Laboratorium 3

Aproksymacja

Jan Rajczyk

24 marca 2021

1 Treści zadań

1.1 Zadania ćwiczeniowe

1. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale $[0, 1]$ wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla $w(x) = 1$.

2. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale $[0, 1]$ wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Czebyszewa.

1.2 Zadania domowe

1. Obliczyć 4-5 współczynników aproksymacji funkcji $|x|$ w przedziale $[-1, 1]$ wielomianami Czebyszewa. Obliczyć błąd aproksymacji w równoodległych punktach z odstępem 0.2, poczynając od punktu -0.8. Narysować na papierze kratkowanym funkcję aproksymowaną i aproksymującą.

2. Wykonać aproksymację funkcji $|\sin(x)|$ https://pl.wikipedia.org/wiki/Szereg$_Fourierafunkcjamitrygono$
$\pi, \pi]$.

2 Rozwiązania

2.1 Zadania ćwiczeniowe

1. Mamy:

$$f(x) = 1 + x^3, w(x) = 1, \varphi_0(x) = x^0 = 1, \varphi_1(x) = x^1 = x$$

.

Obliczamy następujące całki (zawsze "bierzemy"do nich (x) i jedynie zmieniamy następne dwa człony):

$$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)\,dx = \int_0^1 \,dx = 1$$

$$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 w(x)f(x)\varphi_0(x)\,dx = \int_0^1 (1 + x^3)\,dx = \frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 w(x)f(x)\varphi_1(x)\,dx = \int_0^1 (x + x^4)\,dx = \frac{7}{10}$$

Z powyższych obliczeń otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} c_0 \cdot (\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)\,dx + \int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\,dx) = \frac{5}{4} \\ c_1 \cdot (\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)\,dx + \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)\,dx) = \frac{7}{10} \end{cases}$$

co po uproszczeniu możemy zapisać jako:

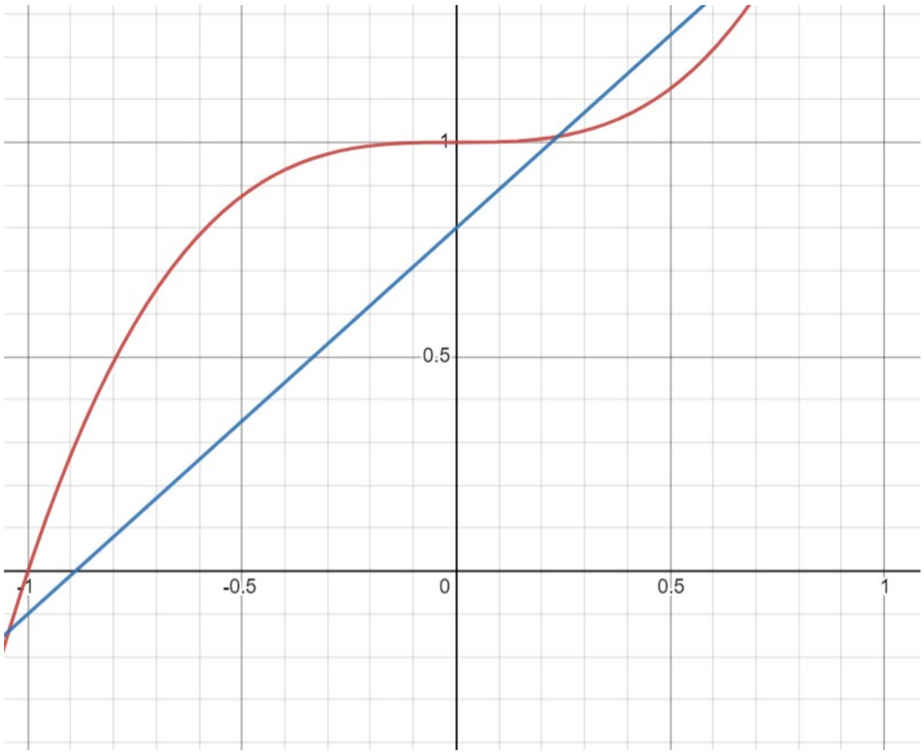
$$\begin{cases} c_0 & = \frac{5}{4} \\ c_1 & = \frac{7}{10} \end{cases}.$$

