4. KOMLEKSNE MERE

4.1. Totalna variacija mere

3. december 2025

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Preslikava $\lambda : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ je **kompleksna mera**, če je števno aditivna za zaporedja paroma disjunktnih množic iz $\mathcal{A}$:

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$; $A_n \cap A_m = \emptyset$ za $n \neq m$, potem

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

$$A_n = \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\emptyset) \Rightarrow \lambda(\emptyset) = 0$$

<u>Opazka</u>: $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\pi(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{\pi(n)})$$

za vsako bijekcijo $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Iz analize 1 sledi, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{\pi(n)})$ konvergira absolutno.

<u>Primer</u>: Naj bo μ pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$. Za $f \in L^1(\mu)$ definiramo:

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\mu; \quad A \in \mathcal{A}.$$

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ paroma disjunktne, potem

$$\lambda\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}_{A}\Big) = \int_A f \, d\mu = \int_X f \chi_A \, d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f \chi_{A_n} \, d\mu \overset{\substack{\text{LDK za vrste (DN)} \\ \sum\int = \int\sum}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \chi_{A_n} \, d\mu$$

$\Rightarrow \lambda$ je kompleksna mera.

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = \int_A f \, d\mu = \int_X f \chi_A \, d\mu = 0$$

$\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$

Zapišemo $\lambda \ll \mu$ (absolutna zveznost λ glede na μ).

Trditev: Preslikava $\lambda: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ kompleksna mera natanko takrat, ko velja vsaj ena od naslednjih trditev:

i) λ je končno aditivna in $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$ za vsako naraščajoče zaporedje množic $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{A}$.

ii) λ je končno aditivna in $\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$ za vsako padajoče zaporedje množic $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{A}$.

Dokaz: Enako kot v primeru pozitivne mere. Za (ii) upoštevamo $\lambda(A_1) \in \mathbb{C}$. ▨

Naj bo $A \in \mathcal{A}$. Zaporedje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktnih množic iz $\mathcal{A}$ imenujemo (merljiva) particija za A, če je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Totalna variacija mere λ je $|\lambda|$, definirana s predpisom
$|\lambda|(A) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| \mid (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ particija za } A\}$.

Izkaže se, da velja naslednje: $f \in L^1(\mu)$; μ pozitivna mera,
$\lambda(A) = \int_{\mathcal{A}} f\,d\mu \Rightarrow |\lambda|(A) = \int_A |f|\,d\mu$.

$A \in \mathcal{A}$; $A_1 = A$, $A_2 = A_3 = \cdots = \emptyset$
$\Rightarrow |\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| = |\lambda(A_1)|$. $\boxed{|\lambda(A)| \leq |\lambda|(A)}$

Definiramo: $(\mathrm{Re}\lambda)(A) := \mathrm{Re}\lambda(A)$, $(\mathrm{Im}\lambda)(A) := \mathrm{Im}\lambda(A)$.
Ker je λ kompleksna mera, sta $\mathrm{Re}\lambda$ in $\mathrm{Im}\lambda$ realni meri.

Vedno velja: $|\lambda| \leq |\mathrm{Re}\lambda| + |\mathrm{Im}\lambda|$.
$\forall A \in \mathcal{A}: |\lambda|(A) \leq |\mathrm{Re}\lambda|(A) + |\mathrm{Im}\lambda|(A)$
Naj bo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ particija za A. Tedaj velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |(\mathrm{Re}\lambda + i\,\mathrm{Im}\lambda)(A_n)|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Re}\lambda(A_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathrm{Im}\lambda(A_n)|$$

$$\leq |\mathrm{Re}\lambda|(A) + |\mathrm{Im}\lambda|(A)$$

Naredimo supremum po vseh particijah $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$|\lambda|(A) \leq |\mathrm{Re}\lambda|(A) + |\mathrm{Im}\lambda|(A)$$

Velja tudi: $|\mathrm{Re}\lambda|, |\mathrm{Im}\lambda| \leq |\lambda|$.

Izrek: Za vsako kompleksno mero λ je $|\lambda|$ končna pozitivna mera.

9. december 2025

Dokaz: Dokaz v dveh korakih:

1. $|\lambda|$ je pozitivna mera.

$|\lambda|(\emptyset) = 0$ ✓

$A \in \mathcal{A}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktne v $\mathcal{A}$, da je

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow |\lambda|(A) = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n)$$

($\geq$) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izberimo $a_n \geq 0$, da je $a_n \leq |\lambda|(A_n)$.

