
Prolog

Tento konvolut tří knih představuje ucelený a navzájem propojený soubor učebnic newtonovské mechaniky. Vznikal postupně během uplynulého čtvrtstoletí jako učební text pro potřeby kurzů *Teoretická mechanika* a *Proseminář teoretické mechaniky*, které od roku 1995 resp. 2004 přenáším na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy.

Výklad teoretické mechaniky při *klasické přednášce*, které odpovídá obsah *KNIHY PRVNÍ*, se opírá o parametrizaci pomocí zobecněných souřadnic a rychlostí, případně kanonických hybností, a o složková vyjádření fyzikálních veličin. To má své dobré důvody historické, didaktické i početní. Od počátku 20. století však byly pojmy a zákony mechaniky postupně přereformulovány do abstraktního, elegantního jazyka diferenciální geometrie. Oproštění od souřadnic a složek veličin vedlo k hlubšímu pochopení podstaty mechaniky, zejména její symplektické struktury. Ucelený a systematický výklad tohoto *geometrického pojetí klasické mechaniky* v české literatuře dosud chyběl, a právě to je obsahem *KNIHY DRUHÉ*. Lze ji dobře použít jako studijní podklad volitelného prosemináře. Trilogii uzavírají *hlavní typové příklady*, které by v průběhu semestru měly být spočítány na cvičeních. Pečlivě zvolené příklady v *KNIZE TŘETÍ*, které jsou všechny vzorově vyřešeny, ilustrují obecné teoretické metody a vztahy. Tím pomáhají pochopit aplikaci vzorců vyložených v knize první. Předkládaný konvolut tedy vzájemně provazuje klasickou přednášku a cvičení s moderním proseminářem.

V knihách jsou kromě toho zmíněny přirozené návaznosti na další obory teoretické fyziky, zejména kvantovou teorii, teorii relativity, teorii pole a statistickou fyziku. Mým cílem byla také přehledná struktura a srozumitelnost textů, bohatost ilustrací, adekvátnost rozsahu i formy výkladu a v neposlední řadě též přívětivá typografická podoba díla.

Jiří Podolský, Praha, 10. února 2023

Předmluva a poděkování

Tento text by nemohl vzniknout bez Jiřího Langera (1939–2020), mého skvělého učitele a pak blízkého kolegy z Ústavu teoretické fyziky. Doc. RNDr. Jiří Langer, CSc., se výuce teoretické mechaniky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy věnoval šest desetiletí. Za tu dobu vychoval mnoho tisíc studentů.

Mezi nimi jsem se na podzim roku 1983 ocitl i já. Předmět *Teoretická mechanika* pro studenty 2. ročníku fyziky na Matfyzu mě doslova uhranul a 22. prosince jsem z něj úspěšně složil zkoušku (zápis v indexu mi doc. Langer provedl zeleným inkoustem, podobně jako v prvním ročníku prof. Kvasnica za *Proseminář matematické fyziky*). Nemohl jsem tehdy tušit, že se mi tento nádherný předmět stane celoživotním pedagogickým osudem. Jsem za to opravdu vděčný, a klíčovou roli v tom opět sehrál Jiří Langer. Když jsem v roce 1989 nastoupil na vědeckou aspiranturu na katedru matematické fyziky MFF UK (postupně se mohla zase vrátit k tradičnímu názvu Ústav teoretické fyziky), zvolil si mne jako jednoho z cvičících tohoto předmětu.

V roce 1990 jsem odjel studovat do USA a tam shodou okolností na University of New Mexico pomáhal jako Graduate Assistant výbornému pedagogovi prof. Charlesi Beckelovi s výukou kurzu *Analytical Mechanics*. Bylo velmi zajímavé a poučné na vlastní kůži zažít, jaký způsobem probíhá výuka teoretické mechaniky na amerických univerzitách a jaký je její obsah.

Po návratu do Prahy mne Jiří Langer podrobně vyzpovídal. Přemýšleli jsme potom, jak nejlépe zkombinovat tradiční středoevropský styl výuky s americkým, ve kterém se namísto cvičení jenom zadávají domácí úkoly a namísto písemného a ústního zkoušení jen píší testy. Tak vznikl náš „hybridní“ bodový systém,¹ který se opírá o pozitivní motivaci studentů a vede k jejich průběžné práci. Dost se nám osvědčil.

Krátce poté v roce 1995 mne Jiří Langer přizval, abych s ním kurz *Teoretická mechanika* přednášel. Za tuto jeho velkorysou nabídku, která pro mne byla jako z říše snů, jsem mu dodnes velmi zavázán. Tak jsem se jako začínající odborný asistent dostal k přednášení mechaniky na MFF UK. Nejprve jsem ze semestrálního kurzu převzal osm přednášek věnovaných hmotným bodům (až po Hamiltonovu–Jacobiho teorii), o čtyři roky později jsem přibral i dvě přednášky o mechanice tuhého tělesa. Od roku 2000 tak na kolegu Langera zbylo každoroční přednášení mechaniky kontinua. Inu, podal mi prst a přišel o skoro celou ruku…

Tolik můj osobní příběh. Pro zachování historické paměti snad bude zajímavé uvést i vážené předchůdce, přednášející tohoto předmětu na Matematicko-fyzikální fakultě od jejího osamostatnění v roce 1952. Podle osobních vzpomínek Jiřího Langera a některých mých (možná neúplných) podkladů bylo personální obsazení výuky následující:

Miroslav Brdička	zhruba do roku 1960
Arnošt Hladík	60. léta
Jiří Langer	cvičení a od roku 1964 části přednášek
Jiří Blank, Luboš Valenta	několikrát v 70. letech
Jiří Langer	zhruba od roku 1980
Jiří Podolský	od roku 1995

Uvedená jména dokládají, že je už dlouhou tradicí, aby výuku teoretické mechaniky zajišťovali členové Ústavu (katedry) teoretické (matematické) fyziky. Je to tradice nesmírně zavazující.

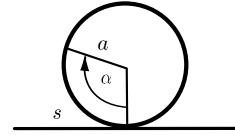
¹Během semestru lze získat až 100 bodů (10 bodů za každý ze 4 domácích úkolů a 60 bodů za napsání testu obsahujícího 3 úlohy). Kdo získá alespoň 60 bodů, dostane zápočet. Kdo získá alespoň 80 bodů, nemusí psát písemnou část zkoušky. Odměnou za 95 a více bodů je čokoládový bonbón.

K neholonomním vazbám je však nezbytné učinit ještě důležitou poznámkou: *ne každá vazba obsahující rychlosť je neholonomá*. Neholonomní je pouze taková, ve které se závislosti na rychlosti nelze zbavit integraci.

Příklad zdánlivě neholonomní vazby:

disk pohybující se bez prokluzování po vodorovné přímce
úloha má jen jeden stupeň volnosti

Vazba na neprokluzování zní $\dot{s} = a\dot{\alpha}$, což ale lze integrovat do podoby holonomní vazby $\phi \equiv s - a\alpha = 0$.

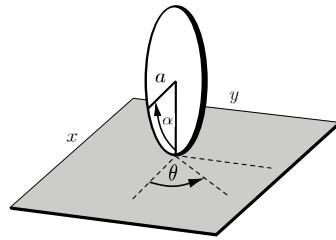


Příklad skutečně neholonomní vazby:

disk pohybující se bez prokluzování po vodorovné rovině
úloha má čtyři stupně volnosti (je-li disk stále svislý):

(x, y) bod dotyku, α úhel odvalení, θ úhel natočení disku

Vazby na neprokluzování jsou $\dot{x} = a\dot{\alpha}\cos\theta$ a $\dot{y} = a\dot{\alpha}\sin\theta$,
což jsou dvě vazby tvaru $\phi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\alpha}, \theta) = 0$, které však
nelze integrovat do holonomních vazeb $\phi(x, y, \alpha, \theta) = 0$.



Důkaz tohoto tvrzení je zřejmý: vždy je totiž možné dostat se z počátečního stavu $x = 0 = y$, $\alpha = 0$ valením bez prokluzování do místa (x, y) s předepsaným úhlem odvalení α a s libovolným úhlem natočení disku θ . Stačí zvolit vhodnou trajektorii, která končí v bodě (x, y) , má délku $s = a\alpha$ a tečna k trajektorii v koncovém bodě má směr θ . Všechny čtyři parametry jsou tedy zcela nezávislé, takže pro ně nemůže existovat vazba tvaru $\phi(x, y, \alpha, \theta) = 0$.

2.2 Lagrangeovy rovnice I. druhu

Vratme se nyní k řešení úlohy, jak najít pohyb objektu podrobeného vazbě. V případě, že hmotnost objektu m je konstantní (například jde o hmotný bod), lze Newtonovu pohybovou rovnici (1.1) psát v obvyklém tvaru $m\ddot{x} = \mathbf{F}$, tedy v kartézských souřadnicích

$$m\ddot{x}_i = F_i(x^j, \dot{x}^j, t), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

doplnit závislost
 $F^i(x^j, \dot{x}^j, t)$
ale
nižší?

přičemž $\ddot{x}_i = \ddot{x}^i$ jsou kartézské složky zrychlení.³ To je obecně soustava obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu pro hledanou trajektorii $x^i(t)$. Pokud jsou funkce $F_i = F^i$ vyjadřující kartézské složky působící **vtištěné síly** \mathbf{F} hladké funkce polohy a případně rychlosti a času, rovnice mají jednoznačné řešení určené počátečními podmínkami, tedy počáteční polohou x_0^i a rychlostí \dot{x}_0^i .

Předpokládejme nyní, že na soustavu naložíme jednu holonomní (oboustrannou) vazbu

$$\phi(x^j, t) = 0, \quad (2.10)$$

což je v každém okamžiku t implicitní rovnice (hladké) pevné plochy v třírozměrném euklidovském prostoru. Řešení rovnic (2.9) už nebude podmínkám (2.10) vyhovovat.⁴ Zkoumejme tedy, jak musíme pohybové rovnice (2.9) pozměnit, aby jejich řešení vazbu (2.10) v každém čase splňovalo.

Přidejme na pravou stranu pohybové rovnice (2.9) vhodné funkce $R_i(x^j, \dot{x}^j, t)$, které můžeme interpretovat jako kartézské složky dodatečné **vazbové síly** \mathbf{R} , zapříčeněné interakcí s vazbou. V každém okamžiku a v každém místě vazby $\phi = 0$ můžeme tuto sílu jednoznačně rozložit na sílu **T tečnou** k vazbové ploše (2.10) a sílu **N** k této ploše **kolmou**, tedy $\mathbf{R} = \mathbf{T} + \mathbf{N}$. Normálovou komponentu **N** vazbové síly můžeme bez újmy na obecnosti psát ve složkách jako

$$N_i = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad (2.11)$$

³Obecně je mezi *vektory* (veličinami s kontravariantními složkami – horními indexy) a *1-formami* (veličinami s kovariantními složkami – dolními indexy) geometrický rozdíl. Protože však zde pracujeme v euklidovském prostoru v bázi *kartézských* souřadnic, jsou *hodnoty* odpovídajících si kovariantních a kontravariantních složek totožné.

⁴Uvažme například bezsilový pohyb hmotného bodu po povrchu kulové plochy. V takovém případě rovnice (2.9) určují, že pohyb je přímočará, ale na kulové ploše popsané vazbou (2.10) žádné přímky neexistují.

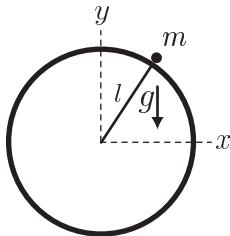
Při pohybu po povrchu *reálného tělesa* ale vždy působí tření, které má směr tečný k povrchu. Pokud chceme toto tření uvažovat, musíme je zahrnout mezi vtištěné síly a určit je nějakým předpisem, který obecně závisí na tvaru vazbové plochy. Vezměme nejjednodušší příklad takzvaného *izotropního vlečného tření*. Odpovídající síla \mathbf{T} je úměrná kolmému tlaku na podložku a má směr opačný než rychlosť, tedy $-(\text{koeficient vlečného tření } k) \times (\text{velikost normálové složky vazbové síly } N = |\lambda| |\text{grad } \phi|) \times (\text{jednotkový vektor ve směru rychlosti})$. Bude proto vystížena předpisem

$$\mathbf{T} = -k N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{tedy} \quad T_i = -k |\lambda| \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right)^2} \frac{\dot{x}^i}{\sqrt{\sum_j (\dot{x}^j)^2}}. \quad \text{polohy indexov nesledova} \quad (2.17)$$

Není-li pohyb jednorozměrný, tak díky odmocninám zpravidla nelze tyto rovnice analyticky řešit. Úloha je však dobře definovaná a řešení můžeme najít numericky.

Příklad: *Hmotný bod klouže v homogenním gravitačním poli po hladké kouli poloměru l . Byl vypuštěn z klidu z vrcholu.⁶ Ve které výšce bod opustí povrch koule?*

Ze symetrie úlohy je zjevné, že pohyb se bude odehrávat ve svíslé rovině. Můžeme proto položit $z = 0$ a řešit problém jen ve dvourozměrném řezu se souřadnicemi x, y . Lagrangeovy rovnice I. druhu (2.16) tedy mají tvar



$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ m \ddot{y} &= -mg + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \phi &\equiv x^2 + y^2 - l^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

kde vazba $\phi = 0$ je stejná jako vazba (2.3) pro matematické kyvadlo. Spočtením parciálních derivací funkce ϕ dostaneme z prvních dvou rovnic

$$m \ddot{x} = 2\lambda x, \quad (2.19)$$

$$m \ddot{y} = -mg + 2\lambda y. \quad (2.20)$$

Nyní vezmeme vazbu (2.18) vyčíslenou podél trajektorie a provedeme její 1. a 2. úplnou časovou derivaci:

$$\dot{\phi} = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0, \quad \ddot{\phi} = 2[(x\ddot{x} + y\ddot{y}) + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] = 0.$$

Uvážíme, že $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$ je kvadrát rychlosti hmotného bodu, a dosadíme za \ddot{x}, \ddot{y} z (2.19), (2.20). Po úpravě užitím $x^2 + y^2 = l^2$ dostaneme

$$\lambda = \frac{m}{2l^2}(gy - v^2), \quad (2.21)$$

což je konkrétní realizace obecného výrazu (2.15) (přesvědčte se o tom!). Úlohu nyní dopočítáme užitím zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg y = mgl,$$

z něhož vyjádříme rychlosť $v^2 = 2g(l - y)$ a dosadíme do (2.21), takže

$$\lambda = \frac{mg}{2l^2}(3y - 2l).$$

Hmotný bod evidentně opustí povrch koule v okamžiku, kdy vazbová síla vymizí, tedy $R = N = |\lambda| |\text{grad } \phi| = 2l |\lambda| = 0$ neboli $\lambda = 0$, což dává

$$y_o = \frac{2}{3}l. \quad (2.22)$$

⁶Vrchol je (nestabilní) rovnovážná poloha, takže bod je nutno vypustit z velmi blízkého okolí vrcholu.

Zbývá dokázat opačnou implikaci. Předpokládejme platnost d'Alembertova principu (2.31). Nejsou-li dány žádné vazby, všechna virtuální posunutí δx^i jsou na sobě *nezávislá* (neboli v rovnici (2.32) je \mathbf{t} zcela libovolný vektor) a tudíž musí vymizet závorka $(m_i \ddot{x}_i - F_i)$ pro každé i . Dostáváme tedy Newtonovy pohybové rovnice $m_i \ddot{x}_i = F_i$. V přítomnosti holonomních vazeb $\phi_\nu = 0$ již virtuální posunutí δx^i *nejsou nezávislá* (například pro jednoduchou vazbu $\phi \equiv x^1 + x^2 = 0$ evidentně dostáváme omezující podmítku $\delta x^1 = -\delta x^2$). Úlohu ale můžeme vyřešit trikem, který se nazývá *metoda Lagrangeových multiplikátorů*.⁸ k rovnici (2.31) d'Alembertova principu přičteme výraz $-\sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \delta x^i = -\sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \operatorname{grad} \phi_\nu \cdot \mathbf{t}$, který je *nulový* (protože vektory $\operatorname{grad} \phi_\nu$ a \mathbf{t} jsou na sebe kolmé), takže platí

$$\sum_{i=1}^{3N} \left(m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i} \right) \delta x^i = 0.$$

Nyní již můžeme formálně pokládat všechna virtuální posunutí δx^i za navzájem *nezávislá*, protože omezující podmínky dané vazbami $\phi_\nu = 0$ jsou přesunuty do Lagrangeových multiplikátorů λ_ν (každé vazbě přísluší jeden multiplikátor). Pokud úlohu konzistentně vyřešíme pro všechny funkce x_i a současně λ_ν , vymízí závorka $(m_i \ddot{x}_i - F_i - \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^i})$ pro každé i . Dostáváme tedy Lagrangeovy rovnice I. druhu (2.24), čímž je důkaz dokončen.⁹

✉

*Není upře
jasné*
✓ *prečo
sú tiež
Econé*

Z geometrického tvaru d'Alembertova principu (2.32) lze odvodit další dva příbuzné principy. Za vektory \mathbf{t} totiž můžeme zvolit *libovolné tečné vektory*. V původním d'Alembertově principu je za \mathbf{t} zvolen **vektor malých posunutí**, jehož kartézské složky jsou virtuální posunutí δx^i . Je ale možno vzít jinou (ekvivalentní) sadu tečných vektorů, jmenovitě **vektor rychlosti** anebo **vektor tečného zrychlení**. Vyjádřeno v kartézských složkách tak dostáváme další dva principy známé z historie mechaniky:

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta \dot{x}^i = 0 \quad \text{Jourdainův princip,} \quad (2.33)$$

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta \ddot{x}^i = 0 \quad \text{Gaussův princip.} \quad (2.34)$$

Geometricky jsou si tyto tři principy mechaniky ekvivalentní.

Výše uvedená formulace d'Alembertova principu platí pro tzv. *vratná* virtuální posunutí. To jsou taková, kdy ke každému malému posunutí δx^i z bodu P je možné také *opačné* posunutí $-\delta x^i$ z téhož bodu P vazby. Tato vlastnost zjevně platí, pokud jsou vazby *oboustranné*. Naproti tomu pro vazby *jednostranné* neplatí. Nicméně i tehdy d'Alembertův princip použít, zobecníme-li ho pro *nevratná* virtuální posunutí do podoby

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x^i \geq 0, \quad (2.35)$$

kde příslušné jednostranné holonomní vazby mají tvar $\phi_\nu \geq 0$ (a vektory se složkami δx^i míří do poloprostoru $\phi_\nu \geq 0$).

Na závěr této části ještě poznamenejme, že d'Alembertův princip je možno dále zobecnit i na neholonomní vazby, zejména v tom případě, kdy se jedná o vazby lineární v rychlostech. Příslušné výrazy lze najít v rozsáhlejších klasických učebnicích mechaniky, například [1].

⁸V matematické analýze se běžně používá k hledání extrémů funkce více proměnných s dodatečnou podmírkou.

⁹Geometricky lze elegantně argumentovat takto: Podmínka (2.32) říká, že vektor $(m \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F})$ leží v prostoru kolmém k $T_P \mathcal{Q}$, v němž vektory $\operatorname{grad} \phi_\nu$ tvoří bázi. Lze tedy najít koeficienty λ_ν rozkladu $(m \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F})$ do báze $\operatorname{grad} \phi_\nu$, neboli $m \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} = \sum_{\nu=1}^v \lambda_\nu \operatorname{grad} \phi_\nu$, což je soustava rovnic (2.24).

kde $n = 3N - v$, přičemž N je počet hmotných bodů a v je počet vazeb (viz část 2.2 textu). Lagrange tedy účinně používá tzv. *Occamovu břitvu*,¹ podle které „Je zbytečné užívat více tam, kde vystačíme s méně.“ Opravdu, je zbytečné užívat více zobecněných souřadnic, než je nezbytně nutno (tedy než je počet stupňů volnosti). A méně jich také nelze použít, protože počet parametrů by nebyl dostatečný k popisu všech možných konfigurací systému.