Rozwiązaniem zadanego układu jest para:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{4}{5} \\ c_1 = \frac{9}{10} \end{cases}$$

Otrzymujemy wzór na $q(x)$:

$$q(x) = \frac{4}{5} + \frac{9}{10}x$$



Rysunek 1: Funkcja $f(x)$ aproksymowana za za pomocą funkcji $q(x)$ przy użyciu metody średniokwadratowej

Wnioski: możemy zauważyć, że funkcja nie jest zbyt dobrze przybliżona, można nawet pokusić się o stwierdzenie, że z bardzo podobną precyzją jest przybliżana na przedziale $[-1, 0]$.

2. Wielomiany Czebyszewa możemy zdefiniować za pomocą rekurencji:
Wzór ogólny na n-ty wyraz ma postać:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

My potrzebujemy jedynie skorzystać z T_0, T_1 oraz T_2, a te zadane są w sposób następujący:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

Współczynniki funkcji aproksymującej $c_0, c_1, \ldots, c_n$ dane są następująco:

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{F(x)T_0(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{F(x)T_i(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, n \geq 1$$

Musimy jeszcze przeprowadzić transformację przedziału $[0,1]$, tak aby dostać przedział $[-1,1]$:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

A stąd dostajemy wzór $f(t)$:

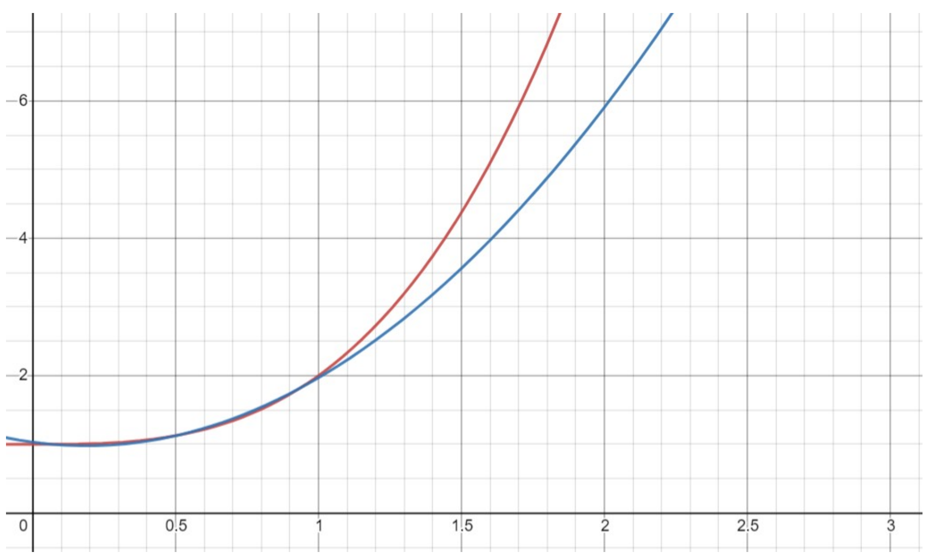
$$f(t) = 1 + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}t^3 + \frac{3}{8}t^2 + \frac{3}{8}t + \frac{9}{8}$$

Po wstawieniu zadanej funkcji do wzorów na kolejne współczynniki c otrzymujemy:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{21}{16} = 1.3125 \\ c_1 = \frac{15}{32} = 0.46875 \\ c_2 = \frac{3}{16} = 0.1875 \end{cases}$$

PO wstawieniu współczynników do funkcji aproksymującej dostajemy:

$$w(x) = \frac{21}{16} + \frac{15}{32}(2x-1) + \frac{3}{16}(2(2x-1)^2 - 1)$$



Rysunek 2: Wykres funkcji $f(x)$ aproksymowanej za pomocą wielomianów Czebyszewa

Wnioski: Po zwiekszeniu stopnia wielomianu oraz uzyciu wielomianów Czebyszewa otrzymaliśmy znacznie lepsze przybliżenie. Co ciekawe to przybliżenie jednak zupełnie nie jest adekwatne dla funkcji w przedziale poza $[0, 1]$.

