Verjetnost sekanja konveksne podmnožice -
Kratko poročilo

Peter Dolenc, Jan Rems

2017

1 Uvod

V nalogi se bova soočila z naslednjim problemom. Zamislimo si, da imamo na Evklidski ravnini neko *konveksno množico* C , ki vsebuje *konveksno podmnožico* C'. Najina naloga bo določiti verjetnost dogodka, da naključna premica, ki seka množico C seka tudi podmnožico C'. Gre za klasični problem s področja stohastične geometrije, ki se ga da posplošiti tudi na druge veje verjetnostne teorije. *Hipoteza*, ki jo postavljava trdi, *da bo verjetnost zgoraj omenjenega dogodka enaka razmerju obsegov konveksnih množic.* Najina glavna naloga bo, da postavljeno hipotezo najprej *teoretično* utemeljiva, nato pa izvedeva še *eksperiment*, kjer se bova s pomočjo programa, ki bo generiral naključne premice in konveksne množice, poizkusila čim bolj približati željenemu rezultatu.

2 Analitična rešitev problema

Za začetek vpeljimo nekaj pojmov, ki so potrebni za formuliranje klasičnega izreka s področja integralske geometrije, ki nam bo v pomoč pri izpeljavi rezultata, ki ga predvideva najina hipoteza.

Definicija 1 *Množico vseh neorientiranih premic na* $\mathbb{R}^2$ *definiramo kot:*

$$\{(p, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, p \geq 0\},$$

kjer p *predstavlja oddaljenost premice od izhodišča,* θ *pa kot premice glede na* x *os.*

S tem ko imamo definirano množico vseh premic na $\mathbb{R}^2$, lahko na tej množici podamo tudi *mero* s predpisom $\int \int d\theta dp$. Sedaj lahko podamo željeni izrek.

Izrek 1 (Cauchy-Croftonova formula) *Naj bo* c *regularna ravninska krivulja in* $n_c(p, \theta)$ *število točk, pri katerih premica, parametrizirana na način, kot je podan v definiciji, seka krivuljo* c*. Potem za dolžino krivulje* $L(c)$ *veja:*

$$L(c) = \frac{1}{2} \int \int n_c(p, \theta) d\theta dp$$

Zaradi zgornjega rezultata je iskanje preseka premice s konveksno množico smiselno prevesti na problem iskanja presečišč premice in *sklenjene regularne krivulje*, ki omejuje dano konveksno množico. Tako nas namesto razmerja obsegov zanima *razmerje dolžine krivulj*, kjer ena omejuje konveksno množico C, druga pa njeno konveksno podmnožico C'. Tudi krivulji bomo ustrezno poimenovali γ in γ'. Krivuljam, ki omejujejo konveksne množice, pravimo *konveksne krivulje.*

Glavna naloga v teoretičnem delu naloge bo torej *apliciranje Cauchy-Croftonove formule na primer konveksnih krivulj*, čemur bo sledila *izpeljava* izražave verjetnosti dogodka, da premica ki seka krivuljo γ, seka tudi krivuljo γ', z razmerjem dolžine obravnavanih krivulj.

3 Načrt eksperimentalnega dela

Eksperimentalnega dela projekta se bova lotila z metodami *Monte Carlo*. To so simulacijske metode, ki s pomočjo naključnih števil in velikega števila izračunov in ponavljanja omogočajo predvidevanje obnašanja zapletenih matemtičnih sistemov. Ideja je sledeča: *generirati dve naključni konveksni krivulji* γ in γ', kjer je γ' strogo vsebovana v γ in pa *naključno premico*, ki seka γ ter ugotoviti, ali premica seka tudi γ'. Z mnogo ponovitvami implementiranega algoritma, bomo lahko *ocenili* verjetnost, da naključna premica, ki seka večjo konveksno krivuljo, seka tudi manjšo.

Simulacije geometrijskega problema se bova lotila postopoma. Na začetku bova poskušala preveriti najino hipotezo na enostavnejših konveksnih krivuljah - *elipsah*, kasneje pa bova obravnavala konveksne krivulje *splošnejše* oblike. Pri delu z elipsami je cilj napisati program, ki bo sposoben obvladovanja osnovnih ukazov: *generiranje elips in premic* ter prepoznavanja, kdaj te premice res sekajo naše objekte. Ta orodja nama bodo pomagala pri nadaljnem delu, ko bova kot že omenjeno z generiranjem naključnih konveksnih krivulj, problem *posplošila*.

Drugi del izziva bo predstavljal *generiranje naključnih premic*. Za to obstaja več ekvivalentnih načinov. Eden takšnih je tak, kot je opisano v definiciji: naključno določimo par (p, θ), kjer p predstavlja oddaljenost premice do izhodišča, θ pa kot med premico in x osjo. Ker naju zanimajo le tiste premice, ki sekaj večjo od krivulj se pravi γ, bova poizkusila tudi z *alternativnim pristopom*, h generiranju naključnih premic in sicer z določitvijo dveh *naključnih točk* ter s tem premice, ki bo skozi njiju potekala. Prva točka bo ležala *znotraj večje od krivulj*, med tem ko bo druga *kjer koli na dani ravnini*. Tako bova dobila generirane le premice, ki bodo z gotovostjo sekale γ in bova zato morala preveriti zgolj, ali sekajo tudi γ'.

Po opravljenih simulacijah naju bo, poleg *ujemanja* eksperimentalnega rezultata s postavljeno hipotezo, zanimalo tudi kako hitro bo dobljeni približek *konvergiral* k točnemu rezultatu, ki ga bova dobila z analitičnim pristopom. Poleg tega bova pozorna tudi na *časovno zahtevnost* napisanih algoritmov in njihovo obnašanje v odvisnosti od izbire načina generiranja naključnih premic.

Delo bo potekalo v programskem okolju *Matlab*.