Teorija mere

Predavatelj: Marko Kandić

1. oktober 2025

Teorija mere $\approx$ realna analiza
($\approx$: ta predmet)

1. MERE

1.1. σ-algebre

Naj bo X neprazna množica. Družina podmnožic $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je σ-algebra, če velja:

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Če namesto iii) zahtevamo iii'):

iii') $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$,

potem je $\mathcal{A}$ algebra.

Če je $\mathcal{A}$ σ-algebra, potem je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor.
Elementi $\mathcal{A}$ so merljive množice.

Opomba: i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Vsaka σ-algebra je algebra.

iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{cc} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$$

Primeri: i) X, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ ← trivialna σ-algebra

$(X, \mathcal{A})$ je trivialni merljiv prostor

ii) $(X, \mathcal{P}(X))$, $\mathcal{P}(X)$ potenčna σ-algebra

iii) X, $\mathcal{A} = \{E \subseteq X \mid E \text{ števna ali } E^c \text{ števna}\}$

povezana s topologijo končnih komplementov

Če je X neštevna, je $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$.

Trditev: Naj bo B družina podmnožic množice X. Tedaj obstaja najmanjša σ-algebra na X, ki vsebuje B. Ta je enaka preseku vseh σ-algeber, ki B vsebujejo.

Oznaka: σ-algebro iz trditve označimo z $\sigma(B)$.

Dokaz: $\mathcal{C} := \{\text{vse } \sigma\text{-algebre, ki vsebujejo } B\}$

$$\mathcal{P}(X) \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \neq \emptyset$$

Presek vseh σ-alg iz $\mathcal{C}$ je σ-algebra. (očitno)
Po definiciji mora biti najmanjša.

Borelove množice

(X, τ) topološki prostor
$\sigma(\tau)$ je Borelova σ-algebra; σ-algebra generirana z vsemi odprtimi množicami

Ker je $A = (A^c)^c$, je $\sigma(\tau)$ generirana z zaprtimi množicami. Namesto $\sigma(\tau)$ pišemo $\mathcal{B}(X)$ ali $\mathcal{B}_X$.

$A \in \mathcal{B}(X)$ je

- F_σ množica, če je števna unija zaprtih množic
- G_δ množica, če je števen presek odprtih množic

Primer:
$$[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - \tfrac{1}{n}]$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \tfrac{1}{n}, b)$$

Trditev: $A \in \mathbb{R}^n$

i) A zaprta $\Rightarrow$ A je G_σ

ii) A odprta $\Rightarrow$ A je F_σ

Brez dokaza. Enostaven.

Trditev: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je generirana s katerokoli od spodnjih družin generatorjev:

i) $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) \mid a < b\}$

ii) $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] \mid a < b\}$

iii) $\mathcal{E}_3 = \{[a,b) \mid a < b\}$

iv) $\mathcal{E}_4 = \{(a,b] \mid a < b\}$

v) $\mathcal{E}_5 = \{(a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$

vi) $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty,b) \mid b \in \mathbb{R}\}$

vii) $\mathcal{E}_7 = \{[a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$

viii) $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R}\}$

Dokaz: i) $\mathcal{E}_1 \subseteq \tau \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ker je neka odprta mn. števna unija odprtih odprtih int., je $\tau \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \underset{\mathcal{B}(\mathbb{R})}{\underset{\parallel}{\sigma(\tau)}} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$

ii) Ker je vsak (a,b) št. unija zaprtih int oblike $[a,b)$, je $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.2. Pozitivne mere

7. oktober 2025

Definicija: Pozitivna mera (ali zaenkrat samo mera) je preslikava $\mu : \mathcal{A} : [0, \infty]$, ki ima naslednje lastnosti

σ-algebra

zaprt interval

razširitev realne osi z največjim elementom

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A_1, A_2, \ldots$ paroma disjunktne iz $\mathcal{A}$, potem je

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_n)$$

ii) se imenuje števna ali σ-aditivnost.

$(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor z mero oz. merljiv prostor oz. prostor z mero

Če vzamemo $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots$, potem dobimo končno aditivnost

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Primeri:

i) $X \neq \emptyset$, $x \in X$ $\quad (X, \mathcal{P}(X)|$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

μ je mera, označimo jo z δ_x ... Diracova mera

ii) $X \neq \emptyset$; $(X, \mathcal{P}(X))$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|; & |A| < \infty \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$

mera štetja točk

iii) Naj bo X neštevna in

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ števna ali } A^c \text{ števna}\}$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ števna} \\ 1; & A^c \text{ steven} \end{cases}$$ je mera.

Dokaz na vajah.

iv) X neskončna mn.

$$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

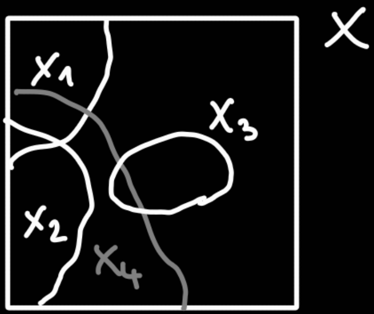
$$\mu(A) = \begin{cases} 0; & A \text{ števna} \\ \infty; & \text{sicer} \end{cases}$$

ni števno aditivna, je končno aditivna.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: Mera μ je **končna**, če je $\mu(X) < \infty$.

Mera μ je **σ-končna**, če

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n \quad \text{in} \quad \mu(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



V definiciji σ-končnosti lahko ekvivalentno zahtevamo

i) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so paroma disj., z unijo X

ii) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je naraščajoče z unijo X

UPORABNO

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spl. $\rightsquigarrow X_1,\ X_1 \cup X_2,\ X_1 \cup X_2 \cup X_3, \ldots$

iz splošnega zaporedja dobimo naraščajoče zaporedje

$\rightsquigarrow X_1,\ X_2 \setminus X_1,\ X_3 \setminus (X_2 \cup X_1), \ldots$

št. unija paroma disjunktnih

Lema: Naj bo $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ končno aditivna funkcija na algebri $\mathcal{A}$. Tedaj velja:

$$A, B \in \mathcal{A} \text{ in } A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$ MONOTONOST

Dokaz: $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A) \qquad \blacksquare$$

Trditev: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Tedaj za $\forall$ zap. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: $B_1 := A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$
Tedaj so $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne iz $\mathcal{A}$.

