Problem najmanjšega kroga

Jan Pristovnik in Jan Lampič

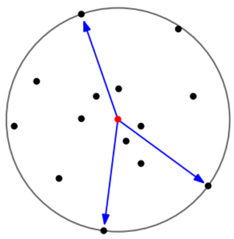
20.12.2017

1 Predstavitev problema

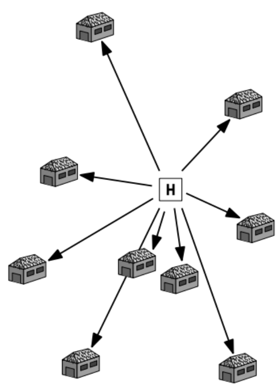
Problem najmanjšega kroga ali najmanjšega pokrivnega kroga je matematični problem izračunavanja najmanjšega kroga, ki vsebuje vse določene množice točk v evklidski ravnini. Ustrezni problem v n-dimenzionalnem prostoru, najmanjši problem z omejevalno sfero, je izračun najmanjše n-dimenzionalne sfere, ki vsebuje vse določene množice točk. Problem najmanjšega kroga je prvotno predlagal angleški matematik James Joseph Sylvester leta 1857.

Problem najmanjšega kroga v ravnini je primer težave z lokacijo objekta (problem z enim središčem), v katerem je treba izbrati lokacijo novega objekta, ki bo zagotavljal storitve vsem v naprej izbranim strankam. Nov objekt mora biti postavljen tako, da bo čim bolj zmanjšal najdaljšo razdaljo, ki jo mora katera koli stranka prepotovati, da doseže novi objekt.
Spodaj sta prikazana dva primera, prvi prikazuje problem najmanjšega kroga, drugi primer pa prikazuje kako lahko s pomočjo problema najmanjšega kroga rešujemo probleme iz realnega življenja.

Primer 1 *Glede na dano množico točk v ravnini, izračunaj najmanjši krog, ki jo vsebuje.*



Primer 2 *Na nekem izoliranem območju stoji niz hiš. Kam moramo posatviti bolnišnico, da bomo minimizirali najdaljšo razdaljo vsake posamezne hiše do bolnišnice?*
Kje naj postavimo anteno, da bo imelo čim več lokacij sprejem?



2 Karakterizacija problema

Večina geometrijskih pristopov za problem išče točke, ki ležijo na meji najmanjšega kroga in temeljijo na naslednjih preprostih dejstvih:

- Najmanjši krog, ki pokriva vse izbrane točke je edinstven
- Najmanjši krog, ki pokriva vse točke iz množice $\mathcal{P}$ lahko določimo z največ tremi točkami, ki ležijo na robu in so vsebovane v $\mathcal{P}$. Če je krog določen samo z dvema točkama, mora razdalja med točkama predstavljati premer minimalnega kroga. Če ga sestavljajo tri točke, potem trikotnik sestavljen iz teh treh točk, ne vsebuje topih kotov.

Kot je pokazal Nimrod Megiddo, je problem iskanja najmanjšega kroga, ki pokriva vse izbrane točke, rešljiv v linearnem času. Enako velja tudi za iskanje najmanjše n-sfere, ki vsebuje vse množice točk v n-dimenzionalnem prostoru.

3 Algoritem Welzla

V najini nalogi se bova osredotočila na algoritem **Emo Welzla**. Algoritem temelji na linearno programskem algoritmu Raimunda Seidela. Izbrala sva ga zaradi njegove enostavnosti in časovne zahtevnosti, ki je linearna.

3.1 Ideja algoritma in psevdo koda

Kako skonstruiramo najmanjši krog D_n (*angl. disk*), ki vsebuje n-točk ?
Če že poznamo najmanjši krog D_{n-1}, ki pokriva prvih $n-1$ točk $(p_1, \ldots, p_{n-1})$, potem sta za n-to točko možna dva primera.

1. Če točka p_n leži znotraj kroga D_{n-1}, se nič ne spremeni – krog D_{n-1} za točke $p_1, \ldots, p_{n-1}$ je enak kot D_n za točke $p_1, ..., p_n$.
2. Če p_n ne leži znotraj kroga D_{n-1}, je treba izračunati nov krog. Vemo pa, da mora n-ta točka ležati na robu kroga. Torej moramo izračunati najmanjši krog, ki vsebuje točke $p_1, \ldots, p_{n-1}$ in ima p_n na robu.

Ta lastnost skupaj z naslednjimi zahtevki nam omogoča, da najmanjši krog izračunamo na sledeč iterativen način. Naj bo $\mathcal{P}$ neprazna množica n točk v ravnini in p točka v $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ pa naj bo množica robnih točk. Potem velja:

- Če obstaja krog, ki vsebuje $\mathcal{P}$ in ima $\mathcal{R}$ na robu, potem je dobro definiran in enoličen.
- Če p ne leži v krogu $D(\mathcal{P} - \{p\}, \mathcal{R})$, potem p leži na robu kroga $D(\mathcal{P}, \mathcal{R})$, pod pogojem, da obstaja. To pomeni, da je $D(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = D(\mathcal{P} - \{p\}, \mathcal{R} \cup \{p\})$.
- Če $D(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ obstaja, potem obstaja množica $\mathcal{S}$, ki vsebuje $max\{0, 3 - |\mathcal{R}|\}$ točk v $\mathcal{P}$ tako, da je $D(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = (\mathcal{S}, \mathcal{R})$. To pomeni, da je najmanjši krog, ki vsebuje $\mathcal{P}$ določen z največ 3 točkami iz $\mathcal{P}$, ki ležijo na robu kroga.

S temi lastnostmi lahko algoritem implementiramo na rekurziven način.

Algorithm 1 Welzl

Require: Končni množici $\mathcal{P}$ in $\mathcal{R}$ točk v ravnini
Ensure: Najmanjši krog krog $D(\mathcal{P}, \mathcal{R})$, ki vsebuje množico točk $\mathcal{P}$ in ima $\mathcal{R}$ na robu
  if $\mathcal{P}$ je prazna ali $|\mathcal{R}| \geq 3$ **then**
    return Krog D, ki ga točke določajo.
  else
    Choose p iz P naključno;
    $D := Welzl(\mathcal{P} - \{p\}, \mathcal{R})$;
    if p je v D **then**
      return D
    end if
  end if
  return $Welzl(\mathcal{P} - \{p\}, \mathcal{R} \cup \{p\})$

4 Načrt dela

V najinem nadaljnem delu bova Welzlov algoritem zapisala v programskem jeziku `Python`. Algoritem bova aplicirala na različnih množicah točk. Vpeljimo sedaj nekaj oznak, da bova lahko razložila cilje najinega projektnega dela. Naj bo, za množico točk $\mathcal{A}$,$r(\mathcal{A})$ radij najmanjšega kroga, ki vsebuje $\mathcal{A}$. Naj bo $\mathcal{C}$ konveksno območje v ravnini in P_n vzorec n-tih naključnih točk iz $\mathcal{C}$. Zanimalo naju bo :

- Kako hitro $r(P_n)$ konvergira k $r(\mathcal{A})$?
- V kolikšni meri je hitrost zgornje konvergence odvisna od oblike območja $\mathcal{C}$?
- Katera oblika območja $\mathcal{C}$ ima najpočasnejšo konvergenco?

Če projekt ne bo dovolj obsežen se bova posvetila še drugim algoritmom, ki rešujejo problem najmanjšega kroga in jih primerjala z Welzlovim.