Izberimo $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja particija $(A_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$ za A_n, da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(A_{nj})| \geq a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Tedaj je $(A_{n,j})_{n,j\in\mathbb{N}}$ particija za A, zato velja

$$|\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{n,j}| \geq \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \varepsilon.$$

Pošljemo $\varepsilon \to 0 \Rightarrow |\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{k} a_n$

Za $n = 1, 2, \dots, k$ pošljemo $a_n \longrightarrow |\lambda|(A_n) \Rightarrow$

$$|\lambda|(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n).$$

($\leq$): Naj bo $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ particija za $A \Rightarrow (B_j \cap A_n)_{j\in\mathbb{N}}$ je particija za A_n.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(B_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_j \cap A_n)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(B_j \cap A_n)| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda(B_j \cap A_n)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n)$$

Po definiciji totalne variacije sledi $|\lambda|(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(A_n)$.

2. $|\lambda|$ je končna (pozitivna) mera

$\lambda = \mathrm{Re}\lambda + i\,\mathrm{Im}\lambda$, $\quad |\mathrm{Re}\lambda|, |\mathrm{Im}\lambda| \le |\lambda| \le |\mathrm{Re}\lambda| + |\mathrm{Im}\lambda|$

$|\lambda|$ končna $\Leftrightarrow |\lambda|(X) < \infty$

Zato je dovolj dokazati, da je totalna variacija realne mere vedno končna (pozitivna) mera.

BŠS λ je realna mera

Predpostavimo, da je $|\lambda|(X) = \infty$. Po definiciji totalne variacije obstaja particija $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ za X, da je $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(X_n)|$ poljubno veliko.

$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda(X_n) \ge 0\}$ in $T = \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda(X_n) < 0\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(X_n)| = \sum_{n \in S} \lambda(X_n) - \sum_{n \in T} \lambda(X_n)$$

Zato je $\sum_{n \in S} \lambda(X_n)$ ali $\sum_{n \in T} \lambda(X_n)$ poljubno veliko po absolutni vrednosti.

Oglejmo si $E := \bigcup_{n \in S} X_n$ in $F := \bigcup_{n \in T} X_n$. Tedaj je $\lambda(E)$ ali $\lambda(F)$ poljubno veliko po absolutni vrednosti. Dokazali smo: Če je $Y \in \mathcal{A}$ in $|\lambda|(Y) = \infty$, potem $\exists Z \subseteq Y$ merljiva, da je $|\lambda(Z)|$ poljubno veliko.

Definiramo $A_1 := X \Rightarrow |\lambda|(A_1) = \infty \Rightarrow \exists Y_1 \subseteq A_1$ merljiva, da je $|\lambda(Y_1)| \ge |\lambda(A_1)| + 1$

$\Rightarrow |\lambda|(Y_1) = \infty$ ali $|\lambda|(A_1 \setminus Y_1) = \infty$

Označimo z A_2 tisto množico med Y_1 in $A_1 \setminus Y_1$, da je $|\lambda|(A_2) = \infty$.

Če je $A_2 = Y_1$, potem je $|\lambda(A_2)| \ge 1$.

Če je $A_2 = A_1 \setminus Y_1$, potem je $|\lambda(A_2)| = |\lambda(A \setminus Y_1)| = |\lambda(A_1) - \lambda(Y_1)| \ge$

$$\ge ||\lambda_1(A_1)| - |\lambda_1(Y_1)|| \ge 1$$

Torej $A_1 \rightsquigarrow A_2$: $|\lambda|(A_2) = \infty$ in $|\lambda(A_2)| \ge 1$.

Po prej dokazanem $\exists Y_2 \subseteq A_2$ merljiva, da je $|\lambda(Y_2)| \ge |\lambda(A_2)| + 2$.

Naj bo A_3 tista množica med Y_2 in $A_2 \setminus Y_2$, da je $|\lambda|(A_3) = \infty$.

Če je $A_3 = Y_2$, potem je $|\lambda(A_3)| = |\lambda(A_2)| \ge 2$.

Sicer $A_3 = A_2 \setminus Y_2$ in zato $|\lambda(A_3)| \geq ||\lambda(A_2)| - |\lambda(Y_2)|| \geq 2$.
Z indukcijo dokažemo obstoj padajočega zaporedja množic $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da je $|\lambda|(A_n) = \infty$ in $|\lambda(A_n)| \geq n-1$.