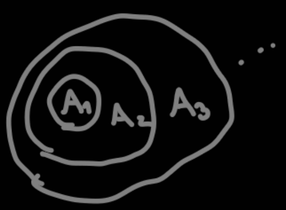
$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} B_j \quad \text{in} \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad \blacksquare$$

Trditev: Naj bo $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ končno aditivna funkcija, kjer je $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Tedaj je μ mera $\Leftrightarrow$ $\forall$ naraščajoče zaporedje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih množic velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz: $(\Rightarrow)$: Naj bo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče zaporedje v $\mathcal{A}$.



$B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1$, $B_3 := A_3 \setminus A_2, \dots$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(B_n)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \dots + \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \right)$$

$$\forall j.\ \mu(A_j) < \infty \quad = \lim_{k\to\infty} \left(\mu(A_1) + (\mu(A_2) - \mu(A_1)) + \dots + (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})) \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

Če je $\mu(A_j) = \infty$, potem je $\mu(A_k) = \infty$ $\forall k \geq j$ in zaradi monotonosti mere velja enačaj v trditvi.

($\Leftarrow$): Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje paroma disjunktnih množic v $\mathcal{A}$.

$B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ Tedaj je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče v $\mathcal{A}$.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad \blacksquare$$

<u>Trditev</u>: Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero in $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče zaporedje mn. v $\mathcal{A}$. Če je $\mu(A_1) < \infty$, potem

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

<u>Dokaz</u>: Ker $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajoče je $(A_1 \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c) = A_1 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right) \overset{\text{prejšnja trditev}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n)$$

$\mu(A_1) < \infty$

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad \qquad \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n))$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad \blacksquare$$

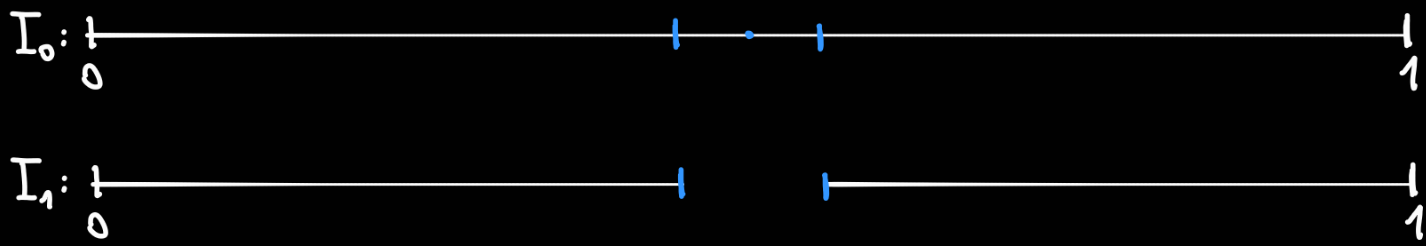
Primer: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, μ šteje točke

$$A_n = \{n, n+1, \dots\}, \qquad \mu(A_n) = \infty$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

Ta primer pokaže, da prejšnja trditev ne velja nujno, če je $\mu(A_1) = \infty$.

Primer: Oglejmo si konstrukcijo posplošene Cantorjeve množice.



I_1: Izrežemo α_1-ti delež okoli $1/2$ za $0 < \alpha_1 < 1$.
I_2 dobimo tako, da od vsakega intervala iz I_1 izrežemo centralni interval deleža α_2 za $0 < \alpha_2 < 1$.

Postopek nadaljujemo. Dobimo množico I_n, ki je unija 2^n intervalov intervalov iste dolžine. Za $0 < \alpha_{n+1} < 1$ iz vsakega od teh intervalov izrežemo centralni interval deleža α_{n+1}. Če $1/3 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots$ dobimo Cantorjevo množico. Sicer v preseku $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ dobimo posplošeno Cantorjevo množico.

Zaenkrat predpostavimo obstoj Lebesgueove mere, ki se na intervalih ujema z njihovo dolžino.

$$m(I_0) = 1$$
$$m(I_1) = m(I_0) - m(I_0)\alpha = m(I_0)(1-\alpha_1) = 1-\alpha_1$$
$$m(I_2) = m(I_1)(1-\alpha_2) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$$
$$m(I_3) = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)$$
$$\vdots$$
$$m(I_n) = \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)$$

Po prejšnji trditvi je

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(I_n) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k)$$

V primeru Cantorjeve množice je $1/3 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots$, zato je $m(C) = \prod_{k=1}^{\infty} 2/3 = 0$.

Izrek: Posplošena Cantorjeva množica je metrizabilen kompakten nikjer gost povsem nepovezan prostor brez izoliranih točk z mero $\prod_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_k)$. To je lahko $>1-\varepsilon$, ampak nikjer gosto!

Trditev: Posplošena Cantorjeva množica ima pozitivno mero $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ konvergira.

8. oktober 2025

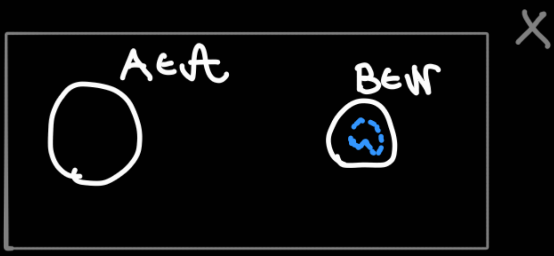
1.3. Napolnitev prostora z mero

Definicija: $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor z mero. $A\in\mathcal{A}$ je *μ-ničelna*, če je $\mu(A)=0$.

