BŠS predpostavimo, da $f_n \to f$ po točkah in $|f_n| \leq g$ $\forall n$ povsod na X.

$$\left.\begin{aligned} h_n &:= 2g - |f_n - f| \\ |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g \end{aligned}\right\} \Rightarrow h_n \geq 0$$

Po Fatovjevi lemi: $\int_X \liminf_{n\to\infty} h_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n\,d\mu$

$$\int_X 2g\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)\,d\mu =$$

$$= \int_X 2g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X (-|f_n - f|)\,d\mu = \int_X 2g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup \int_X |f_n - f|\,d\mu \leq 0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X |f_n - f|\, d\mu$ in je enaka 0

$$\left| \int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X f d\mu \right| = \left| \int\limits_X (f_n - f)\, d\mu \right| \leq \int\limits_X |f_n - f|\, d\mu \longrightarrow 0$$

19. november 2025

Kako v praksi preverimo, da je normiran prostor Banachov?
i) Vsako Cauchyjevo zaporedje konvergira (poiščemo limito).
ii) Dokažemo, da vsaka absolutno konvergirajoča vrsta tudi konvergira.

Trditev: Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takšno zaporedje L^1-funkcij, da velja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira skoraj povsod proti neki L^1-funkciji f. Velja še
$$\int\limits_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu.$$

Dokaz: Definiramo $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. Tedaj je $g: X \to [0, \infty]$ merljiva in
$$\int\limits_X g\, d\mu = \int\limits_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n|\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$$

$\Rightarrow g(x) < \infty$ za skoraj vsak $x \in X$
$\Rightarrow$ za skoraj vsak $x \in X$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira absolutno $\Rightarrow$ konvergira

Definiramo $g_n := f_1 + \cdots + f_n \Rightarrow |g_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k| \leq g \in L^1(\mu)$ zbraba notacije... $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_X f_j\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n\, d\mu$$
$$\overset{\text{LDK}}{\underset{\text{SEZS}}{\Longrightarrow}} \int\limits_X \lim_{n\to\infty} g_n\, d\mu = \int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, d\mu.$$

Riesz-Fisherjev izrek: Prostor $L^1(\mu)$ je Banachov prostor. Če $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$, potem obstaja $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da $f_{n_k} \longrightarrow f$ skoraj povsod.

Opomba: Veliko podobnih izrekov se tudi imenuje Riesz-Fisherjev izrek.

Opomba: $p \geq 1$, $\ell^p = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ $(p \neq \infty)$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \Rightarrow (\ell^p, \|\cdot\|_p) \text{ je Banachov}$$

$\ell^\infty \leftarrow$ omejena zaporedja

$\ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq \ell^q \subseteq \ell^\infty$ $\quad 1 \leq p \leq q$

$$\mu(X) < \infty \Rightarrow L^\infty(\mu) \subseteq L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu)$$

tega še ne poznamo

Dokaz [Riesz-Fisher]: $L^1(\mu)$ je poln:

Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje v $L^1(\mu)$. Našli bomo ustrezno podzaporedje, ki bo konvergiralo v $L^1(\mu)$. Po izreku iz metričnih prostorov bo ta limita tudi limita prvotnega zaporedja.

Ker je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo, obstaja strogo naraščajoče zaporedje $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ indeksov, da $\|f_n - f_m\|_1 < 2^{-k}$ $\forall m,n \geq n_k$.

Po trditvi od prej $f := f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ konvergira skoraj povsod proti neki funkciji $f \in L^1(\mu)$.

