Ramseyeva teorija

Jan Pantner (jan.pantner@gmail.com)

16. oktober 2024

1 Ramseyeva števila

Naloga 1.1. Dokažite, da med poljubnimi šestimi ljudmi vedno obstajajo trije, ki se med seboj poznajo, ali trije, ki se med seboj ne poznajo.

Izrek: Ramsey

Za poljubni naravni števili r in s obstaja najmanjše takšno naravno število $n = R(r, s)$, da velja naslednje: Če povezave polnega grafa K_n pobarvamo z dvema barvama, zagotovo obstaja poln podgraf moči r, v katerem so vse povezave prve barve ali pa poln podgraf moči s, v katerem so vse povezave druge barve.

Naloga 1.2. Določite $R(3, 3)$ in $R(3, 4)$.

Naloga 1.3. Dokažite, da velja $R(3, 3, 3) \leq 17$.

Trditev

Naj bo $k \geq 2$ celo število. Tedaj velja

$$R(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k\text{-krat}}) \leq \lfloor ek! \rfloor + 1.$$

Naloga 1.4. Elemente množice $\{1, 2, \dots, 1978\}$ pobarvamo s šestimi barvami. Dokažite, da obstajajo števila $x, y, z \in \{1, 2, \dots, 1978\}$, ki so iste barve in za njih velja $x + y = z$.

Izrek: Schur

Dokažite, da za vsako naravno število k obstaja naravno število n, da za vsako k-barvanje elementov množice $\{1, 2, \dots, n\}$ obstajajo števila x, y, z iz $\{1, 2, \dots, n\}$ iste barve z lastnostjo $x + y = z$.

Dodatne naloge

Naloga 1.5. Povezave grafa K_n pobarvamo z dvema barvama. Dokažite, da dobimo vsaj

$$\binom{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{2} \left\lfloor \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \right\rfloor \right\rfloor$$

monokromatičnih trikotnikov.

Naloga 1.6. Dokažite, da za vsako naravno število m obstaja takšno naravno število n, da vsako zaporedje n realnih števil vsebuje monotono podzaporedje dolžine m.

Naloga 1.7. Dokažite Schurov izrek.

Naloga 1.8. Naj bo m naravno število. Dokažite, da ima za dovolj velik n vsaka 0/1 matrika velikosti $n \times n$ glavno podmatriko velikosti m, pri kateri so vsi elementi nad diagonalo enaki in vsi elementi pod diagonalo enaki. *Glavna podmatrika* je podmatrika, ki jo določa k vrstic in k istoležečih stolpcev.

2 Grafovska Ramseyeva števila

Definicija

Naj bodo $G_1, \ldots, G_k$ enostavni grafi. *Grafovsko Ramseyevo število* $R(G_1, G_2, \ldots, G_k)$ je najmanjše naravno število n, za katerega velja, da vsako barvanje s k barvami povezav K_n vsebuje G_i barve i za nek i.

Naloga 2.1. Določite $R(P_4, P_4)$ in $R(P_4, C_4)$.

Naloga 2.2. Naj bo T drevo na m vozliščih. Dokažite, da je $R(T, K_n) = (m-1)(n-1)+1$.

Dodatne naloge

Naloga 2.3. Določite $R(P_n, P_3)$ in $R(P_n, P_4)$.

Naloga 2.4. Naj bodo povezave grafa K_5 pobarvane z rdečo in modro barvo tako, da ni nobenega monokromatičnega trikotnika. Dokažite, da povezave rdeče barve sestavljajo cikel dolžine 5 in povezave modre barve sestavljajo cikel dolžine 5.

Naloga 2.5. Dokažite, da je $R(2K_3, K_3) = 8$.

3 Posplošitev Ramseyevega izreka

Izrek: Ramsey

Naj bo $r \geq 1$ in $a_1, a_2 \geq r$. Tedaj obstaja najmanjše naravno število $N(a_1, a_2; r)$, tako da velja naslednje: Če v množici S moči $n \geq N(a_1, a_2; r)$ vse r-podmnožice pobarvamo z barvo 1 ali 2, potem obstaja takšna a_1-podmnožica, da so vse njene r-podmnožice barve 1, ali pa obstaja takšna a_2-podmnožica, da so vse njene r-podmnožice barve 2.

Naloga 3.1. Dokažite, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tako število $N(n)$, da velja: Če imamo v ravnini $N \geq N(n)$ točk v splošni legi, potem med njimi obstaja n točk, ki določajo konveksen n-kotnik.