

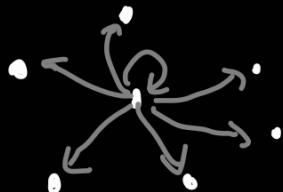
Verjetnost 2

Predavatelj: Martin Raič

pisni izpit —→ ustni izpit

1. UVOD in OSVEŽITEV TEORIJE VERJETNOSTI

6. oktober 2025



Markovska lastnost:

$$\begin{aligned} & \Pr(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \\ & \qquad \qquad \qquad \text{predhodna stanje} \\ & \qquad \qquad \qquad \nearrow \qquad \qquad \qquad \searrow \\ & \qquad \qquad \qquad \text{naslednje stanje} \qquad \qquad \qquad \text{trenutno stanje} \end{aligned}$$

Andrej Andrejevič Markov (1856-1922)

Časovno homogena različica:

$$\Pr(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = p_{x_n, x_{n+1}}$$

Vrednici iz 2. različice sledi 1.

Primer: model vremena

- 1: pretežno jasno
- 2: pretežno oblago, a suho
- 3: deževno

		1	2	3	vse vrstic morajo biti enake 1
		x	y		
x	1	0.7	0.2	0.1	
	2	0.2	0.6	0.2	
3	0.2	0.3	0.5		

Recimo, da je danes pretežno jasno. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo pojutrišnjem dež?

$$\Pr(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = ?$$

Trditev 1.1: Če je B fiksen dogodek s $P(B) > 0$ in definiramo $P^B(A) := P(B|A)$, je P^B spet verjetnostna mera in jo lahko gledamo na kateremkoli zoženem prostoru Ω' , kjer je $\Omega' \subseteq \Omega$ dogodek in $B \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$.

Dokaz: DN.

Trditev 1.2: Naj bodo A, B in C dogodki na istem verjetnostnem prostoru. Tedaj je $P(B) > 0$ in $P^B(C) > 0$ natanko tedaj, ko je $P(B \cap C) > 0$. Če je slednje res velja tvdi $P^B(A|C) = P(A|B \cap C)$.

Dokaz: DN.

$$P(X_2=3 | X_0=1) = P^{X_0=1}(X_2=3)$$

trditev 1.1,
izrek o popolni
verjetnosti

$$= \sum_{i=1}^3 P^{X_0=1}(X_1=i) P^{X_0=1}(X_2=3 | X_1=i)$$

trditev 1.2

$$= \sum_{i=1}^3 P(X_1=i | X_0=1) P(X_2=3 | X_0=1, X_1=i)$$

časovno homogen
markovska lastnost

$$= p_{11}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{33}$$

$$= 0.7 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.16$$

Kaj pa $P(X_3=3 | X_0=1)$?

$$P(X_3=3 | X_0=1) = \sum_{i=1}^3 P(X_2=i | X_0=1) P(X_3=3 | X_0=1, X_2=i)$$

$$P(X_2=1 | X_0=1) = p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} = 0.55$$

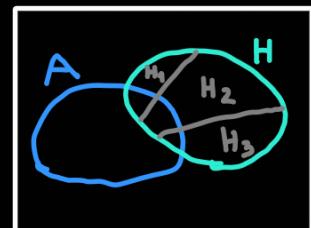
$$P(X_2=3 | X_0=1) = 0.16 \text{ od prej}$$

$$P(X_2=2 | X_0=1) = 0.29 \quad (= 1 - 0.55 - 0.16)$$

Trditve 1.3: Če je $0 < p \leq 1$, $(H_k)_{k \in K}$ števna družina paroma disjunktnih dogodkov z unijo H s $P(H) > 0$ ter A tak dogodek, da je $P(A|H_k) = p$, brž ko je $P(H_k) > 0$, je tvrdi $P(A|H) = p$.

Dokaz: $K^+ := \{k \in K \mid P(H_k) > 0\}$

$$P(A|H) = P^H(A) = \sum_{k \in K^+} P^H(H_k) \underbrace{P^H(A|H_k)}_{=p}$$



$$P(A|H_k \cap H) = P(A|H_k) = p$$

$$= p \sum_{k \in K^+} P^H(H_k) = p P^H(H) = p.$$

□

Iz trditve sledi:

$$\begin{aligned} P(X_3 = 3 \mid X_0 = 1) &= \sum_{i=1}^3 P(X_2 = i \mid X_0 = 1) P(X_3 = 3 \mid X_0 = 1, X_2 = i) \\ &= \sum_{i=1}^3 P(X_2 = i \mid X_0 = 1) p_{i,3} \\ &= 0.55 \cdot 0.1 + 0.29 \cdot 0.2 + 0.16 \cdot 0.5 = 0.193 \end{aligned}$$

Se nekaj vprašanj:

* $P(X_n = 3 \mid X_0 = 1) = ?$

* Je to zaporedje konvergentno?

Če je, kam konvergira?

* Ali je limitno obnašanje verjetnosti $P(X_n = y \mid X_0 = x)$, ko gre $n \rightarrow \infty$, odvisno od x ?

* $P(\exists n \in \mathbb{N}. X_n = y \mid X_0 = x) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X_n = y\} \mid X_0 = x) = ?$

Izrek 1.4 [enoličnost verjetnosti]: Naj bo \mathcal{A} družina podmnožic množice Ω , ki je zaprta za končne preseke, \mathcal{F} pa naj bo Ω algebra generirana z \mathcal{A} . Tedaj, če se verjetnostni meri P_1 in P_2 ujemata na \mathcal{A} , se ujemata tudi na \mathcal{F} .

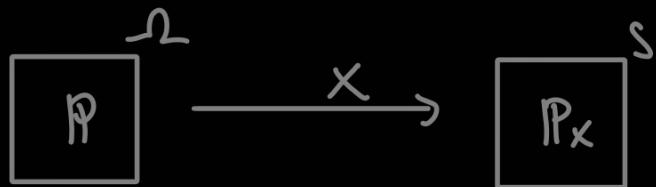
Rezultat sledi iz Dynkinove leme, znane tudi kot izrek π - λ .

Definicija: Slučajni element na verjetnostnem prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) je vrednosti v množici S , opremljeni s σ -algebro \mathcal{G} (merljivem prostoru (S, \mathcal{G})), je \mathcal{F}/\mathcal{G} -merljiva preslikava $X: \Omega \rightarrow S$, tj. za vsako množico $C \in \mathcal{G}$ velja $X^{-1}(C) = \{X \in C\} = \{w \in \Omega \mid X(w) \in C\} \in \mathcal{F}$.

O diskretnem slučajnem elementu govorimo, če je S števna in $\mathcal{G} = 2^S$.

Za merljivost je tedaj dovolj, da so vse množice $\{X=x\}$ dogodki.

Definicija: Porazdelitev slučajnega elementa X , definiranega kot zgoraj je potisk/slika mere P vzdolž X , torej verjetnostna mera $P_X = X_*P$, definirana po predpisu $P_X(C) := P(X \in C)$.



Poznati porazdelitev pomeni poznati verjetnosti $P(X \in C)$ za vse $C \in \mathcal{G}$. V resnici jih je treba le za $C \in \mathcal{A}$, kjer je \mathcal{A} družina končne preseke in generira \mathcal{G} .

Borelova σ -algebra
↓

Denimo, če je $(S, \mathcal{G}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, je za \mathcal{A} dovolj vzeti družino vseh poltrakov $(-\infty, x]$, torej je dovolj poznati $P(X \leq x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

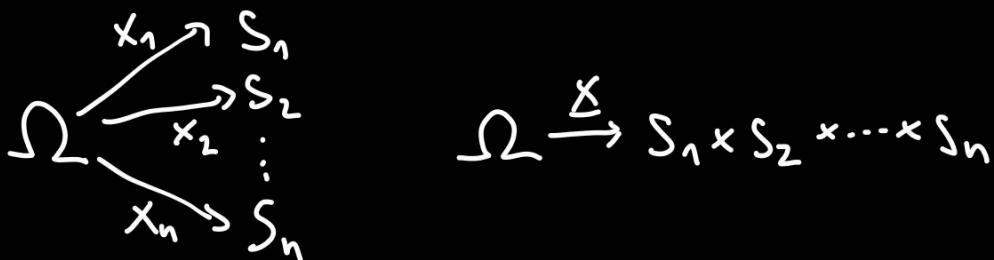
Če je X diskreten slučajni element, je še lažje: tedaj je dovolj poznati $P(X=x)$ za vse $x \in S$.

Definicija: Slučajni vektor je

(1) končen nabor (X_1, \dots, X_n) slučajnih elementov na istem verjetnostnem prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) , a z vrednostmi v meritljivih prostorih $(S_1, \mathcal{Y}_1), \dots, (S_n, \mathcal{Y}_n)$, ki pa so lahko različni.

ALI EKVIVALENTNO

(2) slučajni element \underline{X} na (Ω, \mathcal{F}, P) z vrednostmi v $(\prod_{i=1}^n S_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{Y}_i) = (S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, \mathcal{Y}_1 \otimes \mathcal{Y}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{Y}_n)$, kjer je $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{Y}_i$ σ -algebra, generirana z množicami oblike $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$, kjer je $C_i \in \mathcal{Y}_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$.



Ekvivalenco določa zvezca

$$\underline{X}(w) = (X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w)).$$

Prek (2) definiramo porazdelitev slučajnega vektora.

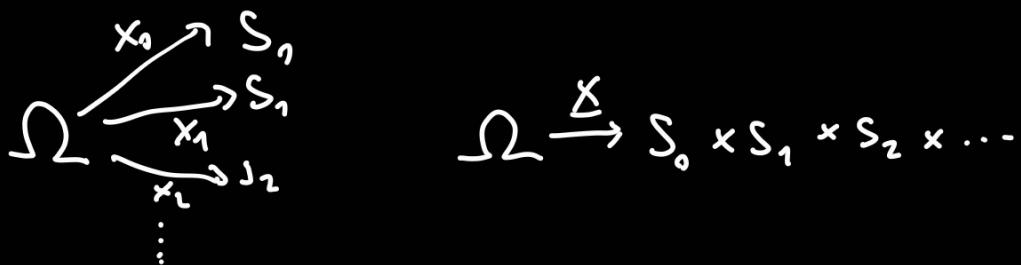
Opozka 1.5: Porazdelitev slučajnega vektora (X_1, \dots, X_n) torej predstavlja verjetnosti $P(X_1 \in C_1, X_2 \in C_2, \dots, X_n \in C_n)$, dovolj pa je poznati verjetnosti

$$P(\underbrace{X_1 \in C_1, X_2 \in C_2, \dots, X_n \in C_n}_{(X_1, \dots, X_n) \in C_1 \times \dots \times C_n}); \quad C_i \in \mathcal{Y}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Opozka 1.6: Če so X_1, X_2, \dots, X_n diskretni slučajni elementi, je to tudi slučajni vektor (X_1, \dots, X_n) . Za njegovo porazdelitev je dovolj poznati verjetnosti $P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n)$, kjer je $x_i \in S_i$, $i=1, 2, \dots, n$.

Definicija: Slučajni proces v diskretnem času z enostransko neskončnostjo je:

- (1) Zaporedje X_0, X_1, X_2, \dots slučajnih elementov na istem verjetnostnem prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) , a z vrednostmi v merljivih prostorih prostorih $(S_0, \mathcal{F}_0), (S_1, \mathcal{F}_1), (S_2, \mathcal{F}_2), \dots$ ki so lahko različni.
- (2) Slučajni element \underline{X} na (Ω, \mathcal{F}, P) z vrednostmi v $(\prod_{i=0}^{\infty} S_i, \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i) = (S_0 \times S_1 \times S_2, \dots, \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots)$, kjer je $\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$ σ -algebra, generirana z množicami oblike $C_0 \times C_1 \times C_2 \times \dots$, kjer je $C_i \in \mathcal{F}_i$ za $i=0, 1, 2, \dots$



Ekvivalenca določa zvezca

$$\underline{X}(w) = (X_0(w), X_1(w), X_2(w), \dots).$$

Prek (2) definiramo porazdelitev slučajnega procesa.

Opozka 1.7: Brš ko imam neskončno množic S_i več kot en element, je produkt $\prod_{i=0}^{\infty} S_i$ nešteven. Slučajni proces v neskončnem času torej tipično ni diskreten slučajni element.

Opozka 1.8: σ -algebra $\bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{Y}_i$ generira že produkti oblike $C_0 \times C_1 \times \dots \times C_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times \dots$. Družina teh produktov je zaprta za končne preseke. Za parazdelitev slvčajnega procesa je torej dovolj poznati verjetnosti $P(X_0 \in C_0, X_1 \in C_1, \dots, X_n \in C_n)$; $C_i \in \mathcal{Y}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$. Če so S_i števne in $\mathcal{Y}_i = 2^{S_i}$, pa je dovolj poznati verjetnosti $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$; $x_i \in S_i$, $i = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$

POZOR! Ni pa dovolj poznati verjetnosti $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots)$. (te verjetnosti so lahko vse enake 0) recimo, če mečemo pošten kavanec

Izrek 1.9: Naj bodo $(S_0, \mathcal{Y}_0), (S_1, \mathcal{Y}_1), \dots$ merljivi prostori, na produktih $(S_0, \mathcal{Y}_0), (S_0 \times S_1, \mathcal{Y}_0 \otimes \mathcal{Y}_1), \dots$ pa definirane verjetnostne mere P_0, P_1, \dots , ki naj bodo konsistentne v smislu, da, če je $(X_0, X_1, \dots, X_n, X_{n+1}) \sim P_{n+1}$, je tudi $(X_0, X_1, \dots, X_n) \sim P_n$. Tedaj obstaja (natančno ena) verjetnostna mera P_∞ na $(\prod_{i=1}^{\infty} S_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{Y}_i)$ z lastnostjo, da če je $(X_0, X_1, \dots) \sim P_\infty$, je za vse n tudi $(X_0, X_1, \dots, X_n) \sim P_n$.