Ker velja: $f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) = f_{n_{k+1}}$, podzaporedje $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira proti f skoraj povsod. Ker pa velja

$$|f_{n_{k+1}}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \in L^1(\mu),$$

po LDK dobimo

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} \int_X |f_{n_{k+1}} - f| \, d\mu}_{= \lim_{k\to\infty} \|f_{n_{k+1}} - f\|_1} = 0$$

Torej $f_{n_{k+1}} \longrightarrow f$ v $L^1(\mu)$. $\blacksquare$

3.4 Riemannov in Lebesgueov integral

25. november 2025

Naj bo $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Za particijo P

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

intervala $[a,b]$ definiramo

$$m_j := \inf_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x) \quad \text{in} \quad M_j := \sup_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} f(x).$$

Definiramo spodnjo in zgornjo Darbouxovo vsoto:

$$S_P := \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta_j \quad \text{in} \quad Z_P := \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta_j,$$

kjer je $\Delta_j := x_j - x_{j-1}$. Iz Analize 1 vemo, da je f Riemannovo integrabilna $\Leftrightarrow \sup_{P \text{ part}} S_P = \inf_{P \text{ part}} Z_P$.

V primeru, ko je f Riemannovo integrabilna, to število označimo z $\int_a^b f(x)dx$.

Za vsak $j = 1, \dots, n$ in vsak $x \in [x_{j-1}, x_j]$ velja $m_j \leq f(x) \leq M_j$.

Izrek: Riemannovo integrabilna funkcija $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ je Lebesgueovo integrabilna in velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu.$$

Dokaz: Za particijo P definiramo

$$s_P := \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{[x_{j-1}, x_j)} + f(b)\chi_{\{b\}} \quad \text{in} \quad z_P := \sum_{j=1}^{n} M_j \chi_{[x_{j-1}, x_j)} + f(b)\chi_{\{b\}}.$$

$\Rightarrow s_P \leq f \leq z_P$ za vsako particijo P.

Velja $\int_{[a,b]} s_P \, dm = S_P$ in $\int_{[a,b]} z_P \, dm = Z_P$

Ker je f Riemannovo integrabilna, obstaja naraščajoče zaporedje particij $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tako, da je vsaka finejša od predhodne in velja

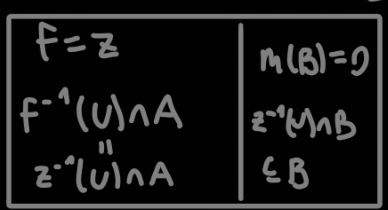
$$\lim_{k\to\infty} S_{P_k} = \lim_{n\to\infty} Z_{P_k} = \int_a^b f(x)\,dx$$

(Tukaj seveda dolžine najsirših intervalov delitve gredo proti 0.)
Ker je P_{n+1} finejša od P_n, je torej $s_n \le s_{n+1} \le f \le z_{n+1} \le z_n$ za vsak $n\in\mathbb{N}$.
Torej $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ in $z := \lim_{n\to\infty} z_n$ po točkah dobimo
$s_n \le s \le f \le z \le z_n$ za vsak $n\in\mathbb{N}$.
s_n, z_n merljive $\Rightarrow$ s in z merljivi

$$\begin{array}{ccccccc}
\int_{[a,b]} s_n\,dm & \le & \int_{[a,b]} s\,dm & \le & \int_{[a,b]} z\,dm & \le & \int_{[a,b]} z_n\,dm \\
\downarrow & & & & & & \downarrow \\
\int_a^b f(x)\,dx & & & & & & \int_a^b f(x)\,dx
\end{array}$$

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} s\,dm = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} z\,dm \Rightarrow \int_{[a,b]} (z-s)\,dm = 0$$

$\Rightarrow z-s \equiv 0$ s.p. na $[a,b]$, saj je $z \ge s$.
$\Rightarrow f = z = s$ s.p. na $[a,b]$
$\Rightarrow f$ je Lebesgueovo merljiva, saj je Lebesgueova σ-algebra polna



Skica:

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} f\,dm = \int_{[a,b]} z\,dm = \int_{[a,b]} s\,dm = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Izrek:</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna $\Leftrightarrow$ Lebesgueova mera točk nezveznosti funkcije f je 0.
(f je skoraj povsod zvezna na $[a,b]$)
Brez dokaza.

