Laboratorium 2

Interpolacja

Jan Rajczyk

22 marca 2021

1 Zadania laboratoryjne

1. Dane są trzy węzły interpolacji (-2.9,1), (0,1.5), (2.3,3.9), proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia, wykorzystując:
   (a) jednomiany
   (b) wielomiany Lagrange'a
   Pokazać, że trzy reprezentacje dają ten sam wielomian
2. Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera: $p(t) = 3t^3 + 7t^2 + 5t - 4$
3. Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu $p(t)$ stopnia $n - 1$ w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentacje:
   (a) jednomiany
   (b) wielomiany Lagrange'a
   (c) wielomiany Newtona

2 Zadania domowe

1. (a) Obliczyć wielomian interpolacyjny dla danych (0.5,5.5), (1,14.5), (1.5,32.5), (2,62.5) przy pomocy jednomianów.
   (b) Obliczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla tych samych danych i pokazać, że wielomian będzie ten sam co w 1a.
   (c) Obliczyć wielomian interpolacyjny Newtona dla tych samych danych korzystając z metody używającej trójkąta różnic i metody różnic skończonych i pokazać, że każda metoda daje ten sam wynik.
2. Dowieść, że wzór używający różnice skończonych $yi = f[x_1, x_2, \dots, x_j]$ rzeczywiście daje współczynnik j-tej funkcji bazowej w interpolującym wielomianie Newtona.

3. Wykonać interpolację funkcji $f(x) = |\sin(x)|$ w przedziale $[-4, 4]$ przy użyciu wielomianów Lagrange'a 2-go, 5-go oraz 10-go stopnia, dla równoodległych węzłów interpolacji. Narysować wykres na papierze w kratkę oraz go zinterpretować.

3 Rozwiązania - zadania laboratoryjne

1. (a) Jednomiany:
   Mając zadane węzły interpolacji możemy skonstruować wielomian $W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Szukane a_0, a_1, a_2 znajdziemy rozwiązując układ równań:

   $$\begin{cases} a_0 - 2.9a_1 + (-2.9)^2a_2 = 1 \\ a_0 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 = 1.5 \\ a_0 + 2.3a_1 + (2.3)^2a_2 = 3.9 \end{cases}$$

   Otrzymujemy rozwiązania: $a_0 = 1.5, a_1 = 0.6582, a_2 = 0.167512$. Stąd wielomian ma postać:

   $$W(x) = 0.167512x^2 + 0.6582x + 1.5$$

   .

   (b) Wielomiany Lagrange'a:
   Otrzymujemy wielomian:

   $$W(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 =$$
   $$= \frac{(x-0)(x-2.3)}{(-2.9-0)(-2.9-2.3)}1 + \frac{(x+2.9)(x-2.3)}{(0+2.9)(0-2.3)}1.5 + \frac{(x+2.9)(x-0)}{(2.3+2.9)(2.3-0)}3.9 =$$
   $$= 0.167512x^2 + 0.6582x + 1.5$$

   .

   (c) Wielomiany wg wzoru Newton'a:
   $W(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

   $f[x_0] = 1, f[x_1] = 1.5, f[x_2] = 3.9,$

   $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{1.5-1}{0+2.9} = 0.17241$

   $f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{3.9-1.5}{2.3-0} = 1.04378$

   $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = 0.16757$

   Otrzymujemy:

$$W(x) = 1 + 0.17241(x+2.9) + 0.16757(x+2.9)(x-0) =$$
$$= 0.167512x^2 + 0.6582x + 1.5$$

Podsumowanie: Wszystkie trzy metody dają ten sam wielomian.

2. Dokonujemy przekształceń i otrzymujemy:

$$p(t) = 3t^3 + 7t^2 + 5t - 4 = t(3t^2 + 7t + 5) - 4 = t(t(3t+7)+5) - 4$$

.

3. (a) Ewaluując za pomocą schematu Hornera dostajemy $n-1$ mnożeń.

   (b) Aby obliczyć wyraz L_k musi wykonać $n-1$ mnożeń. Wyrazów jest n stąd, aby wyliczyć wszystkie wyrazy L musimy wykonać $n \cdot (n-1)$ mnożeń, a jeszcze dodatkowo każdy z wyrazów mnożymy przez rzędną, więc w sumie dostajemy: $n \cdot (n-1) + n = n^2$ mnożeń.