Dokaz opuščamo. (Daniell, Kolmogorov – poseben primer)

2. MARKOVSKIE VERIGE S FIKSNO ZAČETNO PORAZDELITVJO

2.1. Osnovni pojmi

13. oktober 2025

Definicija: Časovna homogeno markovsko verigo v diskretnem času in na diskretni množici stanj s fiksno porazdelitvijo sestavlja:

- števna množica S - prostor stanj;
- verjetnosti prostor (Ω, \mathcal{F}, P) ;
- slučajne spremenljivke X_0, X_1, X_2, \dots na (Ω, \mathcal{F}, P) in z vrednostmi v $(S, 2^S)$
- prehodne verjetnosti $p_{x,y}$; $x, y \in S$, pri čemer zahtevamo, $p_{x,y} \geq 0$ za vse $x, y \in S$;
 $P(X_{n+1} = y \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p_{x_n, y}$,
brž ko je $P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) > 0$.
- $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$ za vse $x \in S$.

Porazdelitvi slučajne spremenljivke X_0 pravimo začetna porazdelitev.

Prehodna matrika: $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$

Za matriko $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$ za katero je $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$ za vse $x \in S$, pravimo, da je stošastična.

Opazka 2.1: Skupna porazdelitev procesa je natančno določena z začetno določeno z začetno porazdelitvijo in prehodnimi verjetnostmi, saj je [izrek 1.4, opazka 1.8]
 $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n) = P(X_0 = x_0) = p_{x_0, x_1} p_{x_1, x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}$.

Opozka 2.2: Za vsako verjetnostno mero π na $(S, 2^S)$ in za vsako stočustično matriko $P \in [0, 1]^{S \times S}$ obstaja taka verjetnostna mera na $(S^{\mathbb{N}_0}, (2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0})$, da je slučajni proces X_0, X_1, \dots porazdeljen ^{produktna} ^{σ -algebra} skladno s to mero, markovska veriga z začetno porazdelitvijo π in prehodno matriko P .

Uporabimo namreč izrek 1.9: če je $P = [p_{x,y}]_{x,y \in S}$ najprej definiramo končnorazsežne porazdelitve P_n na $(S^{n+1}, (2^S)^{\otimes n+1})$ po predpisu:

$$P_n(\{(x_0, x_1, \dots, x_n)\}) := \pi(\{x_0\}) p_{x_0, x_1} p_{x_1, x_2} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}.$$

Le-te so konsistentne (DV), torej obstaja ustrezena mera P_∞ na $(S^{\mathbb{N}_0}, (2^S)^{\otimes \mathbb{N}_0})$. Domuča vaja = DV.

Opozka 2.3: Iz trditve 1.3 sledi, da za vsak $x \in S$ in vsak $D \subseteq S^n$ velja

$$P(X_{n+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \in D, X_n = x}_{\text{disjunktna unija dogodkov oblike}}) = p_{x,y}.$$

$$\{(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)\}$$

Med drugim je $P(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = p_{x,y}$. Nadalje trdi za vsako množico $D \subseteq S^{n+1}$ velja:

$$P(X_{n+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D, X_n = x}_{\text{disjunktna unija dogodkov oblike}}) = p_{x,y}.$$

$$\{(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)\}$$

Trditev 2.4. [razširitev lastnosti Markova na cel proces]:

Pogojno na poljuben dogodek oblike $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\}$ z nenihelno verjetnostjo je X_n, X_{n+1}, \dots spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi, njena začetna porazdelitev pa se vedno ujema s pogojno porazdelitvijo slvčajne spremenljivke X_n glede na $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\}$.

Dokaz:

$$\begin{aligned} & P^{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D} (X_{n+m+1} = y \mid X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m) \\ (1.2) \quad &= P(X_{n+m+1} = y \mid \underbrace{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D, X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m}_{(X_0, X_1, \dots, X_{n+m+1}) \in D'}) \\ &\stackrel{\text{prejšnja opazka}}{=} P_{x_m, y}. \end{aligned}$$

□

Opomba: Pri pogojevanju lahko Ω zožimo na poljuben dogodek Ω' , za katerega je $\{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D\} \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$.

Posledica 2.5: Če s π_n označimo n-to robno porazdelitev, tj. porazdelitev slvčajne spremenljivke X_n , je X_n, X_{n+1}, \dots (brez pogojno) spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in začetno porazdelitvijo π_n .

□

Opazka 2.6: $\pi_1(\{y_1\}) = P(X_1 = y)$

$$\begin{aligned} \pi_0 \left[\begin{array}{c|c} y & \pi_1(y) \\ \hline p & \end{array} \right] &= \sum_{\substack{x \in S \\ P(X_0=x) > 0}} P(X_0=x) P(X_1=y \mid X_0=x) \\ &= \sum_{\substack{x \in S \\ \pi_0(x) > 0}} \pi_0(x) p_{x,y} \end{aligned}$$

Če torej prehodne verjetnosti uvrstimo v matriko
 $P = [P_{x,y}]_{x,y \in S}$, robne porazdelitve pa identificiramo z
 vrstičnimi vektorji, velja $\Pi_1 = \Pi_0 \cdot P$. Po posledici 2.5
 pa je tudi $\Pi_{n+1} = \Pi_n P$. Z indukcijo sledi $\Pi_n = \Pi_0 P^n$.

Primer: vreme od prejšnjic:

$$P = \begin{bmatrix} \text{pre.} & \text{pne.} & \text{dež} \\ \text{jaz.} & \text{ob} & \text{dež} \\ \text{pretežno} & & \\ \text{jasno} & & \\ \text{pretežno} & & \\ \text{oblačno} & & \\ \text{dež} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_0 := [1, 0, 0]$$

$$\Pi_1 = [1, 0, 0] P = [0.7 \quad 0.2 \quad 0.1]$$

$$\Pi_2 = [0.7 \quad 0.2 \quad 0.1] P = [0.55 \quad 0.29 \quad 0.16]$$

Primer: slučajni sprehod na \mathbb{Z} , $p \in [0, 1]$

$$P_{k,k+1} := p, \quad P_{k,k-1} := 1-p, \quad X_0 = 0$$

$$\begin{aligned} X_n &= \text{št. pomikov navzgor} - \text{št. pomikov navzdol} \\ &= 2 \cdot (\text{št. pomikov navzgor}) - n \end{aligned}$$

$$\text{št. pomikov navzgor} \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$\frac{X_n + n}{2} \Rightarrow P(X_n = -n + 2k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{\text{Primer: }} \Pi_0 := \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad P := \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_0 P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Sledi $\Pi_n = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$.

Definicija: Markovska veriga s fiksno začetno porazdelitvijo je **stacionarna**, če so vse robne porazdelitve enake.

Ekvivalentno: $\Pi_1 = \Pi_0$. $\left(\begin{array}{l} \Pi_0 \text{ je levi lastni vektor} \\ \text{za lastno vrednost } 1 \end{array} \right)$

2.2. Časi ustavljanja

Definicija: Slučajna spremenljivka T z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ je **čas ustavljanja** glede na slučajni proces X_0, X_1, \dots , če za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja, da je dogodek $\{T = n\}$ natančno določen z X_0, X_1, \dots, X_n , t.j. če obstaja takšna merljiva množica D_n , da je $\{T_n\} = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D_n\}$. ↪ če ima X_k vrednosti v (S_k, \mathcal{F}_k) zahtevamo $D_n \in \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$.

Primera in protiprimer:

1) Čas zadetju množice $C \in \mathcal{F}$, t.j. $T_C := \min \{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in C\}$ ob dogovoru $\min \emptyset := \infty$, je čas ustavljanja.

$$\begin{aligned} \{T = n\} &= \{X_0 \notin C, X_1 \notin C, \dots, X_n \notin C, X_{n+1} \in C\} \\ &= \{(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) \in (C^c)^n \times C\} \end{aligned}$$

2) Naj bo $(S, \mathcal{F}) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Borelova σ -algebra

$T := \min \{n \in \mathbb{N} \mid X_n > X_{n-1}\}$ je čas vstavljanja

$$\{T = n\} = \{X_0 > X_1 > X_2 > \dots > X_{n-1} < X_n\}$$

3) $(S, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$T := \min \{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_{n+1} > X_n\}$ tipično ni čas vstavljanja (razen, če gre npr. za konstanten proces)

$\{T = n\}$ je odvisno od X_{n+1}

Opozka 2.7: Če so h_0, h_1, \dots injektivne in ohranjajo merljivost (tj. A merljiva $\Leftrightarrow h_n(A)$ merljiva), se časi vstavljanja glede na X_0, X_1, X_2, \dots ujemajo s časi vstavljanja glede na $h_0(X_0), h_1(X_1), \dots$ (DV-malo težje)

Definicija: Filtracija (v diskretnem času z naraščanjem v nedogled) na merljivem prostoru (Ω, \mathcal{F}) je zaporedje σ -algeber $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$.

Definicija: Slučajna spremenljivka $T \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ je čas vstavljanja glede na filtracijo $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, velja $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Definicija: Za vsak slučajni proces X_0, X_1, \dots , kjer ima X_n vrednosti v (S_n, \mathcal{F}_n) , definiramo njegovo naravno Filtracijo:

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \{(X_0, X_1, \dots, X_n) \in D_n; D_n \in \mathcal{F}_0 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n\}.$$

DV: utemelji, da je to res filtracija.

Opozka 2.8: Časi ustavljanja glede na določen slučajni proces se ujemajo s časi ustavljanja glede na naravno filtracijo.

Irditev 2.9: Če je T čas ustavljanja in $k \in \mathbb{N}_0$, je $T+k$ prav tako čas ustavljanja.

Dokaz: Za $n=0, 1, \dots, k-1$ je $\{T+k=n\} = \{T=n-k\} = \emptyset$.
Za $n=k, k+1, \dots$ pa velja

$$\{T+k=n\} = \{T=n-k\} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{n-k} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_n$$

□

Irditev 2.10: Naj bo T slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ in $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ filtracija. Naslednje trditve so ekvivalentne:

(1) T je čas ustavljanja glede na $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

(2) $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$

(3) $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$

Dokaz: (2) \Leftrightarrow (3): ocitno, saj sta si dogodka $\{T \leq n\}$ in $\{T > n\}$ nasprotna

$$(1) \Rightarrow (2): \quad \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \underbrace{\{T=k\}}_{\in \tilde{\mathcal{F}}_k} \in \mathcal{F}_n \quad \begin{matrix} \sigma\text{-alg. zaprite za unije} \\ \in \mathcal{F}_n \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_n \end{matrix}$$

$$(2) \Rightarrow (1): \quad \{T=n\} = \underbrace{\{T \leq n\}}_{\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}} \setminus \underbrace{\{T \leq n-1\}}_{\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_n} \in \mathcal{F}_n$$

□

Irditev 2.11: Če sta T in S časa ustavljanje glede na določeno filtracijo, so to tudi $T+S$, $T \vee S := \max \{T, S\}$ in $T \wedge S := \min \{T, S\}$.

$$\text{Dokaz: } \{T+S=n\} = \bigcup_{k=0}^n \{T=k\} \cap \{S=n-k\}$$

$$\{T \vee S \leq n\} = \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}$$

$$\{T \wedge S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\}$$

Opozka 2.8½ (zadnjiji izpuštili)

Konstante iz $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ so tudi časi ustavljanja.

Izrek 2.12 [krepka lastnost Markova]: Naj bo:

- X_0, X_1, \dots časovna homogena markovska veriga na števni množici stanj S prehodnimi verjetnostmi $P_{X,Y}$, $X, Y \in S$, in fiksno začetno porazdelitvijo
- $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ naravna filtracija tega procesa;
- T čas ustavljanja glede na to filtracijo (ekvivalentno glede na proces X_0, X_1, \dots)
- $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\{T=n\} \cap B_n)$, kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$, in $P(B) > 0$

Pogojno na B (in v verjetnostnem prostoru, ki je zavzet prvočnega na poljuben dogodek Ω' , za katerega je $B \subseteq \Omega' \subseteq \{T < \infty\}$) je tedaj slučajni proces X_T, X_{T+1}, \dots , spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in fiksno začetno porazdelitvijo, ki je pogoju porazdelitev slučajne spremenljivke X_T glede na B .

Opozka 2.13: Med pomembnimi legitimnimi dogodki B so dogodki $\{T \in K\}$, kjer je $K \subseteq \mathbb{N}_0$.

Dokaz izreka 2.12: Preveriti je treba:

$$\mathbb{P}^B(X_{T+m+1} = y \mid X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m) = p_{x_m, y}.$$

|| trditve 1.2

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\})$$

brž ko je $\mathbb{P}^B(X_T = x_0, X_{T+1} = x_1, \dots, X_{T+m} = x_m) > 0$.

↔

$$\mathbb{P}(B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}) > 0$$

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B_n \cap \{T = n, X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\})$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+m+1} = y \mid \underbrace{(x_0, x_1, \dots, x_n)}_{B_n} \in D_n, \underbrace{(x_0, x_1, \dots, x_n)}_{T=n} \in D_n^{-1}, x_n = x_0, x_{n+1} = x_1, \dots, x_{n+m} = x_m)$$

$$= p_{x_m, y} \quad (\text{Opozka 2.3})$$

Dogodek $B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}$ pa je števna disjunktna unija dogodkov $B_n \cap \{T = n, X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}$. Po trditvi 1.3 mora biti tudi

$$\mathbb{P}(X_{T+m+1} = y \mid B \cap \{X_T = x_0, \dots, X_{T+m} = x_m\}) = p_{x_m, y}.$$



3. MARKOVSKIE VERIGE S PROSTIM ZAČETNIM STANJEM

3.1. Osnovni pojmi

Definicija: Časovno homogeno markovsko verigo v diskretnem času in na števni množici stanj s prostim začetnim stanjem sestavlja:

- števna množica S - množica stanj;
- merljiv prostor (Ω, \mathcal{F}) ;
- na tem merljivem prostoru verjetnostne mere $P_x; x \in S$;
- $\mathcal{F}/2^S$ merljive preslikave $X_0, X_1, \dots : \Omega \rightarrow S$
- prehodne verjetnosti $p_{x,y}; x, y \in S$, pri čemer zahtevamo $p_{x,y} \geq 0$ za vse $x, y \in S$ in $\sum_{y \in S} p_{x,y} = 1$ za vse $x \in S$.
- slučajne spremenljivke X_0, X_1, \dots pri vsaki od verjetnostnih mer P_x tvorijo markovsko verigo na S s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}; x, y \in S$, njena začetna porazdelitev pa je določena s $P_x(X_0=x) = 1$.

Opozka 3.1: Iz opazke 2.2 sledi, da za vsako stošasticno matriko $P \in [0, 1]^{S \times S}$ obstaja markovska veriga s prostim začetnim stanjem in prehodno matriko P (X_0, X_1, \dots definiramo na kanoničnem merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}) := (S^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{G}^{\otimes \mathbb{N}_0})$ produktna σ -algebra).