Označimo $\mathcal{N} = \{A\in\mathcal{A} \mid \mu(A)=0\}$.

Lema: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}$

Dokaz: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$



Definicija: $(X,\mathcal{A},\mu)$ je poln, če $\forall N\in\mathcal{N}$ in $B\subseteq N$ sledi $B\in\mathcal{A}$.

Izrek: Naj bo $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor z mero. Naj bo

$$\bar{\mathcal{A}} := \{A\cup S \mid A\in\mathcal{A},\ \exists N\in\mathcal{N}.\ S\subseteq N\}.$$

Tedaj je $\bar{\mathcal{A}}$ σ-algebra, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Če za $A\cup S\in\bar{\mathcal{A}}$ definiramo $\bar{\mu}(A\cup S) := \mu(A)$ potem je $(X,\bar{\mathcal{A}},\bar{\mu})$ poln merljiv prostor.

Dokaz: $\mathcal{A}\subseteq\bar{\mathcal{A}}$

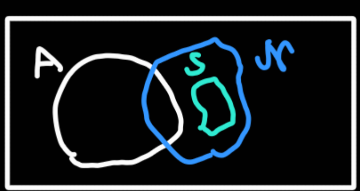
$A\in\mathcal{A} \Rightarrow A = A\cup\emptyset$

$\bar{\mathcal{A}}$ je σ-algebra

i) $X\in\bar{\mathcal{A}}$, ker $X = X\cup\emptyset$

ii) $A\cup S\in\bar{\mathcal{A}} \Rightarrow (A\cup S)^c \in \bar{\mathcal{A}}$

$\exists N\in\mathcal{N}.\ S\subseteq N$



$$(A\cup S)^c = A^c\cap S^c = A^c\cap(N^c\cup N\setminus S)$$
$$= \underbrace{(A^c\cap N^c)}_{\in\mathcal{A}} \cup \underbrace{(A^c\cap N\setminus S)}_{\subseteq N\in\mathcal{N}}$$

iii) $A_n \cup S_n \in \bar{\mathcal{A}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) \in \bar{\mathcal{A}}$

$\forall n \in \mathbb{N}.\ N_n \in \mathcal{N}.\ S_n \subseteq N_n$

$\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}$

$\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \longrightarrow [0, \infty]$ je dobro definirana pozitivna mera

$E \in \bar{\mathcal{A}}; \quad E = A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2$

$S_1 \subseteq N_1 \in \mathcal{N}, \quad S_2 \subseteq N_2 \in \mathcal{N}$

$\implies \bar{\mu}(A_1) = \bar{\mu}(A_2)$

$A_1 \subseteq A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2 \subseteq A_2 \cup N_2$

$\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup N_2) \leq \mu(A_2) + \mu(N_2) = \mu(A_2)$

Podobno $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$.

$\bar{\mu}$ je mera:

- $\bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

Naj bo $(A_n \cup S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disj. zap. mn. v $\bar{\mathcal{A}}$

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n)\right) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_n\right)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n \cup S_n)$$

$(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ je poln

$\bar{\mu}(N) = 0, \quad S \subseteq N \implies S \in \bar{\mathcal{A}}$

$N = A \cup \tilde{S}; \quad A \in \bar{\mathcal{A}}, \quad \tilde{S} \subseteq \tilde{N} \in \mathcal{N}$

Po definiciji je $\bar{\mu}(N) = 0$
$\quad\quad \overset{\shortparallel}{\mu(A)} \Rightarrow A \in \mathcal{N}$

$S = \emptyset \cup S$; $\quad S \subseteq N \subseteq A \cup \tilde{N} \in \mathcal{N}$ $\blacksquare$

<u>Primer</u>: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Izkaže se $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}|$. (Brez dokaza.)

Če je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ polna, potem so vse podmnožice Cantorjeve množice merljive. Ker $|C| = |\mathbb{R}|$, bi bilo $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}}$ $\times$

Torej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ ni poln prostor.

Napolnitev je Lebesgueova σ-algebra.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathbb{R}} \\ \text{Ker } \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{ je } |\mathcal{L}(\mathbb{R})| \leq 2^{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathcal{L}(\mathbb{R})| = 2^{\mathbb{R}}$$

Imamo $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

prava vsebovanost?

<u>Primer</u>: Pokazali bomo, da na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ pod privzetkom aksioma izbire ne obstaja translacijsko invariantna mera.

μ je translacijsko invariantna, če za $\forall A$ velja $\mu(A+x) = \mu(A)$. $A + x := \{a + x \mid a \in A\}$.

Na $\mathbb{R}$ vpeljemo relacijo $\sim$: $\quad x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ razpade na ekvivalenčne razrede $\boxed{\text{14. oktober 2025}}$

$\mathbb{R}/_\sim$ kvocientni prostor

Skonstruirali bomo tako množico, ki bo preprečila obstoj translacijsko inv. mere na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Sledilo bo, da obstaja Lebesgueovo nemerljiva mn.

$\forall x \in [-1,1]$ izberemo predstavnika ekv. razreda $[x]$, ki leži v $[-1,1]$. Tukaj uporabimo aksiom izbire. Naj bo S množica vseh ravnokar izbranih predstavnikov. Velja $S \subseteq [-1,1]$.

Def. $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q} \cap [-2,2]$.

Def. $\mathcal{F} = \{r + S \mid r \in \mathbb{Q}_1\}$ ← števna množica

Velja: i) $(r+S) \cap (r'+S) = \emptyset$ za $r \neq r'$

$$r+s = r'+s' \Rightarrow s'-s = r-r' \in \mathbb{Q} \Rightarrow s' \sim s \quad \times$$

ii) $[-1,1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r+S)$

$x \in [-1,1]$. $\exists s \in S \subseteq [-1,1]$, da je $x \sim s$

$q := x - s \in \mathbb{Q}$

$|q| \leq |x| + |s| \leq 2 \quad \Rightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (r+s)$

Velja $[-1,1] \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1} (r+S) \subseteq [-3,3]$.