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow |\lambda(A)| = \lim_{n\to\infty} |\lambda(A_n)| \longrightarrow \infty.$$

Protislovje z $\lambda(A) \in \mathbb{R}$. Zato je $|\lambda|(X) < \infty$. ∎

Če sta λ in μ kompleksni meri na $(X, \mathcal{A})$ in $\alpha \in \mathbb{C}$, potem definiramo

$$(\lambda+\mu)(E) := \lambda(E) + \mu(E)$$
$$(\alpha\mu)(E) := \alpha\mu(E).$$

Preverimo lahko, da sta $\lambda+\mu$ in $\alpha\lambda$ tudi kompleksni meri (DN).
Z $M(X)$ označimo prostor vseh kompleksnih mer. $M(X)$ je kompleksni vektorski prostor. V $M(X)$ vpeljemo $\|\lambda\| := |\lambda|(X)$.

Izrek: $(M(X), \|\cdot\|)$ je Banachov prostor.

V dokazu uporabimo naslednjo trditev: Normiran prostor je Banachov $\Leftrightarrow$ vsaka absolutno konvergentna vrsta konvergira.

4.2. Absolutna zveznost in vzajemna singularnost mer

Naj bo μ pozitivna mera in λ kompleksna mera. Pravimo, da je λ absolutno zvezna glede na μ, če velja $\mu(E)=0 \Rightarrow \lambda(E)=0$.
Oznaka: $\lambda \ll \mu$.

Lema: $\lambda \ll \mu \Leftrightarrow |\lambda| \ll \mu$.

Dokaz: ($\Leftarrow$): $\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$
Ker je $|\lambda| \ll \mu$, je $|\lambda|(E) = 0$.
Ker $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$
($\Rightarrow$): E: $\mu(E) = 0 \Rightarrow |\lambda|(E) = 0$

Naj bo $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ particija za E.

$\mu(E) \Rightarrow \mu(E_n)=0 \ \forall n\in\mathbb{N} \xRightarrow{\lambda\ll\mu} \lambda(E_n)=0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| = 0 \quad \forall$ particijo $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za $E \Rightarrow |\lambda|(E)=0$ ∎

__Izrek:__ Naj bo λ kompleksna mera in μ pozitivna mera. Tedaj je $\lambda \ll \mu$ natanko tedaj, ko za $\forall \varepsilon>0. \exists \delta>0. \mu(A)<\infty \Rightarrow |\lambda(A)|<\varepsilon$.

__Dokaz:__ __($\Leftarrow$):__ $\mu(E)=0$

Po predpostavki $\forall \varepsilon>0. \exists\delta>0. \mu(A)<\delta \Rightarrow |\lambda(A)|<\varepsilon$. Ker je $\mu(E)=0<\delta$, je $|\lambda(E)|<\varepsilon$ za vsak $\varepsilon>0$. Zato je $\lambda(E)=0$.

__($\Rightarrow$):__ Predpostavimo, da ε-δ trditev ne drži. Torej

$\exists \varepsilon>0. \forall\delta>0. \exists A. \ \mu(A)<\delta$ in $\lambda(A)\geq\varepsilon$.

Za vsak $n\in\mathbb{N}$ najdemo takšen $A_n\in\mathcal{A}$, da je $\mu(A_n)<\frac{1}{2^n}$ in $|\lambda(A_n)|\geq\varepsilon$.

Definiramo $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Velja

$$\mu(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

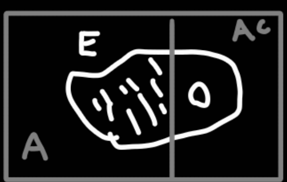
$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$.

$|\lambda|(B) = \lim_{n\to\infty} |\lambda|(B_n) \geq \varepsilon \qquad \left(|\lambda|(B_n) \geq |\lambda|(A_n) \geq |\lambda(A_n)| \geq \varepsilon\right)$

Zato $|\lambda| \not\ll \mu$, oziroma $\lambda \not\ll \mu$. ↯ ∎

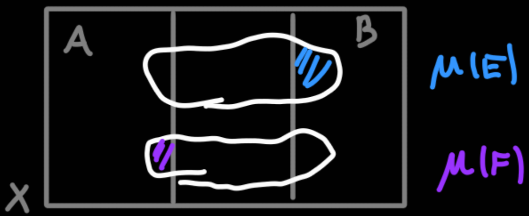
Naj bo λ mera. λ je **skoncentrirana** na $A\in\mathcal{A}$, če je

$$\lambda(E) = \lambda(E\cap A) \quad \forall E\in\mathcal{A}.$$



Po domače: λ je skoncentrirana na $A \Leftrightarrow \lambda(B)=0$ za vsako merljivo množico $B\subseteq A^c$ oziroma "λ živi v A".