Iz opazke 2.1 pa sledi, da je porazdelitev procesa X_0, X_1, \dots pri P_x natančno določena z x in prehodno matriko P .

Primer [kockarjev bankrot/propad]:

Kockar ima na začetku premoženje velikosti $a \in \mathbb{N}$, želi pa imati premoženje $b > a$. Dokler ima premoženje $k \in \{1, \dots, b-1\}$, stavi eno enoto. Ž verjetnostjo p pridobi, \geq verjetnostjo $1-p$ pa izgubi eno enoto. Kolikšna je verjetnost, da dobi željeno premoženje b ?

To modeliramo z markovsko verigo na $S := \{0, 1, \dots, b\}$,
ki jo definirajo prehodne verjetnosti:
absorbiращe stanje

$$p_{0,0} = 1, p_{b,b} = 1$$

20. oktober 2025

$$p_{k,k+1} = p, \quad p_{k,k-1} = 1-p \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, b-1$$

$$T_b := \min \{k \in \mathbb{N}_0 \mid X_n = k\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

$$w_a := P_a(T_b < \infty) = ? \quad w_0 = 0, \quad w_b = 1$$

$$a = 1, \dots, 2, \dots, b-1:$$

$$w_a = P_a(X_1 = a+1) P_a(T_b < \infty \mid X_1 = a+1) + P_a(X_1 = a-1) P_a(T_b < \infty, X_1 = a-1)$$

$$\cancel{P_a(X_0 = a, X_1 = a+1)} = \underbrace{P(X_0 = a)}_1 \cdot \underbrace{P_{a,a+1}}_p$$

$$w_a = p P_a(\cancel{X_0 = b} \text{ ali } X_1 = b \text{ ali } X_2 = b \text{ ali } \dots \mid X_1 = a+1) \\ + (1-p) P_a(\cancel{X_0 = b} \text{ ali } X_1 = b \text{ ali } \dots \mid X_1 = a-1)$$

Po trditvi 2.4. je pogojno na dogodek $\{X_1 = a+1\}$ ali na dogodek $\{X_1 = a-1\}$, proces X_1, X_2, \dots spet markovska veriga z istimi prehodnimi verjetnostmi in začetno porazdelitvijo skoncentrirano $a+1$ ozziroma $a-1$.

To pa je tudi proces X_0, X_1, X_2, \dots pri verjetnostni meri P_{a+1} oz P_{a-1} .

Iz enoličnosti (opazka 2.1) pa sledi, da se pogojna porazdelitev procesa X_1, X_2, \dots glede na $\{X_1=a+1\}$ oz. $\{X_1=a-1\}$ (pri P_a) ujema z brezpogojno porazdelitvijo procesa X_0, X_1, \dots pri P_{a+1} oz. P_{a-1} .

$$\begin{aligned} w_a &= p \cdot P_{a+1}(X_0=b \text{ ali } X_1=b, \dots) + (1-p) P_{a-1}(X_0=b \text{ ali } X_1=b \text{ ali } \dots) \\ &= p P_{a+1}(T_b < \infty) + (1-p) P_{a-1}(T_b < \infty) \\ &= p w_{a+1} + (1-p) w_{a-1} \end{aligned}$$

Zvezca je očitna, vendar je v ozadju veliko teorije. To je lahko vprašanje na ustnem izpitu.

V izogib računanja, se umejimo na $p = 1/2$.

$$w_0 = 1, \quad w_b = 1, \quad w_a = \frac{1}{2} (w_{a+1} - w_{a-1}) \quad \text{za } a=1, \dots, b-1$$

$$w_{a+1} - w_a = w_a - w_{a-1}$$

w_0, w_1, w_2, \dots je torej aritmetično zaporedje $\Rightarrow w_a = \frac{a}{b}$

Na vujah: izračun za splošni p .

Podobno za verjetnost bankrata $r_a := P_a(T_0 < \infty)$ dobimo $r_0 = 1, r_b = 0, r_{a+1} - r_a = r_a - r_{a-1}$. Sledi $r_a = \frac{b-a}{b}$.

Opazimo, da je $r_a + w_a = 1$.

$$P_a(T_0 < \infty) + P_a(T_b < \infty) = 1$$

Vemo še, da je $P_a(T_0 < \infty \text{ in } T_b < \infty) = 0$. Sledi $P_a(T_0 < \infty \text{ ali } T_b < \infty) = 1$.

$\Pi(X) \equiv \Pi(\{X\})$, zloruba notacije, naredimo identifikacijo
 $\Pi \equiv [\Pi(s_1), \Pi(s_2), \dots, \Pi(s_m)]$

Iz markovske verige s prostim začetnim stanjem in verjetnostne mere Π na S dobimo slučajni proces

$X_0, X_1, \dots \in \mathcal{X}$, če privzememo verjetnostno mero:

$$P_\pi(A) := \sum_{x \in S} \pi(x) P_x(A).$$

DV: to je spet verjetnostna mera (zamenjuva vrstnega reda seštevanja).

Porazdelitev tega procesa pri P_π je enolično določena s π in prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$, saj je porazdelitev procesa pri P_x določena že z x in prehodnimi verjetnostmi (opazka 3.1).

Lema 3.2: Naj bodo verjetnostne mere P_x in P_π podane tako kot zgoraj. Če sta A in B dogodka, $g \geq 0$ in $P_x(A) = g \cdot P_x(B)$ za vse $x \in S$, je tudi $P_\pi(A) = g \cdot P_\pi(B)$.

Dokaz: $P_\pi(A) = \sum_{x \in S} \pi(x) P_x(A) = \sum_{x \in S} \pi(x) g P_x(B) = g \sum_{x \in S} \pi(x) P_x(B) = g P_\pi(B)$. □

Posledica 3.3: Pod zgornjimi pogoji je X_0, X_1, \dots pri P_π prav tako markovska veriga, in sicer s fiksno začetno porazdelitvijo π in istimi prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$.

Dokaz: $P_x(X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_{n+1}=x_{n+1}) = P_x(X_0=x_0, \dots, X_n=x_n) \cdot p_{x_n, x_{n+1}}$
 \hookrightarrow lahko zamenjemo s π (lema 3.2) □

Primer: vreme

pretežno jasno		1	2	3	
pretežno oblačno		0.7	0.2	0.1	\uparrow
dež		0.2	0.6	0.2	\uparrow
		0.2	0.3	0.5	

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] P \\ [0 \ 1 \ 0] P \\ [0 \ 0 \ 1] P \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.29 & 0.16 \\ 0.3 & 0.46 & 0.24 \\ 0.3 & 0.37 & 0.33 \end{bmatrix} \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0.475 & 0.332 & 0.193 \\ 0.35 & 0.408 & 0.243 \\ 0.35 & 0.381 & 0.269 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.400586 & 0.371135 & 0.228279 \\ 0.399609 & 0.371626 & 0.228764 \\ 0.399609 & 0.371621 & 0.228770 \end{bmatrix}$$

Opozka 3.4: Robne porazdelitve π_n so pri vsaki meri P_π enolično določene s prehodno matriko - velja $\pi_n = \pi P^n$. Pravimo jim **inducirane porazdelitve**.

Definicija: Porazdelitev π^* je **stacionarna** ali **invariantna** za markovsko verigo s prostim začetnim stanjem, če se z njo ujemajo vse pripadajoče inducirane porazdelitve. Ekvivalentno, če je $\pi^* P = \pi^*$ oziroma, če je π^* levi lastni vektor matrike P za lastno vrednost 1.

Opozka 3.5: Število 1 je lastna vrednost vsake matrike, saj ima desni lastni vektor $1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Primer: $\pi^* = [p_1^*, p_2^*, p_3^*]$
(vreme)

$$\pi^* (P - I) = 0$$

$$P - I = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$p_2^* = \frac{13}{8} p_3^*$$

Imamo sistem treh enačb \rightsquigarrow

$$p_1^* = \frac{7}{4} p_3^*$$

Če želimo, da je π^* verjetnostna mera, mora biti $\pi^* \cdot 1 = 1$.
 $p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \Rightarrow p_3^* = \frac{8}{35}$

$$\pi^* = \left[\begin{array}{ccc} \frac{14}{35} & \frac{13}{35} & \frac{8}{35} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 0.4 & 0.371429 & 0.228571 \end{array} \right]$$

↑ podobno vrsticam matrike P^{10}

Kaže torej, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \left[\begin{array}{ccc} \pi^* & \pi^* & \pi^* \end{array} \right]$ oziroma $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi P^n = \pi^*$

za vsako začetno porazdelitev π .

$$\det(P - I - \lambda I) = \det(P - (\lambda + 1)I)$$

$$= \begin{vmatrix} -0.3 - \lambda & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 - \lambda & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & -0.5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0.2 & 0.1 \\ -\lambda & -0.4 - \lambda & 0.2 \\ -\lambda & 0.3 & -0.5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 1 & -0.4 - \lambda & 0.2 \\ 1 & 0.3 & -0.5 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.6 - \lambda & 0.1 \\ 0 & 0.1 & -0.6 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left[(\lambda + 0.6)^2 - 0.1^2 \right] =$$

$$= -\lambda(\lambda + 0.5)(\lambda + 0.7)$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_1 = -0.5, \lambda_2 = 0.7$$

Lastne vrednosti matrike P : $1, 0.5, 0.3$

Naj bosta v_2 in v_3 leva lastna vektorja za lastni vrednosti $\lambda_2 + 1$ in $\lambda_3 + 1$.

$$V := \text{Lin}(v_2, v_3)$$

Za vsak $v \in V$, je spet $vP \in V$ in velja

$$\|vP\| \leq 0.5 \|v\|$$

Poleg tega pa za vsak $v \in V$ velja $v1 = 0$.

Vemo: $P1 = 1$

$$v_2 1 = v_2 P1 = 0.5 v_2 1 \Rightarrow v_2 1 = 0.$$

Podobno $v_3 1 = 0 \Rightarrow \forall v \in V. v1 = 0$.

Če je π verjetnostna porazdelitev na $S = \{1, 2, 3\}$, obstajata tak $a \in \mathbb{R}$ in tak $v \in V$, da je $\pi = a \cdot \pi^* + v$.

$$\underbrace{\pi}_1 = a \underbrace{\pi^*}_1 + \underbrace{v}_0$$

$$\Rightarrow a = 0, \pi = \pi^* + v$$

$$\begin{aligned} \pi P^n &= \pi^* P^n + v P^n \\ &= \pi^* + v P^n \end{aligned}$$

$$\|v P^n\| \leq 0.5 \cdot \|v\|$$

Torej je $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi P^n = \pi^*$.

Takemu obnašanju pravimo ergodičnost.

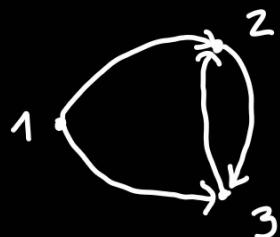
Primer:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P - I = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} p_1^* = 0 \quad \cancel{\frac{1}{4} p_1^* - \frac{1}{4} p_2^* + \frac{1}{2} p_3^* = 0}$$

$$\cancel{\frac{1}{4} p_1^* + \frac{1}{4} p_2^* - \frac{1}{2} p_3^* = 0}$$



$$\Rightarrow p_2^* = 2p_3^* \Rightarrow \pi^* = [0 \ 2/3 \ 1/3]$$

Dejstvo, da je $p_1^* = 0$, je posledica minljivosti stanja 1:

$$\begin{aligned} P_1(T_1^+ = \infty) &= P_1(\min\{n=1,2,3,\dots; X_n=1\} = \infty) \\ &= P_1(X_n \neq 1 \text{ za vse } n=1,2,3,\dots) > 0 \end{aligned}$$

Izrek 3.6: Vsaka markovska veriga na končni množici stanj ima stacionarno porazdelitev. Dokaz po izreku 3.4g.

Vemo: 1 je lastna vrednost prehodne matrike P , torej obstaja levi lastni vektor; obstaja tak π^* , da je $\pi^* P = \pi^*$.

Če je $\pi^* 1 \neq 0$, lahko π^* izberemo tako, da bo $\pi^* 1 = 1$. Ni pa rečeno, da so vse komponente vrstičnega vektora nenegativne! (To želimo dokazati.)

Perron-Frobeniusov izrek: Vsaka matrika z nenegativnimi komponentami ima tako realno lastno vrednost r , da za poljubno lastno vrednost λ velja $|\lambda| \leq r$.

Nadalje za lastno vrednost r obstaja lastni vektor z nenegativnimi komponentami.

Dokaz oprščamo. Zgornje bomo dokazali z verjetnostnimi metodami.

Primer: enostavni slučajni sprehod na $S := \mathbb{Z}$

$$p_{k,k+1} = p_{k,k-1} = 1/2$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi_i^* p_{ij} = \pi_j^*$$

$$\pi_j^* = \frac{1}{2} (\pi_{j+1}^* + \pi_{j-1}^*)$$

Števila π_j^* , $j \in \mathbb{Z}$, torej tvorijo aritmetično zaporedje. Če želimo, da je $\pi_j^* > 0$ za vsa $j \in \mathbb{Z}$, morajo biti vsa števila π_j^* enaka. Nikoli se ne sestujejo v 1.
⇒ Invariantna porazdelitev ne obstaja.

πP pa lahko izračunamo za kateri koli vrstični vektor z vrednostmi v $[0, \infty]$.

"posplošenu"

Matriku P predstavlja operotor na množici pozitivnih mer na S .

$$\pi \mapsto \pi P$$

Vsaki pozitivni meri π lahko privedemo inducirane mere $\pi_n = \pi P^n$. Pozitivna mera π je invariantna, (^{ne upravljujoč} stacionarna)

če je $\pi^* P = \pi^*$.

Enostavni slučajni sprehod ima invariantne mere $\pi^{*(k)} = a$ za vse k , kjer je $a \in [0, \infty]$ fiksen.