2.2 Zadania domowe

1. Mamy nastepujący wielomiany Czebyszewa dla $n \geq 4$:

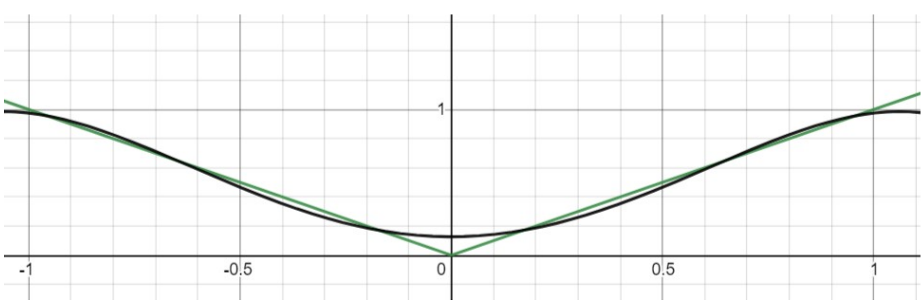
$$T_0 = 1$$
$$T_1 = x$$
$$T_2 = 2x^2 - 1$$
$$T_3 = 4x^3 - 3x$$
$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Teraz obliczamy współczynniki ze wzoru przedstawionego w zadaniu 2. z zajęć:

$$c_0 = \frac{2}{\pi} \approx 0.6366197723675813$$
$$c_1 = 0$$
$$c_2 = \frac{4}{3\pi} \approx 0.4244131815783876$$
$$c_3 = 0$$
$$c_4 = -\frac{4}{15\pi} \approx -0.08488263631567751$$

Wielomian $w(x)$ przyjmuje następującą postać:

$$w(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}(2x^2 - 1) - \frac{4}{15\pi}(8x^4 - 8x^2 + 1) = \frac{2}{5\pi} + \frac{24}{5\pi}x^2 - \frac{32}{15\pi}x^4$$



Rysunek 3: Aproksymacja funkcji wielomianem Czebyszewa z użyciem pięciu pierwszych współczynników.

Błędy aproksymacji (bezwzględny, jak i względny) przedstawia poniższa tabelka:

x	$q(x)$	$\lvert x\rvert$	$\lvert q(x)-\lvert x\rvert\rvert$	$\frac{\lvert q(x)-\lvert x\rvert\rvert}{\lvert x\rvert}$
-0.8	0.827029	0.8	0.027029	0.033786
-0.6	0.589357	0.6	0.010643	0.017738
-0.4	0.354402	0.4	0.045598	0.113995
-0.2	0.187353	0.2	0.012647	0.063235
0.0	0.127324	0.0	0.127324	–
0.2	0.187353	0.2	0.012647	0.063235
0.4	0.354402	0.4	0.045598	0.113995
0.6	0.589357	0.6	0.010643	0.017738
0.8	0.827029	0.8	0.027029	0.033786
1.0	0.976150	1.0	0.023850	0.023850

Tablica 1: Błędy aproksymacji dla kolejnych wartości x_i z przedziału $(-1, 1)$ ze *skokiem* co 0.2

Wnioski: Możemy zauważyć, że dane przybliżenie daje bardzo dobry rezultat, wartości funkcji aproksymującej w wielu miejscach bardzo nieznacznie różnią się od rzeczywistych wartości funkcji.

2. Trygonometryczny szereg Fouriera zadany jest poprzez $S(x)$ oraz a_n i b_n:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Funkcja, którą mamy zadanie aproksymować, czyli $f(x) = |\sin x|$ spełnia warunki Dirichleta. Co więcej, funkcja ta jest parzysta, wobec czego współczynnik b_n stale jest równy 0, co znacząco ułatwia wykonywanie pewnych operacji.
W naszym zadaniu T jest równe 2π. Otrzymujemy:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\, dx = -\frac{2\left(\cos\left(\pi n\right)+1\right)}{\pi\left(n^2-1\right)}$$

Rozwijając szeregiem Fouriera dostajemy następujący wzór na $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4\cos(2nx)}{\pi((2n)^2-1)}$$

3 Bibliografia

- Katarzyna Rycerz: Wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

- https://www.integral-calculator.com
- https://www.desmos.com
- https://www.wolframalpha.com
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Czebyszewa
- Włodzimierz Funika: Materiały ze strony