Meri λ in μ sta **vzajemno singularni**, če obstajata disjunktni množici $A, B\in\mathcal{A}$, da je λ skoncentrirana na A, μ pa na B.



Zato dostikrat v definiciji lahko avtomatično privzamemo, da je $A \cup B = X$.

Trditev: Naj bosta λ in μ kompleksni meri.

i) Če je λ pozitivna, potem je λ skoncentrirana na $A \Leftrightarrow \lambda(A^c) = 0$.

ii) λ je skoncentrirana na $A \Leftrightarrow |\lambda|$ skoncentrirana na $\mathcal{A}$.

iii) $\lambda \perp \mu$ vzajemno singularni $\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{A}.\ |\lambda|(A) = 0$ in $|\mu|(A^c) = 0$.

Dokaz: (ii) ($\Leftarrow$): $\lambda(B) = 0 \ \forall B \subseteq A^c$

$$|\lambda(B)| \leq |\lambda|(B) = 0$$

($\Rightarrow$): $B \subseteq A^c \Rightarrow |\lambda|(B) = 0$

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ particija za B $\quad \lambda(B_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

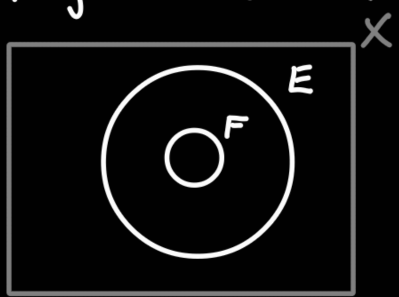
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(B_n)| = 0$$

Supremum po vseh particijah: $|\lambda|(B) = 0$.

(i) in (iii) DN. $\square$

4.3. Razcep realne mere

Naj bo λ realna mera na $(X, \mathcal{A})$.



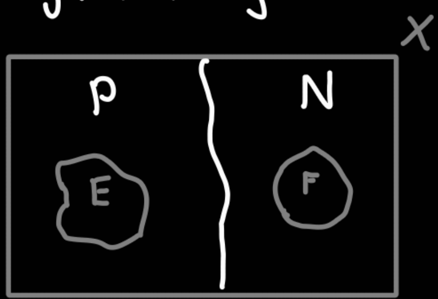
$E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) \in \mathbb{R}$

$\lambda(E) > 0$, $\lambda(E) = 0$ ali $\lambda(E) < 0$

Recimo $\lambda(E) \geq 0$. $F \subseteq E$ merljiva

Ali je $\lambda(E) \geq 0$?

Velja naslednje:



Imamo razcep:

$X = P \cup N$; $P, N \in \mathcal{A}$, $P \cap N = \emptyset$

$\forall E \subseteq P.\ \forall F \subseteq N$ merljivi:

$\lambda(E) \geq 0$ in $\lambda(F) \leq 0$

Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in λ kompleksna mera. Množica $A \in \mathcal{A}$ je:

10. december 2025

- λ-pozitivna, če je $\lambda(E) \geq 0$ za vsako merljivo množico $E \subseteq A$,
- λ-negativna, če je $\lambda(E) \leq 0$ za vsako merljivo množico $E \subseteq A$,
- λ-ničelna, če je $\lambda(E) = 0$ za vsako merljivo množico $E \subseteq A$.

Presek λ-pozitivne in λ-negativne množice je λ-ničelna množica. Vsaka λ-ničelna množica je λ-pozitivna in λ-negativna.

Lema: Naj bo λ realna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$. Tedaj vsaka merljiva množica E vsebuje λ-pozitivno množico P za katero velja $\lambda(P) \geq \lambda(E)$.

Dokaz: Najprej dokažimo, da za vsako merljivo množico A in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšna merljiva množica $P_\varepsilon \subseteq A$, da je $\lambda(P_\varepsilon) \geq \lambda(A)$ in $\lambda(B) \geq -\varepsilon$ za vsako merljivo množico $B \subseteq P_\varepsilon$.