Odhad zadnjic:

π : vrsični vektor \equiv (verjetnostna) mera na S

$\pi P =$ porazdelitev sl. sprem. X_1 pri verj. meri P_π

oz. pri $X_0 \sim \pi$ (Opazka 3.4)

$$\delta_x \equiv [0 \dots 0 \underset{x}{\uparrow} 1 0 \dots 0]$$

$\delta_x P =$ porazdelitev slučajne spr. X_1 pri P_x

Kaj pa pomeni P_h ? $P_h = ?$

Opazka 3.7: πh ustreza pričakovani vrednosti $E[h(X)]$, kjer $X \sim \pi$. h preizkusna funkcija

P_h je stolpčni vektor iz $E_x[h(X_1)]$ za vsa možne $x \in S$.

$$\delta_x P_h \equiv E_x[h(X_1)]$$

↑ pričakovana vrednost pri P_x

$$\underbrace{(\delta_x P)}_{X_1} h$$

$$\delta_x(P_h) ?$$

3.2. Krepka lastnost Markova

sledi iz izreka 2.12
in posledice 3.3

Izrek 3.8 [krepka lastnost Markova]:

Naj bo:

- X_0, X_1, \dots markovska veriga na množici S s prostim začetnim stanjem in prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$
- π verjetnostna mera na S
- T čas ustavljanja za X_0, X_1, \dots oz. pripadajočo naravna filtracija $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2, \dots$
- $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T=n\} \cap B_n$, kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$
- p pogojna porazdelitev sl. sprem. X_T glede na B pri P_π (strago gledano, sl. sprem. Y , ki je na dogodku $\{T < \infty\}$ enaka X_T)
in zožena na ...

Pogojno na B je tedaj X_T, X_{T+1}, \dots markovska veriga z začetno porazdelitvijo P in istimi prehodnimi verjetnostmi za poljubno množico $D \subseteq (2^S)^{\mathbb{N}_0}$ velja:

$$P_\pi^B [(X_T, X_{T+1}, \dots) \in D] = P_p [(X_0, X_1, \dots) \in D].$$

Dokaz: sledi iz izreka 2.12 in posledice 3.3. □

$$P(X \in D) \underset{\substack{\text{nehalo} \\ \text{osmuno}}}{\underset{\text{ekvivalentna}}{\approx}} \mathbb{E}[h(X)] \quad \left. \begin{array}{l} \text{raci bi rezulta v} \\ \text{desni objekti} \end{array} \right\} \text{bolj fleksibilna}$$

"Standardna mašinerija:"

$$P(X \in D) = \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(X)], \text{ kjer je } \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(x) = \mathbb{1}(x \in D) = \begin{cases} 1; & x \in D \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Z uporabo linearnosti posplošimo z indikatorjev na enostavne funkcije h :



enostavne \leftrightarrow stopničaste

teorija mere

Z uporabo izreka o monotoni/kombinirani konvergenci posplošimo na želeni razred funkcij h .

Opozka 3.9: Če je $P_{\pi}(A) = \sum_{x \in S} \pi(x) P_{\pi}(A)$, tudi za poljubno omejeno slvčajno spremenljivko Y velja

$$E_{\pi}(Y) = \sum_{x \in S} \pi(x) E_x(Y).$$

Med drugim je: $\pi P h = E_{\pi}[h(X_1)]$.

Izrek 3.10: Pod predpostavkami izreka 3.8 za poljubno omejeno in $(2^S)^{\sigma\text{-algebro}}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljivo funkcijo h velja zvezda:

$$E_{\pi}^B[h(X_T, X_{T+1}, \dots)] = E_P[h(X_0, X_1, \dots)]$$

Dokaz: "Standardna mašinerija" teorije mere.

Opozka 3.11: Če je vselej $T < \infty$, dogodki oblike $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{T=n\} \wedge B_n$, kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$, tvorijo σ -algebri. (DV)

V splošnem pa to velja za dogodke oblike

$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \{T=n\} \wedge B_n$, kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$, za \mathcal{F}_{∞} pa lahko

vzamemo poljubno σ -algebri, ki vsebuje vse \mathcal{F}_n .

[Če je $T=\infty$, ni zupnosti za komplemente v 1. primeru].

Definicija: Za merljiv prostor (Ω, \mathcal{F}) , filtracijo $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na (Ω, \mathcal{F}) in čas ustavljanja T glede na to filtracijo označimo z \mathcal{F}_T σ -algebri dogodkov oblike

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \{T_n=n\} \wedge B_n,$$

kjer je $B_n \in \mathcal{F}_n$ za vsa $n \in \mathbb{N}$, in $B_{\infty} \in \mathcal{F}$.

Opozka 3.12: Če je T konstanten ($T = n < \infty$), se definiciji vjemata.

Irditev 3.13: $\mathcal{F}_T = \left\{ A \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0. A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \right\}$

$$= \left\{ A \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0. A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \right\}$$

Dokaz: Če je $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \{T = n\} \cap B_n$, je

$$A \cap \{T = n\} = B_n \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$$

$$\subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T = n\} \cap B_n$$

Če za vsa $n \in \mathbb{N}_0$ velja $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$, lahko postavimo $B_n := A \cap \{T = n\}$, $B_\infty := A \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$.

$$\subseteq \{T = \infty\}$$

Nadalje je: $A \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \underbrace{(A \cap \{T = k\})}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n}$

$$A \cap \{T = n\} = \underbrace{(A \cap \{T \leq n\})}_{\in \mathcal{F}_n} \setminus \underbrace{(A \cap \{T \leq n-1\})}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n \text{ za } n=1,2,\dots}$$

$$= \emptyset \in \mathcal{F}_n \text{ za } n=0$$

Irditev 3.14: Če je $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ naravna filtracija za slučajni proces X_0, X_1, \dots z vrednostmi v merljivem prostoru (S, \mathcal{G}) in T čas vstavljanja za to filtracijo oz. proces, je slučajna spremenljivka

$$X^* = \begin{cases} X_T; & T < \infty \\ \text{karakteristična spremenljivka merljivega}; & \text{sicer} \end{cases}$$

\mathcal{F}_T / S merljiva.

Dokaz: Za vsak $C \in \mathcal{F}$ moramo dokazati, da je $\{X^* \in C\} = \{w \in \Omega \mid X^*(w) \in C\} = (X^*)^{-1}(C) \in \tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{T})$.

Ekvivalentno, $\{X^* \in C\} \in \tilde{\mathcal{F}}$ in $\{X^* \in C, T=n\} \in \tilde{\mathcal{F}}_n$ za vsi $n \in \mathbb{N}_0$.

Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ je

$$\{X^* \in C, T=n\} = \{X_n \in C, T=n\} \in \tilde{\mathcal{F}}_n \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$$

Nadaljuje je

$$\underbrace{\{X^* \in C, T=\infty\}}_{\in \tilde{\mathcal{F}}} \in \tilde{\mathcal{F}}$$

$$\{X^* \in C\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}} \{X^* \in C, T=n\} \in \tilde{\mathcal{F}}$$



27. oktober 2025

Iz trditve 3.13 sledi

Izrek 3.10: Pod predpostavkami izreka 3.8 za vsako omejeno in $(2^s)^{\mathbb{N}_0}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljivo funkcijo h in vsak $B \in \tilde{\mathcal{F}}_{T_1}$, za katerega je $P(B) > 0$, velja zvezca:

Sprememba
od 3.10

$$\mathbb{E}_{\pi}^B[h(X_T, X_{T+1}, \dots)] = \mathbb{E}_{\rho}^B[h(X_0, X_1, \dots)],$$

kjer je π porazdelitev slvč. sprem. X_T pri P_{π}^B .

Definicija: Za dogodek B s $P(B) > 0$ in slvčajno spremenljivko X z $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ definirajmo:

- $\mathbb{E}^B(X)$:= pričakovana vrednost slvčajne spremenljivke X pri P^B
- $\mathbb{E}(X|B) := \frac{\mathbb{E}[X 1_B]}{P(B)}$

Trditev 3.15: Brš ko je $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, je tvdi $\mathbb{E}^B(|X|) < \infty$ in velja $\mathbb{E}^B(X) = \mathbb{E}(X|B)$.

Dokaz: „Standardna mašinerija“; Naredimo le 1. korak.

$$X = \mathbb{1}_A : \quad \mathbb{E}^B(X) = \mathbb{E}^B(\mathbb{1}_A) = P^B(A) = P(A | B)$$

$$\mathbb{E}(X | B) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)}{P(B)} = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A \cap B})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \cap B)$$

Nadaljevanje: domaća vaja. □

Definicija: Naj bo X $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljiva slučajna spremenljivka z $E(|X|) < \infty$. Za σ -algebra $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ definirajmo $\mathbb{E}(X | \mathcal{H})$ kot $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljivo slučajno spremenljivko Z z lastnostjo, da za vsak dogodek $B \in \mathcal{H}$ velja: $\mathbb{E}[Z \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]$.

Slučajni spremenljivki Z pravimo pogojna pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X glede na \mathcal{H} .

Opazka 3.16: Pogojna pričakovana vrednost Z je le skoraj natančno določena: če sta Z_1 in Z_2 pogojni pričakovani vrednosti slučajne spremenljivke X glede na \mathcal{H} , velja $P(Z_1 = Z_2) = 1$: postavimo $B_1 := Z_1 > Z_2$, $B_2 := Z_2 > Z_1$ (DV).

$\rightarrow Z = \mathbb{E}(X | \mathcal{H})$ je v resnici ekvivalentni razred, gre za zlorabo notacije

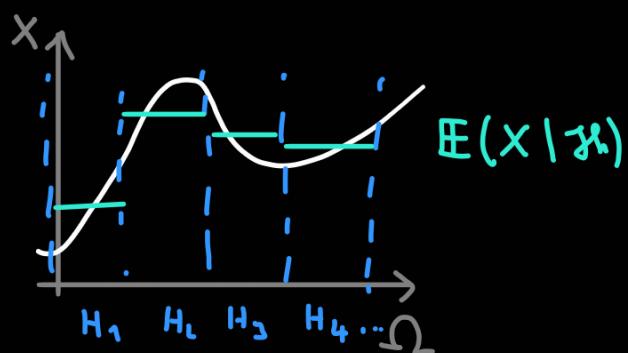
Opazka 3.17: Če je X že $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljiva, $\mathbb{E}(X | \mathcal{H}) = X$.

Trditev 3.18: Če je \mathcal{H} σ -algebra, generirana z števno particijo $(H_k)_{k \in K}$ prostora Ω , tj. družino vseh možnih unij množic H_k , in Z slučajna spremenljivka, velja:

(1) Z je $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljiva $\Leftrightarrow Z$ je na vsakem dogodku H_k konstantna

(2) $Z = \mathbb{E}(X | \mathcal{H}) \Leftrightarrow Z$ je $\mathcal{H}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ merljiva in na vsakem dogodku H_k s $P(H_k) > 0$ enaka $\mathbb{E}(X | H_k)$.

Dokaz: DV.



Posledica 3.1g: Za $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ je $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$.

Izrek 3.20 [različica krepke lastnosti Markova za pogojno pričakovana vrednost]: Pod pogoji izreka 3.8 za vsako omejeno in $(2^s)^{\mathbb{N}_0}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -merljivo funkcijo $h: \mathbb{S}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbb{R}$ na dogodku $\{T < \infty\}$ velja:

$$E_{\pi}[h(X_T, X_{T+1}, \dots) | \mathcal{F}_T] = E_{X_T}[h(X_0, X_1, \dots)].$$

Opomba: Glede na to, da so X_T, X_{T+1}, \dots nedefinirane na $\{T = \infty\}$, bi morali $h(X_T, X_{T+1}, \dots)$ zamenjati s slučajno spremenljivko Y , ki se na dogodku $\{T < \infty\}$ ujema s $h(X_0, X_1, \dots)$.

Opomba: Pri $E_{X_T}[h(X_0, X_1, \dots)]$ gre za dve ločeni manifestaciji slučajnega procesa $\underbrace{X_0, X_1, \dots}_{w \mapsto E_{X_{T(w)}}[h(X_0, X_1, \dots)]}$

$$\begin{aligned} w &\mapsto E_{X_{T(w)}}[h(X_0, X_1, \dots)] \\ &= \int h(X_0(w'), X_1(w'), \dots) dP_{X_{T(w)}}(w') \end{aligned}$$

Nauč: imamo dve Omega.

Podoben primer od prej: $F_X(x) = P(X \leq x)$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1$$

Nauč: pri zbrabi notacije moramo biti previdni

$$w \mapsto F_X(X(w)) = P(\{w' | X(w') \leq X(w)\})$$

Dokaz izreka 3.20: Spomnimo se izreka 3.10':

$$\mathbb{E}_\pi[h(X_T, X_{T+1}, \dots) | B] = \mathbb{E}_\pi[h(X_0, X_1, \dots)].$$

|| $\mathcal{F}_T, B \subseteq \{T < \infty\}$

$$\frac{1}{P_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi \left[h(X_T, X_{T+1}, \dots) \mathbf{1}_B \right]$$

↳ strago gledano: Y od prej

Za poljubno omejeno slvčajno spremenljivko W velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi(W) &\stackrel{3.9}{=} \sum_{x \in S} p(x) \mathbb{E}_x(W) = \sum_{x \in S} P_\pi^B(X_T = x) \mathbb{E}_x(W) \\ &= \mathbb{E}_\pi^B[\mathbb{E}_{X_T}(W)] \\ &\stackrel{3.15}{=} \frac{1}{P_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi[\mathbb{E}_{X_T}(W) \cdot \mathbf{1}_B] \end{aligned}$$

Sledi, da za poljuben $B \in \mathcal{F}_T$ s $P_\pi(B) > 0$ velja:

$$\frac{1}{P_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi[h(X_T, X_{T+1}, \dots) \mathbf{1}_B] = \frac{1}{P_\pi(B)} \mathbb{E}_\pi[\mathbb{E}_{X_T}[h(X_0, X_1, \dots)] \mathbf{1}_B]$$

3.3 Dosegljivost stanj

Popravek terminologije:

Definicija: Čas zadetja vstopa v množico A :

$$T_A := \min \{n=0,1,2,\dots \mid X_n \in A\}$$

Čas zadetja množice A : $T_A^{(1)} := \min \{n=1,2,3,\dots \mid X_n \in A\}$.

Opozka 3.21: Tudi $T_A^{(1)}$ je čas ustavljanja:

$$\{T_A^{(1)} = n\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}.$$

Opozka 3.22: Če je $x \notin A$, je $P_x(T_A^{(1)} = T_A) = 1$.