Primer: Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$.

$$\frac{1}{1+x^n} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 1; & 0 \le x < 1 \\ 2; & x = 1 \end{cases}$$

(zgornja meja je $f \equiv 2$)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \frac{dm}{1+x^n} \overset{LDK}{=} \int_{[a,b]} f\,dm = \int_{[a,b]} f\,dm$$

$$= 1 \cdot m([0,1)) + 0 \cdot m(\{1\}) = 1$$

3.5 Produktna mera (in Fubinijev izrek)

Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ merljiva prostora.
Produktna σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike.
Kako definirati produktno mero na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$?
Naj bo $\mathcal{S} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$. Definiramo

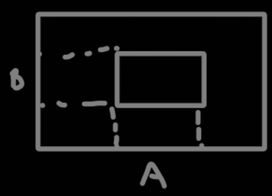
$$\Theta(A \times B) = \mu(A) \cdot \lambda(B).$$

Trditev: $\mathcal{S}$ je polalgebra in $\Theta : \mathcal{S} \longrightarrow [0, \infty]$ je polmera.

Dokaz: i) $\emptyset, X \times Y \in \mathcal{S}$ ✓

ii) $A \times B \in \mathcal{S} \Rightarrow (A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (A \times B^c)$

Velja $(A^c \times Y) \cap (A \times B^c) = \emptyset$.



iii) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

Θ je polmera na $\mathcal{S}$

i) $\Theta(\emptyset) = \Theta(\emptyset \times \emptyset) = \mu(\emptyset) \cdot \lambda(\emptyset) = 0$

ii) in iii) Naj bo $A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) \in \mathcal{S}$ in naj bodo $(A_n \times B_n)$ paroma disjunktne iz $\mathcal{S}$.

$\Theta(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(A_n \times B_n)$ oziroma $\mu(A)\lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\lambda(B_n)$

$$\underset{\displaystyle \chi_A(x)\cdot\chi_B(y)}{\underset{\parallel}{\chi_{A\times B}(x,y)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\,\chi_{B_n}(y), \quad \text{saj je } \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\times B_n) = A\times B \quad \text{disjunktna unija}$$

Fiksirajmo $x \in X$:

$$\chi_A(x)\int_Y \chi_B(y)\,d\lambda = \int_Y \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\,d\lambda$$

$$\parallel$$

$$\chi_A(x)\,\lambda(B)$$

$$\parallel \quad \int\Sigma = \Sigma\int$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\int_Y \chi_{B_n}(y)\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\,\lambda(B_n)$$

$$\Rightarrow \lambda(B)\,\chi_A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n)\,\chi_{A_n}(x) \quad \forall x \in X$$

Integrirajmo po x in kot zgoraj dobimo

$$\lambda(B)\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n)\mu(A_n).$$

$\blacksquare$

Izrek: Polmera $\Theta: \mathcal{S} \to [0,\infty]$ se da razširiti do mere $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Če sta μ in λ σ-končni, potem je razširitev ena sama.

Dokaz: Najprej na en sam način Θ razširimo do mere na algebri, generirani z $\mathcal{S}$. Ta razširitev je ena sama. Po Caratheodorijevem izreku obstaja mera na σ-algebri vseh zunanje merljivih množic, ki razširja Θ.
Če sta μ in λ σ-končni, potem je

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \;;\quad \mu(X_n) < \infty \quad \text{in} \quad X_n \subseteq X_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \;;\quad \lambda(Y_n) < \infty \quad \text{in} \quad Y_n \subseteq Y_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow X\times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n\times Y_n) \;;\quad \Theta(X_n\times Y_n) = \mu(X_n)\lambda(X_n) < \infty \quad \text{in}$$

$$X_n\times Y_n \subseteq X_{n+1}\times Y_{n+1}$$

$\Rightarrow$ mera na algebri je σ-končna. Po izreku je razširitev na Caratheodorijevo σ-algebro ena sama.