   (c) Obliczenie p_k zajmuje k mnożeń, a $k \in \langle 0, n-1 \rangle$, stąd ilość mnożeń jaką musimy wykonać to: $\sum_{k=1}^{n-1} k = n^2$.

4 Rozwiązania - zadania domowe

1. (a) Jednomiany: Dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} \mathrm{a}_0 + 0.5a_1 + (0.5)^2 a_2 + (0.5)^3 a_3 = 5.5 \\ \mathrm{a}_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 14.5 \\ \mathrm{a}_0 + 1.5a_1 + (1.5)^2 a_2 + (1.5)^3 a_3 = 32.5 \\ \mathrm{a}_0 + 2a_1 + (2)^2 a_2 + (2)^3 a_3 = 62.5 \end{cases}$$

   Otrzymujemy rozwiązania: $a_0 = 2.5, a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 4$, stąd wielomian ma postać:

$$W(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5.$$

   (b) Podstawiamy do danego wzoru nasze punkty (podobnie jak w pierwszym zadaniu) i dostajemy:

$$W(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 =$$
$$= 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$$

(c) Trójkąt ilorazów różnicowych ma postać:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+3}]$
0.5	5.5			
		18		
1	14.5		18	
		36		4
1.5	32.5		24	
		60		
2	62.5			

Tablica 1: Trójkąt różnic

Otrzymujemy wielomian:

$$W(x) = 5.5 + (x-0.5)18 + (x-0.5)(x-1)18 + (x-0.5)(x-1)(x-1.5)4 =$$

$$= 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$$

Wnioski: Otrzymane wielomiany są identyczne.

2. Dowód:

Mając wielomian w postaci Newtona:

$$w_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

oraz różnicę opartą na k węzłach (od 0 do k):

$$f[x_0, x_1, \ldots x_k] = \frac{f[x_1, x_2 \ldots x_k] - f[x_0, x_1 \ldots x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

będziemy chcieli pokazać, że:

$$a_j = f(x_0, \ldots, x_j)$$

Oznaczmy przez $w_{i,j}(x)$ wielomian interpolujący funkcję dla węzłów od i do j. Będziemy chcieli pokazać, że wówczas:

$$w_{i,j}(x) = \frac{(x - x_i)\, w_{i+1,j}(x) - (x - x_j)\, w_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i}.$$

Jeżeli oznaczymy prawą stronę jako $v(x)$ to będziemy chcieli pokazać, że w węzłach od i do j przyjmuje ona wartości $f(x_i) \ldots f(x_j)$

Jeżeli $x = x_i$:

$$v(x_i) = \frac{-(x_i - x_j)w_{i,j-1}(x_i)}{x_j - x_i} = w_{i,j-1}(x_i) = f[x_i]$$

Analogicznie jeżeli $x = x_j$:

$$v(x_j) = w_{i+1,j}(x_j) = f[x_j]$$

Wobec tego zależność rekurencyjna $w_{i,j}$ jest spełniona. Indukcyjnie załóżmy, że teza jest prawdziwa ze względu na stopień wielomianu, a więc, że zachodzi:

$$a_j = f\left(x_0, \dots, x_j\right)$$

Jeżeli stopień wielomianu $n = 0$ to $a_0 = f\left(x_0\right)$.
Zauważmy, że

$$w_{0,n} = w_{0,n-1} + a_n\left(x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1}\right),$$

gdzie a_n jest współczynnikiem przy x^n. Wcześniej pokazaliśmy, że

$$w_{0,n}(x) = \frac{\left(x - x_0\right) w_{1,n}(x) - \left(x - x_n\right) w_{0,n-1}(x)}{x_n - x_0}$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że współczynniki przy $x^n - 1$ w wielomianie $w_{1,n}$ i $w_{0,n-1}$ są oparte o ilorazy różnicowe $f\left(x_1 \dots x_n\right)$ i $f\left(x_0, x_{n-1}\right)$, stąd

$$a_n = \frac{f\left(x_1 \dots x_n\right) - f\left(x_0, x_{n-1}\right)}{x_n - x_0} = f\left(x_0, \dots, x_n\right)$$

co było do udowodnienia.