Jak jsme již uvedli, zobecněné souřadnice lze zavést „libovolně“, a proto je naším cílem volit je vždy co nevhodněji. To vyžaduje trochu zkušenosti a intuice. Pár následujících příkladů ukáže přirozené volby zobecněných souřadnic pro jednoduché mechanické systémy:

Příklady:

matematické kyvadlo

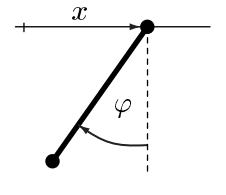
$q^1 = \varphi$... výchylka z rovnovážné polohy



eliptické kyvadlo

$q^1 = x$... poloha horního tělesa

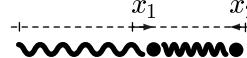
$q^2 = \varphi$... výchylka dolního ze svislé polohy



dvě pružiny

$q^1 = x_1$... výchylka prvního tělesa z rovnováhy

$q^2 = x_2$... výchylka druhého tělesa z rovnováhy

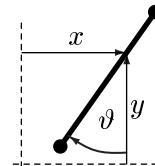


činka

$q^1 = x$... vodorovná poloha těžiště

$q^2 = y$... svislá poloha těžiště

$q^3 = \vartheta$... natočení činky



Obvykle předpokládáme, že existuje *vztah mezi zobecněnými a kartézskými souřadnicemi*

$$x^i(q^1, \dots, q^n, t) \quad i = 1, \dots, 3N \quad (3.2)$$

a že je regulární. Jinými slovy: z hodnot zobecněných souřadnic lze v každém okamžiku jednoznačně stanovit polohu všech hmotných bodů v prostoru pomocí přirozených kartézských souřadnic.

Příklad: *pohyb mravence po povrchu koule*

Úloha má 2 stupně volnosti. Ideální je zavést sférické úhly (zeměpisné souřadnice) $q^1 = \vartheta$, $q^2 = \varphi$, které jednoznačně určují polohu mravence. Má-li koule poloměr l , je vztah ke kartézským souřadnicím dán ~~standardními rovnicemi~~

$$\begin{cases} x^1 = l \sin \vartheta \cos \varphi, \\ x^2 = l \sin \vartheta \sin \varphi, \\ x^3 = l \cos \vartheta, \end{cases}$$

pozor do středu?

které identicky splňují vazbu $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = l^2$, viz (2.4). Každá hodnota zobecněných souřadnic $\vartheta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ proto odpovídá možné poloze (konfiguraci) mravence na povrchu koule. Pokud by koule byla povrchem nafukujícího se balonku, jednalo by se o rheonomní vazbu, přičemž poloměr by byl konkrétní funkci času, neboli $l(t)$. Pak by bylo $x^i(\vartheta, \varphi, t)$.

¹William Occam (1290–1349), anglický středověký teolog a filosof. Jeho slavný aforismus je často citován i používán. Například Bertrand Russell ve svém díle *History of Western Philosophy* na adresu Occamovy břitvy uvádí: „Shledal jsem toto být nejplodnějším principem logické analýzy.“

3.1.2 Konfigurační prostor a zobecněné rychlosti

Zobecněné souřadnice (q^1, \dots, q^n) vymezují takzvaný **konfigurační prostor** \mathcal{Q} všech možných poloh (konfigurací) systému. Řečeno geometricky, jedná se o tzv. konfigurační varietu, přičemž (q^1, \dots, q^n) jsou příslušné lokální souřadnice na ní. V předchozím příkladě je konfigurační varietou sféra S^2 a ϑ, φ jsou lokální souřadnice na její obvyklé mapě, jež neobsahuje severní a jižní pól.

Důležité přitom je, že **konfigurační prostor není prostorem fyzikálních stavů** systému, protože vypovídá pouze o konfiguracích — tedy o *polohách* — všech hmotných bodů. Abychom získali úplnou informaci o fyzikálním stavu, je nutné znát také *jejich rychlosti*. Konfigurační prostor tedy musíme doplnit o tzv. **zobecněné rychlosti** $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. To jsou dodatečné rychlostní parametry, jež jsou obecně *nezávislé* na okamžité poloze. Formálně tedy

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = \dot{\delta}_j^i, \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} = 0, \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} = 0. \quad (3.3)$$

Z hlediska exaktní formulace mechaniky v jazyce diferenciální geometrie představuje konfigurační prostor varietu \mathcal{Q} . Její libovolný bod $P \in \mathcal{Q}$ je popsán souřadnicovými parametry (q^1, \dots, q^n) určujícími polohu hmotných bodů systému. Jejich (možné) rychlosti \mathbf{v} jsou v daném místě P *tečné vektory* k varietě \mathcal{Q} , leží tedy v lineárním vektorovém tečném prostoru $T_P \mathcal{Q}$. Vektor rychlosti $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{Q}$ je v dané bázi určen složkami $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. Až spojením obou druhů informací o polohách i rychlostech vzniká prostor fyzikálních stavů daného systému: jde o tzv. **tečný bandl** $T\mathcal{Q}$, neboli **rychlostní fázový prostor**, dimenze $2n$ parametrizovaný souřadnicemi $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. Podrobnosti lze najít v *KNIZE DRUHÉ* tohoto konvolutu (viz proseminář NOFY069).



Uvedená struktura rychlostního fázového prostoru poskytuje například přirozené vysvětlení tzv. *Zénónova paradoxu šípu*.² Paradox podle Zénóna spočívá v tom, že nelze navzájem odlišit letící a stojící šíp, když se oba právě nacházejí na stejném místě. Opravdu: z hlediska konfiguračního prostoru \mathcal{Q} mají oba stejné hodnoty zobecněných souřadnic q^j . Přesto ale představují odlišné fyzikální stavy určené jinými hodnotami zobecněných rychlostí \dot{q}^j : zatímco stojící šíp je určen nulovým vektorem $\mathbf{v} = 0$ z $T_P \mathcal{Q}$, šíp letící stejným bodem P danou rychlostí je určen konkrétním *nenulovým* vektorem $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{Q}$.

3.2 Odvození Lagrangeových rovnic II. druhu

Nyní již můžeme přistoupit k vlastnímu odvození pohybových rovnic soustavy, jejíž konfigurace jsou vyjádřeny vhodnými zobecněnými souřadnicemi. Takové rovnice se nazývají Lagrangeovy rovnice II. druhu. Z pedagogických důvodů je nejdřív odvodíme pro nejjednodušší jednorozměrnou situaci (takže nebudeme muset psát žádné indexy) a potom rovnice přímočaře zobecníme na libovolný počet zobecněných souřadnic.

3.2.1 Nejjednoduší situace

Uvažujme pro jednoduchost nejprve **jednorozměrný pohyb jediné částice** hmotnosti m podél kartézské osy x . Nechť zobecněná souřadnice je q , přičemž vztah mezi ní a kartézskou polohou x

²Zénón z Eleje (490–430 př. n. l.), proslulý řecký filosof a žák Parmenidův, se proslavil zejména svými aporiemi: „letící šíp je v klidu“, „Achilleus nikdy nedohoní želvu“ a podobně.

kde používáme Einsteinovo sumiční pravidlo v indexu k . Dosazením do výrazu (3.14) dostaváme

$$T(q^j, \dot{q}^j, t_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right)^2, \quad (3.16)$$

kde funkce $\frac{\partial x^i}{\partial q^k}$ a $\frac{\partial x^i}{\partial t}$ závisejí dle (3.2) jen na q^j a případně na t_0 . V tomto vyjádření, které zobecňuje (3.6), již vystupují zobecněné rychlosti \dot{q}^j a zobecněné souřadnice q^j jako *nezávislé* parametry, viz (3.3). Parciálními derivacemi (3.16) tedy dostaváme

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \frac{\partial x^i}{\partial \dot{q}^j} \rightarrow \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial q^j}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial}{\partial q^l} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) \dot{q}^l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) \right] \rightarrow \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right), \quad (3.18)$$

kde šipka naznačuje proceduru „zpětného“ dosazení funkcí $q^k(t)$ za parametry q^k a funkci $\frac{dq^k}{dt}(t)$ za parametry \dot{q}^k , a pak následné využití vztahu (3.15). Odtud již snadno plynne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[\frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} + \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) - \frac{dx^i}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \equiv Q_j, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tím jsme odvodili **Lagrangeovy rovnice II. druhu** v jejich nejobecnějším tvaru

$$\boxed{n=3N-v \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j.} \quad (3.20)$$

↳ pre doraz oproti Newtonovým ?

Jedná se o vyjádření pohybových rovnic soustavy v libovolných zobecněných souřadnicích q^j . Matematicky jde o soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu pro n neznámých funkcí $q^j(t)$, jež popisují trajektorie částic. Dynamika je přitom určena jedinou skalární veličinou, totiž celkovou kinetickou energií T soustavy, a složkami působících zobecněných sil Q_j .

3.2.3 Potenciál a Lagrangeova funkce

Za příhodných okolností lze Lagrangeovy rovnice ještě více zjednodušit. Především ve fyzikálně důležitých situacích, kdy na hmotné body působí jen **konzervativní síly**,³ lze obecně komplikované složky zobecněných sil Q_j vyjádřit pomocí jediné skalární funkce, totiž **potenciálu** V (přesněji bychom měli říkat „potenciální energie“). Opravdu, v takovém případě je

$$\boxed{Q_j \equiv \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x^i}{\partial q^j}} = - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^j} = - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (3.21)$$

Když dosadíme toto vyjádření zobecněných sil na pravou stranu rovnice (3.20) a uvážíme-li, že členy $\frac{\partial V}{\partial q^j}$ jsou identicky nulové (síly jsou konzervativní a potenciál V proto nemůže záviset na zobecněných rychlostech), můžeme Lagrangeovy rovnice II. druhu přepsat do jednoduchého tvaru

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0}, \quad (3.22)$$

³Připomeňme, že silové pole \mathbf{F} je konzervativní právě tehdy, když vykonaná práce nezávisí na dráze (pouze na koncových bodech), neboli práce po libovolné uzavřené dráze je nulová. To je ekvivalentní podmínce, že $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, což nastává právě tehdy, když existuje potenciál V takový, že $\mathbf{F} = -\text{grad } V$.

kde funkce $L(q^j, \dot{q}^j, t)$ je definována jako *rozdíl kinetické a potenciální energie*

$$L \equiv T - V \quad (3.23)$$

a nazývá se **Lagrangeova funkce** daného mechanického systému. Vidíme, že pohybové rovnice lze získat přímočarou kombinací (3.22) parciálních derivací z jediné skalární funkce L . V tom spočívá užitečnost Lagrangeova formalismu: oproti obvyklému newtonovskému postupu již není třeba provádět složité rozklady působících sil do směrů jednotlivých souřadnic. Navíc automaticky dostaneme právě tolik rovnic, kolik je stupňů volnosti studovaného systému. Lagrangeovy rovnice (3.22) lze použít v důležitých situacích s konzervativním polem, zejména pro:

- *homogenní gravitační pole* $V = mgz$
- *centrální gravitační pole* $V = -\frac{\alpha}{r}$, kde $\alpha = GMm$
- *harmonický oscilátor* $V = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

3.2.4 Zobecněný potenciál

Jednoduchý tvar (3.22) Lagrangeových rovnic II. druhu platí dokonce i v obecnějších situacích, kdy silové pole již není konzervativní, ale existuje takzvaný **zobecněný potenciál**. Tím myslíme situaci, kdy působící síla má takový charakter, že k ní existuje funkce $V(q^j, \dot{q}^j, t)$ taková, že

$$Q_j \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (3.25)$$

Zobecnění spočívá v tom, že připouštíme také závislost na zobecněných rychlostech a čase (obyčejný potenciál smí záviset pouze na souřadnicích). Je zjevné, že dosazením (3.25) na pravou stranu obecných pohybových rovnic (3.20) opět dostaneme Lagrangeovy rovnice II. druhu ve tvaru (3.22), kde Lagrangeova funkce je dána $L = T - V = T(q^j, \dot{q}^j, t) - V(q^j, \dot{q}^j, t)$, tedy opět předpisem (3.23). Pro případ konzervativních sil se (3.25) samozřejmě redukuje na jednodušší vztah (3.21).

Zdálo by se, že zde popsaný případ je umělý, neboť předpokládá platnost poměrně složitého vztahu (3.25). Podivuhodná příroda ale kupodivu takovou speciální možnost opravdu realizuje, například ve velmi důležitém případě **elektromagnetické interakce**. Opravdu, přímým výpočtem lze ukázat (viz cvičení), že pro elektromagnetickou Lorentzovu sílu $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ existuje zobecněný potenciál $V(q^j, \dot{q}^j, t)$ tvaru

$$\text{KVIHA TRETI? } V = e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (3.26)$$

kde φ je skalární (elektrický) potenciál, zatímco \mathbf{A} je vektorový potenciál. Souvislost vektorových elektromagnetických polí a příslušných potenciálů je dána známými vztahy $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ a $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Možnost popsat pohyb částic v obecném elektromagnetickém poli pomocí Lagrangeovy funkce je velmi vítaná po stránce teoretické i praktické a nachází své přirozené zobecnění také v relativistické či kvantové teorii.

Praktická „Lagrangeova kuchařka“ pro sestavení pohybových rovnic tedy zní takto:

1. Určíme počet stupňů volnosti n a zavedeme vhodné zobecněné souřadnice q^j , $j = 1, \dots, n$ (neboli n parametrů q^j jednoznačně popisujících pohyb soustavy v souladu s vazbami).
2. Vyjádříme kartézské souřadnice x^i pomocí zobecněných souřadnic q^j ,
t.j. určíme vztahy $x^i(q^j, t)$, kde $i = 1, \dots, 3N$, $j = 1, \dots, n$.
3. Vypočteme kartézské rychlosti $\frac{dx^i}{dt} \equiv \frac{d}{dt}[x^i(q^j(t), t)]$ a $\frac{dq^j}{dt}(t)$ zaměníme za \dot{q}^j .
4. Dosazením do definice kinetické energie $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2$ získáme $T(q^j, \dot{q}^j, t)$.
5. Dosazením $x^i(q^j, t)$ do potenciální energie $V(x^i)$ vypočteme $V(q^j, t)$.
6. Stanovíme Lagrangeovu funkci $L = T - V$. ↗ **zobecněná závisí aj na \dot{x}^i**
7. Jejím derivováním získáme Lagrangeovy pohybové rovnice $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$.

kde tečka zde značí úplnou časovou derivaci příslušné funkce. Z matematického hlediska je to tedy soustava tří obyčejných diferenciálních rovnic pro tři hledané funkce $r(t), \vartheta(t), \varphi(t)$.

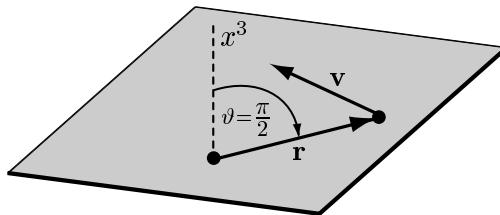
Nyní obrátíme pozornost na řešení pohybových rovnic (3.32). Soustava vypadá složitě: proměnné jsou navzájem provázány a rovnice jsou nelineární. Při bližším pohledu ovšem můžeme učinit důležitý exaktní závěr: **pohyb částice v libovolném centrálním poli je nutně rovinní.**

Důkaz této skutečnosti není těžký. Diferenciální rovnici (3.32) přepíšeme do explicitního tvaru

$$\ddot{\vartheta} = \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2 - 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\vartheta}. \quad (3.33)$$

*↗ Nižší jasné hledání z těchto doch
↳ Dopisat ze 2.?*

Bez újmy na obecnosti však můžeme předpokládat počáteční podmínky $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ a $\dot{\vartheta} = 0$ v čase $t = 0$. (Využijeme vlastně volnosti při zavádění sférických zobecněných souřadnic: stačí na počátku orientovat kartézskou osu x^3 v (3.27) tak, aby mířila kolmo na „rovníkovou rovinu“ definovanou vektorem polohy \mathbf{r} částice vůči centru a vektorem rychlosti \mathbf{v} této částice v počátečním čase $t = 0$.)



Při této volbě pak z diferenciální rovnice (3.33) ihned plyne, že v $t = 0$ je $\ddot{\vartheta} = 0$. To znamená, že složka zrychlení částice ve směru mimo rovinu $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ je nulová, a proto částice nemůže tuto rovníkovou rovinu nikdy opustit. Matematicky tento fakt plyne z věty o jednoznačnosti řešení rovnice (3.33) ve tvaru $\vartheta(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ pro dané počáteční podmínky.⁴

Pohyb v poli centrální síly je tedy nutně rovinní. Přestože jsme začali obecnou možností pohybu částice ve třírozměrném prostoru, její skutečný pohyb je efektivně jen dvourozměrný: omezuje se na jedinou rovinu. Později uvidíme, že z fyzikálního pohledu je tato skutečnost důsledkem zachování momentu hybnosti $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ částice v daném systému (moment síly $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ totiž vymizí, protože vektor \mathbf{F} je radiální, a tedy kolineární s polohovým vektorem \mathbf{r}).

◻

Bez újmy na obecnosti se tudíž naše úloha redukuje na *dvojrozměrný problém*. Je přirozené v rovině pohybu za zobecněné souřadnice q^1, q^2 zvolit standardní **polární souřadnice** r, φ , které s kartézskými souřadnicemi souvisejí vztahy

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \varphi, \\ x^2 &= r \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3.34)$$

(je to vlastně speciální případ (3.27) pro $\vartheta = \frac{\pi}{2}$). Když nyní aplikujeme kuchařku uvedenou v úvodu této části textu, dostaneme Lagrangeovu funkci ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (3.35)$$

a odtud získáme Lagrangeovy rovnice

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 &= -\frac{dV}{dr}, \\ (mr^2\dot{\varphi})' &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Rozborem jejich řešení se budeme zabývat v následující části 3.4.

⁴Podstatou důkazu je rozvinutí funkce $\vartheta(t)$ do Taylorova rozvoje, tedy $\vartheta(t) = \vartheta(0) + \dot{\vartheta}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\vartheta}(0)t^2 + \dots$, kde $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2}$ a $\dot{\vartheta}(0) = 0$. V důsledku rovnice (3.33) je $\ddot{\vartheta}(0) = 0$, a v důsledku derivací této rovnice také v počátečním čase $t = 0$ vymizí všechny vyšší derivace funkce $\vartheta(t)$.

3.3 Metody řešení pohybových rovnic a integrály pohybu

Lagrangeovy rovnice II. druhu poskytují jasný a praktický algoritmus pro efektivní sestavení pohybových rovnic. Obecně existují tři možné přístupy, jak takto získané diferenciální rovnice vyřešit:

- **numerické řešení:** V dnešní době velmi výkonných počítačů není problém napsat tvar příslušné soustavy obyčejných diferenciálních rovnic do vhodného programovacího prostředí (např. MATHEMATICA, MAPLE, FAMULUS atd.) a po zvolení konkrétních počátečních podmínek odpovídající numerické řešení vykreslit. Je však třeba mít na paměti, že při numerickém řešení vyvstává problém spolehlivosti získaných výsledků. Nutně vznikají numerické chyby, které mohou v okolí nestabilních bodů rychle narůstat a získané řešení pak neodpovídá skutečnému. Vždy je proto užitečné mít teoretický vhled do charakteru řešení a výsledek pomocí něj pečlivě testovat, například vhodnými zachovávajícími se veličinami.
- **přibližné řešení:** Soustava pohybových rovnic je obecně složitá, a tak není snadné najít její přesné řešení. Největším problémem je, když jsou diferenciální rovnice *nelineární*, neboť pak neplatí princip superpozice elementárních řešení. V takovém případě obvykle namísto přesného řešení hledáme jen řešení přibližné: ***zanebdáme nelineární členy*** a pak standardním postupem řešíme příslušné aproximované lineární rovnice. Provedení správné linearizace je svého druhu „umění“, neboť teprve praxí lze získat zkušenosť, které zanebdání členů je fyzikálně oprávněné a konzistentní.