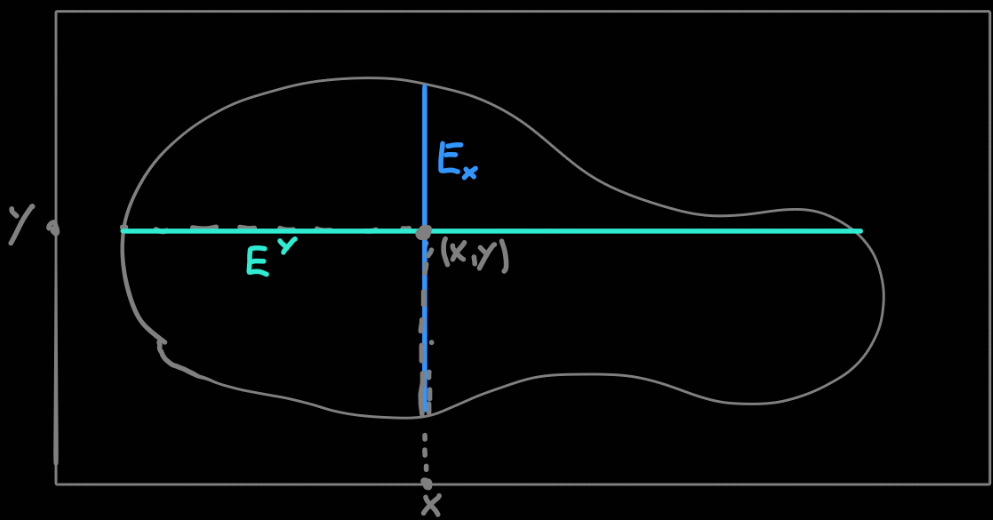
$\blacksquare$

V primeru, ko sta X in Y σ-končna, dobljeno enolično mero imenujemo produktna mera in jo označimo z $\mu \times \lambda$ oziroma lahko tudi $\mu \otimes \lambda$.

Fubini iz Analize 2: $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ zvezna:

$$\int_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$
$$= \int_a^b dx \int_c^d f_x(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f^y(x)\,dx$$

Naj bo $E \subseteq X \times Y$. Za $x \in X$ in $y \in Y$ definiramo prereza E_x in E^y z $E_x := \{ y \in Y \mid (x,y) \in E \}$ in $E^y := \{ x \in X \mid (x,y) \in E \}$.



Podobno za $f : X \times Y \longrightarrow Z$ definiramo $f_x : Y \longrightarrow Z$ in $f^y : X \longrightarrow Z$ s predpisoma $f_x(y) = f(x,y) = f^y(x)$.

26. november 2025

<u>Primer</u>: Naj bo $E \subseteq X \times Y$. Tedaj za vse $x \in X$ in $y \in Y$ velja $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$ in $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$.

$(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$

$$(\chi_E)_x(y) = \chi_E(x,y) = \begin{cases} 1; & (x,y) \in E \\ 0; & (x,y) \notin E \end{cases} \overset{x \text{ fiksen}}{=} \begin{cases} 1; & y \in E_x \\ 0; & y \notin E_x \end{cases} = \chi_{E_x}$$

Podobno $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$.

Trditev: i) Naj bo $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tedaj je $E_x \in \mathcal{B}$ in $E^y \in \mathcal{A}$ za vse $x \in X$ in $y \in Y$.
ii) Če je f merljiva glede na produktno σ-algebro $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ na $X \times Y$, potem sta f_x in f^y merljivi glede na $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}$.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{C}$ družina vseh podmnožic v $X \times Y$, da $\forall E \in \mathcal{C}$ velja $E_x \in \mathcal{B}$ in $E^y \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ je σ-algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike

$A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B} \Rightarrow E = A \times B \in \mathcal{C}$

$x \in X$: $x \in A \Rightarrow E_x = B \in \mathcal{B}$

$x \notin A \Rightarrow E_x = \emptyset \in \mathcal{B}$

Podobno $E^y \in \mathcal{A}$ $\forall y \in \mathcal{C}$.