Definicija: $T_y := T_{\{y\}}, T_y^{(1)} := T_{\{y\}}^{(1)}$

Definicija: Verjetnost dosega stanja y iz stanja x je:

$$P_{x,y} := P_x(T_y^{(1)} < \infty) = P_x(X_1=y \text{ ali } X_2=y \text{ ali } \dots)$$

Stanje y je dosegljivo iz stanja x , če je $P_{x,y} > 0$.

Pišemo $x \rightarrow y$. $x \rightarrow x$ ni nujno res.

Opozka 3.23: Za poljubne dogodke A_1, A_2, \dots velju:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) > 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}. P(A_n) > 0$$

Torej je $x \rightarrow y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}. P_x(X_n=y) > 0$.

Irditev 3.24: Če je $x \rightarrow y$ in $y \rightarrow z$, je tudi $x \rightarrow z$.

Dokaz: Obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da je $P_x(X_m=y) > 0$, in tak $n \in \mathbb{N}$, da je $P_y(X_n=z) > 0$. Po lastnosti Markovcev (izrek 3.8) pa je $P_x(X_{m+n}=z | X_m=y) = P_y(X_n=z)$.
 $\Rightarrow P_x(X_{m+n}=z) \geq P_x(X_n=y, X_{m+n}=z) = P_x(X_m=y)P_y(X_n=z) > 0$. \blacksquare

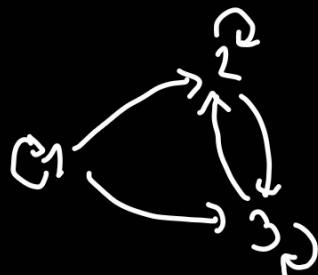
Opomba: $P^m = [P_x(X_m=y)]_{x,y} \quad p^{m+n} = p^m \cdot p^n$

Sledi: $P_x(X_{m+n}=z) = \sum_y P_x(X_m=y) P_y(X_n=z)$

Definicija: Stanje x je minljivo (angl. transient), če je $p_{x,x} < 1$, in povrnljivo (angl. recurrent), če je $\rho_{x,x} = 1$.

Primer:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Stanje 1 je minljivo, saj je $\rho_{1,1} = 1/2$.

Stanji 2 in 3 sta povrnljivi:

$$\left. \begin{array}{l} p_{2,2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} p_{3,2} \\ p_{3,2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_{3,2} \end{array} \Rightarrow p_{3,2} = 1 \right\} \Rightarrow p_{2,2} = 1$$

Podobno za $p_{3,3}$.

Lema 3.25: Naj bo $x \rightarrow y$, tj. $p(x,y) > 0$. Če je $p_{y,x} < 1$, je stanje x minljivo.

$x \rightsquigarrow y$ nikoši x več

Dokaz: BSS $x \neq y$. $\exists m \in \mathbb{N}. P_x(X_m=y) > 0$ in $\forall n < m. P_x(X_n=y) = 0$

$$\begin{aligned} P_x(X_n=x, X_m=y) &= P_x(X_n=x) \cdot P_x(X_m=y | X_n=x) \\ &= P_x(X_n=x) \underbrace{P_x(X_{m-n}=y)}_0 = 0 \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$

$x \rightsquigarrow y$

x
krajšja pot

\Rightarrow Za vsak $n \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ je torej $P_x(X_n=x, X_m=y) = 0$.

3. november 2025

To bi šlo, vendar bomo naredili drugače (dokaz kasneje)
(trditev 3.29)

Trditev 3.26: Neenakost $P_x(X_n=y) > 0$ velja natanko tedaj, ko obstaja takšna veriga stanj $x = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = y$, da je $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$ za vse $k = 1, 2, \dots, n$. Torej je $x \rightarrow z$ natanko tedaj, kadar obstaja takšen n in takšni $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$, da je $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$ za vse $k = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz: $P_x(X_n=y) = \sum_{z_0, \dots, z_{n-1} \in S} p_{z_0, z_1} p_{z_1, z_2} \cdots p_{z_{n-1}, z_n}$, kjer je $z_0 = x$ in $z_n = y$.

Vsota na desni je večja od 0 natanko tedaj, ko obstojajojo takšni z_1, \dots, z_{n-1} da je $p_{z_{k-1}, z_k} > 0$ za vse $k = 1, \dots, n$.

Drugi del sledi iz opazke 3.23:

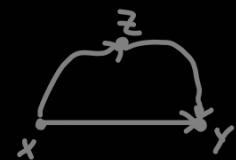
$$x \rightarrow y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}. P_x(X_n=y) > 0$$

$\Updownarrow \text{def}$

$$P_x(\exists n \in \mathbb{N}. X_n > y) > 0$$

□

Trditve 3.27: $\beta_{x,y} = p_{x,y} + \sum_{z: z \neq y} p_{x,z} \beta_{z,y}$.

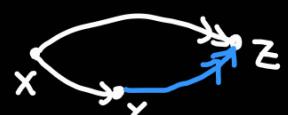


$$\begin{aligned}
 \text{Dokaz: } \beta_{x,y} &= P_x(\{X_1=y\} \cup \{X_2=y\} \cup \dots) \\
 &= P_x(X_1=y) + \sum_{z: z \neq y} P_x(\{X_1=z\} \wedge (\{X_2=y\} \cup \{X_3=y\} \cup \dots)) \\
 &= P_x(X_1=y) + \sum_{\substack{z: z \neq y \\ P_x(X_1=z) > 0}} P_x(\{X_1=z\} \cup \{X_2=y\} \cup \dots | X_1=z) \\
 &= p_{x,y} + \sum_{z: z \neq y} p_{x,z} \beta_{z,y} \quad \square
 \end{aligned}$$

Definicija: Stanje y je skoraj gotovo dosegljivo iz x , če je $\beta_{x,y} = 1$; pišemo $x \xrightarrow{\text{ }} y$.
 \uparrow ni standardna oznaka

Stanje x je torej povrnljivo $\Leftrightarrow x \xrightarrow{\text{ }} x$.

Trditve 3.28: Če je $x \xrightarrow{\text{ }} z$, $y \neq z$ in $p_{x,y} > 0$, je tudi $y \xrightarrow{\text{ }} z$.



Dokaz: Po trditvi 3.27 je

$$\beta_{x,z} = p_{x,z} + \sum_{w: w \neq z} p_{x,w} \beta_{w,z}.$$

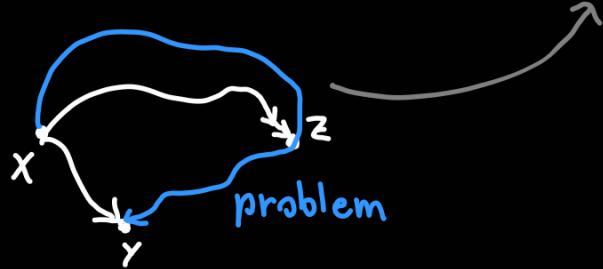
$$1 = p_{x,z} + \sum_{w: w \neq z} p_{x,w}$$

$$\Rightarrow 1 - \beta_{x,z} = \sum_{\substack{w: w \neq z \\ \parallel \\ 0}} p_{x,w} (1 - \beta_{w,z})$$

Torej za vse $w \neq z$ velja $p_{x,w} (1 - \beta_{w,z}) = 0$.

Ker je $p_{x,y} > 0$ in $y \neq z$, mora biti $1 - \beta_{w,z} = 0$, t.j. $\beta_{y,z} = 1$. \square

Trditve 3.29: $x \rightarrow\!\!\! \rightarrow z$, $x \rightarrow y$, $y \neq z \Rightarrow y \rightarrow\!\!\! \rightarrow z$



Trditve 3.29: Če je x povrnljivo in $x \rightarrow y$, je $y \rightarrow\!\!\! \rightarrow x$.

Dokaz: Po trditvi 3.26 obstaja takšna veriga stanj $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$, da je $p_{z_{k-1} z_k} > 0$ za vse $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Privzamemo lahko, da so z_1, z_2, \dots, z_{n-1} vsi različni od x . Iz prejšnje trditve z indukcijo dobimo, da je $z_k \rightarrow\!\!\! \rightarrow x$ za vse $k = 0, 1, \dots, n$. □

$$(z_k \rightarrow\!\!\! \rightarrow x, z_k \rightarrow z_{k+1}, z_{k+1} \neq x \Rightarrow z_{k+1} \rightarrow\!\!\! \rightarrow x)$$



Velja: Trditve 3.29 \Leftrightarrow Lema 3.25, torej smo dokazali lemo 3.25.

Definicija: Za $k = 1, 2, \dots$ rekurzivno definiramo čas k -tega obiska množice $A \subseteq S$ s predpisom:

$$T_A^{(k+1)} := \begin{cases} \min \{n = T_A^{(k)} + 1, T_A^{(k)} + 2, \dots \mid x_n \in A\}; T_A^{(k)} < \infty \\ \infty \quad ; T_A^{(k)} = \infty \end{cases}$$

kjer je $T_A^{(1)}$ že definiran. Število obiskov množice A je:

$$\begin{aligned} N(A) &:= |\{n = 1, 2, 3, \dots \mid x_n \in A\}| \\ &= \max \{k = 1, 2, \dots; T_A^{(k)} < \infty\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_A^{(k)} < \infty\}} \end{aligned}$$

Če je $N(A) = \infty$, dobimo $T_A^{(1)} < T_A^{(2)} < \dots < \infty$, če je $N(A) < \infty$, pa dobimo $T_A^{(1)} < T_A^{(2)} < \dots < T_A^{(N(A))} < \infty = T_A^{(N(A)+1)} = \dots$.

Označimo $T_Y^{(k)} := T_{\{y\}}^{(k)}$ in $N(y) := N(\{y\})$.

Opozka 3.30: $\{T_A^{(k)} < \infty\} = \{N(A) \geq k\}$

Spomnimo se: $P_x(T_Y^{(1)} < \infty) = s_{x,y}$

$$\begin{aligned} P_x(T_Y^{(k+1)} < \infty) &= P_x(T_Y^{(k)} < \infty, T_Y^{(k+1)} < \infty) \\ &= \underbrace{P_x(T_Y^{(1)} < \infty)}_{\text{če je to } > 0} \cdot P_x^{T_Y^{(1)} < \infty}(T_Y^{(k+1)} < \infty) \\ &= s_{x,y} \cdot P_x^{T_Y^{(1)} < \infty} \left(\exists \text{ vsaj } k \text{ časov } n, \text{ za } \begin{array}{l} \text{katere je } X_{T_Y^{(1)}+n} = y \end{array} \right) \\ \left. \begin{array}{l} \text{krepka lastnost Markova} \\ X_{T_Y^{(1)}} = y \end{array} \right\} &\quad = s_{x,y} P_y \left(\exists \text{ vsaj } k \text{ časov } n, \text{ za } \begin{array}{l} \text{katere je } X_n = y \end{array} \right) \\ &= s_{x,y} P_y(T_Y^{(k)} < \infty) \end{aligned}$$

Med drugim je $P_y(T^{(k+1)} < \infty) = s_{y,y} P_y(T^{(k)} < \infty)$, torej z indukcijo dobimo: $P_x(T_Y^{(k+1)} < \infty) = s_{x,y} \cdot s_{y,y}^k$.

Dokazali smo:

Irditev 3.31: $P_x(T_Y^{(k)} < \infty) = P_x(N(y) \geq k) = s_{x,y} \cdot s_{y,y}^{k-1}$ (za $k=1, 2, \dots$).

Opozka 3.32 [razločitev]: Velja $P_x(N(y) = 0) = 1 - s_{x,y}$ in nadalje:

* Če je stanje y minljivo ali $s_{x,y} = 0$, je:

$$\begin{aligned} P_x(N(y) = k) &= P_x(N(y) \geq k) - P_x(N(y) \geq k+1) \\ &= s_{x,y} \cdot s_{y,y}^{k-1} (1 - s_{y,y}); \quad k=1, 2, \dots \\ &\quad (\text{ob dogovoru } 0^0 := 1) \end{aligned}$$

Velja $P_x(N(y) = \infty) = 0$

* Če je stanje y povrnljivo in $\beta_{x,y} > 0$, pa je $P_x(N(y)=k) = 0$ za $k=1,2,3,\dots$; in $P(N(y)=\infty) = \beta_{x,y}$.

Ponovimo:

Za slučajno spremenljivko $N \geq$ vrednostmi v $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ velja:

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}(N>k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}(N \geq k).$$

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N>k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N \geq k)$$

Opozka 3.33: $\mathbb{E}_{\pi}[N(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\pi}(X_n \in A) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P_{\pi}(T_A^{(k)} < \infty)$

Opozka 3.34: $\mathbb{E}_x[N(y)] = \begin{cases} \frac{\beta_{x,y}}{1-\beta_{x,y}} ; & y \text{ minljivo} \\ 0 ; & \beta_{x,y} = 0 \\ \infty ; & y \text{ povrnljivo in } \beta_{x,y} > 0 \end{cases}$

$P_x(T_y^{(k)} < \infty) = \beta_{y,y} \beta_{x,y}^{k-1}$
(geo. vrsta)

Torej je bodisi $\mathbb{E}_x[N(y)] < \infty$ bodisi $P_x(N(y) = \infty) > 0$.

Opozka 3.35: * Če je stanje x minljivo, je:

pravljena geometrijska porazdelitev $P_x(N(x)=k) = \beta_{x,x}^k (1-\beta_{x,x})$; $k=0,1,2,\dots$ $Q^0 = 1$
 $P_x(N(x)=\infty) = 0$

Torej je $N(x)+1 \sim \text{Geom}(\beta_{x,x})$ in $\mathbb{E}_x[N(x)] = \frac{\beta_{x,x}}{1-\beta_{x,x}}$.

* Če je stanje x povrnljivo, pa je: $P_x(N(x)=\infty) = 1$.

10. in 17. november 2025

Definicija: Stanji sta povezani, če velja $x=y$ ali:
 $x \rightarrow y$ in $y \rightarrow x$.

Pišemo: $x \leftrightarrow y$

Opozka 3.36: To je ekvivalenčna relacija.

Definicija: Ekvivalenčnim razredom, ki jih parodi relacija povezanosti, pravimo nerazcepne množice.

Definicija: Markovska veriga je nerazcepna, če je celotna množica stanj nerazcepna.

Opozka 3.37: Za nerazcepni množici A in B so naslednje trditve ekvivalentne:

-) $\exists x \in A. \exists y \in B. x \rightarrow y$
-) $\exists x \in A. \forall y \in B. x \rightarrow y$
-) $\forall x \in A. \exists y \in B. x \rightarrow y$
-) $\forall x \in A. \forall y \in B. x \rightarrow y$

Če te trditve veljajo, pišemo $A \rightarrow B$.