Če bi obstajala transl. inv. mera na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ki se na intervalih ujema z dolžino, potem bi veljalo

$$2 \leq \mu\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}_1}(r+S)\Big) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(r+S) = \sum_{r \in \mathbb{Q}_1} \mu(S) \leq 6 \quad \times$$

Kasneje bomo skonstruirali Leb. mero, ki je definirana na Leb. σ-algebri. Ta je zaprta za translacijo, Leb. mera pa je transl. invariantna. Zato S ni Leb. merljiva.

1.4. Zunanja mera

Zunanja mera na množici X je funkcija $\xi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, za katero velja:

vedno def. na $\mathcal{P}(X)$

i) $\xi(\emptyset) = 0$

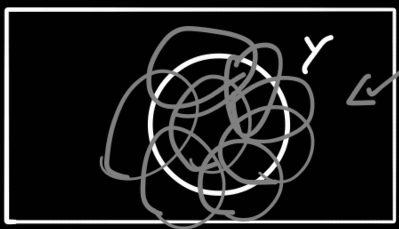
ii) $\xi(A) \leq \xi(B) \quad \forall A \subseteq B$

iii) $\xi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n)$ $\qquad \xi(A \cup (B \setminus A)) \leq$

Trditev: Naj bo S družina podmnožic neprazne množice X, ki vsebuje $\emptyset$ in X. Naj bo $\mu : S \longrightarrow [0,\infty]$ funkcija za katero velja $\mu(\emptyset)$. Definiramo $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ s predpisom

$$\mu^*(Y) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \;\middle|\; (A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq S \text{ pokritje za } X \right\}.$$

Tedaj je μ^* zunanja mera.



pokritje z množicami iz S

Dokaz: i) $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

ii) $A \subseteq B$. neko pokritje za B je pokritje za A

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

iii) Neenakost drži, če je $\mu^*(A_n) = \infty$ za nek $n \in \mathbb{N}$.
Predpostavimo, da je $\mu^*(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\varepsilon > 0$. Za $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ pokritje $(A_{n_j})_j$ za A_n, da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{n_j}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$$

$\Rightarrow (A_{n_j})_{n,j\in\mathbb{N}}$ je pokritje za $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

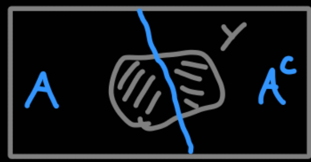
$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{n_j}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* + \varepsilon$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, dobimo števno subaditivnost. $\boxed{/\!/\!/}$

<u>Definicija</u>: Naj bo ξ zunanja mera na $\mathcal{P}(X)$. Množica $A \subseteq X$ je **zunanje merljiva** oziroma **ξ-merljiva**, če je

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c)$$



za vsak $Y \subseteq X$.

Da preverimo $\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(X \cap A^c)$, moramo preveriti $\leq$ in $\geq$. $\leq$ sledi iz (iii) def. zunanje mere. Zato zadostuje preveriti:

$$\xi(Y) \geq \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^c). \qquad (*)$$

Če $\xi(Y) = \infty$, potem $(*)$ velja, sicer moramo preveriti.

<u>Carathéodoryjev izrek</u>: Naj bo ξ zunanja mera na X. Tedaj je

$$\mathcal{A}_\xi = \{A \subseteq X \mid A \text{ je } \xi\text{-merljiva}\}$$

σ-algebra, trojica $(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$ pa je poln merljiv prostor.

<u>Dokaz</u>: <u>$\mathcal{A}_\xi$ je σ-algebra</u>

i) $Y \subseteq X \Rightarrow \xi(Y) \overset{?}{=} \xi(Y \cap \emptyset) + \xi(Y \cap \emptyset^c) = 0 + \xi(Y).$

$\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_\xi$

ii) $\xi(Y) = \xi(Y \cap A^c) + \xi(\underbrace{Y \cap A^{cc}}_{Y \cap A}) \Rightarrow A \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\xi$

Najprej bomo dokazali, da je $\mathcal{A}_\xi$ zaprta za končne unije, torej algebra, zaprtost za števne unije pa bomo dokazali hkrati s števno aditivnostjo $\xi|_{\mathcal{A}_\xi}$ za števne disjunktne družine množic.

$A, B \in \mathcal{A}_\xi \overset{?}{\Rightarrow} A \cup B \in \mathcal{A}_\xi$

$\xi((A \cup B) \cap Y) + \xi((A \cup B)^c \cap Y) = \xi((A \cup B \setminus A) \cap Y) + \xi((A \cup B \setminus A)^c \cap Y)$

$$= \xi(A\cap Y \cup B\cap A^c\cap Y) + \xi(A^c\cap B^c\cap Y)$$
$$\le \xi(A\cap Y) + \xi(B\cap \underline{A^c\cap Y}) + \xi(B^c \cap \underline{A^c\cap Y})$$
$$\underset{B\in \mathcal{A}_\xi}{=} \xi(A\cap Y) + \xi(A^c\cap Y) \underset{A\in \mathcal{A}_\xi}{=} \xi(Y).$$

$\Rightarrow \mathcal{A}_\xi$ je algebra.