S protislovjem: recimo, da obstaja takšen $\varepsilon > 0$, da za vsako takšno merljivo množico $C \subseteq A$, za katero velja $\lambda(C) \geq \lambda(A)$, obsta takšna merljiva množica $B \subseteq C$, da je $\lambda(B) < -\varepsilon$.
$\Rightarrow$ Najdemo $B_1 \subseteq A$, da je $\lambda(B_1) < -\varepsilon$. Ker je $\lambda(A \setminus B_1) = \lambda(A) - \lambda(B) > \lambda(A) + \varepsilon$, obstaja taksen $B_2 \subseteq A \setminus B_1$, da je $\lambda(B_2) < -\varepsilon$. Z indukcijo konstruiramo zaporedje takšnih paroma disjunktnih množic $(B_n)_n$, da je $\lambda(B) < -\varepsilon$ in $B_n \subseteq A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$.

$\Rightarrow B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \lambda(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = -\infty$ $\times$

Po ravnokar dokazanem $\exists P_1 \subseteq A$ merljiva, da $\lambda(P_1) \geq \lambda(A)$ in $\lambda(B) \geq -\frac{1}{1}$ $\forall B \subseteq P_1$ merljivo. ...
$\exists P_2 \subseteq P_1$ merljiva, da $\lambda(P_2) \geq \lambda(P_1) \geq \lambda(A)$ in $\lambda(B) \geq -1/2$ $\forall B \subseteq P_2$ merljiv.

$\Rightarrow$ Z indukcijo konstruiramo padajoče zaporedje $(P_n)_n$ merljivih množic, da $\lambda(P_n) \geq \lambda(A)$ $\forall n$ in $\forall B \subseteq P_n$ merljivo je $\lambda(B) \geq -\frac{1}{n}$.
Definiramo $P := \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$. Tedaj je $\lambda(P) = \lim_{n\to\infty} \lambda(P_n) \geq \lambda(A)$ in če je $B \subseteq P$ merljiva, potem $B \subseteq P \subseteq P_n \Rightarrow \lambda(B) \geq -\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.
$\Rightarrow \lambda(B) \geq 0$. Torej je P λ-pozitivna. $\blacksquare$

Izrek [Hahnov razcep realne mere]:
Naj bo λ realna mera na $(X, \mathcal{A})$. Tedaj obstaja takšna λ-pozitivna množica P in takšna λ-negativna množica N, da je $X = P \cup N$ in $P \cap N = \emptyset$.
Če obstaja še en takšen par $(\tilde{N}, \tilde{P})$, potem sta $(P \setminus \tilde{P}) \cup (\tilde{P} \setminus P)$ in $(N \setminus \tilde{N}) \cup (\tilde{N} \setminus N)$ λ-ničelni množici.

Dokaz: Definirajmo $s := \sup\{\lambda(A) \mid A \text{ } \lambda\text{-pozitivna}\}$. Ker je $\lambda(A) \geq 0$ in $\lambda(A) \leq |\lambda|(A) \leq |\lambda|(X)$, je $s \in [0, \infty)$.

Obstaja P λ-pozitivna, da je $\lambda(P) = s$.
Obstajajo A_n; A_n je λ-pozitivna in $\lambda(A_n) \longrightarrow s$. Definirajmo $P_1 = A_1$, $P_2 = A_1 \cup A_2, \ldots, P_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$.
$\Rightarrow P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots$ in $\forall n$ je P_n λ-pozitivna in $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ je tudi λ-pozitivna.
Ker je $(P_n)_n$ naraščajoče: $\lambda(P) = \lim_{n\to\infty} \lambda(P_n) = s$. $\quad \underset{s}{\underset{\downarrow}{s}} \geq \underset{s}{\underset{\downarrow}{\lambda(P_n)}} \geq \underset{s}{\underset{\downarrow}{\lambda(A_n)}}$

$N := X \setminus P$ je λ-negativna
Če to ni res $\exists E \subseteq N$ merljiva; $\lambda(E) > 0$. Po prejšnji lemi obstaja $P' \subseteq E$ λ-pozitivna, da je $\lambda(P') \geq \lambda(E) > 0$.
$\Rightarrow P' \cup P$ je λ-pozitivna in $\lambda(P' \cup P) = \lambda(P') + \lambda(P) > \lambda(P) = s$, kar je v protislovju z definicijo s.