Ilustrace linearizace: matematické kyvadlo

Je-li zobecněnou souřadnicí výchylka φ z rovnovážné polohy, má Lagrangeova funkce tvar $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$. Příslušná rovnice (3.22) pak je $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$. Tato nelineární diferenciální rovnice nemá jednoduché řešení, ale snadno můžeme provést její linearizaci pro malé výchylky $\varphi \ll 1$. Taylorův rozvoj říká, že v takovém případě $\sin \varphi \approx \varphi$, takže $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi \approx 0$. To je jednoduchá lineární rovnice známá jako rovnice harmonického oscilátoru: jejím řešením jsou harmonické kmity $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \delta)$, kde φ_0, δ jsou integrační konstanty odpovídající maximální amplitudě a fázi. Poznamenejme, že linearizovanou pohybovou rovnici lze získat předpisem (3.22) také z Lagrangeovy funkce rozvinuté do druhého rádu v proměnné φ , tedy z $L \approx \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \frac{1}{2}\varphi^2)$.

- **přesné řešení:** Je samozřejmě ideální, když se nám podaří najít exaktní řešení přesných pohybových rovnic. To je veskrze úloha matematická, při níž musíme uplatnit zručnost a zkušenosť získané v kurzech matematické analýzy. Doporučuje se použít také speciální literaturu a tabulky řešení diferenciálních rovnic.

obecnější: v mat. kurzech?

Je přitom pozoruhodné, že Lagrangeův formalismus, který umožňuje efektivně sestavit pohybové rovnice, nám současně poskytuje *triky pro jejich řešení!* Jedná se především o konstruktivní postup nalezení tzv. integrálů pohybu (neboli „prvních integrálů pohybových rovnic“), což jsou speciální veličiny, které v průběhu pohybu nemění svoji hodnotu. Začneme jejich definicí a pak uvedeme několik základních vět:

lepší: stejně?

Integrál pohybu je výraz tvaru $f(q^j, \dot{q}^j)$, který v každém čase t nabývá konstantní hodnoty, když ho vyčíslíme podél libovolné trajektorie $q^j(t)$ řešící pohybové rovnice daného systému.

Přesněji řečeno: jestliže do funkce f dosadíme za zobecněnou souřadnici q^j funkci $q^j(t)$ popisující skutečný pohyb, a za zobecněnou rychlosť \dot{q}^j její časovou derivaci $\frac{dq^j(t)}{dt}$, dostaneme funkci $f(t) \equiv f(q^j(t), \dot{q}^j(t))$. Hodnota této funkce je konstantní, tedy na čase nezávislá (pro různé trajektorie $q^j(t)$ je ale příslušná hodnota $f(t) = \text{konst.}$ obecně různá). Pro integrál pohybu tedy platí

$$f(q^j(t), \dot{q}^j(t)) = \text{konst.} \quad \text{neboli} \quad \boxed{\frac{df(t)}{dt} = 0}. \quad (3.37)$$

Příklad: Pro částici v kartézských souřadnicích je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z),$$

takže

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} - L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V = T + V.$$

V tomto případě se tedy v průběhu děje zachovává celková mechanická energie.

Není ale pravda že zachovávající se zobecněná energie h je **vždy** rovna součtu kinetické energie T a potenciální energie V . Například *rheonomní vazby soustavě energii dodávají nebo ji odebírají* (ilustrací je třeba korálek na dráhu otácejícím se konstantní úhlovou rychlostí).

Můžeme však vyslovit například následující jednoduchou větu:

Pokud jsou **síly konzervativní** a pokud jsou vazby holonomní a současně skleronomní, pak $h = T + V = \text{konst.}$ (celková mechanická energie soustavy se tedy zachovává).

Důkaz: Holonomní, a skleronomní vazby mají tvar $\phi(x^i) = 0$, a tudíž $x^i = x^i(q^j)$, viz (3.2). Pak

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \dot{q}^r \right) \left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^s \right) = \sum_{r,s=1}^n \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s} \dot{q}^r \dot{q}^s$$

a definujeme-li (symetrickou) matici

$$A_{rs}(q^j) \equiv \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \frac{\partial x^i}{\partial q^r} \frac{\partial x^i}{\partial q^s},$$

můžeme kinetickou energii soustavy vyjádřit

$$T = \sum_{r,s=1}^n A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s.$$

To je zjevně kvadratická funkce ve zobecněných rychlostech, a proto

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j = \sum_{j,r,s=1}^n (A_{rs} \delta_j^r \dot{q}^s + A_{rs} \dot{q}^r \delta_j^s) \dot{q}^j = 2 \sum_{r,s=1}^n A_{rs} \dot{q}^r \dot{q}^s = 2T$$

(ve skutečnosti jsme právě dokázali speciální případ tzv. Eulerovy věty o homogenních funkcích).
Nyní už snadno pro **potenciál nezávislý na rychlostech** z definice (3.38) odvodíme, že

$$h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L = 2T - T + V = T + V.$$

↗ *zdůraznit, že je to dané F konz?*
↳ *protože to je v predpokladoch* ☐

V následující části nyní ukážeme aplikaci předchozích vět, a to na příkladě pohybu hmotného bodu v centrálním poli. Jak uvidíme, jedná se o fyzikálně důležitou úlohu, která souvisí nejen s pohybem planet, ale také například s rozptylem elementárních častic.

Dosazením do rovnice (3.42) získáme

$$\frac{l^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{l^2}{m^2} u^2 = \frac{2}{m} [E - V(u)], \quad (3.46)$$

jehož derivací podle proměnné φ a zkrácení konstantami obdržíme

$$\frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \frac{du}{d\varphi} = -\frac{m}{l^2} \frac{dV}{du} \frac{du}{d\varphi}.$$

Pro případ $\frac{du}{d\varphi} \neq 0$ lze tímto společným faktorem vydělit, čímž opravdu dospějeme k (3.44).

☒

Po zadání konkrétního potenciálu $V(r(u))$ do Binetova vzorce získáme obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu pro funkci $u(\varphi)$, jejíž inverzí $r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)}$ získáme hledaný tvar trajektorie.

3.4.1 Pohyb planet aneb Keplerova úloha

Důležitým příkladem pohybu v centrálním poli jsou trajektorie planet a jiných astronomických těles obíhajících v gravitačním poli Slunce. Ukážeme nyní, jak z výše uvedené Lagrangeovy formulace mechaniky snadno plynou Keplerovy zákony.

Gravitační pole Slunce hmotnosti M je dáno potenciálem (3.24),

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = GMm \quad \text{je kladná konstanta.} \quad (3.47)$$

V reciproké souřadnici (3.45) má potenciál tvar $V = -\alpha u$ a jeho derivace je $\frac{dV}{du} = -\alpha$, takže Binetův vzorec (3.44) je nyní explicitně

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha m}{l^2}.$$

Ihned najdeme obecné řešení této lineární diferenciální rovnice s konstantní pravou stranou. Obecné řešení homogenní rovnice je $u_0 = C \cos \varphi$ (bez újmy na obecnosti můžeme položit počáteční fázi $\varphi_0 = 0$) a partikulární řešení úplné rovnice je zjevně $u_p = \frac{\alpha m}{l^2}$. Kompletní řešení tedy je $\frac{1}{r} = u = u_p + u_0 = \frac{\alpha m}{l^2} + C \cos \varphi = \frac{\alpha m}{l^2}(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, kde konstanta ε nahrazuje C . Máme tedy

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (3.48)$$

kde konstanty jsou dány

napsat coko?

↪ nebole na

↪ první pohled

↪ jasne až po dalšom čítaní

$$p = \frac{l^2}{\alpha m} = \frac{l^2}{GMm^2}, \quad (3.49)$$

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2l^2 E}{\alpha^2 m} = \frac{2l^2 E}{G^2 M^2 m^3}. \quad (3.50)$$

Důkaz: Dosazením kompletního řešení (3.48), tedy $u = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, a z něj plynoucí derivace $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon}{p} \sin \varphi$ do rovnice (3.46) dostaneme

$$\frac{1}{p^2} (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + 1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) = \frac{2m}{l^2} [E + \alpha u] = \frac{2m}{l^2} [E + \frac{\alpha}{p}(1 + \varepsilon \cos \varphi)],$$

což po úpravě dává $1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \varphi = \frac{2mp^2}{l^2} E + 2(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, a tedy $\varepsilon^2 - 1 = \frac{2mp^2}{l^2} E$. Důvod proč je integrační konstanta ε z Binetova vzorce takto jednoznačně učena spočívá v tom, že Binetova diferenciální rovnice 2. řádu (3.44) vznikla derivací původní rovnice (3.46) 1. řádu, kde jako fyzikální parametr vystupuje integrál pohybu E , který při derivování vypadl.

☒

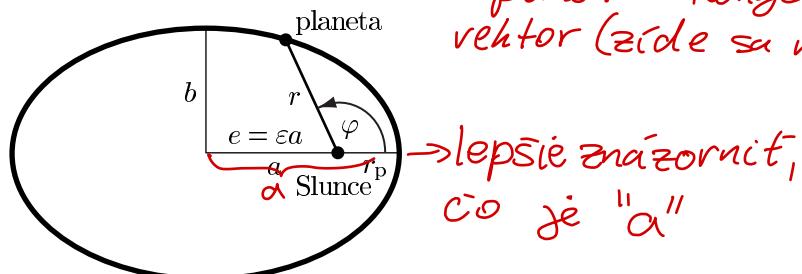
Dospěli jsme tak k pěknému výsledku: *tělesa se ve sluneční soustavě pohybují po kuželosečkách*, protože rovnice (3.48) není nic jiného než obvyklé vyjádření kuželoseček v polárních souřadnicích s ohniskem v počátku $r = 0$, kde je umístěno Slunce. V závislosti na parametru ε zvaném **numerická excentricita** totiž funkce (3.48) popisuje kružnici ($\varepsilon = 0$), elipsu ($0 < \varepsilon < 1$), parabolu ($\varepsilon = 1$) resp. hyperbolu ($\varepsilon > 1$). Podle (3.50) tyto čtyři možné situace odpovídají případům, kdy celková zachovávající se mechanická energie je $E = E_{\min} \equiv -\frac{G^2 M^2 m^3}{2l^2} < 0$, $E < 0$, $E = 0$, resp. $E > 0$. Druhý parametr p , který určuje **velikost** kuželosečky, je podle (3.49) určen (kromě hmotnosti Slunce a obíhajícího tělesa) zachovávajícím se momentem hybnosti l . Výše uvedeným postupem jsme tedy odvodili první z Keplerových zákonů:

1. Keplerův zákon: Planety se pohybují po elipsách se Sluncem v ohnisku.

2. Keplerův zákon: Spojnice Slunce a planety opisuje za stejné časové intervaly stejné plochy.

3. Keplerův zákon: Pro všechny planety je podíl $\frac{T^2}{a^3}$ stejná konstanta.

Důkaz: Celková mechanická energie E každé planety je záporná, a proto se nemůže vymanit z gravitačního potenciálu Slunce. Dle (3.50) je proto nucena obíhat kolem něj po eliptické orbitě (3.48) s $\varepsilon < 1$. Je to uzavřená trajektorie, která je 2π periodická.⁵



Perihelium (přísluní) nastává pro $\varphi = 0$ a má hodnotu $r_p = \frac{p}{1+\varepsilon}$. Naopak afelium (odsluní) nastává pro $\varphi = \pi$ a má hodnotu $r_a = \frac{p}{1-\varepsilon}$. Geometricky je elipsa určena hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b . Protože excentricita e je dána vztahem $e \equiv \varepsilon a$, můžeme z jednoduchého vztahu $r_p = a - e$ případně $r_a = a + e$ odvodit, že $p = a(1 - \varepsilon^2)$. Dosazením z (3.49) a (3.50) tak ihned dostáváme

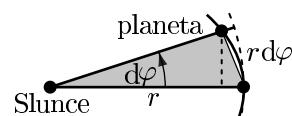
$$a = \frac{GMm}{2|E|}. \quad (3.51)$$

Hlavní polosa eliptické dráhy a je tedy (kromě konstantních hmotností) určena celkovou energií planety E a *nezávisí* na jejím momentu hybnosti l .

Druhý Keplerův zákon je vlastně jen geometrickým vyjádřením zákona zachování momentu hybnosti (3.39). Plošná rychlosť, tedy plocha dS opsaná spojnicí Slunce s planetou za krátký časový interval dt , je dána výrazem $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$.

Opravdu, jak je vidět z vedlejšího obrázku, plochu dS lze dobře approximovat plochou šedě vyznačeného trojúhelníka. Jeho základna je r a čárkovaně vyznačená výška je přibližně rovna $r d\varphi$, což je délka oblouku kružnice poloměru r se středovým úhlem $d\varphi$. Máme tedy $dS = \frac{1}{2}r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Užitím vztahu (3.41) tak ihned dostáváme

$$\frac{dS}{dt} = \frac{l}{2m}, \quad (3.52)$$



což je opravdu konstanta úměrná momentu hybnosti planety.

⁵Uzavřenosť trajektorií je důsledkem newtonovského tvaru potenciálu. Pro jiné potenciály $V(r)$ nemá příslušné řešení Binetovy rovnice periodický charakter a dochází k posunu perihelia. Podle tzv. Bertrandova teoremu pouze potenciály $V \sim 1/r$ a $V \sim r^2$ vedou na uzavřené periodické trajektorie.

ale ještě ne dokonale. Stále bylo totiž nutné skládat kruhové pohyby epicyklů po deferentu vůči ekvantu, aby bylo dosaženo stejné přesnosti předpovědí, jaké dosahovala dosavadní Ptolemaiova geocentrická soustava. Kepler nahradil celý tento složitý systém kruhových pohybů jedinou elipsou. Inspirací mu přitom byly nejspíš jeho práce z optiky: Kepler teoreticky studoval odrazy světla na kuželosečkách a jako první zavedl pojem ohniska. Není však vyloučen ani nepřímý vliv z oboru architektury, konkrétně eliptický půdorys tzv. Vlašské kaple (dnes součást komplexu Klementina), nejstarší raně barokní stavby v Čechách budované v letech 1590–1597 italskými staviteli.

3.4.3 Metoda efektivního potenciálu

Vraťme se nyní ke vztahu (3.42), který popisuje trajektorie v obecném centrálním poli. Zavedeme užitečnou a jednoduchou metodu, pomocí níž lze provést správný *kvalitativní* rozbor možných pohybů, aniž bychom museli příslušnou diferenciální rovnici explicitně vyřešit.

Definujme pomocnou veličinu zvanou **efektivní potenciál** vztahem

$$V_{\text{ef}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (3.54)$$

Vlastně jsme jen k potenciálu centrální síly $V(r)$ přičetli „odstředivý člen“, který souvisí se zákonem zachování momentu hybnosti l , viz substituce (3.41). Potom můžeme rovnici (3.42) přepsat

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - V_{\text{ef}}(r)], \quad (3.55)$$

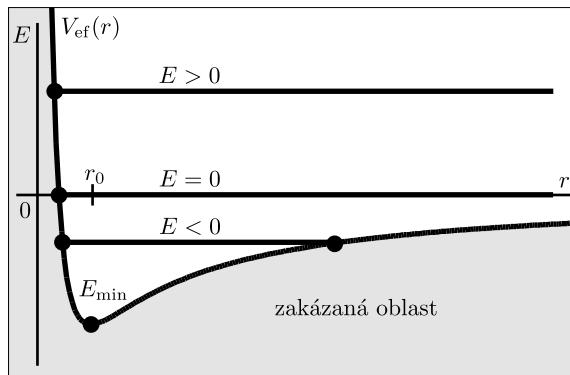
kde konstanta E vyjadřuje zachovávající se celkovou mechanickou energii, zatímco \dot{r} je rychlosť planety v *radiálním* směru. Podstata metody spočívá v následujícím triviální tvrzení:

Pohyb je možný jen pro taková r , kde $V_{\text{ef}}(r) \leq E$,

*medzera
naviac?*

jinak by pravá strana (3.55) byla záporná, takže by nemohla být druhou mocninou reálné veličiny.

Uvedenou podmínu lze velmi dobře analyzovat graficky, jestliže vykreslíme graf efektivního potenciálu (pro daný moment hybnosti l). Například pro newtonovské gravitační pole (3.47) má efektivní potenciál tvar znázorněný na tomto obrázku (pro velké hodnoty r převládá Newtonův potenciál $\sim -\frac{1}{r}$, zatímco pro malé hodnoty r dominuje odstředivý člen $\sim +\frac{1}{r^2}$):



Pod grafem funkce $V_{\text{ef}}(r)$ se nachází *zakázaná oblast*, kam se planeta nikdy nemůže dostat, protože by byla porušena výše uvedená podmínka. Pro danou hodnotu energie E , kterou má těleso *stejnou pro každé r* (protože se zachovává), existují **body obratu určené průsečíkem** vodorovné přímky $E = \text{konst.}$ s grafem efektivního potenciálu. V bodech obratu je $E = V_{\text{ef}}(r)$, takže $\dot{r} = 0$, což znamená, že *radiální* rychlosť je právě nulová: planeta (v daný okamžik) zastaví své přibližování ke Slunci anebo své vzdalování od něj (ocitne se v periheliu resp. afeliu). Počet bodů obratu

a tím i kvalitativní charakter pohybu pochopitelně závisí na hodnotě E . Z obrázku vidíme, že pro $E > 0$ existuje jen jeden bod obratu (perihelium) a že pohyb je neomezený — těleso může odletět do nekonečna, což je v souladu se vztahem (3.50), který v takovém případě vede na hyperbolický pohyb. Mezní (parabolický) případ nastává pro $E = 0$. Pokud $E < 0$, existují dva body obratu (perihelium i afelium), což odpovídá omezenému elliptickému pohybu planet. Vidíme také, že existuje unikátní kruhový pohyb na hodnotě poloměru $r_0 = p$, jenž je právě *minimum efektivního potenciálu* V_{ef} . Protože se jedná o minimum, je kruhová dráha zjevně *stabilní* orbitou.

Zde popsaná metoda efektivního potenciálu je velmi názorná a užitečná pro kvalitativní analýzu možných pohybů v obecných potenciálech $V(r)$, včetně rozboru stability drah. (Například kruhový pohyb v místě maxima příslušného efektivního potenciálu je nestabilní — to nastává např. pro pohyb objektu v blízkém okolí černé díry v kontextu Einsteinovy obecné teorie relativity.)

3.4.4 Rozptyl nabitéých částic

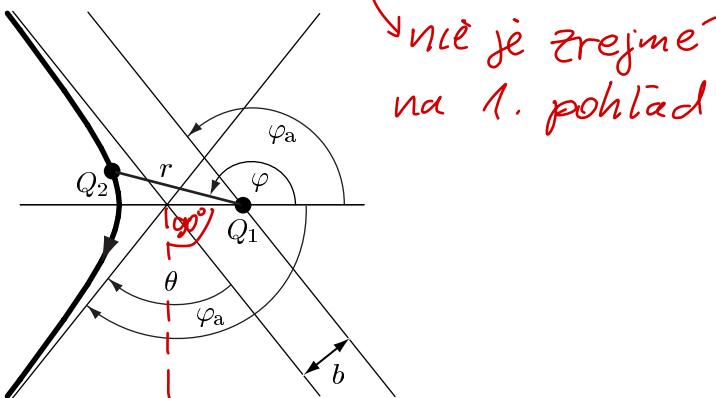
Jiným významným případem pohybu v centrálním poli je rozptyl částic v coulombickém poli. Tento problém sehrál klíčovou roli počátkem 20. století, kdy se fyzika vydala na cestu do mikrosvěta a začala zkoumat strukturu atomů.

Uvažujme dvě nabité bodové částice, které se elektrostaticky odpuzují. Coulombický potenciál

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{je záporná konstanta,} \quad (3.56)$$

má stejný tvar jako newtonovský gravitační potenciál (3.47) až na to, že konstanta α má nyní opačné znaménko. Předpokládejme, že částice s nábojem Q_1 je pevná (je to těžké „ jádro atomu“), zatímco na ni nalétávající částice s nábojem Q_2 je mnohem lehčí (jde např. o „ α -částici“). Její trajektorii v centrálním poli již známe, neboť musí mít stejný tvar jako (3.48).⁷ Protože $E > 0$, podle (3.50) je $\varepsilon > 1$ — jde tedy o *hyperbolu*.