Naj bodo $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_\xi \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi$

$$A_1 = A_1,\quad A_1\cup A_2 = A_1 \cup (A_2\setminus A_1)$$
$$A_1\cup A_2\cup A_3 = A_1\cup (A_2\setminus A_1)\cup (A_3\setminus (A_1\cup A_2))$$

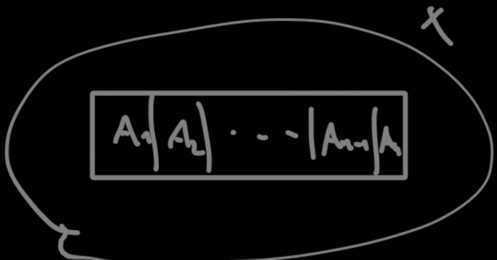
Dokazali bomo, da je $\mathcal{A}_\xi$ zaprta za števne disjunktne unije in ker je $\mathcal{A}_\xi$ algebra, bo sledilo, da je $\mathcal{A}_\xi$ σ-algebra.

Naj bodo $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktne mn. iz $\mathcal{A}_\xi$.

$$B := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_\xi \quad \text{in} \quad \xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$$B_n := \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}_\xi$$

$$Y\subseteq X \Rightarrow \xi(Y\cap B_n) = \xi(Y\cap B_n\cap A_n) + \xi(Y\cap B_n\cap A_n^c)$$



$$= \xi(Y\cap A_n) + \xi(Y\cap B_{n-1})$$
$$= \cdots = \sum_{j=1}^{n} \xi(Y\cap A_j)$$

$$Y = B_n \Rightarrow \xi(B_n) = \sum_{j=1}^{n} \xi(A_j)$$

$\Rightarrow \xi$ je končno aditivna na $\mathcal{A}_\xi$

$$\xi(B) \geq \xi(B_n) = \sum_{j=1}^{n} \xi(A_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$\Rightarrow \xi(B) \geq \sum_{j=1}^{n} \xi(A_j)$ Ker ξ števno subaditivna, je

$$\xi(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(A_j)$$

$B \in \mathcal{A}_\xi$

$$\begin{aligned}
\xi(Y) &= \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c) \\
&\geq \xi(Y \cap B_n) + \xi(Y \cap B_n^c) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \xi(Y \cap A_j) + \xi(Y \cap B^c) \\
&\geq \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c).
\end{aligned}$$

Ker je ξ št. subaditivna je $\xi(Y) = \xi(Y \cap B) + \xi(Y \cap B^c)$.

$\Rightarrow B \in \mathcal{A}_\xi$.

$(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$ je poln merljiv prostor

$M \in \mathcal{A}_\xi$ in $\xi(M) = 0$, $N \subseteq M$

$Y \subseteq X$. $\qquad \underbrace{\xi(Y \cap N)}_{0} + \xi(Y \cap N^c) = \xi(Y \cap N^c) \underset{\text{monotonost}}{\leq} \xi(Y)$

$$\xi(Y) \underset{\text{subaditivnost}}{\leq} \xi(Y \cap N) + \xi(Y \cup N^c)$$

$\blacksquare$

1.5. Mere na algebri:

Mera na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je preslikava $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, za katero velja:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A_1, A_2, \ldots$ paroma disj. v $\mathcal{A}$ in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, potem

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Izrek: Naj bo μ mera na algebri $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Za $Y \subseteq X$ definiramo zunanjo mero

$$\mu^*(Y) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ je pokritje za } Y \right\}.$$

Tedaj je $\mu^*(A) = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Dokaz: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \cdots = \mu(A)$$

$\mu(A) \leq \mu^*(A)$:

Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pokritje za A z množicami iz $\mathcal{A}$.

$B_1 = A \cap A_1$, $B_2 = A \cap (A_2 \setminus A_1)$, $B_3 = A \cap (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2))$, ...

$B_i \cap B_j \neq \emptyset$ za $i \neq j$ in

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j = \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cap A \qquad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A$$

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

To velja za vsako pokritje $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$, zato tudi v infinimumu dobimo isti neenačaj $\mu(A) \leq \mu^*(A)$.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$

15. oktober 2025

$A \in \mathcal{A}$ in $Y \subseteq X$. Da je $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ moramo preveriti, da je $\mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) \overset{=}{\underset{(*)}{}} \mu^*(Y)$ $\forall Y \subseteq X.\ \mu^*(Y) < \infty$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Po definiciji zunanje mere obstaja tako pokritje $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ za Y, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Y) + \varepsilon.$$

Po definiciji zunanje mere velja

$$\mu^*(A \cap Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \text{ in } \mu^*(A^c \cap Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n).$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mu^*(A \cap Y) + \mu^*(A^c \cap Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(A \cap A_n) + \mu(A^c \cap A_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu((A \cap A_n) \cup (A^c \cap A_n)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^* + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pošljimo $\varepsilon \to 0$ in dobimo $(*)$. ▨

<u>Nekaj oznak</u>: $\mathcal{A}$ je algebra, μ_0 je mera na algebri, $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, $\mu := \mu_0^*|_{\mathcal{A}_{\mu_0^*}}$.

σ-algebra

<u>Izrek</u>: Naj bodo $\mathcal{A}, \mu_0, \mu_0^*, \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ in μ kot zgoraj.

i) Naj bo ν mera na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, ki razširja μ_0. Tedaj velja $\nu(A) \leq \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$.

ii) Če je $\mu(A) < \infty$, potem je $\nu(A) = \mu(A)$ za vsako razširitev mere μ_0.

iii) Če je μ_0 σ-končna mera na algebri, potem je μ enolično določena razširitev mere μ_0 do mere na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$.