3. Interpolacja $|\sin x|$:

   (a) Wielomian stopnia drugiego:
   Bierzemy węzły: $x_0 = -4, x_1 = 0, x_2 = 4$ i dostajemy:

   $$W_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2,$$

   co po uproszczeniu daje:

   $$W_2(x) = -\frac{1}{16}x^2 \sin 4 \approx 0.0473x^2$$

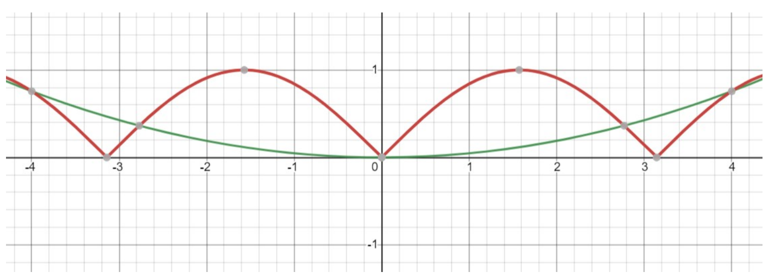
(b) Wielomian stopnia piątego:
Bierzemy węzły: $x_0 = -4, x_1 = -2.4, x_2 = -0.8,$
$x_3 = 0.8, x_4 = 2.4, x_5 = 4$ i po uproszczeniu wzoru Lagrange'a (korzystając z narzędzi komputerowych) dostajemy:

$$W_5(x) \approx 0.00104984x^4 - 0.0149012x^2 + 0.726463$$

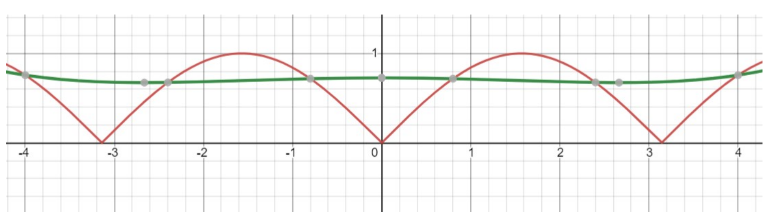
(c) Wielomian stopnia dziesiątego:
Bierzemy węzły: $x_0 = -4, x_1 = -3.2, x_2 = -2.4, x_3 = -1.6,$
$x_4 = -0.8, x_5 = 0, x_6 = 0.8, x_7 = 1.6, x_8 = 2.4, x_9 = 3.2, x_{10} = 4$
i po uproszczeniu wzoru Lagrange'a (korzystając z narzędzi komputerowych) dostajemy:

$$W_{10}(x) \approx 0.000314469x^{10} - 0.0112205x^8 + 0.139228x^6 - 0.736444x^4 + 1.53805x^2$$

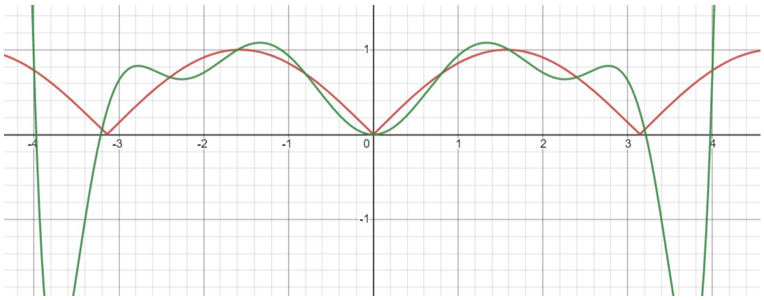
Wykresy(sporządzone z użyciem programu Desmos):
(kolorem czerwonym zaznaczono wykres funkcji $|\sin x|$, zaś zielonym wykresy wielomianów interpolujących)



Rysunek 1: Interpolacja dla dwóch punktów



Rysunek 2: Interpolacja dla pięciu punktów



Rysunek 3: Interpolacja dla dziesięciu punktów

5 Bibliografia

- Katarzyna Rycerz: *Wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice*
- `http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=MN09`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination`
- `https://www.desmos.com/?lang=pl`
- `https://www.wolframalpha.com/`
- `http://www.imio.polsl.pl/Dopobrania/Interpolacja.pdf`