Naj bo sedaj $(\tilde{P}, \tilde{N})$ še en tak razcep prostora ($\tilde{P}$ λ-poz, $\tilde{N}$ λ-neg).
$\Rightarrow (P \setminus P') \cup (P' \setminus P) = (P \cup \tilde{P}^c) \cup (\tilde{P} \cap P^c)$

$$= \underbrace{(P \cap \tilde N)} \cup \underbrace{(\tilde P \cap N)}$$

λ ničelni

$\Rightarrow$ tudi unija je λ-ničelna. Podobno $(N \setminus \tilde N) \cup (\tilde N \setminus N)$. $\boxtimes$

Vsak par (P, N) iz izreka imenujemo **Hahnov razcep** prostora X glede na λ oziroma Hahnov razcep realne mere λ.

16. december 2025

Jordanov razcep realne mere:

Naj bo λ realna mera na $(X, \mathcal{A})$. Tedaj obstajata enolično določeni pozitivni meri λ^+ in λ^- na $(X, \mathcal{A})$, da je $\lambda^+ \perp \lambda^-$ in velja $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$.

Opomba: λ^+ in λ^- se zaporedoma imenujeta **pozitivni** in **negativni** del mere λ.

Dokaz: Naj bo (P, N) nek Hahnov razcep za λ. To pomeni, da je P λ-pozitivna množica, N je λ-negativna množica, $P \cup N = X$ in $P \cap N = \emptyset$.

Definiramo $\lambda^+(A) := \lambda(A \cap P)$ in $\lambda^-(A) := -\lambda(A \cap N)$ za $\forall A \in \mathcal{A}$.

λ^+ in λ^- sta pozitivni meri, saj sta P in N λ-poz. in λ-neg množica. Ker sta λ^+ in λ^- zaporedoma skoncentrirani na P in N, je $\lambda^+ \perp \lambda^-$.

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap P) + \lambda(A \cap P^c) = \lambda(A \cap P) + \lambda(A \cap N)$$
$$= \lambda^+(A) + \lambda^-(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Dokažimo enoličnost Jordanovega razcepa. Naj bo $\lambda = \mu_1 - \mu_2$, kjer sta μ_1 in μ_2 vzajemno singularni pozitivni meri. Naj bo μ_1 skoncentrirana na E, μ_2 pa na F $(E, F \in \mathcal{A})$.

$$\mu_1(A) = \mu_1(A \cap E), \quad \mu_2(A) = \mu_2(A \cap F); \quad A \in \mathcal{A}$$

Če zamenjamo E z $E \cup (E \cup F)^c$, lahko BSŠ predpostavimo, da je $E \cup F = X$.

Sledi, da je (E, F) še en Hahnov razcep realne mere λ.
Po izreku je $P \Delta E$ in $N \Delta F$ λ-ničelni množici

$\mu_1 = \lambda^+$ in $\mu_2 = \lambda^-$

$$
\begin{aligned}
A \in \mathcal{A}: \quad \mu_1(A) &= \mu_1(A \cap E) = \mu_1(A \cap E) - \underbrace{\mu_2(A \cap E)}_{=0} \\
&= \lambda(A \cap E) = \lambda(A \cap E \cap P) + \underbrace{\lambda(A \cap E \cap P^c)}_{=0} \\
&= \lambda(A \cap E \cap P) = \lambda(A \cap E \cap P) + \underbrace{\lambda(A \cap E^c \cap P)}_{=0} \\
&= \lambda(A \cap P) \\
&= \lambda^+(A)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \mu_1 = \lambda^+ \Rightarrow \mu_2 = \mu_1 - \lambda = \lambda^+ - \lambda = \lambda^-$ $\blacksquare$

4.4. Lebesgue-Radon-Nikodýmov izrek

Motivacija: $f \in L^1(\mu)$ in μ pozitivna mera, potem definiramo λ:

$$\lambda(A) := \int_A f \, d\mu \quad (A \in \mathcal{A})$$

Tedaj je λ kompleksna mera in $\lambda \ll \mu$.
Vprašanje: Naj bo μ σ-končna pozitivna mera in λ kompleksna mera, da je $\lambda \ll \mu$. Ali obstaja $f \in L^1(\mu)$, da je

$$\lambda(A) := \int_A f \, d\mu \quad (A \in \mathcal{A}) \text{ ?} \qquad \text{Da.}$$

Lema: Naj bosta μ in λ končni pozitivni meri. Tedaj je bodisi $\lambda \perp \mu$ bodisi obstaja $\varepsilon > 0$ in $E \in \mathcal{A}$, da je $\mu(E) > 0$ in $\lambda \geq \varepsilon \mu$ na E.