<u>Dokaz</u>: i) Naj bo ν mera na $\mathcal{A}_{\mu_0^*}$, ki razširja μ_0. Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pokritje za $A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ z množicami iz $\mathcal{A}$. Tedaj je

$$\nu(A) \leq \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Naredimo inf. po vseh pokritjih in po definiciji dobimo:

$$\nu(A) \leq \mu_0^*(A) = \mu(A).$$

ii) Naj bo $A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*}$ in $\mu(A) < \infty$. Izberimo $\varepsilon > 0$ in poiščimo pokritje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za A z množicami iz $\mathcal{A}$, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu_0(A_n)}_{\mu(A_n)} < \underbrace{\mu_0^*(A)}_{\overset{\shortparallel}{\mu(A)}} + \varepsilon.$$

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \nu(B) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)$$

$$\mu|_{\mathcal{A}} = \nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0 \longrightarrow \quad = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)$$

$$= \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$$

$$= \mu(B)$$

Ker je μ mera, je

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(A) < \varepsilon$$

$$\mu(A) \leq \mu(B) = \nu(B)$$

$$= \nu(A) + \nu(B \setminus A)$$
$$\leq \nu(A) + \mu(B \setminus A)$$
$$< \nu(A) + \varepsilon$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, je $\mu(A) \leq \nu(A)$

iii) Naj bo μ_0 σ-končna, to pomeni

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad \underbrace{\mu_0(A_n)}_{\mu_0^*(A_n) = \mu(A_n)} < \infty$$

$$A \in \mathcal{A}_{\mu_0^*} \Rightarrow A = A \cap X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$$

BŠS izberimo $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paroma disjunktne.

$$\Rightarrow \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \overset{ii)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap A_n) = \nu(A) \qquad \blacksquare$$

1.6. polmere in polalgebre

Definicija: Polalgebra je množica $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ki zadošča:
i) $\emptyset \in \mathcal{S}$.
ii) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$.
iii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^c$ je končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{S}$.

Primer: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{[a,b), (-\infty, b), [a, \infty) \mid a, b \in \mathbb{R}, a<b\} \cup \{\emptyset\}$
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je polalgebra (enostavno preveriti)

Definicija: Naj bo $\mathcal{S}$ polalgebra in $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ preslikava. μ je polmera, če velja:
i) $\mu(\emptyset) = 0$
ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne in je $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_n \in \mathcal{S}$, potem je

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

iii) Če so $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne in je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$, potem je

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

21. oktober 2025

Trditev: Naj bo S polalgebra na množici X. Tedaj je algebra generirana z S, enaka družini vseh končnih disjunktnih unij iz S.

Simbolično: $\mathcal{S}$ ... polalgebra

$\mathcal{A} = \{A_1 \cup \cdots \cup A_n \mid n \in \mathbb{N},\ A_i \in S \text{ paroma disjunktne}\}$

Dokaz: $\mathcal{A}$ je algebra, ki očitno vsebuje $\mathcal{S}$.

Po definiciji bo $\mathcal{A}$ vsebovala, algebro generirano z $\mathcal{S}$, zgornji opis pa pove tudi, da bo $\mathcal{A}$ vsebovana v algebri generirani s $\mathcal{S}$.

$\mathcal{A}$ je algebra

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ polalgebra) ✓

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}^c$

iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Dokazali bomo iii) za končne preseke in nato še ii) "Nova" (ii) in (iii) sta skupaj ekvivalentna (ii)+(iii) zaradi de Morganovega pravila.

iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

$A = A_1 \cup \cdots \cup A_m, \quad i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n \quad i \neq j \quad B_i \cap B_j \neq \emptyset$

$\Rightarrow A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} A_i \cap B_j$

$\Rightarrow A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$, saj je $\mathcal{S}$ polalgebra in

$(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = (A_i \cap B_k) \cap (B_j \cap B_l)$

Če je $i \neq k$ ali $j \neq l$, je to prazen presek.

$\Rightarrow A \cap B$ je končna unija paroma disjunktnih $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$; $A_i \in \mathcal{S}$ paroma disj.

$A^c = \bigcap_{i=1}^{m} A_i^c$

Ker je A_i^c po def $\mathcal{A}$ in aks. za algebro v $\mathcal{A}$, je $A^c \in \mathcal{A}$ po iii).

Trditev: Naj bo $\mathcal{S}$ polalgebra na mn. X in naj bo μ polmera na $\mathcal{S}$. Tedaj obstaja natanko ena razširitev μ do mere $\tilde{\mu}$ na algebri generirani s $\mathcal{S}$.

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ paroma disj., da je

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \mu(\tilde{A}) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Dokaz: vaje

Opomba: Točka iii) v def. polmere na polalgebri pravi: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ paroma disj. in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (*)$$

Ker se polmera na polalgebri razširi do mere na algebri, gen. z $\mathcal{S}$ je v $(*)$ enačaj.

1.7. Lebegue-Stieltjesove mere

Naj bo X topološki prostor. Mera je Borelova, če je definirana na Borelovi σ-algebri $\mathcal{B}(X)$.

Trditev: Naj bo μ Borelova mera na $\mathbb{R}$, ki je končna na vseh omejenih Borelovih množicah realne osi.

Def: $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu([0,\infty)) ; & x > 0 \\ 0 ; & x = 0 \\ -\mu([x,0)) ; & x < 0 \end{cases}$$

Tedaj je F_μ naraščajoča in levozvezna.

i) $a<b \Rightarrow \mu([a,b)) = F_\mu(b) - F_\mu(a)$

ii) Če je μ končna, potem je

$$F = F_\mu + \mu((-\infty,0)),$$

kjer je $F(x) = \mu(-\infty, x)$.