$\Rightarrow \mathcal{C}$ vsebuje vse merljive pravokotnike $\Rightarrow X \times Y \in \mathcal{C}$

$$
\begin{aligned}
E \in \mathcal{C} \Rightarrow (E^c)_x &= \{y \in Y \mid (x,y) \in E^c\} \\
&= \{y \in Y \mid (x,y) \notin E\} \\
&= \{y \in Y \mid y \notin E_x\} \\
&= (E_x)^c
\end{aligned}
$$

Preverimo lahko, da velja $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$ in podobno za y-prereze. (DN)

$\Rightarrow \mathcal{C} \supseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

ii) Naj bo $D \subseteq Z$ merljiva množica. Izberimo $x \in X$. Ker je f merljiva, je $f^{-1}(D) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

$$
\Rightarrow \underset{\substack{\| ? \\ (f_x^{-1})(D)}}{(f^{-1}(D))_x} \in \mathcal{B} \quad \text{in} \quad \underset{\substack{\| ? \\ (f^y)^{-1}(D)}}{(f^{-1}(D))^y} \in \mathcal{A}
$$

$\Rightarrow (f_x^{-1})(D) = \{y \in Y \mid f_x(y) \in D\}$

$$= \{y \in Y \mid f(x,y) \in D\}$$
$$= \{y \in Y \mid (x,y) \in f^{-1}(D)\}$$
$$= \{y \in Y \mid y \in (f^{-1}(D))_x\}$$
$$= (f^{-1}(D))_x$$

Podobno za y-prereze. $\blacksquare$

Družine podmnožic $\mathcal{M}$ dane množice je monotoni razred, če velja naslednje:

i) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$; $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

ii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$; $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

Ker je presek neprazne družine monotonih razredov zopet monotoni razred, vedno obstaja najmanjši monotoni razred, ki vsebuje dano družino.

* Vsaka σ-algebra je monotoni razred.

* Vsaka algebra, ki je monotoni razred, je σ-algebra.

<u>Dokaz:</u> $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ algebra

Definiramo $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$ ← monotoni razred

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

<u>Lema [o monotonem razredu]:</u> Naj bo $\mathcal{A}$ algebra podmnožic množice X. Tedaj je monotoni razred $\mathcal{M}$, generiran z $\mathcal{A}$, σ-algebra.

<u>Opomba:</u> Ta monotoni razred je dejansko σ-algebra, generirana z $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, $\quad \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$

$\Downarrow \leftarrow \mathcal{M}$ je σ-algebra $\qquad$ $\sigma(\mathcal{A})$ je monotoni razred

$\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M} \qquad \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$

<u>Dokaz:</u> Po opombi zadostuje dokazati, da je $\mathcal{M}$ algebra. Za $A \in \mathcal{M}$ definiramo

$$\mathcal{M}(A) := \{ B \in \mathcal{M} \mid A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cap B \in \mathcal{M} \}.$$

tu lahko vzamemo X $\Rightarrow X \setminus B \in \mathcal{M}$, $X \setminus B = B^c$

Za vsak $A \in \mathcal{M}$ je $\mathcal{M}(A)$ monotoni razred. (DN)

Opazimo še $B \in \mathcal{M}(A) \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}(B)$.

Vzemimo $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$

$\Rightarrow B \in \mathcal{M}(A)\ \forall B \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(A) \Rightarrow \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(A)$ $\quad$ (vsebuje tudi najmanjši monotoni razred generiran z $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \mathcal{M}(A)$ je monotoni razred $\Rightarrow$ vsebuje vsaj najmanjši monotoni razred)

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}.\ B \in \mathcal{M}(A)$ $\quad$ (A poljuben)

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{M}.\ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}(B)$

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{M}.\ A \in \mathcal{M}(B)$: $\quad A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{M}$ $\blacksquare$

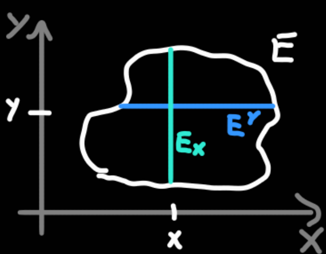
2. december 2025

<u>Mali Fubinijev izrek:</u> Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ σ-končna merljiva prostora. Za $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sta funkciji

$$x \mapsto \lambda(E_x) \qquad y \mapsto \mu(E^y)$$

merljivi in velja

$$(\mu \times \lambda)(E) = \int_X \lambda(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\lambda(y).$$