Dokaz: Naj bo $X = P_n \cup N_n$ Hahnov razcep za $\lambda - \frac{1}{n}\mu$. Definiramo $P := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ in $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n$. N je negativna množica za mero $\lambda - \frac{1}{n}\mu$ za $\forall n \in \mathbb{N}$. Velja $0 \leq \lambda(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N) \longrightarrow 0$.
$\Rightarrow \lambda(N) = 0$. Zato je λ skoncentrirana na $N^c = P$. Če je $\mu(P) = 0$, je μ skoncentrirana na $P^c = N$ in zato $\lambda \perp P$. Če je $\mu(P) > 0$, sledi $\mu(P_n) > 0$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Zato tudi velja $\lambda \geq \frac{1}{n}\mu$ na P_n. $\blacksquare$

Lema: Naj bo $f \in L^1(\mu)$. Tedaj je $f=0$ s.p. na $X \Leftrightarrow \int_A f d\mu = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}$.

Dokaz: $(\Rightarrow)$: ✓

$(\Leftarrow)$: $\int_A f d\mu = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$$\int_A f d\mu = \int_A \operatorname{Re} f d\mu + i \int_A \operatorname{Im} f d\mu \Rightarrow \int_A \operatorname{Re} f d\mu = \int_A \operatorname{Im} f d\mu = 0$$

Naj bo $g \in L^1(\mu)$ taka, da je $\int_A g d\mu = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

$g = g^+ + g^-$ $\quad X^+ = \{x \mid g(x) \geq 0\}$, $X^- = \{x \mid g(x) < 0\}$.

$X^+ \cup X^- = X$, $X^+ \cap X^- = \emptyset$

$\int_{X^+} g d\mu = 0$ in $g \geq 0$ na $X^+ \Rightarrow g \equiv 0$ s.p. na X^+

Podobno $g \equiv 0$ s.p. na X^-. Zato $g \equiv 0$ s.p. ▨

Izrek [Lebesgue-Radon-Nikodym]: Naj bo λ kompleksna mera in μ σ-končna mera na $(X, \mathcal{A})$. Tedaj obstajata enolično določeni kompleksni meri λ_a in λ_s, da je $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ in $\lambda_s \perp \mu$. Dodatno obstaja skoraj povsod enolično določena funkcija $f \in L^1(\mu)$, da je $\lambda_a(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$.

Funkcija f se imenuje *Radon-Nikodymov odvod* mere λ_a po meri μ. Dostikrat zapišemo $f = \frac{d\lambda_a}{d\mu}$ $\quad (\Leftrightarrow f d\mu = d\lambda_a$

$\Leftrightarrow \int_E f d\mu = \int_E d\lambda_a \ \forall E \in \mathcal{A}$

$\Leftrightarrow \int_E f d\mu = \lambda_a(E) \ \forall E \in \mathcal{A}$

Opomba: Naj bosta μ in λ σ-končni pozitivni meri. Če je $\lambda \ll \mu$, potem $\exists f \geq 0$ merljiva, da je $\lambda(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$.

Opomba: Razcep $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ je *Lebesgueov razcep* mere.

$d\lambda_a = f d\mu \longrightarrow$ Radon-Nikodymov izrek.

<u>Dokaz</u>: <u>Enoličnost</u>: Recimo $\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda_a' + \lambda_s'$ za $\lambda_a, \lambda_a', \lambda_s, \lambda_s'$ komp. mere, da je $\lambda_a, \lambda_a' \ll \mu$, $\lambda_s, \lambda_s' \perp \mu$.

$\underbrace{\lambda_a - \lambda_a'}_{\lambda_1} = \underbrace{\lambda_s' - \lambda_s}_{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_1 \ll \mu, \quad \lambda_2 \perp \mu$

Ker $\lambda_1 = \lambda_2$, je $\lambda_1 \ll \mu$ in $\lambda_1 \perp \mu$, zato $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$

$\Rightarrow \lambda_a = \lambda_a'$ in $\lambda_s = \lambda_s'$.