Opozka 3.38: Ta relacija je tranzitivna.

Trditev 3.39: Če je stanje x povrnljivo in $x \rightarrow y$, potem je $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$, y pa je prav tako povrnljivo.

Dokaz: Izjava $y \rightarrow x$ sledi iz trditve 3.29.

Dovolj je dokazati, da je stanje y povrnljivo. Uporabili bomo Opozki 3.33 in 3.34:

$$\mathbb{E}_\pi [N(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} P_\pi (X_n \in A) = \sum_{n=1}^{\infty} P_\pi (T_A^{(n)} < \infty)$$

in

$$\mathbb{E}_x [N(y)] = \begin{cases} \frac{P_{x,y}}{1 - P_{y,y}} ; & y \text{ minljivo} \\ 0 ; & S_{x,y} = 0 \\ \infty ; & y \text{ povrnljivo in } S_{x,y} > 0 \end{cases}$$

Dovolj je torej dokazati, da je $\mathbb{E}_x [N(y)] = \infty$, saj iz tega sledi

povrnljivost y. Vemo

$$\mathbb{E}_x[N(x)] = \sum_{m=1}^{\infty} P_x(X_m=x) = \infty$$

Ker je $x \rightarrow y$, po opazki 3.23 obstaja $k \in \mathbb{N}$, da je $P_x(X_k=y) > 0$. Ta dva podatka nam dala

$$\infty = \sum_{m=1}^{\infty} P_x(X_m=x) \cdot P_x(X_k=y)$$

$$\xrightarrow{\text{Markov}} = \sum_{m=1}^{\infty} P_x(X_m=x) \cdot P_x(X_{m+k}=y \mid X_m=x)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_x(X_m=x, X_{m+k}=y)$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} P_x(X_{m+k}=y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_n=y) = \mathbb{E}_x[N(y)]$$

$\Rightarrow y$ je povrnljivo



Posledica 3.40: V vsaki nerazcepni množici so bodisi vsa stanja minljiva, bodisi vsa stanja povrnljiva.

Definicija: Množica $A \subseteq S$ je **zaprta** (tudi **absorbirajoča**, **terminalna**), če za poljubna $x \in A$ in $y \notin A$ velja $s_{x,y} = 0$.

Opazka 3.41: Če je A zaprta, $x \in A$ in $y \notin A$, ne more biti $x \rightarrow y$. Torej za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $P_x(X_n=y) = 0$, kar pomeni $P_x(X_n \in A) = 1$. Nadalje je $P_x\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X_n \in A\}\right) = 1$.

Torej lahko markovsko verigo zožimo na A.

Definicija: Za nerazcepni množici definiramo relacijo $A \leq B$, če je bodisi $A = B$ bodisi $A \rightarrow B$.

Opozka 3.42: Tako definirana relacija predstavlja delno urejenost, nerazcepna množica pa je zaprta \Leftrightarrow predstavlja maksimalni element.

Opozka 3.43: Če je nerazcepnih množic končno mnogo, je vsaj ena izmed njih zaprta.

Irditev 3.44: Nerazcepne množice, ki niso zaprte, imajo minljivu stanja.

Dokaz: Naj bo A nerazcepna množica, ki ni zaprta. Tedaj obstajata takšna $x \in A$ in $y \notin A$, da je $x \rightarrow y$. Potem pa ne more biti $y \rightarrow x$, zato je po lemi 3.25 stanje x minljivo. Po posledici 3.40 sledi, da so vsa stanja minljiva. \blacksquare

Primer: Asimetrični slvčajni sprehod po \mathbb{Z} :

$$p_{k,k+1} = \Theta \quad \text{in} \quad p_{k,k-1} = 1 - \Theta,$$

kjer je $\Theta \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Izkaže se (vaje), da so vsa stanja minljiva, čeprav je celotna markovska veriga nerazcepna.

Irditev 3.45: V Markovski verigi s končno mnogo stanji je vsaj eno od njih povrnljivo.

Dokaz: Naj bo $x \in S$ in $n \in \mathbb{N}$. Velja $\sum_{y \in S} P_x(X_n=y) = 1$. Torej

$$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{x \in S} \sum_{y \in S}_{\text{končno}}}_{\text{končno}} P_x(X_n=y) = \underbrace{\sum_{x \in S} \sum_{y \in S}}_{\text{končno}} \sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_n=y)$$

Sledi: za neka $x, y \in S$ mora biti $\sum_{n \in \mathbb{N}} P_x(X_n=y) = \infty$, kar pa je ravno: $E_x[N(y)] = \infty$.

\Rightarrow Po opazki 3.34 mora biti stanje y povrnljivo.

Posledica 3.46: Končna nerazcepna množica je zaprta natanko tedaj, ko so njena stanja povrnljiva.

3.4. Konstrukcija invariantnih mer

Inducirane mere: $\mu_n = \mu P^n$ ozziroma $\mu_n(y) = \sum_{x \in S} \mu(x) \cdot P_x(X_n=y)$.

Definicija: Mera μ^* na (S, \mathcal{B}^S) je invariantna za markovsko verigo S prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$; $x, y \in S$, če je:

$$\mu^*(y) = \sum_{x \in S} \mu^*(x) p_{x,y} \text{ za vse } y \in S.$$

Stacionarna ali invariantna porazdelitev je invariantna verjetnostna mera.

Definicija: Za markovsko verigo S prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ in izbrano stanje $x \in S$ definiramo mero μ_x^* po predpisu:

$$\begin{aligned} \mu_x^*(y) &:= \mathbb{E} \left[\underbrace{\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbb{1}(X_n=y)}_{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(X_n=y, n \leq T_x^{(1)})} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_n=y, T_x^{(1)} \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n=y) \end{aligned}$$

Opozka 3.47: Velja $\mu_x^*(x) = \mathbb{P}_{x,x} \cdot 1 + (1 - \mathbb{P}_{x,x}) \cdot 0 = \mathbb{P}_{x,x}$

$$\hookrightarrow \left(\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbb{1}(\dots) \right)(w) = \begin{cases} 1; & \text{vrnemo se v } x \\ 0; & \text{ne vrnemo se v } x \end{cases}$$

Trditve 3.48 [Ciklični trik]: Če je stanje x povrnljivo, velja tudi:

$$\mu_x^*(y) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{T_x^{(1)}-1} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(X_n=y, T_x^{(1)} > n).$$

Dokaz: Pri računanju $\mu_x^*(y)$ opazujemo dogodke oblike

$x \xrightarrow{\text{to upoštevamo v definiciji } \mu_x^*} x$

to upoštevamo pri trditvi

Oglejmo si dogodka $\{X_0=y\}$ in $\{T_x^{(1)} < \infty, X_{T_x^{(1)}}=y\}$. Za $y \neq x$ sta ta dogodka nemogoča, za $y=x$ pa skoraj gotova. \blacksquare

Izrek 3.49: Če je stanje x povrnljivo, je mera μ_x^* invariantna.

Dokaz: Računamo:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S} \mu_x^*(y) p_{y,z} &= \sum_{y \in S} \sum_{n=0}^{\infty} P_x(X_n=y, T_x^{(1)} > n) \cdot p_{y,z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{y \in S} P_x(X_n=y, \underbrace{T_x^{(1)} > n}_{\subseteq \mathcal{F}_n}) p_{y,z} \quad (*) \end{aligned}$$

Če je $P_x(T_x^{(1)} > n) > 0$, je po lastnosti Markova:

$$\begin{aligned} \sum_{y \in S} P_x(X_n=y, T_x^{(1)} > n) p_{y,z} &= \sum_{y \in S} P_x(X_n=y, T_x^{(1)} > n) \cdot P_x(X_{n+1}=z | X_n=y, T_x^{(1)} > n) \\ &= \sum_{y \in S} P_x(X_n=y, T_x^{(1)} > n, X_{n+1}=z) \\ &= P_x(T_x^{(1)} > n, X_{n+1}=z) \end{aligned}$$

Ta enakost velja tudi, če je $P_x(T_k^{(1)} > n) = 0$ (obe struni sta 0).

Vstavimo v (*):

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x(T_x^{(1)} \geq n+1, X_{n+1}=z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_x^{(1)} \geq n, X_n=z) = \mu_x^*(z). \quad \blacksquare$$

Iz tega izreka (3.4g) in trditve 3.45 pa sledi izrek 3.6:

Vsaka markovska veriga na končni množici stanj ima stacionarno porazdelitev.

Opoomba: V temeljiti obstaja levega lastnega vektorja za $\lambda=1$ ni bil problem. Problem je pokazati nenegativnost njegovih komponent.

Opozka 3.50: Če je μ^* invariantna mera, velja:

$$\cdot) \mu^*(X) = \infty, p_{x,y} > 0 \Rightarrow \mu^*(Y) = \infty$$

$$\cdot) \mu^*(X) = 0, p_{x,y} > 0 \Rightarrow \mu^*(Y) = 0$$

- Če je A nerazcepna množica, velja ena od naslednjih možnosti:
- $\forall x \in A. \mu^*(x) = 0$
 - $\forall x \in A. \mu^*(x) = \infty$
 - $\forall x \in A. \mu^*(x) \in (0, \infty)$

Postledica 3.51: Naj bo x povrnljivo in μ_x^* pripadajoča invariantna mera. Če je $x \leftrightarrow y$, je $0 < \mu_x^*(y) < \infty$, sicer pa je $\mu_x^*(y) = 0$.

Opoomba: Če je x ni povrnljivo stanje, konstrukcija še deluje, ampak ne dobimo invariantne mere.

Dokaz: Če je $x \leftrightarrow y$, rezultat sledi iz opozke 3.50. Če ni $x \leftrightarrow y$, po trditvi 3.2g ne more biti $x \rightarrow y$, saj je x povrnljivo. Potem sledi $\mu_x^*(y) = 0$. □

Dokaz izreka 3.6: Po trditvi 3.45 je vsaj eno stanje povrnljivo, naj bo to x. Če je $x \leftrightarrow y$, je $\mu_x^*(y) \in (0, \infty)$, sicer pa je $\mu_x^*(y) = 0$. Ker je S končna, mora biti $0 < \sum_{y \in S} \mu_x^*(y) < \infty$. Potem pa je:

$$\pi^*(z) := \frac{\mu_x^*(y)}{\sum_{y \in S} \mu_x^*(y)}$$

iskana stacionarna porazdelitev. □

$$\begin{aligned}
 \text{Opazka 3.52: } \sum_{y \in S} \mu_x^*(y) &= \sum_{y \in S} \sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_n=y, T_x^{(1)} \geq n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y \in S} P_x(X_n=y, T_x^{(1)} \geq n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_x^{(1)} \geq n) \\
 &= \mathbb{E}[T_x^{(1)}]
 \end{aligned}$$

Definicija: Stanje x je **pozitivno povrnljivo**, če je $\mathbb{E}_x[T_x^{(1)}] < \infty$. Za stanje, ki je povrnljivo $\geq \mathbb{E}_x[T_x^{(1)}] = \infty$, pravimo, da je **ničelno povrnljivo**.

Posledica 3.53: Če je stanje x pozitivno povrnljivo, obstaja stacionarna porazdelitev π^* , za katero je

$$\pi^*(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x^{(1)}]} \quad \text{to pa je totalna masa za } \mu_x^*$$

(iz Opazke 3.47 vemo, da je $\mu_x^*(x) = S_{x,x} = 1$.

3.5. Časovni obrut markovske verige

Naj bo X_0, X_1, \dots markovska veriga s fiksno začetno porazdelitvijo. Klaj lahko rečemo, da je trdi slučajni vektor (X_0, X_1, \dots, X_k) del neke markovske verige?

Najosmornnejša markovska lastnost:

$$P(X_{k+1}=x_{k+1} | X_0=x_0, X_1=x_1, \dots, X_k=x_k) = P(X_{k+1}=x_{k+1} | X_k=x_k) =: p_{x_k, x_{k+1}}^{(k, k+1)}$$

Mi opazujemo le čase $k=0, 1, \dots, n$. Obrnimo čas! Računajmo:

$$P(X_{k-1} | X_k=x_k, \dots, X_n=x_n) = \frac{P(X_{k-1}=x_{k-1}, \dots, X_n=x_n)}{P(X_k=x_k, \dots, X_n=x_n)}$$

$$= \frac{\prod^{(k-1)}(x_{k-1}) \cdot p_{x_{k-1}, x_k}^{(k-1, k)} \cdot p_{x_k, x_{k+1}}^{(k, k+1)} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}^{(n-1, n)}}{\prod^{(k)}(x_k) p_{x_k, x_{k+1}}^{(k, k+1)} \cdots p_{x_{n-1}, x_n}^{(n-1, n)}}$$

$$= \frac{\prod^{(k-1)}(x_{k-1})}{\prod^{(k)}(x_k)} \cdot p_{x_{k-1}, x_k}^{(k-1, k)}$$

vpeljemo robno
porazdelitev

$$\Pi^{(k)}(x) := \hat{P}(X_k = x)$$

Opozka 3.54: Obrat časa ohranja markovsko lastnost v najosmernješem smislu: če jo ima zaporedje X_0, \dots, X_n :

$$\hat{P}(X_{k+1} = x_{k+1} | X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k) = p_{x_k, x_{k+1}}^{(k, k+1)} ; \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

jo ima tudi zaporedje X_n, X_{n-1}, \dots, X_0 :

$$\hat{P}(X_{k-1} = x_{k-1} | X_k = x_k, \dots, X_n = x_n) = p_{x_k, x_{k-1}}^{(k, k-1)}$$

kjer je

$$p_{y,x}^{(k,k-1)} := \frac{\Pi^{(k-1)}(x)}{\Pi^{(k)}(y)} p_{x,y}^{(k-1, k)} ; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Definicija: Markovski verigi z invariantno mero μ^* , za katero je $0 < \mu^*(x) < \infty$ (tj. μ^* je po točkah končna in nikjer ničelna), definiramo prehodne verjetnosti za obrnjen tok časa:

$$\hat{p}_{y,x} := \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} p_{x,y} \quad \left(\begin{array}{l} \text{pomisl na} \\ P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A)} P(B|A) \end{array} \right)$$

Opozka 3.55: To so res prehodne verjetnosti:

$$\sum_{x \in S} \hat{p}_{y,x} = \frac{1}{\mu^*(y)} \sum_{x \in S} \mu^*(x) p_{x,y} \stackrel{\mu^* \text{ invariantna}}{=} \frac{1}{\mu^*(y)} \cdot \mu^*(y) = 1.$$

Opozka 3.56: Če je nikjer ničelna in po točkah končna mera μ^* invariantna za markovsko verigo z določenimi prehodnimi verjetnostmi, je invariantna tudi za markovsko verigo s pripadajočimi časovno obrnjenimi prehodnimi verjetnostmi:

$$\sum_{y \in S} \mu^*(y) \hat{p}_{y,x} = \sum_{y \in S} \cancel{\mu^*(y)} \cdot \frac{\mu^*(x)}{\cancel{\mu^*(y)}} p_{x,y} = \mu^*(x)$$

$\hookrightarrow \mu^*$ invariantna

Opozka 3.57: Časovni obrat prehodnih verjetnosti je sam sebi inverzen:

$$\hat{\hat{p}}_{x,y} = \frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)} \hat{p}_{y,x} = \frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)} \cdot \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} p_{x,y} = p_{x,y}.$$

Opozka 3.58: Če je X_0, X_1, \dots markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ ter nikjer ničelno stacionarno porazdelitvijo Π^* , $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots$ pa markovska veriga s časovno obrnjenimi prehodnimi verjetnostmi $\hat{p}_{y,x}$ pri verjetnostnih merah P_{Π^*} in \hat{P}_{Π^*} , velja:

$$(\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n) \stackrel{\leftarrow \text{enako porazdeljenca}}{\doteq} (X_n, X_{n-1}, \dots, X_1).$$

Definicija: Slučajni proces X_0, X_1, \dots je časovno obrnljiv (angleško reversible), če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) \stackrel{d}{=} (X_0, X_1, \dots, X_n).$$

Opozka 3.59: Časovno obrnljiv proces je nujno stacionaren. Zgornji pogoj nam namreč da: $\forall n \in \mathbb{N}. X_0 \stackrel{d}{=} X_n$.