Zde nás zajímá především *směr* vstupní a výstupní asymptoty, které jsou dány podmínkou $r \rightarrow \infty$, což podle (3.48) odpovídá hodnotám $\cos \varphi_a = -\frac{1}{\varepsilon}$. Celková odchylka θ částice (úhel mezi vstupní a výstupní asymptotou) je dána podmínkou $90^\circ + \theta/2 = \varphi_a$, viz obrázek:



Jednoduchými úpravami a pak užitím vztahu (3.50) odtud plyne

$$\tan \frac{\theta}{2} = \tan(\varphi_a - 90^\circ) = -\frac{\cos \varphi_a}{\sin \varphi_a} = -\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 m}{2l^2 E}}.$$

Když nyní dosadíme za α z (3.56) a vyjádříme zachovávající se veličiny E a l pomocí asymptotických hodnot $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$ a $l = bm v_\infty$, kde b je *impaktní parametr*, dostaneme nakonec

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_\infty^2} \cdot \frac{1}{b}. \quad (3.57)$$

⁷Poznamenjme, že zde $\alpha < 0$, takže dle (3.49) je $p < 0$. Musí proto být $1 + \varepsilon \cos \varphi < 0$, neboli $\cos \varphi < -\frac{1}{\varepsilon}$.

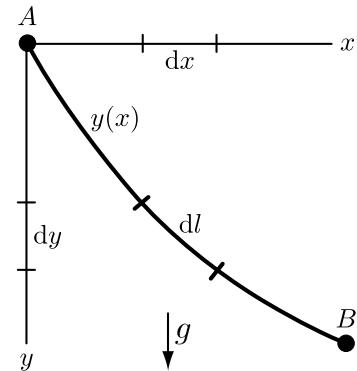
zformulovaná úloha variačního počtu. Svým kolegům ji předložil Johann Bernoulli v červnu roku 1696 ve vědeckém časopise *Acta Eruditorum*. Příslušné řešení pak následně (a téměř současně) našli Newton, Johann a Jakob Bernoulli, Leibniz, von Tschirnhaus a l' Hôpital. Na ně navázali Leonhard Euler a Joseph-Louis Lagrange, zakladatelé ucelené teorie hledání extremál funkcionálů, tedy variačního počtu. Kvůli své historické významnosti i pro svou názornost zformulujme tuto úlohu explicitně:

Úloha o brachistochroně:

Hledejme hladkou funkci $y(x)$ takovou, aby objekt vypuštěný v homogenním gravitačním poli z klidu v bodě A dorazil do jiného bodu B po křivce $y(x)$ za nejkratší čas.

Čas, za který objekt proletí element křivky dl je dán běžným vztahem $dt = dl/v$, kde $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ a v je rychlostní funkce. Tu lze vyjádřit ze zákona zachování mechanické energie $\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0$ jako $v(y) = \sqrt{2gy}$. Pro celkový čas letu z bodu A do bodu B tedy platí vzorec

$$t = \int_A^B \frac{dl}{v} = \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y(x)}} dx.$$



Pro každou zvolenou dráhu $y(x)$ dává tento určitý integrál jedno číslo, což je celý čas letu t . Naši úlohou je mezi všemi dráhami $y(x)$ najít tu, pro kterou je celkový čas t nejmenší možný.

Z abstraktního matematického hlediska jde o zobrazení, které každé **funkci** přiřazuje určité **číslo**. Takovému zobrazení říkáme **funkcionál**. Stojíme před úkolem najít jeho extrém na prostoru hladkých funkcí, neboli najít takovou unikátní funkci, aby jí přiřazená číselná hodnota byla extremální.

4.1.2 Matematický aparát

integrálny

Motivováni předchozím příkladem, uvažujme **abstraktní funkcionál** tvaru

$$I \equiv \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

↳ napíšat mat. definici
↳ $I[\cdot]: C_{(4,1)}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$
 $y(x) \mapsto I$

což je předpis ve tvaru určitého integrálu přes proměnnou x na intervalu $[a, b]$.² Předpokládáme zde, že výrazy $F(x, y, y')$ i $y(x)$ jsou dostatečně hladké funkce (v ideálním případě ze třídy C^∞) a $y'(x)$ značí derivaci funkce $y(x)$ podle x .

Funkcionál (4.1) je konkrétní předpis, který dané funkci $y(x)$ přiřazuje jedno reálné číslo I . Chceme-li explicitně zdůraznit, jakou funkci vyčíslujeme, používáme symbol $I[y(x)]$.

Abychom našli **extremálu**, tedy funkci $y(x)$ pro kterou číslo $I[y(x)]$ nabývá extrémní hodnoty, musíme ji **porovnat s jinými blízkými funkcemi** $y_b(x)$. Blízkost těchto sousedních funkcí je miněna například ve smyslu normy $\|y_b - y\| \equiv \max_{x \in [a,b]} |y_b(x) - y(x)|$ na prostoru funkcí C^∞ (nebo C^k) na intervalu $[a, b]$.

Ve variačním počtu zavádíme následující základní pojmy:

- **variace funkce** je funkce $\delta y(x) \equiv y_b(x) - y(x)$
- **variace funkcionálu** je číslo $\delta I \equiv I[y_b(x)] - I[y(x)]$ příslušející variaci funkce $\delta y(x)$
- **aby $y(x)$ byla extremála** musí platit $\delta I[y(x)] = 0$ pro každou její malou variaci $\delta y(x)$

²V souladu s notací běžnou v moderní mezinárodní literatuře a normou ISO 31-11 označujeme uzavřený interval hranatými závorkami $[a, b]$, nikoli lomenými $\langle a, b \rangle$, jak je zvykem v tradičních českých matematických textech.

Podmínka $\delta I[y(x)] = 0$ zjevně znamená, že $I[y(x)] = I[y_b(x)]$ neboli $I[y(x)] = I[y(x) + \delta y(x)]$ pro každou malou variaci $\delta y(x)$. To znamená, že číselná hodnota funkcionálu I se v blízkém okolí extremálny $y(x)$ nemění. Jinými slovy: funkcionál má v okolí extremálny **stacionární hodnotu**.

Stacionarita funkcionálu I daná podmínkou $\delta I = 0$ je analogická podmínce $f' = 0$ na nulovost derivace funkce $f(x)$, známé z matematické analýzy. Stejně jako nulovost f' identifikuje buď lokální maximum, minimum nebo inflexní bod x funkce f , tak nulovost δI analogicky identifikuje buď lokální maximum, minimum nebo pozastavení hodnoty funkcionálu I v okolí funkce $y(x)$.

Precizujme ještě charakter námi uvažovaných variací funkce $\delta y(x)$:

- **úloha s pevnými konci:** Předpokládáme $\delta y(a) = 0 = \delta y(b)$, neboli že hodnota funkce $y(x)$ i všech jí blízkých funkcí $y_b(x)$ je v $x = a$ i v $x = b$ pevně daná a nemůže se měnit.
- **izochronní variace:** Provádíme jenom takové variace $\delta y(x)$, kdy při porovnávání hodnot funkcí $y_b(x)$ a $y(x)$ uvažujeme stejnou hodnotu nezávislé proměnné x .
- **variace jsou „infinitesimálně malé“:** Předpokládáme, že $\delta y(x) \equiv \varepsilon \eta(x)$, kde $\eta(x)$ je libovolná hladká funkce s nulovými okraji a ε je malý parametr. Ve výrazech pak nakonec uvažujeme limitu $\varepsilon \rightarrow 0$. V této limitě je potom variace funkcionálu δI lineárním funkcionálem v proměnné δy .

Nyní již můžeme prezentovat základní větu variačního počtu:

Nutnou podmínkou stacionarity ($\delta I = 0$) funkcionálu $I[y(x)]$ je, že příslušná funkce $y(x)$ řeší Eulerovu–Lagrangeovu rovnici

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (4.2)$$

~~→ je to platný dоказ?~~
Podstata důkazu: Vyjádřime explicitně výraz pro variaci funkcionálu I a použijme $y_b = y + \delta y$:

$$\delta I \equiv I[y_b(x)] - I[y(x)] = \int_a^b [F(x, y_b, y'_b) - F(x, y, y')] dx = \int_a^b [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx.$$

Nyní můžeme provést Taylorův rozvoj prvního člena a odečíst od něj dominantní druhý člen. Protože δy a $\delta y'$ jsou malé variace, lze zanedbat členy vyššího řádu, takže zůstane jen

$$\delta I \doteq \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx.$$

Výraz $\delta y'$ znamená $\delta \left(\frac{dy}{dx} \right)$. Ale protože variace jsou izochronní (změny y se uvažují při pevném x), lze pořadí derivování podle x a variování podle y nazvájem prohodit, takže $\delta y' = \frac{d}{dx}(\delta y)$. Druhou část integrálu lze potom dále upravit pomocí pravidla *per partes*:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\delta y) dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx.$$

Protože řešíme variační úlohu s pevnými konci, je $\delta y(a) = 0 = \delta y(b)$, díky čemuž je $\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b = 0$. Odvodili jsme tedy,

$$\delta I \doteq \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0.$$

Zvýraznit?
↳ použije sa

Nyní použijeme základní lemma variačního počtu (které lze dokázat sporem): Jestliže pro všechny funkce $g(x)$ je $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$, pak nutně $f(x) = 0$. V našem případě je $g(x)$ libovolná variace $\delta y(x)$, takže funkce $f(x)$, což je zde výraz v hranatých závorkách, musí být nulový pro každé x . Tím je podmínka (4.2) odvozena.

◻

Integrální předpis (4.1) funkcionálu I lze různými způsoby rozšířit na *obecnější případy*:

- **více hledaných funkcí:** $I \equiv \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$
- **více nezávislých proměnných:** $I \equiv \int \dots \int_{\Omega} F(x_1, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}) dx_1 \dots dx_n$
- **vyšší derivace:** $I \equiv \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$
- **dodatečné vazby:** například $\int_a^b G(x, y, y') dx = \text{konst.}$ nesedí!

Tato zobecnění lze samozřejmě navzájem kombinovat.

Příslušné podmínky stacionarity $\delta I = 0$ jsou:

- pro více hledaných funkcí $y_j(x)$:
kde $j = 1, \dots, n$, neboť variace δy_j jsou navzájem nezávislé
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0,$$
- pro více nezávislých proměnných x_i :
kde³ $y_{,i} \equiv \frac{\partial y}{\partial x_i}$ (Eulerova–Ostrogradského rovnice)
$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{,i}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$
- pro vyšší derivace :
(Eulerova–Poissonova rovnice)
$$-(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$
chybají 3 čárky...

Více podrobností lze najít v učebnici [1], konkrétně v Dodatku II *Základy variačního počtu* na stranách 505–564. Rigorózní zavedení aparátu variačního počtu se opírá o koncepty Fréchetova diferenciálu (zobecňující pojem úplného diferenciálu funkce) a Gâteauxovy derivace funkcionálu ve směru (zobecňující derivaci funkce ve směru). Spolu se specifikací všech předpokladů je lze najít ve specializované matematické literatuře, například [15].

4.1.3 Řešení historických úloh

Nyní se můžeme vrátit k historickým úlohám variačního počtu zmíněných v části 4.1.1 a vyřešit je.

- **geodetiky v rovině:** Nejkratší spojnice v rovině jsou dány podmínkou $\delta I = 0$, kde příslušný funkcionál vzdálenosti dvou bodů je

$$I = \int dl = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (4.3)$$

neboli $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Protože $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, Eulerovy–Lagrangeovy rovnice (4.2) dávají $\frac{\partial F}{\partial y'} = y' / \sqrt{1 + y'^2} = C = \text{konst.}$, neboli $y'^2 = C^2(1 + y'^2)$. Derivace extremality je tedy všude konstantní, $y' = C_1$, takže $y(x) = C_1 x + C_2$, kde C_1, C_2 jsou konstanty. Geodetiky v rovině proto **jsou přímky**.

³Dolní čárka s indexem se v teoretické fyzice používá jako velmi úsporná zkratka pro označení parcíální derivace.

dodat: S → QM?

fundamentální parametr kvantové mechaniky. Z toho plyne, že jejich **podíl S/\hbar je bezrozměrné číslo**. Toto bezrozměrné číslo hraje významnou roli v rovnicích kvantové mechaniky a hledání jeho vztahu ke klasické mechanice, viz například rovnice (5.52) a následná diskuse tohoto problému včetně Feynmanovy formulace kvantové mechaniky pomocí dráhového integrálu.

Odůvodnění Hamiltonova variačního principu:

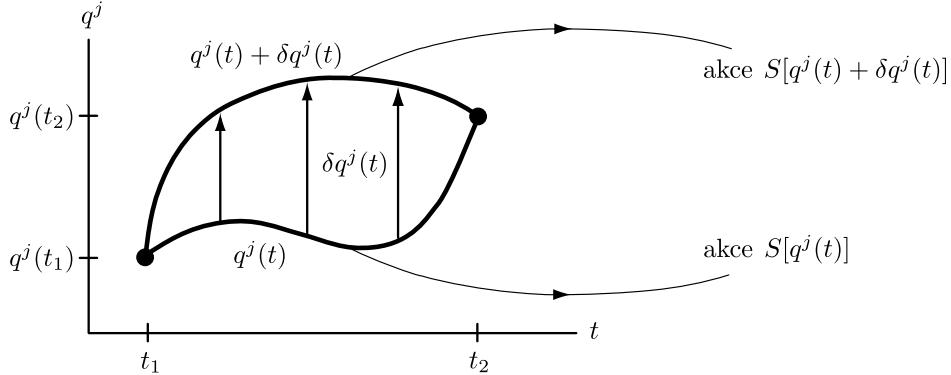
V části 4.1.2 jsme ukázali, že nutnou podmínkou stacionarity $\delta I = 0$ abstraktního funkcionálu (4.1) je Eulerova–Lagrangeova rovnice (4.2) variačního počtu. Ta se přímočaře zobecňuje pro případ více nezávislých funkcí $y_j(x)$ ve funkcionálu $I \equiv \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$, a to do podoby

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_j} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0, \quad \text{kde } j = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

V kontextu Hamiltonova variačního principu mají tyto abstraktní matematické proměnné fyzikální význam, konkrétně $I \equiv S$, $F \equiv L$, $x \equiv t$, $y_j \equiv q^j$, $y'_j \equiv \dot{q}^j$. V takovém případě jsou však Eulerovy–Lagrangeovy rovnice (4.12) *zcela totožné s Lagrangeovými rovnicemi II. druhu* (3.22). Lagrangeovy pohybové rovnice klasické mechaniky jsou tedy *důsledkem* rovnice $\delta S = 0$ vyjadřující podmínu stacionarity funkcionálu akce.

◻

Z didaktických důvodů provedeme ještě důkaz tohoto tvrzení přímo ve fyzikálních proměnných, kdy funkcionálem je akce S definovaná (4.11) a hledanými extremálami jsou trajektorie $q^j(t)$ vývoje systému s n stupni volnosti, viz obrázek.



Přímé odvození: Podobně jako v důkazu (4.2) nejprve vyjádříme variaci funkcionálu akce S ,

$$\delta S \equiv S[q^j(t) + \delta q^j(t)] - S[q^j(t)] = \int_{t_1}^{t_2} [L(q^j(t) + \delta q^j(t), \dot{q}^j(t) + \delta \dot{q}^j(t), t) - L(q^j(t), \dot{q}^j(t), t)] dt.$$

Provedeme Taylorův rozvoj prvního člena a zanedbáme vyšší mocniny variací $\delta q^j(t)$ a $\delta \dot{q}^j(t)$,

$$\delta S \doteq \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j(t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j(t) \right] dt.$$

Pro izochronní variaci platí $\delta \dot{q}^j = \frac{d}{dt}(\delta q^j)$ a užitím pravidla *per partes* lze pak vyjádřit:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^j(t) dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j(t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j(t) dt.$$

Řešíme variační úlohu s pevnými konci, $\delta q^j(t_1) = 0 = \delta q^j(t_2)$, takže $\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \delta q^j(t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0$. Variaci akce je tedy dána výrazem

$$\delta S \doteq \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^j} \delta q^j(t) - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q^j(t) \right] dt,$$

neboli

$$\delta S \doteq \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) \right] \delta q^j(t) dt.$$

Hamiltonův variační princip $\delta S = 0$ vyžaduje, aby tento výraz byl nulový pro každou variaci $\delta q^j(t)$, které jsou nadto pro všechna j navzájem nezávislé. Podle základního lemmatu variačního počtu je to možné pouze v případě, když jsou všechny hranaté závorky nulové, a to v kterémkoli okamžiku t (jinak lze sporem dokázat neplatnost $\delta S = 0$). Stacionarita akce tedy nutně vyžaduje, aby platilo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \quad \text{pro každé } j = 1, \dots, n, \quad (4.13)$$

což jsou přesně Lagrangeovy rovnice II. druhu (3.22). \(\blacksquare\)

Několik komentářů:

- Odvození Lagrangeových rovnic klasické mechaniky jako důsledek stacionarity akce $\delta S = 0$ jsme zde provedli za určitých matematických předpokladů na *hladkost příslušných funkcí*. Při výpočtu jsme také předpokládali *variační úlohu s pevnými konci*. A samozřejmě *existenci Lagrangeovy funkce $L = T - V$* , tedy existenci potenciálu anebo zobecněného potenciálu V . Hamiltonův variační princip lze ale zobecnit i pro nekonzervativní síly, viz například část 3.8.4 učebnice [1].
- V kontextu variačního principu lze *explicitně započítat také dodatečnou holonomní vazbu $\phi(q^j, t) = 0$* . Uděláme to tak, že namísto Lagrangeovy funkce L vezmeme funkci $L + \lambda \phi$ a variaci provedeme s dodatečnou podmínkou $\phi(q^j, t) = 0$. Tato vazba se započte vhodným Lagrangeovým multiplikátorem λ , takže variace δq^j lze opět pokládat za nezávislé. Hamiltonův variační princip pak má tvar $\delta S = \delta \int (L + \lambda \phi) dt = 0$, a příslušné Eulerovy–Lagrangeovy podmínky stacionarity jsou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(L + \lambda \phi)}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial(L + \lambda \phi)}{\partial q^j} = 0 \quad \text{neboli} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q^j}. \quad (4.14)$$

Zahrneme-li všechny vazby do vhodné volby zobecněných souřadnic, je efektivně $\lambda = 0$ a vztahy (4.14) se redukují na *Lagrangeovy rovnice II. druhu*.

Pokud naopak zůstaneme u kartézských souřadnic $q^j = x_j$, vliv vazby $\phi = 0$ se musí započítat pomocí multiplikátoru λ . V tom případě dostáváme z (4.14) *Lagrangeovy rovnice I. druhu*. Opravdu: pro $L = T - V = \frac{1}{2}m \sum \dot{x}_i^2 - V(x_i)$ se rovnice (4.14) redukují na

$$m \ddot{x}_j + \frac{\partial V}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_j},$$

tedy souřadnicový tvar vektorové rovnice $m \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} = \lambda \operatorname{grad} \phi$, která je ekvivalentní (2.16).

- Hamiltonův princip lze zobecnit i pro neholonomní vazby, viz část 3.8.3 v [1].

Můžeme shrnout, že *Hamiltonův variační princip $\delta S = 0$ je nelegantnější a nejstručnější formulace zákonů mechaniky*, navíc zcela nezávislá na volbě souřadnic. Měli bychom také zdůraznit jeho výjimečný koncepční statut: Zatímco v dosavadním výkladu jsme různé formulace pohybových zákonů odvozovali z Newtonova zákona, Hamiltonův variační princip je *postulován*. Lagrangeovy a Newtonovy rovnice se z něj získávají jako nutná podmínka stacionarity funkcionálu akce.

Je také pozoruhodné, že Hamiltonův variační princip platí nejen pro soustavu hmotných bodů a pohyb tuhého tělesa, ale i pro mechanické kontinuum. *Dokonce ho lze zobecnit i na nemechanické děje*, konkrétně pro případ teorií pole jako je Maxwellova elektrodynamika, Einsteinova teorie gravitace, Diracova teorie elektronů a tak dále. Věnujme tomuto zajímavému a významnému rozšíření Hamiltonova principu následující stručnou přehledovou část textu, přestože svým obsahem značně přesáhne rámec kurzu klasické mechaniky.