Dokaz: F_μ naraščajoča, saj je μ monotona

Dokažimo, da je F_μ levozvezna. Naj bo

$x>0. \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$, da $x_n \nearrow x$

$$F_\mu(x) = \mu([0,\infty)) = \lim_{n\to\infty} \mu([0,\infty)) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n).$$

Primera $x \leq 0$ se lotimo na podoben način.

i) $0<a<b$: $\mu([a,b)) = \mu([0,b)\setminus[0,a))$

$$= \mu([0,b)) - \mu([0,a))$$

$$= F_\mu(b) - F_\mu(a)$$

Podobno v ostalih primerih.

ii) $F(x) = \mu((-\infty, x)) = \mu((-\infty, 0) \cup (0, x))$

$$= \mu((-\infty, 0)) + F_\mu(x). \qquad \square$$

Cilj je dokazati obratno trditev: Vsaka naraščajoča levozvezna funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ porodi Borelovo mero. Naj bo torej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naraščajoča levozvezna.
Tedaj obstajata

$$f(\infty) := \lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{in} \quad f(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Na polalgebri $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ vseh intervalov oblike $[a, b)$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$ in $\emptyset$ definiramo preslikavo μ_f s predpisom:

$$\mu_f(\emptyset) := 0$$
$$\mu_f([a, b)) := f(a) - f(b)$$
$$\mu_f([a, \infty)) := f(\infty) - f(a)$$
$$\mu_f((-\infty, b) := f(b) - f(-\infty)$$

Izrek [Lebesgue-Stietjes]: μ_f je polmera na polalgebri $\mathcal{J}(\mathbb{R})$.

Dokaz: (i): Po definiciji je $\mu_f(\emptyset) = 0$.

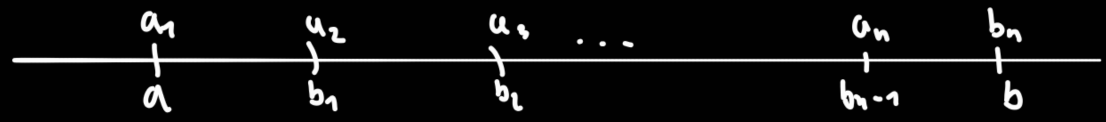
(ii) Naj bo $[a, b)$ končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{J}$:

$$[a, b) = \bigcup_{i=1}^{n} [a_j, b_j) \, ; \quad [a_j, b_j) \text{ so paroma disj.}$$

intervali so urejeni tako, da se nadaljujejo

$$\mu_f([a, b)) = \mu_f\left(\bigcup_{i=1}^{n} [a_j, b_j)\right).$$

$$F(b) - F(a) \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{n} (f(b_j) - f(a_j)) = f(a_1) - f(b_n) = f(a) - f(b_n)$$



Na podoben način preverimo $[a,\infty)$ in $(-\infty,b)$. DN

(iii): Preverimo števno subaditivnost za μ_f.

Naj bo interval $I \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ števna disj. unija intervalov I_m iz $\mathcal{J}(\mathbb{R})$.

$$\mu_f(I) \le \sum_{m=1}^{\infty} \mu_f(I_m)$$

1. primer: $I=[a,b) \Rightarrow I_m=[a_m,b_m)$.
Izberimo $\varepsilon>0$. Ker je f levo zvezna, obstaja $c<b$ in $c_j<a_j$, da je $f(c)>f(b)-\varepsilon/2$ in $f(c_j)>f(a_j)-\frac{\varepsilon}{2\cdot 2^j}$

Kompaktni interval $[a,c]$ pokrijemo z odprtimi intervali $\{(c_j,b_j) \mid j\in\mathbb{N}\}$. Obstaja končno podpokritje.

Točka a je vsebovana v nekem (c_j,b_j). BŠS $a\in(c_1,b_1)$

Če je $b_1>c$, potem je $[a,c]\subseteq(c_1,b_1)$, sicer imamo BŠS $b_1\in(c_2,b_2)$

Če je $b_2>c$, potem je $[a,c]\subseteq(c_1,b_1)\cup(c_2,b_2)$, sicer

Postopek nadaljujemo. Po končno korakih (po preštevilčenju), dobimo intervale $(c_1,b_1),(c_2,b_2),\dots,(c_n,b_n)$, da je $c_1<a$, $c_{j+1}<b_j$ za $j=1,\dots,n-1$, $b_n>c$

$$\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}\big(f(b_m)-f(a_m)\big)}_{\text{indeksi na začetku}} \geq \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\big(f(b_j)-f(a_j)\big)}_{\text{indeksi po preimenovanju}}$$

$$\geq \Big(\sum_{j=1}^{n} f(b_j)-f(c_j)\Big) - \varepsilon/2$$

$$= -f(c_1) + \Big(\sum_{j=2}^{n-1} \underbrace{\big(f(b_j)-f(c_{j-1})\big)}_{\geq 0}\Big) + f(b_n) - \varepsilon/2$$

$$\geq -f(a) + 0 + f(c) - \varepsilon/2$$

$$> -f(a) + \big(f(b)-\varepsilon/2\big) - \varepsilon/2$$

$$= f(b)-f(a)-\varepsilon$$

Ker je $\varepsilon>0$ poljuben, je

$$\sum_{m=1}^{\infty}\big(f(b_m)-f(a_m)\big) \geq f(b)-f(a)$$

<u>2. primer</u>: $[a,\infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j)$

$$\underline{f(\infty)-f(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\big(f(b_j)-f(a_j)\big)}$$

Za $n\in\mathbb{N}$: $[a,n) = \bigcup_{j=1}^{\infty}[a_j, \min\{n,b_j\})$

Po prejšnjem primeru velja:

$$f(n)-f(a) = \sum_{j=1}^{\infty}\big(f(\min\{b_j,n\})-f(a_j)\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\big(f(b_j)-f(a_j)\big).$$

$$f(n)-f(a) \xrightarrow{n\to\infty} f(\infty)-f(a)$$

Ostali primeri DN. $\blacksquare$

Na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ imamo polmero μ_f:

$\mu_f(\emptyset)=0$, $\mu_f([a,b)) = f(a)-f(b)$, $\mu_f([a,\infty)) = f(\infty)-f(a)$, $\mu_f((-\infty,b)) = f(b)-f(-\infty)$

Po izreku lahko μ_f razširimo na en sam način do mere μ_f na algebro $\mathcal{A}$ generirano z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tvorimo zunanjo mero μ_f^* na $\mathbb{R}$. Po Caratheodorijevem izreku je množica $\mathcal{A}_{\mu_f^*}$ vseh μ_f^* merljivih množic σ-algebra, ki vsebuje vse intervale oblike $[a,b)$. Torej $\mathcal{A}_{\mu_f^*} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dodatno: $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mu_f^*}, \mu_f^*|_{\mathcal{A}_{\mu_f^*}})$ je poln merljiv prostor.