Opozka 3.60: Markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ in nikjer ničelno stacionarno porazdelitvijo Π^* je pri P_{Π^*} časovno obrnljiva natanko tedaj, ko za poljubna $x, y \in S$ velja:

$$\Pi^*(x) p_{x,y} = \Pi^*(y) p_{y,x}. \quad (\text{izhaja iz } p_{y,x} = \frac{\Pi^*(x)}{\Pi^*(y)} p_{x,y})$$

Intuicija s prekladanjem peska: Med vsakima stanjema x, y velja: Kolikor peska gre iz x v y , gre tudi v drugo smer.
 \hookrightarrow To pojasni ima pojma iz naslednje definicije.

Definicija: Markovska veriga s prehodnimi verjetnostimi $p_{x,y}$ in mera μ na S sta v **točni izravnavi** (angleško: detailed balance), če za poljubna $x, y \in S$ velja $\mu(x)p_{x,y} = \mu(y)p_{y,x}$.

Opozka 3.61: Vsaka mera, ki je z dano markovsko verigo v točni izravnavi, je zanjo tudi invariantna:

$$\sum_{x \in S} \mu(x) p_{x,y} = \sum_{x \in S} \mu(y) p_{y,x} = \mu(y).$$

Primer: Vreme (isto kot do zdaj):

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} \end{bmatrix}$$

Vemo že: $\pi^* = \left[\frac{2}{5} \quad \frac{13}{35} \quad \frac{8}{35} \right]$ je edina stacionarna porazdelitev.

Preverimo, ali je v točki izravnavi:

$$\pi^*(1) \cdot p_{1,2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{25}$$

$$\pi^*(2) \cdot p_{2,1} = \frac{13}{35} \cdot \frac{2}{10} = \frac{13}{175}$$

Ta markovska veriga ni v točni izravnavi s svojo edino stacionarno porazdelitvijo, zato trdi ni v točni izravnavi z nobeno netrivialno mero. □

Primer: Slučajni sprehod po \mathbb{Z} : $S = \mathbb{Z}$, $p_{k,k+1} = \theta$, $p_{k,k-1} = 1 - \theta$. Potem je μ^* v točni izravnavi $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}. \mu^*(k) \cdot \theta = \mu^*(k+1) \cdot (1-\theta)$ oziroma $\mu^*(k+1) = \frac{\theta}{1-\theta} \mu^*(k)$. Torej je: $\mu^*(k) = C \cdot \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^k$; $C \in [0, \infty]$.

To lahko omejimo tudi na končno množico $S_b = \{0, 1, \dots, b\}$:

$$\left. \begin{array}{l} p_{k,k+1} = \theta \text{ za } k=0, 1, \dots, b-1 \\ p_{k,k-1} = 1 - \theta \text{ za } k=1, \dots, b \\ p_{0,0} = 1 - \theta, \quad p_{b,b} = \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{kockarjev} \\ \text{bankrat, kjer} \\ \text{se igra ne konča} \\ \text{v robnih stanjih} \end{array}$$

Mere μ^* , definirane kot zgoraj so še vedno v točni izravnavi.
Porazdelitev v točni izravnavi:

$$\pi^*(k) := \begin{cases} \theta^k(1-\theta)^{n-k} \cdot \frac{1-2\theta}{(1-\theta)^{b+1}-\theta^{b+1}}, & \theta \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{b+1}, & \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta slučajni proces je časovno obrnljiv, čeprav je lahko asimetričen.

Do konca razdelka naj bo X_0, X_1, \dots markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{x,y}$ in invariantno mero μ^* , ki je po točkah končna in nikjer ničelna:

$$\hat{p}_{y,x} := \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} p_{x,y}$$

Prav tako naj bo $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots ; (\hat{P}_x)_{x \in S}$ časovno obrnjena markovska veriga glede na invariantno mero μ^* .

Trditev 3.62: Velja $\hat{x}_0=y$ je že privzeto

$$\hat{P}_y(\hat{X}_n=x, (\hat{X}_{n-1}, \dots, \hat{X}_1) \in D) = \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} P_X((x_1, \dots, x_{n-1}) \in D, x_n=y).$$

Dokaz: Dovolj je preveriti za enojce (S je diskretna):

$D = \{(x_1, \dots, x_n)\}$. Velja:

$$\begin{aligned} \hat{P}_y(X_n=x, (\hat{X}_{n-1}, \dots, \hat{X}_1) \in D) &= \hat{P}_y(X_n=x, \hat{X}_{n-1}=x_1, \dots, \hat{X}_1=x_{n-1}) \\ &= \hat{p}_{y, x_{n-1}} \cdot \hat{p}_{x_{n-1}, x_{n-2}} \cdots \hat{p}_{x_2, x_1} \cdot \hat{p}_{x_1, x} \\ &= \frac{\cancel{\mu^*(x_{n-1})}}{\cancel{\mu^*(y)}} p_{x_{n-1}, y} \cancel{\frac{\mu^*(x_{n-2})}{\mu^*(x_{n-1})}} p_{x_{n-2}, x_{n-1}} \cdots \cancel{\frac{\mu^*(x_1)}{\mu^*(x_2)}} p_{x_1, x} \\ &= \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} p_{x, x_1} p_{x_1, x_2} \cdots p_{x_{n-1}, y} \\ &= \frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} P_X(\underbrace{x_1=x_1, \dots, x_{n-1}=x_{n-1}}_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D}, x_n=y) \end{aligned}$$



Posledica 3.63: $x \rightarrow y \vee X_0, X_1, \dots; (\mathbb{P}_z)_{z \in S} \Leftrightarrow y \rightarrow x \vee \hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots; (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z \in S}$

Dokaz: $x \rightarrow y \vee X_0, X_1, \dots; (\mathbb{P}_z)_{z \in S}$

$$\exists n \in \mathbb{N}_0. \mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$$

$y \rightarrow x \vee \hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots; (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z \in S}$

$$\exists n \in \mathbb{N}_0. \hat{\mathbb{P}}_y(\hat{X}_n = x) > 0$$

$$\frac{\mu^*(x)}{\mu^*(y)} \mathbb{P}_x(X_n = y)$$

□

Posledica 3.64: Obrat časa ohrani minljivost in povrnljivost.

Dokaz: $x \rightarrow\rightarrow x \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}_x(X_1 \neq x, X_2 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = x)}_{\hat{\mathbb{P}}_x(\hat{X}_1 \neq x, \hat{X}_2 \neq x, \dots, \hat{X}_{n-1} \neq x, \hat{X}_n = x)} = 1$

$$\Leftrightarrow x \rightarrow\rightarrow (\hat{\mathbb{P}}_z)_{z \in S}$$

□

3.6. Sorazmernost invariantnih mer

$$\begin{aligned} \text{Spomnimo se: } \mu_x^*(y) &:= \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbb{1}(X_n = y) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}_x(X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = y)}_{T_x^{(1)} \geq n} \end{aligned}$$

$$\mu_x^*(x) = \rho_{x,x}$$

Lema 3.65: Če je μ^* invariantna mera nerazcepne markovske verige in $\mu^*(x) = 1$, je $\mu^*(y) \geq \mu_x(y)$ za vse $y \in S$. Če so stanja verige povrnljiva, pa velja $\mu^*(y) = \mu_x^*(y)$ za vse $y \in S$.

Dokaz: Izrazimo $\mu_x^*(y)$ z verjetnostmi v markovski verigi $\hat{X}_0, \hat{X}_1, \dots; (\hat{P}_z)_{z \in S}$, ki pripada obratu časa glede na μ^* . Ta je možen, ker po opazki 3.50 za vse $x \in S$ velja $0 < \mu^*(y) < \infty$, saj je $x \leftrightarrow y$.

$$\begin{aligned} \mu_x^*(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = y) \\ &= \frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}_y(\hat{X}_1 \neq x, \hat{X}_2 \neq x, \dots, \hat{X}_{n-1} \neq x, \hat{X}_n = x) \\ &\quad \text{parama disjunktni dogodki} \\ &= \mu^*(y) \cdot \hat{P}_y(T_x^{(n)} < \infty) \end{aligned}$$

Sledi $\mu_x^*(y) \leq \mu^*(y)$. Če pa ima markovska veriga povrnljiva stanja, jih ima po posledici 3.64 tudi v obrnjenem času. Po posledici 3.63 pa je veriga tudi v obrnjenem času nerazcepna. Po trditvi 3.39 mora biti tedaj tudi $\hat{P}_y(T_x^{(n)} < \infty) = 1$ in sledi $\mu_x^*(y) = \mu^*(y)$. □

Posledica 3.66: Invariantne mere nerazcepne markovske verige s povrnljivimi stanji so si v premem sorazmerju: brž ko sta μ^* in γ^* invariantni meri, za kateri $\exists x \in S. 0 < \mu^*(x) < \infty$ in $\exists y \in S. 0 < \mu^*(y) < \infty$ ($\Leftrightarrow \forall x \in S. 0 < \mu^*(x), \mu^*(x) < \infty$), obstaja tak c, da je $\gamma^*(y) = c \mu^*(y)$ za vse $y \in S$.

Dokaz: Izberimo $x \in S$. Za vse $y \in S$ velja

$$\frac{\mu^*(y)}{\mu^*(x)} = \mu_x^*(y) = \frac{\gamma^*(y)}{\gamma^*(x)}, \quad \gamma^*(y) = \frac{\gamma^*(x)}{\mu^*(x)} \cdot \mu^*(y)$$
□

Trditve 3.67: Naj bo μ^* invariantna mera markovske verige, $S' \subseteq S$ ter $\forall x \in S$. $\mu^*(x) > 0$ in $\sum_{x \in S'} \mu^*(x) < \infty$. Tedaj je S' zaprta.

$$\text{Dokaz: } \sum_{y \in S'} \mu^*(y) = \sum_{y \in S'} \sum_{x \in S} \mu^*(x) p_{x,y}$$

Popravek po
posledici 3.70

V nadaljevanju uporabimo
popravljeno verzijo.

$$= - \sum_{x \in S'} \mu^*(x) \sum_{y \in S} p_{x,y}$$

$$= - \sum_{x \in S'} \mu^*(x) \left(1 - \sum_{y \in S \setminus S'} p_{x,y} \right)$$

$$= - \sum_{x \in S'} \mu^*(x) - \sum_{x \in S'} \sum_{y \in S \setminus S'} \mu^*(x) p_{x,y}$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in S'} \sum_{y \in S \setminus S'} \mu^*(x) p_{x,y} = 0 \Rightarrow \forall x \in S'. \forall y \in S \setminus S'. \mu^*(x) p_{x,y} = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in S'. \forall y \in S \setminus S'. p_{x,y} = 0$$

Trditve 3.68: Stanje x poljubne markovske verige je pozitivno povrnljivo natanko tedaj, ko obstaja takšna invariantna porazdelitev π^* , da je $\pi^*(x) > 0$.

Dokaz: (\Rightarrow): Sledi že iz posledice 3.53 (spomnimo, da smo π^* skonstruirali tako, da je $\pi^*(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})}$).

(\Leftarrow): Uporabili bomo opazko 3.52, po kateri je

$$\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \sum_{y \in S} \mu_x^*(y).$$

To vsoto pa bomo ocenili s pomočjo leme 3.65. Toda ta lema predpostavlja nerazcepnost. Naj bo torej S_x nerazcepna množica, ki ji pripada stanje x . Po opazki 3.50 za vsak $y \in S_x$ velja $\pi^*(y) > 0$. Po trditvi 3.67 je množica S_x zaprta, torej kakšno markovsko verigo zožimo nanjo. Zožena markovska veriga je nerazcepna, $\pi_x^* := \pi^*|_{S_x}$ pa je njen invariantna mera.

Po lemi 3.65 je $\mu_x^*(y) \leq \frac{\pi_x^*(y)}{\pi_x^*(x)}$ za vse $y \in S_x$. Sledi

$$\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \sum_{y \in S_x} \mu_x^*(y) \leq \frac{1}{\pi_x^*(x)} \sum_{y \in S_x} \pi_x^*(y) < \infty.$$



Izrek 3.69: V nerazcepni markovski verigi so naslednje izjave ekvivalentne:

- (1) Vsaj eno stanje je pozitivno povrnljivo.
- (2) Vsa stanja so pozitivno povrnljiva.
- (3) Obstaja stacionarna porazdelitev.
- (4) Vsa stanja so pozitivno povrnljiva in $\pi^*(x) := \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})}$ je edina stacionarna porazdelitev.

