Verjetnost sekanja konveksne podmnožice - Poročilo

Peter Dolenc, Jan Rems

2017

1 Uvod

V nalogi se bova soočila z naslednjim problemom. Zamislimo si, da imamo na Evklidski ravnini neko *konveksno množico* C , ki vsebuje *konveksno podmnožico* C'. Najina naloga bo določiti verjetnost dogodka, da naključna premica, ki seka množico C seka tudi podmnožico C'. Gre za klasični problem s področja stohastične geometrije, ki se ga da posplošiti tudi na druge veje verjetnostne teorije. *Hipoteza*, ki jo postavljava trdi, *da bo verjetnost zgoraj omenjenega dogodka enaka razmerju obsegov konveksnih množic*. Nalogo sva razdelila, na dva dela. V prvem delu, problemu najprej postaviva *teoretični* okvir in rešitev izpeljeva analitično. Nato pa se problema lotiva še eksperimentalno in spiševa program, ki se reševanja problema loti numerično.

2 Analitična rešitev problema

Za začetek vpeljimo nekaj pojmov, ki so potrebni za formuliranje klasičnega izreka s področja integralske geometrije, ki nam bo v pomoč pri izpeljavi rezultata, ki ga predvideva najina hipoteza.

Definicija 1 *Množico vseh neorientiranih premic na* $\mathbb{R}^2$ *definiramo kot:*

$$\{(p,\theta)|0 \leq \theta \leq 2\pi, p \geq 0\},$$

kjer p *predstavlja oddaljenost premice od izhodišča,* θ *pa kot premice glede na* x *os.*

S tem ko imamo definirano množico vseh premic na $\mathbb{R}^2$, lahko na tej množici podamo *mero*.

Definicija 2 *Naj bo* S *neka množica premic v* $\mathbb{R}^2$*, kjer so premice podane na način, kot je naveden v Definiciji 1. Potem na množici* S *definiramo mero* $\mu : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty]$*, ki je podana s naslednjim predpisom:*

$$\mu(S) = \int\int_S d\theta dp$$

Naj dodamo, da je mera μ *invariantna glede na toge premike.*

Sedaj pa podajmo še naslednji pomembni izrek.

Izrek 1 (Cauchy-Croftonova formula) *Naj bo* c *regularna ravninska krivulja in* $n_c(p,\theta)$ *število točk, pri katerih premica, parametrizirana na način, kot je podan v Definiciji 1, seka krivuljo* c*. Potem za dolžino krivulje* $L(c)$ *velja:*

$$L(c) = \frac{1}{2}\int\int n_c(p,\theta) d\theta dp$$

Zaradi zgornjega rezultata je iskanje preseka premice s konveksno množico smiselno prevesti na problem iskanja presečišč premice in *sklenjene regularne* *krivulje*, ki omejuje dano konveksno množico. Tako nas namesto razmerja obsegov zanima *razmerje dolžine krivulj*, kjer ena omejuje konveksno množico C, druga pa njeno konveksno podmnožico C'. Tudi krivulji bomo ustrezno poimenovali γ in γ'. Krivuljam, ki omejujejo konveksne množice, pravimo *konveksne krivulje*.

Označimo z Γ dogodek, da naključno izbrana premica l seka krivuljo γ ($\Gamma = \{l \cap \gamma \neq \emptyset\}$), z Γ' pa dogodek da premica l seka vsebovano krivuljo γ' ($\Gamma' = \{l \cap \gamma' \neq \emptyset\}$). Verjetnost dogodka, da naključna premica, ki seka krivuljo γ, seka tudi γ torej izrazimo na naslednji način

$$P(\Gamma'|\Gamma) = \frac{P(\Gamma' \cap \Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{P(\Gamma')}{P(\Gamma)} \tag{1}$$

Ker je, če imamo opravka s sklenjeno konveksno krivuljo c, število presčišč premice s krivuljo c skoraj gotovo enako 0 oziroma 2, in pa zaradi Cauchy-Croftonove formule iz Izreka 1 , velja naslednja enakost

$$\mu(\{L : L \cap c \neq \emptyset\}) = \int\int_{\{L:L\cap c\neq\emptyset\}} d\theta dp = L(c) \tag{2}$$

Če torej mero μ ustrezno normiramo, da postane verjetnostna z združitvijo enačb 1 in 2 hitro dobimo željeni rezultat

$$P(\Gamma'|\Gamma) = \frac{L(\gamma')}{L(\gamma)} \tag{3}$$

Sedaj ko smo intuitivno analitično dokazali postavljeno hipotezo, si oglejmo še eksperimentalni del naloge.

3 Načrt eksperimentalnega dela

Eksperimentalnega dela projekta se bova lotila z metodami *Monte Carlo.* To so simulacijske metode, ki s pomočjo naključnih števil in velikega števila izračunov in ponavljanja omogočajo predvidevanje obnašanja zapletenih matemtičnih sistemov. Ideja je sledeča: *generirati dve naključni konveksni krivulji* γ in γ', kjer je γ' strogo vsebovana v γ in pa *naključno premico*, ki seka γ ter ugotoviti, ali premica seka tudi γ'. Z mnogo ponovitvami implementiranega algoritma, bomo lahko *ocenili* verjetnost, da naključna premica, ki seka večjo konveksno krivuljo, seka tudi manjšo.

Simulacije geometrijskega problema se bova lotila postopoma. Na začetku bova poskušala preveriti najino hipotezo na enostavnejših konveksnih krivuljah - *elipsah*, kasneje pa bova obravnavala konveksne krivulje *splošnejše* oblike. Pri delu z elipsami je cilj napisati program, ki bo sposoben obvladovanja osnovnih ukazov: *generiranje elips in premic* ter prepoznavanja, kdaj te premice res sekajo naše objekte. Ta orodja nama bodo pomagala pri nadaljnem delu, ko bova kot že omenjeno z generiranjem naključnih konveksnih krivulj, problem *posplošila.*

Drugi del izziva bo predstavljal *generiranje naključnih premic*. Za to obstaja več ekvivalentnih načinov. Eden takšnih je tak, kot je opisano v definicji: naključno določimo par (p, θ), kjer p predstavlja oddaljenost premice do izhodišča, θ pa kot med premico in x osjo. Ker naju zanimajo le tiste premice, ki sekaj večjo od krivulj se pravi γ, bova poizkusila tudi z *alternativnim pristopom*, h generiranju naključnih premic in sicer z določitvijo dveh *naključnih točk* ter s tem premice, ki bo skozi njiju potekala. Prva točka bo ležala *znotraj večje od krivulj*, med tem ko bo druga *kjer koli na dani ravnini*. Tako bova dobila generirane le premice, ki bodo z gotovostjo sekale γ in bova zato morala preveriti zgolj, ali sekajo tudi γ'.

Po opravljenih simulacijah naju bo, poleg *ujemanja* eksperimentalnega rezultata s postavljeno hipotezo, zanimalo tudi kako hitro bo dobljeni približek *konvergiral* k točnemu rezultatu, ki ga bova dobila z analitičnim pristopom. Poleg tega bova pozorna tudi na *časovno zahtevnost* napisanih algoritmov in njihovo obnašanje v odvisnosti od izbire načina generiranja naključnih premic.

Delo bo potekalo v programskem okolju *Matlab*.