Formulo se prebere lepše kot:

$$\iint_{X \times Y} \chi_E(x,y)\, d(\mu \times \lambda)(x,y) = \int_X d\mu(x) \int_Y \chi_E(x,y)\, d\lambda(y)$$

$$= \int_Y d\lambda(y) \int_X \chi_E(x,y)\, d\mu(x)$$

Zato se ta izrek imenuje „mali Fubinijev izrek".

Dokaz: Definirajmo $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ... vse merljive množice, za katere izrek velja. Dokazali bomo $\mathcal{E} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Dokazali bomo: i) $\mathcal{E}$ vsebuje vse merljive pravokotnike

ii) $\mathcal{E}$ vsebuje končne disjunktne unije merljivih pravokotnikov

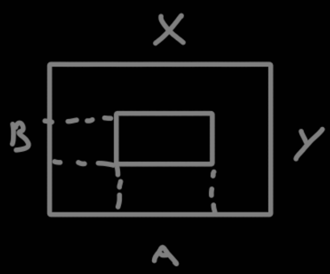
iii) $\mathcal{E}$ je monoton razred

Recimo, da smo i), ii), iii) že dokazali. Tedaj je $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$, kjer je $\mathcal{E}_0$ algebra generirana z merljivimi pravokotniki. Naj bo $\mathcal{M}$ monoton razred generiran z $\mathcal{E}$. Tedaj je $\mathcal{M}$ σ-algebra, ki vsebuje vse merljive pravokotnike. Tedaj velja $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

i) $E = A \times B$; $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$

$$E_x = \begin{cases} B; & x \in A \\ \emptyset; & x \notin A \end{cases} \qquad \lambda(E_x) = \begin{cases} \lambda(B); & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \mapsto \lambda(E_x)$$
$$\uparrow$$
$$x \mapsto \lambda(B)\chi_A \quad \text{je } \mathcal{A}\text{-merljiva.}$$



Podobno $y \mapsto \mu(E^y) \Leftrightarrow y \mapsto \mu(A)\chi_B$ je $\mathcal{B}$-merljiva

$$\int_X \lambda(E_x)\,d\mu(x) = \lambda(B)\int_X \chi_A\,d\mu = \lambda(B)\mu(A)$$
$$\| \qquad = (\mu \times \lambda)(A \times B)$$
$$\int_Y \lambda(E^y)\,d\lambda(y) = \mu(A)\int_Y \chi_B\,d\lambda = \mu(A)\lambda(B$$

ii) Naj bosta C in D disjunktna merljiva pravokotnika. Ker je $\chi_{C \cup D} = \chi_C + \chi_D$.

$x \mapsto \lambda((C \cup D)_x) = \lambda(C_x \times D_x) = \lambda(C_x) + \lambda(D_x)$ je vsota merljivih funkcij, zato je merljiva. Podobno za $y \mapsto \mu((C \cup D)^y)$.

Za enakost integralov upoštevamo aditivnost domene: če Z, W disjunktna, potem $\int_{Z \cup W} = \int_Z + \int_W$.

Za poljubno končno disjunktno unijo uporabimo indukcijo.

iii) Naj bo $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje v $\mathcal{E}$. Označimo $E := \sum_{n=1}^{\infty} E_n$.

$x \mapsto \lambda(E_x)$, $y \mapsto \mu(E^y)$ merljivi

Ker je $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$, je $\lambda(E_x) = \lim_{n\to\infty} \lambda((E_n)_x)$. Zato je $f: x \mapsto \lambda(E_x)$ limita po točkah zaporedja funkcij $f_n: x \mapsto \lambda((E_n)_x)$. Ker je limita merljivih funkcij merljiva, je $g: x \mapsto \lambda(E_x)$ merljiva. Podobno je $y \mapsto \mu(E^y)$ merljiva.

$$\int_Y \mu(E^y)\, d\lambda(y) \overset{\text{LMK za } g_n \nearrow g}{=} \lim_{n\to\infty} \int_Y \mu((E_n)^y)\, d\lambda(y) = \lim_{n\to\infty} (\mu\times\lambda)(E_n) \overset{E_n \nearrow E}{=} (\mu\times\lambda)(E)$$

Podobno za $\int_X \lambda(E_x)\, d\mu(x) = (\mu\times\lambda)(E)$.