Če obstaja še en $\tilde{f} \in L^1(\mu)$, da je

$$\lambda_a(E) = \int_E \tilde{f}\, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}.$$

$\Rightarrow \lambda_a(E) = \int_E \tilde{f}\, d\mu = \int_E f\, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A} \Rightarrow \int_E (\tilde{f} - f)\, d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}$

Po prejšnji lemi je $\tilde{f} - f = 0$ s.p. na X.

<u>Eksistenca</u>: Dokaz prevedemo na pozitivne mere. Če je ν komp., potem $\nu \ll \mu \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\nu, \mathrm{Im}\,\nu \ll \mu$

$\nu \perp \mu \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\nu, \mathrm{Im}\,\nu \perp \mu$

Če je ν realna, potem $\nu \ll \mu \Leftrightarrow \nu^+, \nu^- \ll \mu$ in

$\nu \perp \mu \Leftrightarrow \nu^+, \nu^- \perp \mu$.

Zato se omejimo na primer, ko je λ pozitivna mera.

(λ realna $\rightsquigarrow$ uporabimo L-R-N za λ^+, λ^-; λ komp. $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Re}\,\lambda, \mathrm{Im}\,\lambda$).

Brez škode za splošnost je λ pozitivna mera.

<u>1. korak</u>: μ je končna (pozitivna mera)

Definiramo $\mathcal{D} := \{g : X \to [0,\infty]$ merljiva, da je $\int_A g\, d\mu \le \lambda(A)\ \forall A \in \mathcal{A}\}$.

Izkaže se, da bo iskan tisti $g \in \mathcal{D}$, ki ima $\int_X g\, d\mu$ največji.

$g_1, g_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow g := \max\{g_1, g_2\} \in \mathcal{D}$

$E := \{x \in X \mid g_1(x) \ge g_2(x)\}$

$$\int_A g\, d\mu = \int_{A\cap E} g\, d\mu + \int_{A\cap E^c} g\, d\mu \le \int_{A\cap E} g_1\, d\mu + \int_{A\cap E^c} g_2\, d\mu$$

$$\le \lambda(A\cap E) + \lambda(A \cap E^c) = \lambda(A)$$

Če je $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ in $g_n \nearrow g$, potem je po LMK za $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\int_A g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n\, d\mu \le \lambda(A).$$

Definiramo $s := \sup\{\int_X g\,d\mu \mid g \in D\}$.

Obstaja zaporedje funkcij $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$, da $\int_X g_n\,d\mu \longrightarrow s$.

$$f_n := \max\{g_1, \dots, g_n\} \in D$$

$f = \sup f_n \in D$:
$$s \geq \underbrace{\int_X f\,d\mu}_{s} \geq \int_X f_n\,d\mu \geq \int_X g_n\,d\mu \downarrow s$$

Definiramo λ_a kot $\lambda_a(E) = \int_E f\,d\mu \quad \forall E \in \mathcal{A}$. Tedaj $\lambda_a \ll \mu$.

Definiramo $\lambda_s := \lambda - \lambda_a$.

$\lambda_s \perp \mu$:

Če $\lambda_s \not\perp \mu$, po lemi $\exists\, \varepsilon > 0$ in $E \in \mathcal{A}$, da je $\mu(E) > 0$ in $\lambda_s \geq \varepsilon\mu$ na E (na $(E, \mathcal{A}_E)$).

$$\varepsilon \chi_E\,d\mu \leq d\lambda_s = d\lambda - d\lambda_a = d\lambda - f\,d\mu$$

$$\Rightarrow (\varepsilon\chi_E + f)\,d\mu \leq d\lambda \quad \text{na } (X, \mathcal{A})$$

$$\Rightarrow \varepsilon\chi_E + f \in D \quad \text{in} \quad \int_X (\varepsilon\chi_E + f)\,d\mu = s + \mu(E) > s \quad \times$$

$\Rightarrow \lambda_s \perp \lambda$

<u>2.korak</u>: μ σ-končna $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \cap X_m = \emptyset$, $m \neq n$ in $\mu(X_n) < \infty$

Uporabimo ravnokar dokazano na vsakem kosu X_n in nato dobljene mere in funkcije "seštejemo".

Zakaj je $f \in L^1(\mu)$?
$$\lambda_a(X) = \int_X f\,d\mu \leq \lambda(X) < \infty \quad (\lambda \text{ končna poz. mera})$$

$\square$