4.2.1 Hamiltonův variační princip v teorii pole

Mechanické kontinuum a klasická fyzikální pole chápeme jako *spojitá prostředí*. To znamená, že hodnota určité fyzikální veličiny je definována *v každém bodě*. Počet stupňů volnosti n systému tedy již není konečný, ale je nekonečný (dokonce spojitele nekonečný)!

Asi nejnázornější ilustrací jednodimenzionálního mechanického kontinua je *struna*. Můžeme si ji představit jako spojitou soustavu nekonečně mnoha hmotných hodů nataženou podél osy x . Díky vnitřnímu napětí je struna v klidovém stavu přímá. Když ji ale na některém místě vychýlíme z rovnovážné polohy (v příčném nebo podélném směru) a pak uvolníme, začnou se po ní šířit vlny a struna se postupně všude rozkmitá. Touto úlohou se budeme zabývat později v kapitole 9.

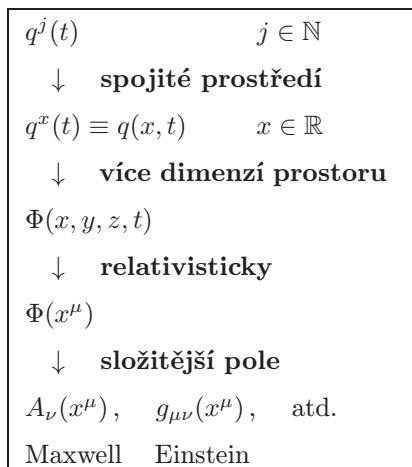
Zde nám jde jenom o obecný koncepční přechod k takovéto soustavě s nekonečně mnoha stupni volnosti. Dosud jsme uvažovali soustavy s konečným počtem hmotných bodů, jejichž polohy byly určeny zobecněnými souřadnicemi q^j , kde $j = 1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}$. Jak ale identifikovat (tedy „*pojmenovat*“) všechny hmotné body spojité struny? Přirozenou volbou je použít k tomu *jejich klidové polohy* na ose x . Zobecněnou souřadnici x -tého bodu struny (popisující její výchylku) tedy můžeme označit symbolem q^x , kde $x \in \mathbb{R}$ identifikuje, o který bod struny se jedná.

Casový vývoj spojitého systému tedy již není dán n -ticí funkcí $q^j(t)$, ale x -ticí funkcí $q^x(t)$. Z konvenčních důvodů ale tyto funkce obvykle označujeme symbolem $q(x, t)$, tedy chápeme je jako *funkci 2 proměnných*, totiž (počáteční) polohy částice struny x a času t .

Koncept spojitého jednodimenzionálního kontinua (struny) lze dále zobecnit na kontinuum ve **třech prostorových dimenzích**, například tekutiny či elastické prostředí. V tom případě pak pracujeme s polními veličinami typu $\Phi(x, y, z, t)$, které mohou být *skalární*, *vektorové* či *tenzorové povahy*. V případě mechaniky tekutin jsou to například hustotní pole $\rho(x, y, z, t)$, rychlostní pole $v_i(x, y, z, t)$, či pole tenzoru napětí $\tau_{ij}(x, y, z, t)$. V případě elektromagnetického pole jsou těmito veličinami například skalární a vektorový potenciál $\varphi(x, y, z, t)$ a $A_i(x, y, z, t)$.

U **relativistických polních teorií** pak pochopitelně přecházíme k jejich popisu ve čtyřrozměrném prostoročase, jehož události identifikujeme souřadnicemi $x^\mu \equiv (ct, x, y, z)$, takže například obecné skalární pole pak má tvar funkce $\Phi(x^\mu)$. Podobně lze zapisovat i složitější elektromagnetická pole $\varphi(x^\mu)$ a $A_i(x^\mu)$. Navíc se ukazuje, že tyto potenciály lze spolu zkombinovat do jediného čtyřvektoru $A_\nu \equiv (-\varphi/c, A_x, A_y, A_z)$, takže *Maxwellovo elektromagnetické pole lze popsat čtyřvektorovou funkcí $A_\nu(x^\mu)$* . V Einsteinově obecné teorii relativity je gravitační pole chápáno jako *zakřivení prostoročasu, jehož geometrie je popsána metrickým tenzorovým polem $g_{\mu\nu}(x^\mu)$* .

Zde popsaný přechod od soustavy konečně mnoha hmotných bodů k popisu spojitého prostředí a dále k teorii pole ve formalizmu teorie relativity lze schématicky shrnout:



V teorii kontinua a teorii pole nás samozřejmě zajímá **průročasový vývoj** příslušných fyzikálních veličin. Ty jsou určeny pohybovými rovnicemi resp. evolučními rovnicemi pole. Je opravdu pozoruhodné, že tyto *rovnice pole lze odvodit z variačního principu* $\delta S = 0$.

4.3 Teorém Emmy Noetherové

V kontextu Lagrangeova formalismu a Hamiltonova variačního principu lze odvodit velmi hlubokou souvislost mezi matematickými symetriemi akce a fyzikálními zákony zachování:

Má-li systém (tedy jeho akce) nějakou spojitou symetrii, pak existuje jí odpovídající fyzikální veličina, která se zachovává.

Tuto klíčovou větu teoretické fyziky explicitně zformulovala a dokázala vynikající matematicka Amalie Emmy Noetherová (1882–1935) v roce 1915 a publikovala v roce 1918 [16]. Na její počest se nazývá **teorém Emmy Noetherové**.

treba tento mininadpis?

Explicitně ho lze vyjádřit a dokázat následujícím způsobem:

*↳ neshör je precizní
dоказ*

Nejprve musíme zavést koncept *symetrie systému vůči spojitým transformacím*.

Uvažujme velmi obecnou třídu (diferencovatelných) transformací času a zobecněných souřadnic

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t'(t, q^j, \varepsilon), \\ q^j &\rightarrow q'^j(t, q^j, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.17)$$

tedy nová časová proměnná t' i nové souřadnice q'^j jsou funkciemi původních proměnných t a q^j . V transformačních vztazích (4.17) je navíc *jeden dodatečný reálný parametr* ε , který parametrizuje třídu transformací daného typu. Přirozeně předpokládáme, že pro hodnotu $\varepsilon = 0$ je to *identita*, tedy $t' = t$ a $q'^j = q^j$. Můžeme provést Taylorův rozvoj funkcí (4.17) podle tohoto parametru, čímž dostaneme vztah $t' = t'(\varepsilon = 0) + \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon}(\varepsilon = 0)\varepsilon + \frac{\partial^2 t'}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon = 0)\varepsilon^2 + \dots$, podobně lze vyjádřit q'^j . Když je **parametr ε malý**, lze zanedbat členy s jeho vyššími mocninami. Uvažovaná třída konečných transformací (4.17) se pak zjednoduší na příslušnou **třídu takzvaných infinitesimálních transformací** času a zobecněných souřadnic, které mají tvar

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = t + \varepsilon T(t, q^j), \\ q^j &\rightarrow q'^j = q^j + \varepsilon Q^j(t, q^j), \end{aligned} \quad (4.18)$$

kde hladké funkce $T(t, q^j)$ a $Q^j(t, q^j)$ jsou první derivace funkcí (4.17) podle ε , vyčíslené pro $\varepsilon = 0$. Říkáme jim **generátory transformací**.

Uvedeme konkrétní příklady velmi důležitých transformací tohoto typu:

- **prostorová translace** neboli *posunutí v kartézském směru x*

$$\begin{array}{ll} t' = t & T = 0 \\ x' = x + \varepsilon & Q^x = 1 \\ y' = y & Q^y = 0 \end{array} \quad (4.19)$$

- **prostorová rotace** neboli *otočení kolem počátku polárních souřadnic*

$$\begin{array}{ll} t' = t & T = 0 \\ r' = r & Q^r = 0 \\ \varphi' = \varphi + \varepsilon & Q^\varphi = 1 \end{array} \quad (4.20)$$

- **časová translace** neboli *posunutí v časovém směru t*

$$\begin{array}{ll} t' = t + \varepsilon & T = 1 \\ q'^j = q^j & Q^j = 0 \end{array} \quad (4.21)$$

Ještě elegantněji se kalibrační transformace elektromagnetického pole vyjádří v *relativistickém formalismu*, kde se zavádí **čtyřpotenciál** $A_\nu \equiv (-\varphi/c, \mathbf{A})$. Pak lze psát $A_\nu \rightarrow \tilde{A}_\nu = A_\nu + \frac{1}{e} F_{,\nu}$. Objemovou hustotu $\rho(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$ zobecněného potenciálu (3.26) lze také přepsat jednodušeji jako skalár $-j^\nu A_\nu$, kde j^ν je hustota **čtyřproudu** $j^\nu \equiv (c\rho, \mathbf{j})$, přičemž $\mathbf{j} \equiv \rho \mathbf{v}$. Přesně tento výraz je interakční člen v hustotě Lagrangeovy funkce \mathcal{L} Maxwellovy teorie uvedené v závěru části 4.2.1. Odečítáme ho od „kinetické energie“ volného elektromagnetického pole, kterou lze vyjádřit pomocí invariantu $-\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, kde (Faradayův–Maxwellův) **tenzor elektromagnetického pole** $F_{\mu\nu}$ je definován vzorcem $F_{\mu\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$.

Podle věty (4.38) nemůže kalibrační transformace (4.41), (4.42) změnit pohyb nabité částice v daném elektromagnetickém poli. Jde tedy jen o matematickou volnost (neboli symetrii) ve volbě potenciálů φ a \mathbf{A} , která se fyzikálně nijak neprojeví. Opravdu: do Lorentzovy síly $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ nevstupují přímo potenciály φ a \mathbf{A} ale vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} , které jsou dány známými vztahy $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ a $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Zjevně ale platí

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\text{grad } \tilde{\varphi} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi + \frac{1}{e} \text{grad} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } F = \mathbf{E}, \quad (4.44)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \text{rot } \tilde{\mathbf{A}} = \text{rot } \mathbf{A} + \frac{1}{e} \text{rot grad } F = \mathbf{B}. \quad (4.45)$$

Potenciály i po kalibrační transformaci dávají *stejné* elektromagnetické pole \mathbf{E} a \mathbf{B} , tedy stejnou Lorentzovu sílu \mathbf{F} .

Tyto úvahy můžeme ovšem také otočit. Lze si položit otázku: *Jaký musí být tvar Lagrangeovy funkce, aby byla invariantní co do tvaru vůči zvolené kalibrační transformaci?*

Představme si, že začneme s *volnou* částicí, tedy s funkcí $L = \frac{1}{2}m v^2$, což je (4.39) s $\varphi = 0 = \mathbf{A}$. Kalibrační transformace (4.41), (4.42) ale vygeneruje *nenulové* potenciály $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ a nová Lagrangeova funkce bude (4.43). Tento výsledný tvar $\tilde{L} = \frac{1}{2}m v^2 - e(\tilde{\varphi} - \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{A}})$ je *jiný* než výchozí L . Jestliže ale L volné částice *doplníme* o zobecněný potenciál V , takový že má právě tvar (4.39), bude již tato Lagrangeova funkce invariantní vůči kalibrační transformaci elektromagnetického pole, viz (4.43). **Požadavek kalibrační symetrie** (tedy aby tvar L byl invariantní vůči jisté konkrétní lokální kalibrační transformaci) *si vynucuje specifickou modifikaci L pro volnou částici o dodatečné členy*. Ty obsahují „pomocná“ kalibrační pole (ve zde uvedeném příkladě jsou to potenciály φ a \mathbf{A}) v takové formě, že zmodifikovaná Lagrangeova funkce již je kalibračně invariantní.

Ukazuje se, že právě **taková kalibrační pole zprostředkovávají fundamentální interakce částic**. Pomocí nich moderní fyzika zavádí fyzikální interakce mezi částicemi v kvantové teorii pole. Jde o **kvantovou elektrodynamiku** (QED), **elektroslabou interakci** (EWI) a **kvantovou chromodynamiku** (QCD). Interakční členy v Lagrangeově funkci se zavádějí postulováním unikátní Lieovy grupy lokálních symetrií, jež mají příslušná kalibrační pole splňovat. V případě QED jde o abelovskou (komutující) grupu $U(1)$, v případě EWI o neabelovskou (Yangova–Millsova) pole s grupou symetrií $U(1) \times SU(2)$ a v případě QCD o Yangova–Millsova kalibrační pole s grupou symetrií $SU(3)$. Hmotová pole (zejména elektrony a kvarky) jsou popsána jako *fermiony* splňující Diracovu rovnici (viz závěr části 4.2.1), zatímco kalibrační pole zavedená zmíněnými grupami symetrií representují *interakční bosony* (foton, bosony W a Z, gluony).

splňují - Klein-Gordonovu rovnici?

obrázok?

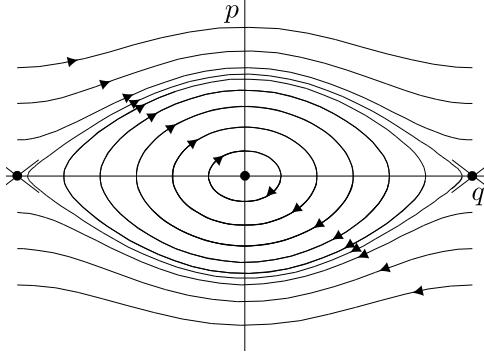
- tlumený oscilátor:

Pro tlumený oscilátor kvůli disipaci již neplatí zachování mechanické energie. Soustředné elipsy fázového portrétu se proto změní na *neprotínající se spirály*, které se postupně blíží stabilnímu singulárnímu bodu v počátku fázového portrétu $(q, p) = (0, 0)$. Protože tlumení je exponenciální funkce času, trajektorie by do tohoto singulárního bodu dospěly až v nekonečném čase $t \rightarrow \infty$.

- matematické kyvadlo:
$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

tedy $q \equiv \varphi$ a kanonická hybnost je $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$
kde $\varphi \in [-\pi, +\pi]$ (krajní body jsou navzájem identifikovány). Protože příslušná pohybová rovnice je nelineární, musíme trajektorie vývoje získat numericky. Fázový portrét vypadá takto:

Uprostřed portrétu vidíme soustředné uzavřené křivky čočkovitého tvaru (energetické nadplochy $E = \text{konst.}$), které se pro malé amplitudy výchylek blíží elipsám. Opravdu: víme, že *linearizace* matematického kyvadla vede na rovnici harmonického oscilátoru se stabilním singulárním bodem $(q, p) = (0, 0)$, kdy kyvadlo v klidu visí svisle dolů.



Vidíme také, že pro *větší výchylky* matematického kyvadla již portrét neodpovídá harmonickým oscilačím. S rostoucí amplitudou se *doba kmitů prodlužuje* (zatímco pro harmonický oscilátor je na amplitudě nezávislá), až pro určitou mezní hodnotu je nekonečná. To odpovídá takovým počátečním podmínkám, kdy kyvadlo (v nekonečném čase) *dospěje do nestabilní rovnovážné polohy*, v němž stojí svisle vzhůru. Ve fázovém portrétu tomu odpovídá singulární bod $(q, p) = (\pi, 0)$, jenž je identický se singulárním bodem $(q, p) = (-\pi, 0)$.

Fázový portrét ale zachycuje i všechny situace, kdy se *kyvadlo „přetáčí“*, tedy nekoná kmity, ale jeho výchylka $\varphi(t)$ monotónně roste (horní část fázového portrétu) či naopak monotónně klesá (dolní část fázového portrétu). Kvůli zachování energie je pro spodní polohu kyvadla $q = \varphi = 0$ velikost hybnosti $|p|$ největší, zatímco pro horní polohu $q = \varphi = \pm\pi$ je nejmenší.

Ještě si můžeme všimnout, že mezní trajektorie vedoucí k horní nestabilní rovnovážné poloze odděluje kmitavé periodické pohyby (uprostřed fázového portrétu) od přetáčivých (nahore a dole). Proto se v literatuře nazývá *separatrix*. Separatrisy vedoucí k nestabilním rovnovážným stavům hrají důležitou roli v teorii dynamických systémů s deterministickým chaosem.

5.1.3 Hamiltonova funkce

Třetím klíčovým pojmem Hamiltonova formalismu je **Hamiltonova funkce H** , které se zkráceně také běžně říká **hamiltonián**. Je to *skalární funkce na fázovém prostoru*. Známe-li Lagrangeovu funkci L systému, tedy $L(q^j, \dot{q}^i, t)$, spočítáme příslušnou Hamiltonovu funkci pomocí definice

$$H(q^j, p_j, t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - L. \quad (5.3)$$

Ale pozor! V tomto výrazu musíme ještě všechny zobecněné rychlosti \dot{q}^i Lagrangeova formalismu vyjádřit pomocí odpovídajících kanonických hybností p_j Hamiltonova formalismu. Konkrétně to znamená, že **za každou zobecněnou rychlosť \dot{q}^i je dosazena specifická funkce $\dot{q}^i(q^j, p_j, t)$** :

$$\dot{q}^i \equiv \dot{q}^i(q^j, p_j, t) \quad \text{je inverzí vztahů} \quad p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}(q^i, \dot{q}^i, t), \quad (5.4)$$

které definují kanonické hybnosti, viz (5.1).

Přesněji je tudíž Hamiltonova funkce dána výrazem

$$H(q^j, p_j, t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i(q^j, p_j, t) - L(q^j, \dot{q}^i(q^j, p_j, t), t). \quad (5.5)$$

Shrňme tedy postup odvození Hamiltonovy funkce H z Lagrangeovy funkce L :

- spočítáme kanonické hybnosti p_j sdružené s q^j předpisem $p_j(q^i, \dot{q}^i, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$,
- tyto vztahy invertujeme, čímž získáme funkce $\dot{q}^i(q^j, p_j, t)$,
- spočítáme výraz $H \equiv \sum p_i \dot{q}^i - L(q^j, \dot{q}^i, t)$,
- za zobecněné rychlosti \dot{q}^i dosadíme funkce $\dot{q}^i(q^j, p_j, t)$, čímž dostaneme $H(q^j, p_j, t)$.

Ještě ale zůstává nezodpovězena **otázka ekvivalence Lagrangeova a Hamiltonova popisu**. Lze pro každý mechanický systém, jehož dynamika je popsána Lagrangeovou funkcí L , najít odpovídající Hamiltonovou funkci H popisující stejný vývoj (a naopak)? Odpověď zní: *nikoli*. Existují systémy, pro něž vzájemná ekvivalence obou popisů selhává. Lze nahlédnout, že problémem může být právě *neinvertovatelnost* výrazu $p_j(q^j, \dot{q}^i, t)$ do podoby $\dot{q}^i(q^j, p_j, t)$. Aby inverzní funkce existovala, musí být vztah mezi p a \dot{q} prostý. To je zaručeno, pokud $\frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \neq 0$ neboli $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0$. Jinými slovy: pokud Lagrangeova funkce jakožto funkce zobecněné rychlosti *nemá inflexní bod*. Pro více stupňů volnosti $n > 1$ je zobecněním této podmínky ***nenulovost hessiánu***, což je determinant

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \right) \neq 0.$$

*✓ vnitřek
✓ fyz. příklad
když nespíná?*

Ve velké většině případů je tato podmínka splněna, takže Lagrangeův a Hamiltonův formalismus jsou pro jejich popis plně ekvivalentní. Podobně lze totiž z Hamiltonovy funkce naopak odvodit příslušnou Lagrangeovu funkci pomocí vztahů duálních k (5.3) a (5.1), totiž

$$L(q^j, \dot{q}^j, t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H \quad \text{kde} \quad \dot{q}^j \equiv \frac{\partial H}{\partial p_j}. \quad (5.7)$$

Na závěr si ještě povšimněme, že **Hamiltonova funkce H** definovaná (5.3) a (5.1) je vlastně **zobecněná energie h** zavedená v kontextu Lagrangeova formalismu vzorcem (3.38), jenom vyjádřená v jiných proměnných (zobecněné rychlosti \dot{q}^j jsou nahrazeny kanonickými hybnostmi p_j). Z věty (3.38) tedy plyne, že *nezávisí-li Hamiltonova funkce explicitně na čase, neboli $H(q^j, p_j)$, pak je integrálem pohybu a má význam zachovávající se (zobecněné) energie pro danou trajektorii*.