Predpostavimo, da sta μ in λ končni, t.j. $\mu(X) < \infty$, $\mu(Y) < \infty$. Naj bo sedaj $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje množic v $\mathcal{E}$ in naj bo E njihov presek. Funkciji $x \mapsto \lambda(E_x)$ in $y \mapsto \lambda(E^y)$ sta merljivi kot prej. Enakost integralov sledi iz istega računa kot prej, le da argument z LMK nadomestimo z LDK, kjer je dominirajoča funkcija $y \mapsto \mu(E_1^y)$, za zadnjo limito pa uporabimo dejstvo, da je mera preseka limita mer, če je ena od mer množic končna. Podobno za $x \mapsto \lambda(E_x)$.

V splošnem zapišemo $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$; $\mu(X_n) < \infty$, $\lambda(Y_n) < \infty$ in $X_n \subseteq X_{n+1}$, $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Izberimo $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tedaj je $E \cap (X_j \cap Y_j)$ vsebovana v $\mathcal{A}|_{X_j} \otimes \mathcal{B}|_{Y_j}$. Tedaj sta funkciji $x \mapsto \lambda(E_x \cap Y_j)$, $y \mapsto \mu(E^y \cap X_j)$ merljivi. V limiti, ko $j \to \infty$, dobimo $x \mapsto \lambda(E_x \cap Y) = \lambda(E_x)$ in $y \mapsto \mu(E^y \cap X) = \mu(E^y)$, ki sta merljivi funkciji. Preverimo še enakost dvakratnih integralov in produktne mere. Po zgoraj dokazanem velja

$$(\mu\times\lambda)(E \cap (X_j \times Y_j)) = \int_{X_j} \lambda(E_x \cap Y_j)\, d\mu(x) = \int_{Y_j} \mu(E^y \cap X_j)\, d\lambda(y).$$

Funkcijo razširimo z 0 na Y_j^c in X_j^c in dobimo po LMK enačaj. $\boxtimes$

Tonelli-Fubinijev izrek: Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$ σ-končna prostora. Tedaj velja:

Tonelli: Naj bo $f: X \times Y \longrightarrow [0, \infty]$ merljiva funkcija in naj bosta $g(x) := \int_Y f_x(y)\, d\lambda(y)$ in $h(y) := \int_X f^y(x)\, d\mu(x)$. Tedaj sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ merljivi glede na $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ in velja

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \lambda)(x,y) = \int_Y d\lambda(y) \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$$
$$= \int_X d\mu(x) \int_Y f(x,y)\, d\lambda(y).$$

Fubini: Naj bo $f \in L^1(\mu \times \lambda)$. Tedaj je $f_x \in L^1(\lambda)$ za skoraj vsak $x \in X$ in $f^y \in L^1(\mu)$ za skoraj vsak $y \in Y$. Funkciji g in h sta v $L^1(\mu)$ in $L^1(\lambda)$. Oba dvakratna integrala sta enaka dvojnemu.

Opomba: $f \in L^1(\mu \times \lambda) \Leftrightarrow \int_{X \times Y} |f|\, d(\mu \times \lambda) < \infty$ preverimo s Tonellijem.

Dokaz: Tonelli: Po malem Fubinijevem izreku Tonellijev izrek velja, ko je $f = \chi_E$ za $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Če je $0 \le s$ stopničasta funkcija, za enakost integralov uporabimo aditivnost in nenegativno homogenost. Za merljivost uporabimo dejstvo, da so linearne kombinacije merljivih funkcij merljive.