$\Rightarrow \mathcal{A}_{\mu_f^*} \supseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ... Lebesgueova σ-algebra, ki je napolnitev Borelove σ-algebre.

Mera $\mu_f^* =: \mu$ je Lebesgue-Stieltjesova mera. Po izreku od zadnjič je ta mera enolična razširitev mere iz alg. gen. z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, saj je tista mera σ-končna.

<u>Poseben primer</u>: $f(x) = x \Rightarrow$ Dobimo Lebesgueovo mero. Označimo jo z m.

22. oktober 2025

<u>Posledica</u>: Naj bo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ in $x \in \mathbb{R}$. Tedaj velja $m(x + A) = m(A)$ in $m(x \cdot A) = |x| m(A)$.

<u>Dokaz</u>: Naj bo m_x definirana na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ s predpisom

$$m_x(A) := m(x + A).$$

m_x je polmera na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $x + [a_1, b_1) \cup \cdots \cup [a_n, b_n) = \bigcup_{i=1}^{n} (x + [a_i, b_i))$

ki se ujema z m na na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Če je $\mathcal{A}$ alg. gen. z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, potem se m_x in m ujemata tudi na $\mathcal{A}$. Uporabimo Caratheodorija za $(\mathcal{A}, m)$ in $(\mathcal{A}, m_x)$. V obeh primerih dobimo σ-algebro, ki vsebuje $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Ker sta m in m_x σ-končni na $(X, \mathcal{A})$, sta enolično razširljivi na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Dokaz druge enakosti podobno. $\blacksquare$

Spomnimo se: $\underbrace{(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mu_f)}_{\text{polmera na polalgebri}} \rightsquigarrow \underbrace{(\mathcal{A}, \mu_f)}_{\text{mera na algebri}} \rightsquigarrow (\mathcal{A}_{\mu_f^*}, \underbrace{\mu_f^*|_{\mathcal{A}_{\mu_f^*}}}_{= \mu})$

$$A \in \mathcal{A}_{\mu_f^*} \rightsquigarrow \mu(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n) \;\middle|\; (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \text{ in } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}.$$

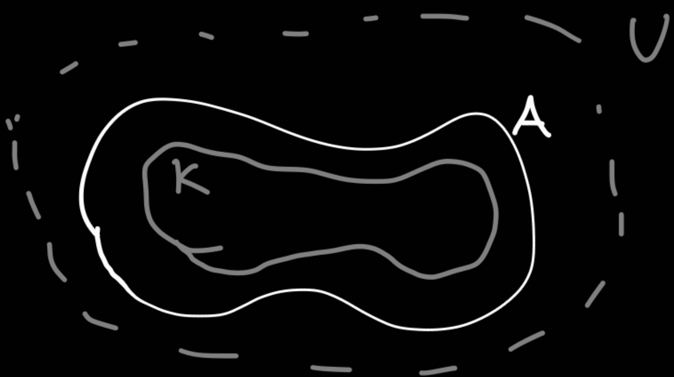
$A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n$ je končna disjunktna unija intervalov oblike $[a,b)$, $(-\infty, b)$, $[a,\infty)$.

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \mu_f([a_m, b_m)) \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m)\right\}$$

$$= \inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} f(b_m) - f(a_m) \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m)\right\}$$

Trditev: Naj bo μ_f Lebesgue-Stieltjesova mera na $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, porojena z naraščajočo levozvezno funkcijo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Tedaj je

$$\mu(A) = \inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} (f(b_m) - f(a_m)) \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (a_m, b_m)\right\}.$$



$\mu(U) \approx \mu(A)$

$\mu(K) \approx \mu(A)$

Dokaz: Označimo desno stran z $\gamma(A)$.
Vsak interval (a_n, b_n) je števna disjunktna unija intervalov oblike $[a_{n,m}, b_{n,m})$. Po definiciji infimuma je $\mu(A) \leq \gamma(A)$.

Za obratno neenakost pa potrebujemo levozveznost funkcije f. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}$ in naj bo $\mu(A) < \infty$. Tedaj za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists [a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}$, da je

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \text{ in}$$

$$\mu(A)+\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f([a_n,b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n)-f(a_n))$$

Ker je f levozvezna, za $\forall n \in \mathbb{N}. \exists a_n' < a_n$, da je

$$f(a_n') > f(a_n) - \varepsilon/2^n$$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n', b_n)$$

$$\Rightarrow \mu(A)+\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(f(b_n)-f(a_n') - \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n)-f(a_n'))\right) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu(A)+2\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(b_n)-f(a_n'))$$

Zaradi monotonosti mere je potem $\mu(A) \geq \nu(A)$. ∎

<u>Izrek</u>: Za $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ velja

$$m(A) = \inf\{m(U) \mid A \subseteq U^{odp}\} \quad (*)$$

$$= \sup\{m(K) \mid K^{komp} \subseteq A\} \quad (**)$$

<u>Dokaz</u> [prva enakost]: (druga mogoče kasneje - Rieszov izrek).

$$A \subseteq U \Rightarrow m(A) \leq m(U)$$

$$\Rightarrow m(A) \leq \inf\{m(U) \mid U^{odp} \supseteq A\}$$

Prej smo dokazali, da je:

$$m(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m((a_n,b_n)) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n,b_n)\right\}$$

$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n,b_n) \Rightarrow m(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m((a_n,b_n))$$

∎

$(*)$ ... zunanja regularnost mera, $(**)$ ... notranja regularnost mere
(inf. po odprtih mn.) (sup. po komp. mn)