5.2 Hamiltonovy kanonické rovnice

Nyní již můžeme přepsat pohybové rovnice klasické mechaniky do Hamiltonova formalismu, tedy popsat dynamiku na fázovém prostoru fyzikálních stavů. Ukazuje se, že kanonické hybnosti p_j a Hamiltonova funkce H jsou zvoleny tak vhodným způsobem, že pomocí nich vyjádřené pohybové rovnice mají krásný, jednoduchý a symetrický tvar, totiž

$$\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}. \quad (5.8)$$

Tyto rovnice formuloval v roce 1834 slavný irský matematik, fyzik a astronom Sir William Rowan Hamilton (1805–1865). Pro svou unikátní a elegantní podobu se rovnice (5.8) často v literatuře nazývají **kanonické pohybové rovnice**.²

²Slovo *kanonický* znamená *stanovený za normu, uzákoněný, vyhovující zákonům (církevním, právním)*.

Všimněme si, že je to *soustava obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu*, přičemž jejich explicitní pravé strany se snadno získají pouhým derivováním dané Hamiltonovy funkce podle všech proměnných fázového prostoru: Časová derivace každé zobecněné souřadnice je rovna parciální derivaci hamiltoniánu podle sdružené kanonické hybnosti, a naopak — až na znaménko. Řešením těchto rovnic dostaneme trajektorii vývoje systému $(q^j(t), p_j(t))$ ve fázovém prostoru.

Důkaz: Z pedagogických důvodů provedeme odvození Hamiltonových kanonických rovnic dvěma nezávislými způsoby, neboť je to poučná aplikace předchozích formalismů.

1. Přímo z definice H a p_j s použitím Lagrangeových rovnic II. druhu:

Parciálně zderivujeme hamiltonián (5.5), jehož argumenty nejprve přeznačíme na (q^k, p_k, t) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_j} &= \frac{\partial}{\partial p_j} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i(q^k, p_k, t) - L(q^k, \dot{q}^i(q^k, p_k, t), t) \right] \xrightarrow{\text{jedna suma}} \frac{\partial H}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i(q^k, p_k, t) - L(q^k, \dot{q}^i(q^k, p_k, t), t) \right] \xrightarrow{\text{dve sumy}} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\delta_i^j \dot{q}^i + p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} \right] = \dot{q}^j + \sum_{i=1}^n \left[p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} - p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_j} \right] = \dot{q}^j = \frac{dq^j}{dt}, \\ &\quad \text{zvolit jednu variantu?} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = -\frac{\partial L}{\partial q^j} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = -\frac{dp_j}{dt}. \end{aligned}$$

suma cez premene?
 zmeniť označenie?

Pochopitelně jsme při tom využili pravidel (5.2) a definici kanonické hybnosti (5.1). Všimněte se, že první sada Hamiltonových kanonických rovnic obsahující $\frac{\partial H}{\partial p_j}$ je čistě matematická rovnost. Zákony klasické mechaniky v podobě *pohybových rovnic Lagrangeova formalismu* vstupují do výpočtu až ve druhé sadě na samém závěru úprav výrazu $\frac{\partial H}{\partial q^j} \equiv -\frac{\partial L}{\partial q^j}$.

2. Z Hamiltonova variačního principu:

Elegantnější odvození Hamiltonových rovnic plyne z variačního principu $\delta S = 0$, kde však oproti jeho aplikaci v Lagrangeově formalismu nyní uvažujeme *nezávislé variace* δq^j a δp_j ve fázovém prostoru:

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - H \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left[\delta p_j \dot{q}^j + p_j \delta \dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta q^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right] dt.$$

I zde provádíme izochronní variace (proto $\frac{\partial H}{\partial t} \delta t = 0$) a máme úlohu s pevnými konci, tedy $\delta q^j(t_1) = 0 = \delta q^j(t_2)$, díky čemuž užitím pravidla *per partes* platí

$$\int_{t_1}^{t_2} p_j \delta \dot{q}^j dt = \int_{t_1}^{t_2} p_j \frac{d}{dt} (\delta q^j) dt = [p_j \delta q^j]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \delta q^j dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \delta q^j dt,$$

takže

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left[-\left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q^j} \right) \delta q^j + \left(\dot{q}^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j \right] dt = 0.$$

Protože všechny variace δq^j a δp_j jsou pro všechna $j = 1, \dots, n$ navzájem nezávislé, musí vymízet všechny kulaté závorky pro každé j ,³ tedy $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$ a současně $\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$, což jsme měli dokázat.

◻

³Přesněji: druhá závorka je nulová identicky z definice H a p_j , viz první část přímého důkazu výše; jako důsledek $\delta S = 0$ pak musí vymízet i první závorka, což dává druhou sadu kanonických pohybových rovnic.

Částice v třírozměrném prostoru s potenciálem V

- kartézsky:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \quad (5.12)$$

- cylindricky:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_R^2 + \frac{p_\Phi^2}{R^2} + p_z^2 \right) + V(R, \Phi, z) \quad (5.13)$$

- sféricky:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + V(r, \vartheta, \varphi) \quad (5.14)$$

Nabitá částice v elektromagnetickém poli

- Lagrangeova funkce má tvar $L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$, viz zobecněný potenciál (3.26)
- uvažujeme-li kartézské komponenty vektorů $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ a $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, dostaneme celkem 3 kanonické hybnosti $p_x = m \dot{x} + eA_x$ a podobně p_y, p_z sdružené s x, y, z
- lze tedy psát $\mathbf{p} = m \mathbf{v} + e \mathbf{A}$: v tomto případě ***kanonická hybnost není rovna*** (jen) $m \mathbf{v}$
- přímočarým ale trochu delším výpočtem (viz cvičení z Teoretické mechaniky) lze ukázat, že

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e \mathbf{A})^2 + e \varphi, \quad (5.15)$$

kde kvadrát závorky je roven $\mathbf{p}^2 - 2e \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + e^2 \mathbf{A}^2$ přičemž $\mathbf{p}^2 \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ atd.

5.5 Poissonovy závorky

V kontextu Hamiltonova formalismu hrají důležitou roli tzv. Poissonovy závorky. Jedná se o velmi zajímavou strukturu na fázovém prostoru, zřetelně vystihující fundamentální podstatu fázového prostoru coby *symplektické variety klasické mechaniky*. Poissonovy závorky navíc našly své významné zobecnění jako komutátory příslušných fyzikálních veličin v kvantové mechanice.

5.5.1 Definice a algebraické vlastnosti

Mějme dvě libovolné (diferencovatelné) funkce f a g na fázovém prostoru, závisející případně i na čase t , tedy $f(q^j, p_j, t)$ a $g(q^j, p_j, t)$. Definujme jejich **Poissonovu závorku** (Siméon Denis Poisson, 1809) jakožto *novou funkci na fázovém prostoru* jednoznačně určenou přepisem⁴

$$\{f, g\} \equiv \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j} \right). \quad (5.16)$$

Jde tedy o specifickou kombinaci prvních parciálních derivací obou funkcí dle proměnných fázového prostoru. Všimněte si, že v každém členu se vyskytuje *součin prvních derivací podle kanonicky sdružených veličin* $(q^1, p_1), (q^2, p_2)$ atd. až (q^n, p_n) , kde n je počet stupňů volnosti systému.

Z definice hned vidíme, že Poissonova závorka je **antisymetrická** a **bilineární operace** v obou argumentech f a g . Navíc platí další pozoruhodné algebraické vztahy:

⁴Pozor na odlišné konvence, které se v literatuře také používají. Někde se místo složených závorek píšou hranaté, tedy $[f, g]$. Někde se Poissonovy závorky definují s opačným znaménkem.

Příklad: moment hybnosti

Uvažujme moment hybnosti částice $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ v kartézských souřadnicích $\mathbf{r} \equiv (x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ a k nim přidružených kanonických hybnostech $\mathbf{p} \equiv (p_x, p_y, p_z) \equiv (p_1, p_2, p_3)$, tedy

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k , \quad (5.27)$$

kde ϵ_{ijk} je totálně antisymetrický Levi-Civitův symbol. Přímým výpočtem Poissonových závorek lze ukázat, že platí následující důležité vztahy viz KNIHA TŘETÍ ?

$$\boxed{\{x_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} x_k , \quad \{p_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} p_k , \quad \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k .} \quad (5.28)$$

Tyto vztahy popisují/definují *algebru složek momentu hybnosti*. Přebírá je i kvantová mechanika, samozřejmě poté, co klasické funkce nahradí operátory a klasické Poissonovy závorky komutátory. Kvantová mechanika takto, mimo jiné, postuluje komutační relace pro operátor spinu částice $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$.

Vraťme se ke klasické Poissonově–Jacobiho větě. Poslední vztah (5.28) říká, že $\{L_x, L_y\} = L_z$ (a také že $\{L_y, L_z\} = L_x$ a $\{L_z, L_x\} = L_y$). To ale znamená, že *pokud jsou dvě složky momentu hybnosti integrály pohybu* (např. L_x a L_y), *pak je integrálem pohybu také třetí složka* (zde L_z), tedy zachovává se *celý vektor momentu hybnosti* \mathbf{L} .

Na závěr této části textu použijeme ještě jednou identitu (5.21) k zajímavému přepisu Hamiltonových rovnic. Za funkci f zvolíme přímo proměnné fázového prostoru q^j a p_j . Protože evidentně $\frac{\partial q^j}{\partial t} = 0 = \frac{\partial p_j}{\partial t}$, musí platit

$$\boxed{\frac{dq^j}{dt} = \{q^j, H\} , \quad \frac{dp_j}{dt} = \{p_j, H\} .} \quad (5.29)$$

Tato další podoba pohybových rovnic vyjádřených pomocí Poissonových závorek se uplatňuje v Heisenbergově formulaci kvantové mechaniky, kde v souladu s Diracovou kvantovací podmínkou jsou funkce nahrazeny příslušnými operátory polohy, hybnosti a hamiltoniánu. Obecně z identity (5.21) plyne Heisenbergova evoluční rovnice $\frac{d}{dt}\hat{f}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}(t), \hat{H}] + \frac{\partial}{\partial t}\hat{f}(t)$ a pohybové rovnice klasické mechaniky (5.29) přecházejí na $\frac{d}{dt}\hat{x}_j = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}_j, \hat{H}]$ a $\frac{d}{dt}\hat{p}_j = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}_j, \hat{H}]$.

pro \hat{H} nezávislé
na čase ?

5.6 Užití Hamiltonova formalismu ve fyzice

V této části stručně zmíníme použití Hamiltonova formalismu v různých oborech fyziky (přičemž naším cílem samozřejmě není systematický a hlubší výklad celé problematiky). Pojmy a metody hamiltonovské mechaniky v nich nacházejí četné a významné uplatnění, například:

- **kvantová mechanika**

Hamiltonián H vystupuje ve *Schrödingerově rovnici*. To je rovnice pro *vlnovou funkci* $\psi(\mathbf{r}, t)$ určující pravděpodobnost p nalezení částice v okolí dV daného místa \mathbf{r} v daném čase t , a to vztahem $p(\mathbf{r}, t) = \psi\bar{\psi} dV = |\psi|^2 dV$. Konkrétně je tato komplexní funkce ψ řešením rovnice

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi ,$$

kde \hat{H} je **operátor hamiltoniánu** (operátor energie). Získá se z klasické Hamiltonovy funkce $H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r})$, viz (5.12), formální substitucí $\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} \equiv -i\hbar \nabla$, tedy

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V .$$

Řešíme-li výskyt nabité částice v elektromagnetickém poli, musíme vyjít z hamiltoniánu $H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\varphi + V$, viz (5.15), čímž dostaneme složitěji vypadající operátor

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{ie\hbar}{m}\mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{ie\hbar}{2m}\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2 + e\varphi + V.$$

Dodatečné členy s vektorovým potenciálem \mathbf{A} magnetického pole pak způsobují specifické pozorovatelné efekty, například tzv. *Zeemanův jev* rozštěpení spektrálních čar atomů (umožňující měřit velikost magnetického pole na Slunci či hvězdách).

Mnohé experimenty, zejména slavný *Sternův–Gerlachův pokus* z roku 1922, nadto ukázaly, že elektron i další částice mají též vlastní *spin*, „vnitřní“ moment hybnosti, který může (včetně libovolnému směru) nabývat jen dvou diskrétních hodnot. Se spinem souvisí vlastní *magnetický moment* částice. Operátor \hat{H} proto musíme doplnit ještě o interakční člen $-\mu\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, kde $\mu = \frac{e\hbar}{2m}$ je velikost magnetického momentu elektronu, \mathbf{B} je intenzita magnetického pole, a $\boldsymbol{\sigma}$ jsou tři Pauliho matice dimenze 2×2 . Vlnovou funkci pak musíme chápat jako *dvojici* komplexních funkcí $\psi_1(\mathbf{r}, t)$, $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ reprezentující dva různé spinové stavy, uspořádané do dvouzádkového sloupce. Ze Schrödingerovy rovnice tím dostaneme *Pauliho rovnici* popisující elektron včetně jeho spinu. Podrobně viz učebnice kvantové mechaniky [19]–[22]:

- L. Skála: *Úvod do kvantové mechaniky*, Academia, Praha, 2005.
- J. Formánek: *Úvod do kvantové teorie*, Academia, Praha, 1983.
- J. Klíma a B. Velický: *Kvantová mechanika I., II.*, Karolinum, Praha, 2015, 2018.
- P. Cejnar: *A condensed course of quantum mechanics*, Karolinum, Praha, 2015.

• kvantová teorie pole

Hlavní úlohou relativistických kvantových teorií pole (jako je kvantová elektrodynamika QED, teorie elektroslabých interakcí EWI, či kvantová chromodynamika QCD popisující silné jaderné interakce), je explicitní počítání rozptylů, srážek a rozpadů častic. Tyto procesy jsou v teorii popsány operátorem tzv. *S-matrice*, jež určuje pravděpodobnost přechodu zkoumaného systému z daného počátečního stavu do stavu koncového. Stavy jsou definovány určitým počtem konkrétních druhů častic, jejich hybnostmi, spinem a polarizací. Označíme-li *počáteční stav* (initial state) symbolem $|i\rangle$ a *konečný stav* (final state) symbolem $|f\rangle$, je *amplituda pravděpodobnosti přechodu* ze stavu $|i\rangle$ do stavu $|f\rangle$ dána komplexní funkcí $S_{fi} \equiv \langle f | S | i \rangle$. Pravděpodobnost přechodu z $|i\rangle$ do $|f\rangle$ je číslo $|S_{fi}|^2$, která je normováno sumou všech možných výsledků: $\sum_f |S_{fi}|^2 = 1$.

Výpočet amplitudy S_{fi} obvykle probíhá iterativě pomocí *Dysonova rozvoje S-matice*

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int T\{\mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n)\} d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n,$$

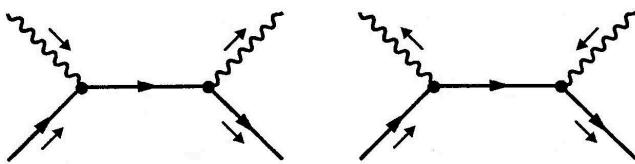
kde integrace se provádí přes celý čtyřrozměrný Minkowského prostoročas, symbol $T\{\dots\}$ označuje operaci časového uspořádání součinu, a \mathcal{H}_I je *hustota interakčního hamiltoniánu*. Například v kvantové elektrodynamice QED má tvar

$$\mathcal{H}_I(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x),$$

kde e je elektrický náboj, $\psi(x)$ je Diracovo pole popisující částice spinu $\frac{1}{2}$ (zde elektron a pozitron), $A_\mu(x)$ je čtyřpotenciál elektromagnetického pole, a γ^μ jsou Diracovy matice dimenze 4×4 (přičemž $\mathcal{H}_I(x)$ je vyjádřeno v tzv. *normálním uspořádání* kreačních a anihilačních operátorů příslušných polí). Všimněte si, že výraz pro interakční hamiltonián $\mathcal{H}_I(x)$ je co do formy dosti podobný zobecněnému potenciálu (3.26) pro elektron, tedy $V = -e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$, čemuž v relativistickém zápisu odpovídá hustota $\mathcal{V} = -j^\mu A_\mu$.

Výpočet amplitudy pravděpodobnosti S_{fi} přechodu z $|i\rangle$ do $|f\rangle$ se v poruchové teorii počítá approximacemi do stále vyšších řádů rozvoje $n = 1, n = 2, \dots$. Namísto v konfiguračním prostoru poloh $x \equiv x^\mu$ se obvykle provádí v *hybnostním prostoru* $p \equiv p_\mu$, což odpovídá Fourierovým transformacím příslušných polí. Jednotlivé členy poruchového rozvoje (získané pomocí tzv. *Wickovy věty*) se symbolicky reprezentují slavnými **Feynmanovými diagramy**, které velmi ulehčují konkrétní výpočty a usnadňují orientaci v celé složité problematice. Počet vrcholů diagramu je přitom roven řádu n poruchového rozvoje. Čím vyšší je řád, tím složitější diagramy s větším počtem vrcholů a vnitřních linií.

Jako ilustraci uvedeme *Comptonův rozptyl*, tedy pružnou srážku fotonu s elektronem, neboli proces $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$. V nejnižším řádu poruchové teorie k němu přispívají Feynmanovy diagramy:



kde vlnovka reprezentuje foton, plná čára elektron a vnitřní plná čára „virtuální“ elektron. Podrobný výklad lze najít v učebnicích, například [23, 24]:

J. Formánek: *Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole*
(část 2a), Karolinum, Praha, 2000.

F. Mandel and G. Shaw: *Quantum field theory*, John Wiley & Sons, Chichester, 1984.

• statistická fyzika

Statistická fyzika je obecný obor, umožňující *z podrobného mikroskopického popisu* složitého mnohočásticového systému pomocí klasické či kvantové mechaniky získat užitečný **makroskopický popis (termodynamický)**. Konkrétně z $6N$ veličin Hamiltonovy mechaniky q^j, p_j (což je typicky obrovské množství mikroskopických parametrů, například $\sim 10^{26}$) dovoluje přejít k páru příslušným globálním veličinám jako je teplota T , tlak p , entropie S , vnitřní energie U a tak dále. Činí tak **vhodným středováním** veličin *ve fázovém prostoru*. Klíčovou roli při tom hraje takzvaná **kanonická partiční funkce**

$$z \equiv C \int \dots \int \exp \left(- \frac{H(q^j, p_j)}{kT} \right) dq^1 \dots dq^{3N} dp_1 \dots dp_{3N},$$

kde H je Hamiltonova funkce, k je Boltzmannova konstanta a C je normovací konstanta. Připomeňme, že nezávisí-li H na čase, je integrálem pohybu a jeho hodnota

$$H(q^j, p_j) = E = \text{konst.}$$

reprezentuje energii (trajektorie vývoje systému leží na příslušné energetické nadploše).

Analogicky, invariantní tvar **operátoru partiční funkce** v kvantové mechanice je (Slater, 1931)

$$\hat{z} \equiv \text{Tr} \left[\exp \left(- \frac{\hat{H}}{kT} \right) \right], \quad \begin{array}{l} \text{→ nější operátor} \\ \text{po stopě} \end{array}$$

kde Tr značí stopu (anglicky „trace“).

$$z = \int_R dp dq \langle pq | e^{-\frac{\hat{H}}{kT}} | pq \rangle \rightarrow \begin{array}{l} \text{len} \\ \text{číslo} \\ \text{resp.} \end{array}$$

$$\{Q^j, g\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial Q^i} \{Q^j, Q^i\}_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \{Q^j, P_i\}_{q,p} \right) = \frac{\partial g}{\partial P_j},$$

$$\{P_j, g\}_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial Q^i} \{P_j, Q^i\}_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \{P_j, P_i\}_{q,p} \right) = -\frac{\partial g}{\partial Q^j}.$$

Záměnou g za f s užitím antisimetrie odtud plyne $\{f, Q^j\}_{q,p} = -\frac{\partial f}{\partial P_j}$ a $\{f, P_j\}_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial Q^j}$. Dosazením těchto výrazů do (5.42) po záměně sčítacích indexů i za j již snadno dostaneme

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_j \left(-\frac{\partial g}{\partial Q^j} \frac{\partial f}{\partial P_j} + \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial f}{\partial Q^j} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial Q^j} \frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q^j} \right) \equiv \{f, g\}_{Q,P}.$$

■

- Objem fázového prostoru je invariantní vůči kanonickým transformacím.