Dokaz: Očitno $(4) \Rightarrow (3)$ in $(4) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$.

Dokazali smo že $(1) \Rightarrow (3)$ (izrek 3.49).

$(1) \Leftarrow (2)$

$\Downarrow \dots \Rightarrow \Uparrow$

$(3) \Leftarrow (4)$

$(3) \Rightarrow (2)$: Naj bo π^* stacionarna porazdelitev in $x \in S$.

Velja $\sum_{y \in S} \pi^*(y) = 1$, obstaja tak $y \in S$, da je $\pi^*(y) > 0$. Potem po opazki 3.50 velja tudi $\pi^*(x) > 0$. Iz trditve 3.67 dobimo, da je x pozitivno obrnljivo.

$(2) \Rightarrow (4)$: Po posledici 3.53 za vsak $x \in S$ obstaja stacionarna porazdelitev π_x^* , za katero je $\pi_x^*(x) = 1/\mathbb{E}(T_x^{(1)})$. Po posledici 3.66 pa je stacionarna enolično določena. Za edino stacionarno π^* in vse $x \in S$ mora torej veljati

$$\pi^*(x) = \pi_x^*(x) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x^{(1)})}.$$



Posledica 3.70: V markovski verigi s končno množico stanj povrnljivost pomeni tudi pozitivno povrnljivost. Če je torej markovska veriga s končno množico stanj nerazcepna, so vsa njena stanja pozitivno povrnljiva.

Dokaz: Če je stanje x povrnljivo, je μ_x^* po opazki 3.47 in izreku 3.49 invariantna mera z $\mu_x^*(x) = 1$. Torej je

$$\pi_x^*(y) := \frac{\mu_x^*(y)}{\sum_{z \in S} \mu_x^*(z)}$$

stacionarna porazdelitev s $\pi^*(x) > 0$. Po trditvi 3.47 je stanje x pozitivno povrnljivo. Če je veriga nerazcepna, pa iz obstoja stacionarne sledi pozitivna povrnljivost vseh stanj. \blacksquare

1. december 2025

Popravek: (zadnjič narobe formulirano in dokazano)

Trditvev 3.67: Naj bo μ^* invariantna mera markovske verige $S' \subseteq S$ takšna ^{irreducibilna} nerazcepna množica, da je $\mu^*(x) > 0$ za vse $x \in S'$ in naj bo $\sum_{x \in S'} \mu^*(x) < \infty$. Tedaj je S' zaprta.

Dokaz: $S'' := \{x \in X \mid \exists y \in S'. x \rightarrow y\}$

Dokazati moramo, da iz S' ni prehoda v $S \setminus S'$.

* Iz $S \setminus S''$ v S' ni prehoda: če bi bilo $z \in S \setminus S'', x \in S''$ in $p_{x,z} > 0$, bi $\exists y \in S'. x \rightarrow y$. Po tranzitivnosti bi bil tedaj tudi $z \rightarrow y$, torej $z \in S''$. \times

* Iz $S' \setminus S''$ v S' ni prehoda: če bi imeli $y \in S', x \in S'' \setminus S'$ in $p_{y,x} > 0$, bi po definiciji imeli tudi $x \rightarrow y$, torej $x \leftarrow y$, potem pa bi moralo, ker je S' nerazcepna množica, biti tudi $x \in S'$. \times

* Preostane dokazati:

$$x \in S', y \in S \setminus S' \Rightarrow p_{x,y} = 0$$

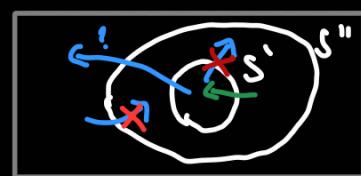
Ideja: Ker iz $S \setminus S''$ v S'' ni pretoka in ima S'' končno konstantno maso, tudi iz S'' v $S \setminus S''$ ne more biti pretoka

invariantnost

$$\sum_{y \in S''} \mu^*(y) \stackrel{?}{=} \sum_{y \in S''} \sum_{x \in S} \mu^*(x) p_{x,y}$$

(iz $S \setminus S''$ v S'' ni pretoka)

$$= \sum_{y \in S''} \sum_{x \in S} \mu^*(x) p_{x,y}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{x \in S} \mu^*(x) \sum_{y \in S} p_{x,y} \\
 &= \sum_{x \in S} \mu^*(x) \left(1 - \sum_{y \in S} p_{x,y}\right) \\
 &= \sum_{x \in S} \mu^*(x) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in S} \mu^*(x) p_{x,y} \\
 \Rightarrow \sum_{x \in S} \sum_{y \in S} \mu^*(x) p_{x,y} &= 0 \Rightarrow \forall x \in S, \forall y \in S, \mu^*(x) p_{x,y} = 0 \\
 \Rightarrow \forall x \in S, \forall y \in S, p_{x,y} &= 0
 \end{aligned}$$



3.7. Zakon velikih števil

Definicija: Zaporedje slvčajnih spremenljivk Y_1, Y_2, \dots skoraj gotovo konvergira proti slvčajni spremenljivki Y , če velja $P(\{w \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(w) = Y(w)\}) = 1$. Pišemo $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} Y$. ang. a.s.

Izrek 3.71 [klasični krepki zakon velikih števil]:

Če so Y_1, Y_2, \dots neodvisne in enako porazdeljene realne slvčajne spremenljivke z $\mathbb{E}(|Y_1|) < \infty$, gre

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} \mathbb{E}(Y_1).$$

Dokaz opuščamo (eleganten dokaz z martingali).

Izrek 3.72: Naj bo X_0, X_1, \dots i $(P_x)_{x \in S}$ nerazcepna markovska veriga s stacionarno porazdelitvijo π^* (\Leftrightarrow njene stanje so pozitivno povrnljiva). Vzemimo funkcijo $h: S \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $\sum_{x \in S} |h(x)| \pi^*(x) < \infty$. Tedaj za poljubno verjetnostno mero π na Σ pri meri P_π velja:

$$\frac{h(X_0) + \dots + h(X_{n-1})}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} \sum_{x \in S} h(x) \pi^*(x).$$

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^* h & \parallel & h: \boxed{1}
 \end{array}$$

Opozka 3.73: Velja $\sum_{x \in S} h(x) \pi^* = \mathbb{E}[h(Y)]$, kjer je $Y \sim \pi^*$.

Opozka 3.74: Če je π^* verjetnostna mera na S in X_0, X_1, \dots ; $(P_x)_{x \in S}$ markovska veriga s prehodnimi verjetnostmi $p_{xy} = \pi^*(y)$. so X_0, X_1, X_2, \dots pri vseh merah P_x (in tudi pri vseh merah P_π , kjer je P_π še ena verjetnostna mera na S) neodvisne slvčajne spremenljivke, vse slvčajne spremenljivke X_1, X_2, \dots pa imajo porazdelitev π^* , ki je stacionarna porazdelitev te verige. Brž ko je $\pi^*(x) > 0$ za vse $x \in S$, je veriga nerazcepna. Naj bo $h: S \rightarrow \mathbb{R}$ in $\sum_{x \in S} |h(x)| \pi^*(x) < \infty$.

Izrek 3.71: Pri verjetnostni meri P_{π^} gre

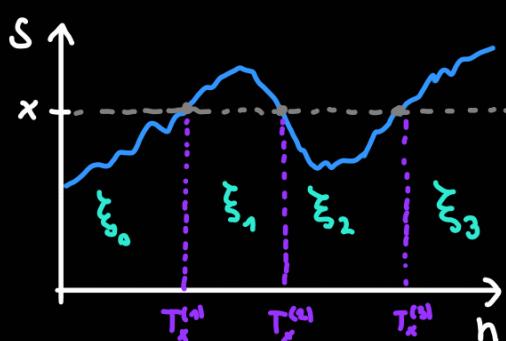
$$\frac{h(X_0) + h(X_1) + \dots + h(X_{n-1})}{n} \xrightarrow{\quad} \pi h;$$

to v resnici velja tudi pri vseh P_π .

Izrek 3.72: Brž, ko je $\pi^(x) > 0$ za vse x , potem pri poljubni P_π velja

$$\frac{h(X_0) + h(X_1) + \dots + h(X_{n-1})}{n} \xrightarrow{\quad} \pi h.$$

Prvi dokaz izreka 3.72:



Izberemo $x \in S$.

ξ_0, \dots ekskurzije

$$L_0 = T_x^{(1)}$$

$$L_k = T_x^{(k+1)} - T_x^{(k)} \quad k=1, 2, \dots$$

$L_k = T_x^{(k+1)} - T_x^{(k)}$... dolžina k -te ekskurzije

$$\xi_0 := (L_0; X_0, X_1, \dots, X_{T_x^{(1)}-1})$$

$$\xi_k := (L_k; X_{T_x^{(k)}}, X_{T_x^{(k+1)}}, \dots, X_{T_x^{(k+1)}-1}); k=1, 2, \dots$$

Trditev 3.75: Pri poljubni verjetnostni meri P_π so ekskurzije $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ neodvisne, ξ_1, ξ_2, \dots pa imajo enako porazdelitev kot ξ_0 pri verjetnostni meri P_x .

Dokuz: Dovolj bo dokazati, da se pogojna porazdelitev ekskurzije ξ_k glede na $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ pri P_π vjemca s porazdelitvijo ekskurzije ξ_0 pri P_x . To sledi iz krepke lastnosti Markova (DV). \blacksquare

Naj bo $h = \mathbb{1}_{\{x\}}$: $\pi^* h = \pi^*(x)$.

$$\begin{aligned}
 h(X_0) + h(X_1) + \dots + h(X_{n-1}) &= \sum_{i=0}^{n-1} 1\!\!1(X_i = x) \\
 &= \text{število obiskov stanja } x \\
 &\quad \text{v korakih } 0, 1, \dots, n-1 \\
 &=: V(n)
 \end{aligned}$$

Trditev 3.76: $\frac{V(n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} \pi^*(x)$.

Dokaz: Spomnimo se, da je stanje x pozitivno povrnljivo.

Za $k=1,2,3,\dots$ je torej $\mathbb{E}_\pi(L_k) = \mathbb{E}_x(L_0) = \mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) < \infty$.

Po klasičnem krepkem zakonu velikih števil je torej:

$$\frac{L_1 + L_2 + \dots + L_m}{m} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} \mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \frac{1}{\pi^*(x)}.$$

Ker je število obiskov stanja x skoraj gotovo neskončno, gre tudi $V(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.s.}} \infty$.

$$A_n := \begin{cases} \frac{1}{V(n)} \sum_{k=1}^{V(n)-1} L_k & ; V(n) > 0 \\ 1 & ; V(n) = 0 \end{cases} \quad \tilde{A}_n := \begin{cases} \frac{1}{V(n)} \sum_{k=0}^{V(n)-1} L_k & ; V(n) > 0 \\ 1 & ; V(n) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Velj u } A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} \frac{1}{\pi^*(x)}, \quad \tilde{A}_n = A_n + \frac{L_{V(n)} - L_0}{V(n)} \xrightarrow[0]{} \Rightarrow \tilde{A}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} \frac{1}{\pi^*(x)}$$

$$\text{Velja } \sum_{k=0}^{V(n)-1} L_k \leq n \leq \sum_{k=0}^{V(n)} L_k.$$

$$V(n) \cdot \tilde{A}_n \quad L_0 + V(n) \cdot A_n$$

Ilustración:

$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$

Above line: \downarrow Below line: \downarrow

Brackets: $L_0 = 2$ $L_1 = 3$

$$\begin{aligned}n=5: V(n) &= 1 \\L_0 = 2 \leq 5 \leq 2+3 &= L_0 + L_1 \\n=6: V(n) &= 2 \\2+3 < 5 &\leq 2+3 = L_2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Pi^*(x) \xleftarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} \frac{V(n)}{L_0 + V(n)A_n} \leq \frac{V(n)}{n} \leq \frac{1}{\tilde{A}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} \Pi^*(x)$$

Dokaz izreka 3.72: $C_0 := \sum_{n=0}^{T_x^{(1)}-1} h(X_n)$, $C_k := \sum_{n=T_x^{(k)}}^{T_x^{(k+1)}-1} h(X_n)$ cena ekskurzije

Velja $C_k = \sum_{n=T_x^{(k)}}^{T_x^{(k+1)}-1} \sum_{y \in S} h(y) \mathbb{1}(X_n=y) = \sum_{y \in S} h(y) \sum_{n=T_x^{(k)}}^{T_x^{(k+1)}-1} \mathbb{1}(X_n=y)$

$$\mathbb{E}(C_k) = \sum_{y \in S} h(y) \mathbb{E}\left[\sum_{n=T_x^{(k)}}^{T_x^{(k+1)}-1} \mathbb{1}(X_n=y)\right]$$

počititev 3.75
 $\stackrel{\downarrow}{=} \sum_{y \in S} h(y) \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T_x^{(1)}-1} \mathbb{1}(X_n=y)\right]$

$$= \sum_{y \in S} h(y) \mu_x^*(y) = \sum_{y \in S} h(y) \frac{\pi^*(y)}{\pi^*(x)} = \frac{\pi^* h}{\pi^*(x)}$$

Po klasičnem KZVS gre $\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_m}{m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} \frac{\pi^*(h)}{\pi^*(x)}$.

Omejimo: $\sum_{k=0}^{V(n)-1} C_k \leq \sum_{i=0}^{n-1} h(X_i) \leq \sum_{k=0}^{V(n)} C_k$

$$A_n := \begin{cases} \frac{1}{V(n)} \sum_{k=0}^{V(n)} C_k & ; V(n) > 0 \\ 1 & ; V(n) = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{A}_n := \begin{cases} \frac{1}{V(n)} \sum_{k=0}^{V(n)-1} C_k & ; V(n) > 0 \\ 1 & ; V(n) = 0 \end{cases}$$

Velja $A_n, \tilde{A}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.g.}} \frac{\pi^* h}{\pi^*(x)}$.

$$\frac{V(n)}{n} \tilde{A}_n \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} h(X_i) \leq \frac{C_0}{n} + \frac{V(n)}{n} A_n$$



$$\cancel{\pi^*(x) \frac{\pi^* h}{\pi^*(x)}}$$



$$0 + \cancel{\pi^*(x) \frac{\pi^* h}{\pi^*(x)}}$$



8. december 2025