Naj bo sedaj f splošna nenegativna merljiva funkcija. Po izreku o aproksimaciji obstaja zaporedje nenegativnih stopničastih s_n, da $0 \le s_n \nearrow f$.

$$s_n \nearrow f \Rightarrow (s_n)_x \nearrow f_x \overset{\text{LMK}}{\Longrightarrow} \int_Y (s_n)_x\, d\lambda \nearrow \int_Y f_x\, d\lambda$$

Zato je $g(x) = \lim_{n \to \infty} \int_Y (s_n)_x\, d\lambda$ in zato merljiva. Podobno h merljiva

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \lambda)(x,y) \overset{\text{LMK}}{=} \lim_{n \to \infty} \int_{X \times Y} s_n(x,y)\, d(\mu \times \lambda)(x,y)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_X d\mu(x) \int_Y \underbrace{f_x(y)}_{(s_n)_x(y)}\, d\lambda(y)$$

$$\overset{\text{LMK}}{=} \int_X d\mu(x) \int_Y f_x(y)\, d\lambda(y)$$

$$= \int_X d\mu(x) \int_Y f(x,y)\, d\lambda(s).$$

Podobno druga enakost.

Fubini: $f \in L^1(\mu \times \lambda) \iff \int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\times\lambda) < \infty$

$$\iff \int_X d\mu(x) \underbrace{\int_Y |f(x,y)|\, d\lambda(y)}_{\tilde{g}(x)} < \infty$$

$$\iff \int_X \tilde{g}(x)\, d\mu(x) < \infty$$

$\Rightarrow \tilde{g}(x) < \infty$ skoraj povsod $\Rightarrow \int_Y |f(x,y)|\, d\lambda(y) < \infty$ skoraj povsod
$\Rightarrow f_x \in L^1(\lambda)$ za skoraj vsak x.
Podobno $f^y \in L^1(\mu)$ za skoraj vsak y.
Ker je $\int_X \tilde{g}(x)\, d\mu(x) < \infty$, je $g \in L^1(\mu)$. Podobno $h \in L^1(\lambda)$.
Enakost med dvakratnima in dvojnima integraloma preverimo tako, da zapišemo $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i((\operatorname{Im} f)^+ - (\operatorname{Im} f)^-)$, upoštevamo linearnost integralov za L^1 funkcije in večkrat Tonellijev izrek. ▨

Primer: $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \overset{\mu}{\overset{\shortparallel}{m}})$ in $([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, λ šteje točke.
Naj bo Δ diagonala v $[0,1]\times[0,1]$; $\Delta = \{(x,x) \mid x \in [0,1]\}$.
Δ je v $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
Ali velja Tonelli za χ_Δ?

$$\int_X d\mu(x) \int_Y \chi_\Delta(x,y)\, d\lambda(\mu) = \int_Y 1\, d\mu(x) = 1$$

$$\int_Y d\lambda(y) \int_X \chi_\Delta(x,y)\, d\mu(x) = \int_Y 0\, d\lambda(y) = 0$$

Problem: λ ni σ-končna. Obstajajo tudi drugi primeri.

Opomba: Kaj narediti v primeru, ko mera ni σ-končna?
Če $f \in L^1(\mu)$: $X = \underbrace{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}_{C} \cup \underbrace{\{x \in X \mid f(x) = 0\}}_{N}$.

$$\int_X f\, d\mu = \int_C f\, d\mu$$

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\{x \in X \mid |F(x)| \geq \tfrac{1}{n}\}}_{\text{končna mera}}}_{=: C_n}$$

$$\infty > \int_X |F| \, d\mu \geq \int_{C_n} |F| \, d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(C_n)$$

Če imamo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^1(\mu)$: $\quad f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (\|f_n\|_1 + 1)} \cdot |f_n|$

$f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$

Ker je $|f_n| \leq 2^n (\|f_n\|_1 + 1) \cdot f$ je $f_n|_{C^c} \equiv 0$.

Za integral je $\int_X f_n \, d\mu = \int_C f_n \, d\mu$.