Důkaz pro $n = 1$: Protože pro jacián kanonické transformace (5.30) díky (5.40) platí

$$\text{Jac} \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \{Q, P\} = 1,$$

dostáváme ihned pro objem vymezené části fázového prostoru

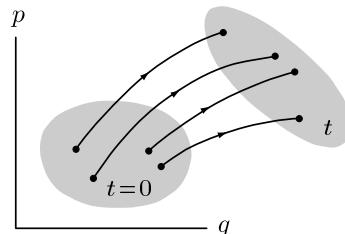
$$V = \iint dQ dP = \iint |\text{Jac}| dp dq = \iint dq dp.$$

nie je jasné co označuje?

Důkaz pro obecné n je technicky náročnější (užívá pravidel pro operaci s jaciány, které pak vyjádří pomocí generující funkce F_2). Lze ho najít v literatuře, např. v §46 [26], prvního svazku slavného kurzu teoretické fyziky L.D. Landau a E.M. Lifšic: *Mechanika*.

■

Tato důležitá věta implikuje takzvanou **Liouvilleovu větu**. Ukazuje se, že *vývoj mechanického systému lze chápout jako speciální kanonickou transformaci z počátečního do koncového stavu* (viz Brdička, Hladík [1] str. 363). Proto se systém částic, jejichž okamžitý stav je reprezentován body ve fázovém prostoru, chová jako „deformovatelné těleso“, jehož tvar se při vývoji sice obecně mění, ale objem V zůstává beze změny. To je velmi důležité zejména ve statistické fyzice.



kterou již snadno dořešíme separací proměnných

$$W(x) = \int dW = \int \sqrt{2m[E - V(x)]} dx = \int \sqrt{2m(E + mg x)} dx = \frac{1}{3m^2 g} \left[2m(E + mg x) \right]^{\frac{3}{2}}.$$

Máme tedy explicitní řešení Hamiltonovy–Jacobiho rovnice

$$S(x, t) = \frac{1}{3m^2 g} \left[2m(E + mgx) \right]^{\frac{3}{2}} - Et \quad (+\text{aditivní konstanta}).$$

Integrační konstantou je (zachovávající se) energie E , takže vztah (5.45) zní

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \beta, \quad (5.48)$$

což dává

$$\frac{1}{m g} \sqrt{2m(E + mg x)} - t = \beta,$$

a po přímočaré inverzní úpravě dostaneme finální řešení úlohy

$$x(t) = \frac{1}{2} g (t + \beta)^2 - \frac{E}{mq}.$$

To je samozřejmě správný a všeobecně známý výsledek, který jsme zde uvedli jen jako pedagogickou ilustraci metody. Plná síla Hamiltonovy–Jacobiho teorie se uplatňuje naopak u složitých úloh. Často totiž umožňuje ve vhodných souřadnicích najít separaci úplný integrál, tedy vyjádřit řešení úlohy pomocí pouhých integrálů (přehled lze najít například v kurzu Landau, Lifšic, 1. svazek §48). To je velmi důležité i pro různé approximační a numerické metody. Hamiltonova–Jacobiho teorie se stala mocným nástrojem zejména v *nebeské mechanice*.

číž už je jasné co znaci

Poznámka: Mohlo by se zdát, že aplikace vzorce (5.48) není odůvodněna. Z teorie kanonických transformací víme, že platí vztahy (5.45), tedy $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$, kde α_i jsou konstantní hodnoty zobecněných souřadnic Q^i , zatímco $-\beta_i$ jsou konstantní hodnoty sdružených kanonických hybností P_i . Záchovávající se **Jacobiho energie** E ale není zobecněnou souřadnicí. Přesto je použitý vzorec platný. Řešení Hamiltonovy–Jacobiho rovnice (5.44) pro časově nezávislé hamiltoniány $H(q^j, p_j)$ má tvar $S(q^j, \alpha_j, t) = W(q^j, \alpha_j) - E t$, přičemž platí $E = H(q^j, \frac{\partial S}{\partial q^j}) = H(q^j, \frac{\partial W}{\partial q^j}) = H(q^j, \alpha_j)$. Konstantní energie E je tedy funkci souřadnic q^j a parametrů α_j , neboli $E \equiv E(q^j, \alpha_j)$. Z věty o implicitní funkci lze proto vyjádřit například

$$\alpha_1 \equiv \alpha_1(E, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \; .$$

Parciálním derivováním S podle tohoto konstantního parametru získáme

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} t = \beta_1.$$

Vynásobením funkcí $\frac{\partial \alpha_1}{\partial E}$ (která je nutně nenulová), dostaneme

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial E} - t = \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial E}.$$

To je ale naprosto stejná podmínka, jakou dostaneme z rovnice

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \beta \equiv \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial E}$$

$$\text{pro funkci } S(q^j, E, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) \equiv W(q^j, \alpha_1(E, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_2, \dots, \alpha_n) - Et.$$

5.8.2 Některé teoretické aspekty Hamiltonovy–Jacobiho teorie

Závěrem ještě zmíníme zajímavá teoretická fakta související s Hamiltonovou–Jacobiho rovnicí:

- Speciální generující funkci S v rovnici (5.44) lze chápat jako **akční funkcionál**
 $S(q^j(t), t) \equiv \int_{t_0}^t L dt$, který pro pevné t dává akci konkrétní trajektorie $q^j(t)$.

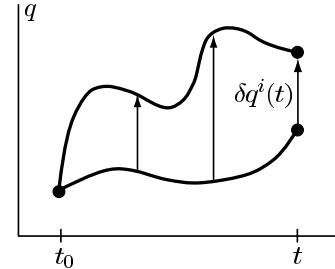
Důkaz: Derivací tohoto výrazu podle t dostáváme $\sum_i \frac{\partial S}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial t} = L$. Stačí tedy dokázat, že $\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i$, protože pak již je $\sum_i p_i \dot{q}^i - L + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ neboli $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$, tedy hlavní Hamiltonova funkce S opravdu řeší Hamiltonovu–Jacobiho rovnicu.

Vztah $\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i$ dokážeme variací S za předpokladu pevného koncového t , připouštíme ale $\delta q^i(t) \neq 0$. Vlastně tedy zkoumáme změnu S pro různé skutečné trajektorie řešící pohybové rovnice začínající v t_0 na stejném místě, ale které v čase t končí v různých bodech — každá taková trajektorie je určena svou variací $\delta q^i(t)$. Je proto

$$\delta S = \delta S(q^i(t \text{ pevné}), t \text{ pevné}) = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q^i}(t) \delta q^i(t).$$

Z druhé strany pro variaci funkcionálu platí

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_0}^t L dt = \int_{t_0}^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt \\ &= \int_{t_0}^t \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i dt + \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_{t_0}^t, \end{aligned}$$



kde integrál vypadne, neboť jsou splněny Lagrangeovy rovnice II. druhu. Je tedy

$$\delta S = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(t) \delta q^i(t) = \sum_i p_i(t) \delta q^i(t).$$

\rightarrow zdůraznit $\delta q^i(E) = 0$?

Ze srovnání obou výrazů při uvážení nezávislosti $\delta q^i(t)$ opravdu dostáváme vztah $\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i$.

■

- Funkce S je analogická eikonálu, pomocí něhož vlnová optika přechází na geometrickou.

Uvažujme hmotný bod m v poli potenciálu $V(\mathbf{r})$. Příslušná Hamiltonova funkce je (5.12). Nezávisí na t , takže Hamiltonova–Jacobiho rovnice (5.44) pro $S(\mathbf{r}, t) = W(x, y, z) - Et$ zní

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = 2m[E - V(x, y, z)], \quad (5.49)$$

což je třírozměrné zobecnění rovnice (5.47). Zavedeme vektor

$$\mathbf{p} \equiv \text{grad } S \quad \text{se složkami} \quad p_i \equiv \frac{\partial S}{\partial x^i} = \frac{\partial W}{\partial x^i}. \quad (5.50)$$

Fyzikálně je to v libovolném místě vektor hybnosti tečný k trajektorii částice $\mathbf{r}(t)$. Zjevně tedy platí, že

Naznačený postup souvisí s *kvaziklasickým přiblížením* kvantové mechaniky v kontextu tzv. *WKB approximace* (Wentzel, Kramers, Brillouin, 1926), které je přesnější approximací, neboť ve vztahu (5.52) neomezuje, aby C byla konstanta ale obecná reálná funkce $C(x, y, z, t)$.

- Klasická limita z pohledu Feynmanovy formulace kvantové mechaniky.

V této závěrečné poznámce zmíníme ještě jednu pozoruhodnou souvislost mezi kvantovou a klasickou mechanikou, tentokrát však nahlédnutou jiným způsobem, a to z hlediska **Feynmanovy formulace kvantové mechaniky**, která se poprvé objevila v jeho disertační práci z roku 1942. V ní se nezavádí operátory, jejich vlastní funkce a hodnoty, Schrödingerova rovnice atd. Základním pojmem je tzv. **amplituda pravděpodobnosti přechodu částice z \mathbf{r}_1 v t_1 do \mathbf{r}_2 v t_2** neboli **propagátor**, což je komplexní funkce označovaná symbolem

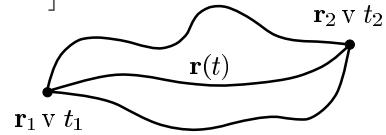
$$G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1).$$

Hustota pravděpodobnosti přechodu z \mathbf{r}_1 v t_1 do \mathbf{r}_2 v t_2 je pak $G\bar{G}$.

Funkci G lze podle Feynmana spočítat takzvaným **dráhovým integrálem**

$$G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = N \int_{\forall \mathbf{r}(t)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{r}(t)] \right] \mathcal{D}\mathbf{r}(t)$$

kde



- N je normalizační koeficient,
- $S[\mathbf{r}(t)]$ je *klasická akce* pro trajektorii $\mathbf{r}(t)$,
- $\forall \mathbf{r}(t)$ znamená že „sčítáme“ (integrujeme) přes *všechny* trajektorie začínající v t_1 v \mathbf{r}_1 a končící v t_2 v \mathbf{r}_2 (i klasicky nemožné),
- započítáme je s *komplexní váhou* $\exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right]$,
- $\mathcal{D}\mathbf{r}(t)$ je *míra na prostoru drah*: to je největší potíž, protože ji lze matematicky rigorózně definovat jenom v některých speciálních případech (je to míra na nekonečněrozměrném prostoru funkcí). Prakticky ji však lze vyčíslit např. numericky v „mrázových teoriích“.

Standardní vlnovou funkci ψ lze pak již spočítat jednoduše pomocí Greenova vztahu:

$$\underbrace{\psi(\mathbf{r}, t)}_{\text{vyvinutý stav}} = \int G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \underbrace{\psi(\mathbf{r}', t')}_{\text{počáteční stav}} dV'.$$

Je možno ukázat, že takto získaná komplexní funkce ψ řeší *Schrödingerovu rovnici*. Jde tedy o ekvivalentní formulaci kvantové mechaniky.

Trajektorie blízké klasické trajektorii dávají prakticky stejnou hodnotu akce S neboť podle Hamiltonova variačního principu je pro každou klasickou trajektorii $\delta S = 0$, to znamená, že S se v jejím okolí příliš nemění — nastává konstruktivní interference. Naopak pro trajektorie vzdálené od klasické se S mění velmi rychle a přispěvky od těchto neklasických drah se efektivně vyruší kvůli destruktivní interferenci: započítáváme je totiž s rychle se měnící váhou $\sim \cos(S/\hbar)$, neboť argument kosinu je silně proměnlivý. Z toho plyne závěr, že **k amplitudě pravděpodobnosti přechodu G přispívají nejvíce trajektorie v okolí klasické**. Lze dokonce říci, že tím více, „čím menší by bylo \hbar “. Tímto způsobem se tedy vynořuje klasické chování částic z kvantově mechanického popisu.

Podobně se zavádí Feynmanův integrál i v teorii pole. Velmi užitečný jak z teoretického tak i praktického hlediska je zejména v případě takzvaných Yangových–Millsových polí, jež popisují fundamentální kvantové interakce.

Rodrigues.

$$R = 1 + \sin\theta N + (1 - \cos\theta)N^2$$

$$\hookrightarrow A(\theta) = R(\theta) = 1 + \sin\theta(\theta)N + (1 - \cos\theta(\theta))N^2$$

$N_{ij} = \epsilon_{ijk} n_k \Rightarrow \vec{n}$ je osa rotace

část 6.3. Zavedení úhlové rychlosti

str. 107

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{n} = |\vec{\Omega}| \quad \text{sú paralelné} \Rightarrow N_{ij} \Omega_j = \epsilon_{ijk} n_k \Omega_j = (\vec{n} \times \vec{\Omega})_i = 0 \Rightarrow R(\theta) \vec{\Omega} = \vec{\Omega}$$

Tenzor úhlové rychlosti Ω lze vyjádřit i v bázi $\{\mathbf{e}_i\}$ pevné v prostoru. Příslušné složky jsou měří do ov. směrů

$$\Omega_{ij} \equiv \Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \quad (6.9)$$

Přímým výpočtem dokážeme, že v tomto případě

$$\Omega_{ij} \equiv A_{ki} \frac{dA_{kj}}{dt} \quad \text{tedy maticově} \quad \Omega = A^t \frac{dA}{dt}. \quad (6.10)$$

Ukázat to pomocou

Rodriguesových
formule?

$$\begin{aligned} \text{Opravdu, } \Omega_{ij} &\equiv \Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \Omega(A_{ki} \mathbf{e}'_k, A_{lj} \mathbf{e}'_l) = A_{ki} A_{lj} \Omega(\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_l) = A_{ki} A_{lj} \Omega'_{kl} \\ &= A_{ki} A_{lj} \frac{dA_{km}}{dt} A_{lm} = A_{ki} A_{lj} A_{lm} \frac{dA_{km}}{dt} = A_{ki} \delta_{jm} \frac{dA_{km}}{dt} = A_{ki} \frac{dA_{kj}}{dt}. \end{aligned}$$

Porovnáním (6.2) a (6.10) vidíme, že obecně $\Omega'_{ij} \neq \Omega_{ij}$ a proto též $\Omega'_k \neq \Omega_k$. Avšak pro rotace kolem pevné osy (při vhodně zvolených počátečních podmínkách) užitím transformačního vztahu $\Omega'_i = A_{ik} \Omega_k$ vyjde $\Omega'_k = \Omega_k$, tedy vektor úhlové rychlosti Ω mířící do osy otáčení má stejně složky v korotující i v pevné bázi. To je případ následujících dvou příkladů.

Příklady:

Geometrický význam vektoru úhlové rychlosti je dobře vidět z následující jednoduché ilustrace: je-li x_3 pevná osa otáčení a $\varphi(t)$ příslušný úhel otočení v daném čase, pak

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{dA}{dt} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega' = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

takže $\Omega = (0, 0, \dot{\varphi})$, což je zcela v souladu s intuitivní představou.

Méně elementárním příkladem je otáčení o úhel $\varphi(t)$ podél osy $x_1 = x_2$, $x_3 = 0$, pro které je

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \varphi & 1 - \cos \varphi & -\sqrt{2} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi & 1 + \cos \varphi & \sqrt{2} \sin \varphi \\ \sqrt{2} \sin \varphi & -\sqrt{2} \sin \varphi & 2 \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \sin \varphi & -\sqrt{2} \cos \varphi \\ \sin \varphi & -\sin \varphi & \sqrt{2} \cos \varphi \\ \sqrt{2} \cos \varphi & -\sqrt{2} \cos \varphi & -2 \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \Omega' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dot{\varphi} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & -\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{což dává} \quad \Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{\varphi}, \dot{\varphi}, 0). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Vektor úhlové rychlosti míří do invariantní osy otáčení, zde $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, a jeho velikost je $|\Omega| = |\dot{\varphi}|$.

6.3.1 Skládání úhlových rychlostí

Pro další diskuzi je nutno znát pravidla pro **skládání rotací a vektorů úhlových rychlostí**. Uvažujme dvě otočení: první je dáno ortogonální maticí A představující transformaci $\mathbf{e}'_i = A_{ik} \mathbf{e}_k$, druhé je dáno ortogonální maticí B a určuje transformaci $\mathbf{e}''_j = B_{ji} \mathbf{e}'_i$. Složení obou těchto otočení je dáno ortogonální maticí $C = BA$, neboť $\mathbf{e}''_j = B_{ji} A_{ik} \mathbf{e}_k = C_{jk} \mathbf{e}_k$. Nechť Ω^A je vektor úhlové rychlosti příslušející první transformaci A , zatímco Ω^B je vektor úhlové rychlosti příslušející druhé transformaci B . Vektor úhlové rychlosti Ω^C výsledného otočení $C = BA$ je dán prostým vztahem

$$\Omega^C = \Omega^B + \Omega^A. \quad (6.13)$$

Důkaz: Podle definice (6.2) je matice $\Omega^{C''}$ ve výsledné, tedy dvojčárkovane bázi, dána

$$\Omega^{C''} = \frac{dC}{dt} C^t = \frac{d(BA)}{dt} (BA)^t = \left(\frac{dB}{dt} A + B \frac{dA}{dt} \right) A^t B^t = \frac{dB}{dt} B^t + B \frac{dA}{dt} A^t B^t = \Omega^{B''} + B \Omega^{A'} B^t,$$

můžeme přímým výpočtem odvodit, že $I_{ij} = I_{ij}^0 + (\delta_{ij} a_k a_k - a_i a_j) m + 2\delta_{ij} a_k \pi_k^0 - a_i \pi_j^0 - a_j \pi_i^0$, kde $I_{ij}^0 = \int (\delta_{ij} x_k^0 x_k^0 - x_i^0 x_j^0) \rho dV$ jsou složky tenzoru setrvačnosti vůči těžišti, $m = \int \rho dV$ je celková hmotnost tuhého tělesa a $\pi_i^0 = \int x_i^0 \rho dV$ je jeho hmotový dipólový moment vůči těžišti. Ten však dle definice těžiště musí být nulový, čímž jsme odvodili obecnou *tenzorovou Steinerovu větu*

$$I_{ij} = I_{ij}^0 + (\delta_{ij} a_k a_k - a_i a_j) m. \quad (7.12)$$

Přenásobením složkami $n_i n_j$ jednotkového vektoru \mathbf{n} a užitím (7.11) dostáváme $I_{\mathbf{n}} = I_{\mathbf{n}}^0 + a_{\perp}^2 m$, kde $I_{\mathbf{n}}^0$ je moment setrvačnosti vůči těžišti a $a_{\perp}^2 = a_k a_k - a_i n_i a_j n_j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^2$, tedy a_{\perp} je kolmá vzdálenost mezi paralelními osami otáčení.

7.2 Eulerovy dynamické rovnice

Nyní již můžeme zformulovat pohybové rovnice určující otáčivý pohyb tuhého tělesa. Vyjdeme ze známého Newtonova vzorce pro soustavu hmotných bodů, z *druhé věty impulzové*,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (7.13)$$

kde \mathbf{L} je *celkový moment hybnosti* a \mathbf{M} je *moment sil*. Musíme ale být opatrní. Moment působících sil je zde chápán jako působící v inerciálním systému „absolutního“ prostoru, tedy i levou stranu je nutno chápát jako časovou změnu vektoru \mathbf{L} vůči referenčnímu *inerciálnímu systému* $\{\mathbf{e}_i\}$, neboli $\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{prostor}} = \mathbf{M}$. Naproti tomu, \mathbf{L} lze nejlépe vyjádřit v neinerciální bázi *pevně spojené s tělesem*: pokud speciálně zvolíme tuto bázi $\{\mathbf{e}'_i\}$ ve směru hlavních os tenzoru setrvačnosti (x, y, z) , dostaneme z (7.9) vztahy

$$L_x = I_1 \Omega_x, \quad L_y = I_2 \Omega_y, \quad L_z = I_3 \Omega_z, \quad (7.14)$$

přičemž složky I_i jsou *konstanty*. Proto lze velmi snadno spočítat časovou změnu \mathbf{L} vůči korotující bázi, tedy $\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{těleso}}$. Naštěstí však již máme k dispozici důležitý vztah (6.8), dávající do souvislosti časové změny vektoru vůči oběma bázim,

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{prostor}} = \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{těleso}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}.$$

Odtud okamžitě dostáváme

$$\begin{aligned} M_x &= I_1 \dot{\Omega}_x + (\Omega_y L_z - \Omega_z L_y), \\ M_y &= I_2 \dot{\Omega}_y + (\Omega_z L_x - \Omega_x L_z), \\ M_z &= I_3 \dot{\Omega}_z + (\Omega_x L_y - \Omega_y L_x), \end{aligned}$$

neboli

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_x - (I_2 - I_3) \Omega_y \Omega_z &= M_x, \\ I_2 \dot{\Omega}_y - (I_3 - I_1) \Omega_z \Omega_x &= M_y, \\ I_3 \dot{\Omega}_z - (I_1 - I_2) \Omega_x \Omega_y &= M_z. \end{aligned}} \quad (7.15)$$

To jsou tzv. *Eulerovy dynamické rovnice* (1758). Z matematického hlediska představují soustavu tří nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Za $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ je totiž nutno dosadit z Eulerových kinematických rovnic (6.14) takže rovnice obsahují až 2. derivace Eulerových úhlů φ, θ, ψ . Složky momentu sil $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ musí být rovněž vyjádřeny vůči *korotující neinerciální bázi* pevně spojené s tělesem. Zatímco \mathbf{M} má obvykle jednoduchý tvar v nerotujícím

Kapitola 8

Aplikace: setrvačníky

V této závěrečné kapitole II. části knihy nyní aplikujeme předchozí vzorce určující kinematiku a dynamiku tuhého tělesa na tři důležité ilustrativní příklady: prozkoumáme pohyb bezsilového setrvačníku, setrvačníku se třením a setrvačníku s pevným bodem v gravitačním poli (vlčka).

8.1 Volný setrvačník (bezsilový)

V případě bezsilového setrvačníku je celkový moment působících sil nulový ($\mathbf{M} = 0$) takže Eulerovy dynamické rovnice (7.15) se redukují na nelineární rovnice 1. řádu v proměnných Ω_i . Pro **symetrický setrvačník** se dále velmi zjednoduší: je-li z (hlavní) osa symetrie axiálně symetrického tělesa, pak $I_1 = I_2$, takže

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_x &= (I_1 - I_3) \Omega_y \Omega_z, \\ I_1 \dot{\Omega}_y &= (I_3 - I_1) \Omega_z \Omega_x, \\ I_3 \dot{\Omega}_z &= 0. \end{aligned}$$

Odtud ihned plyne, že $\Omega_z \equiv \omega_0^z = \text{konst.}$ a zbylé dvě rovnice dávají

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_x &= \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^z \Omega_y \equiv -\omega_0 \Omega_y, \\ \dot{\Omega}_y &= \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_0^z \Omega_x \equiv \omega_0 \Omega_x, \end{aligned}$$

kde $\omega_0 \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_0^z = \text{konst.}$ Zderivováním a dosazením získáme rovnici harmonického oscilátoru

$$\ddot{\Omega}_x + \omega_0^2 \Omega_x = 0,$$

takže obecné řešení je

$$\begin{aligned} \Omega_x &= A \cos(\omega_0 t + \delta), \\ \Omega_y &= A \sin(\omega_0 t + \delta), \\ \Omega_z &= \omega_0^z, \end{aligned} \tag{8.1}$$

kde A, δ, ω_0^z jsou tři libovolné integrační konstanty a $\omega_0 = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_0^z$ (kde ω_0 a ω_0^z mohou být i záporné či nulové). Eulerovy úhly pak již lze snadno dopočítat z (6.14). Výsledek je, že ve vztahu ke vhodně zvolené pevné bázi definující osy (x_1, x_2, x_3) je nutační úhel konstantní, $\vartheta = \vartheta_0$, zatímco precesní a rotační úhly jsou lineární funkce času, přičemž

$$\tan \vartheta_0 = \frac{I_1 A}{I_3 \omega_0^z}, \quad \varphi = \frac{A}{\sin \vartheta_0} t + \varphi_0, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - (\omega_0 t + \delta).$$

napisat aho sme dostali φ_0 ?

Získali jsme tedy úplné řešení úlohy. Musíme ho však ještě interpretovat geometricky a fyzikálně.

Uvažujme osově symetrické těleso hmotnosti m , které se může volně otáčet v homogenním gravitačním poli g kolem pevného bodu vzdáleného l od těžiště tělesa.

Kinetická energie rotujícího tělesa je dána $T = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j$, viz (7.9). Zvolíme-li za kartézské osy rotujícího systému hlavní osy tenzoru setrvačnosti tělesa, vymizí deviační momenty ($I_{ij} = 0$ pro $i \neq j$). Netriviální budou pouze složky I_3 a $I_1 = I_2$, takže $I_{zz} = I_3$ a užitím Steinerovy věty (7.12) je $I_{xx} = I_{yy} = I_1 + ml^2$. Kinetická energie je tedy $T = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \frac{1}{2}I_3\Omega_z^2$. Dosadíme-li nyní za Ω_i z Eulerových kinematických rovnic (6.14) a uvážíme-li potenciální energii $V = mgz_t$, dostáváme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 - mgl \cos \vartheta. \quad (8.10)$$

*↳ napísat
co je že?*

Protože souřadnice ψ a φ jsou cyklické, máme ihned dva integrály pohybu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= I_3(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi}) = L_\psi, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= [(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta + I_3 \cos^2 \vartheta] \dot{\varphi} + I_3 \cos \vartheta \dot{\psi} = L_\varphi, \end{aligned} \quad (8.11)$$

kde L_ψ a L_φ jsou konstanty. Protože navíc L nezávisí explicitně na čase a je kvadratický v rychlostech, zachovává se celková mechanická energie $E = T + V = \text{konst.}$,

$$\frac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 + mgl \cos \vartheta = E. \quad (8.12)$$

Soustavu (8.11) lze rozřešit vzhledem k $\dot{\psi}$ a $\dot{\varphi}$,

$$\dot{\varphi} = \frac{L_\varphi - L_\psi \cos \vartheta}{(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta}, \quad \dot{\psi} = \frac{L_\psi}{I_3} - \cos \vartheta \frac{L_\varphi - L_\psi \cos \vartheta}{(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta}. \quad (8.13)$$

Dosazením (8.13) do (8.12) dostáváme po přímočarých úpravách diferenciální rovnici

$$\frac{1}{2}(I_1 + ml^2) \dot{\vartheta}^2 = \tilde{E} - V_{\text{ef}}(\vartheta), \quad (8.14)$$

kde $\tilde{E} \equiv E - L_\psi^2/(2I_3)$ a efektivní potenciál $V_{\text{ef}}(\vartheta)$ je dán

$$V_{\text{ef}}(\vartheta) = \frac{(L_\varphi - L_\psi \cos \vartheta)^2}{2(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta} + mgl \cos \vartheta. \quad (8.15)$$

Integrací rovnice (8.14) a její inverzí obdržíme $\vartheta(t)$ a po dosazení do (8.13) lze dalšími dvěma integracemi získat $\psi(t)$ resp. $\varphi(t)$, čímž je úloha v principu vyřešena. Úplný rozbor a konkrétní výpočty (vedoucí na komplikovaná vyjádření pomocí eliptických integrálů) přesahují rámec tohoto textu, lze je najít například v knize [28]: V. Trkal, *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*.

Zde se omezíme jen na popis hlavních vlastností a zajímavého chování studovaného setrvačníku, které lze odvodit i bez znalosti explicitního řešení. S výhodou využijeme **metodu efektivního potenciálu** zavedenou v části 3.4.3 pro kvalitativní rozbor přípustných pohybů v centrálním poli. Rovnice (8.14) je totiž zcela analogická rovnici (3.55), jen souřadnice r je nahrazena souřadnicí ϑ a konstanty mají jiný fyzikální význam. Klíčové opět je, že pohyb setrvačníku je možný pouze pro takové hodnoty nutačního úhlu ϑ , kdy $V_{\text{ef}}(\vartheta) \leq \tilde{E}$. Pod grafem funkce $V_{\text{ef}}(\vartheta)$ je *zakázaná oblast*, kde se hodnota ϑ nikdy nemůže ocitnout. *Body obratu* $\dot{\vartheta} = 0$ jsou dány průsečíky $V_{\text{ef}}(\vartheta) = \tilde{E}$ pro konkrétní hodnotu \tilde{E} .

Podle (9.13) tedy musí platit

$$F(x) + G(x) = u_0(x), \quad (9.16)$$

$$-cF'(x) + cG'(x) = v_0(x). \quad (9.17)$$

Integrací (9.17) dostaneme

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{c} V_0(x), \quad (9.18)$$

kde $V_0(x) = \int v_0(x) dx$ je primitivní funkce k $v_0(x)$. Odečtením a sečtením (9.16) a (9.18) vypočítáme $F(x)$ a $G(x)$. Dosazením proměnných $\xi = x - ct$ do argumentu F a $\eta = x + ct$ do argumentu G tedy dostaneme řešení vyhovující uvedeným počátečním podmínkám,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[u_0(x - ct) - \frac{1}{c} V_0(x - ct) + u_0(x + ct) + \frac{1}{c} V_0(x + ct) \right]. \quad (9.19)$$

Konstrukce řešení je jednoznačná, neboť primitivní funkce V_0 je určena až na aditivní konstantu, která z výsledného řešení vypadne. Platí *věta o jednoznačnosti*, podle které je řešení vlnové rovnice jednoznačně určeno zadáním počátečních podmínek (9.14), (9.15). Uvedené řešení se nazývá *d'Alembertovo*.

9.4.2 Metoda Bernoulliho–Fourierova

V principu lze výše uvedeného d'Alembertova postupu použít i pro hledání řešení *konečné struny*, například *s pevnými konci*, které je navíc v každém okamžiku t omezeno *okrajovou podmínkou*

$$u(0, t) \equiv 0 \quad \text{pevný levý konec struny}, \quad \text{↳ dopisat, že Dirichletova (známe z mat.)}$$

$$u(l, t) \equiv 0 \quad \text{pevný pravý konec struny}, \quad (9.21)$$

viz závěrečná část 9.5 textu. Výhodnější je ale užít postupu *Bernoulliova*. Při něm se hledá řešení rovnice (9.4) v separovaném tvaru $u(x, t) = X(x) T(t)$. Dosazením do (9.4) a úpravou dostaneme

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad (9.22)$$

kde čárka označuje derivaci podle x a tečka derivaci podle t . Vztah vyjadřuje rovnost mezi dvěma funkcemi různých proměnných, která má být splněna pro všechny hodnoty x a t . To nastává jen tehdy, rovnají-li se obě strany též *separační konstantě* $-\omega^2$, kde ω je reálné. (Pro nulové nebo imaginární ω nelze dané okrajové podmínky netriviálně splnit.)

Vztah (9.22) proto představuje dvě obyčejné lineární diferenciální rovnice pro $X(x)$ a $T(t)$. Rovnice pro X má obecné řešení

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right),$$

kde C_1, C_2 jsou konstanty. První okrajová podmínka (9.20) nyní zní $X(0) = 0$, což vyžaduje

$$C_1 = 0. \quad (9.23)$$

Druhá podmínka (9.21), tedy $X(l) = 0$, pro $X(x) = C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)$ zní $\sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0$, což lze splnit jenom pro úhlové frekvence

$$\omega_n = n\pi \frac{c}{l}, \quad \text{kde } n = 1, 2, 3, \dots. \quad (9.24)$$

Obdobně vyřešíme rovnici (9.22) pro $T(t)$, což dává $T(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$. Tedy

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

je partikulárním řešením rovnice (9.4) vyhovující oběma okrajovým podmínkám (9.20), (9.21).

Protože rovnice (9.4) je lineární, řeší ji i libovolná konečná superpozice funkcí u_n . Bude ji tedy řešit i nekonečná řada

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) \right], \quad (9.25)$$

pokud ji lze derivovat člen po členu a stejnoměrně konverguje. To samozřejmě závisí na hodnotách koeficientů a_n, b_n , které určíme z počátečních podmínek (9.14), (9.15)

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \equiv u_0(x), \quad (9.26)$$

$$u_{,t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi\frac{c}{l} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \equiv v_0(x), \quad (9.27)$$

kde $u_0(x)$ je spojitá funkce (která vymizí v koncových bodech) a $v_0(x)$ je po částech spojitá funkce.

Z teorie **Fourierových řad** plyne, že koeficienty a_n a b_n jsou zcela určeny vztahy

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx, \end{aligned} \quad (9.28)$$

a s takto určenými koeficienty řada (9.25) stejnoměrně konverguje. Výrazy pro a_n, b_n se získají tak, že řada (9.26) resp. (9.27) se vynásobí funkci $\sin(m\pi\frac{x}{l})$ a integruje přes x . Užitím identity $\sin(m\pi\frac{x}{l}) \sin(n\pi\frac{x}{l}) = \frac{1}{2} \cos((m-n)\pi\frac{x}{l}) - \frac{1}{2} \cos((m+n)\pi\frac{x}{l})$ se snadno zjistí, že platí

$$\int_0^l \sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} \delta_{mn},$$

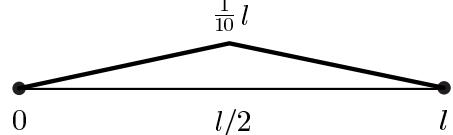
do závorky dat,
že "lidížek funkci"?

takže po integraci řady člen po členu zůstane na levé straně pouze koeficient a_m resp. b_m vynásobený konstantou $l/2$ resp. $m\pi c/2$, načež stačí jen přeznačit m za n . Systém funkcí $\{\sin(n\pi\frac{x}{l})\}$ je navíc příkladem **úplného ortogonálního systému funkcí s pevnými konci** (9.20), (9.21) na intervalu $(0, l)$. Připoměme, že levá strana vztahu (9.29) představuje skalární součin m -tého a n -tého člena systému. Oprávněnost operací a důkaz úplnosti však vyžadují pečlivější matematické zkoumání.

9.4.3 Příklad na Fourierovy řady

Užitečnost a smysl právě odvozeného postupu řešení nyní ilustrujeme na konkrétním příkladě kmitů struny s pevnými konci. Uvažujme počáteční podmínky (9.14), (9.15), kdy strunu uprostřed vychýlíme z rovnovážné polohy do vzdálenosti $\frac{1}{10}l$ a pak z klidu vypustíme, neboli počáteční poloha je

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{5}x && \text{pro } x \in [0, l/2], \\ u_0(x) &= \frac{1}{5}(l-x) && \text{pro } x \in [l/2, l], \end{aligned}$$



zatímco počáteční rychlosť vymizí, $v_0(x) = 0$. Z (9.28) ihned plyne, že $b_n = 0$ pro všechna n a

$$a_n = \frac{2}{5l} \int_0^{l/2} x \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx + \frac{2}{5l} \int_{l/2}^l (l-x) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx.$$

$y(x) \equiv u(x, t = \text{konst.})$, dostáváme $F_y^l = -\sigma u_{,x}$. Třetí síla mezi kroužkem a tyčkou je úměrná rychlosti pohybu kroužku, neboli $F_{\text{tření}} = -b u_{,t}$, kde $b > 0$ je konstantní **parametr tření**. Odvodili jsme tedy, že

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial t},$$

Protože koncový kroužek je ve skutečnosti *nehmotný*, uvažujeme limitu $m \rightarrow 0$ a ihned dostáváme příslušnou *okrajovou podmítku na pravém konci* $x = l$

$$\boxed{\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = -b \frac{\partial u}{\partial t}}. \quad (9.33)$$

Na *levém konci* $x = 0$ je působící síla vnitřního napětí struny $\mathbf{F} = +\sigma \mathbf{t}$, což dává podmítku

$$\boxed{\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial u}{\partial t}}. \quad (9.34)$$

Tyto obecné podmínky zahrnují zajímavé speciální případy, které rozebereme.

9.5.1 Struna s volnými konci

Když na koncích struny žádné tření nepůsobí, je $b = 0$ a z (9.33), (9.34) okamžitě dostáváme okrajovou podmítku na *volné konce* → dopisat, že Neumannova

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (9.35)$$

Při *Bernoulliho řešení* rovnice struny metodou separace $u(x, t) \equiv X(x)T(t)$ vedoucí na (9.22) dostaneme stejně obecné funkce $X(x)$ a $T(t)$, ale integrační konstanty budou nyní jiné. Namísto (9.23) dostaneme naopak

$$C_2 = 0, \quad (9.36)$$

protože musíme splnit $X'(0) = 0$. Druhá podmínka $X'(l) = 0$ dá diskrétní úhlové frekvence kmitů

$$\omega_n = n\pi \frac{c}{l}, \quad \text{kde } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (9.37)$$

což je stejná podmínka jako pro strunu s pevnými konci (9.24). Jediná odlišnost je v tom, že nyní je netriviální základní mód $n = 0$, který odpovídá *konstantní funkci* $X(x) = C_1 \cos(0) = C_1$. Namísto (9.25) jsme tedy dostali řešení rovnice struny ve tvaru řady

$$\boxed{u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) \right]}. \quad (9.38)$$

Pro počáteční podmínky (9.14), (9.15) je nutno splnit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \equiv u_0(x), \quad (9.39)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi \frac{c}{l} \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \equiv v_0(x), \quad (9.40)$$

kde $u_0(x)$ je počáteční výchylka a $v_0(x)$ rychlosť struny v $t = 0$. V tomto případě tedy musíme zadání funkce $u_0(x)$, $v_0(x)$ rozložit do Fourierových řad *úplného systému funkcí* $\{\cos(n\pi \frac{x}{l})\}$ s *volnými konci* (9.35) na intervalu $(0, l)$. Systém je ortogonální, neboť skalární součin prvků báze je

do závorky sudé řád?

$$\int_0^l \cos\left(m\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad (9.41)$$

což dokážeme užitím identity $\cos(m\pi \frac{x}{l}) \cos(n\pi \frac{x}{l}) = \frac{1}{2} \cos((m-n)\pi \frac{x}{l}) + \frac{1}{2} \cos((m+n)\pi \frac{x}{l})$. Díky tomu lze získat explicitní vyjádření koeficientů a_n , b_n ve tvaru

neboli s identifikací $v_j \equiv \frac{dx_j}{dt}$ a přeuspořádnáním

$$\boxed{a_i(x_j, t) = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} \quad (10.6)$$

což v kompaktnějším vektorovém zápisu je

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}}. \quad (10.7)$$

doplnit na celý box?

Ilustrace:

Pro pochopení rozdílu mezi Lagrangeovým a Eulerovým popisem uvedeme jednoduchý příklad. Nechť jednorozměrný pohyb tekutiny (10.1) je dán zobrazením $x = \chi(X, t) \equiv X + \alpha X t^2$, kde α je konstanta, přičemž v počátečním čase $t = 0$ zjevně platí $x = \chi(X, 0) = X$. Pak Lagrangeova rychlosť a zrychlení jsou pouhými derivacemi χ podle času, tedy $v_L = 2\alpha X t$ a $a_L = 2\alpha X$. Při Eulerově popisu musíme vyloučit „jména materiálových částic“ X a vyjádřit je pomocí okamžitých poloh x v daném čase t , proto použijeme inverzní zobrazení χ^{-1} , tedy $X = \frac{x}{1+\alpha t^2}$. Dosazením do v_L a a_L dostaneme Eulerovu rychlosť $v_E = \frac{2\alpha x t}{1+\alpha t^2}$ a zrychlení $a_E = \frac{2\alpha x}{1+\alpha t^2}$. Snadno ověříme, že a_E lze opravdu spočítat z v_E užitím vztahu (10.6): $a_E = \frac{\partial v_E}{\partial t} + v_E \frac{\partial v_E}{\partial x} = \frac{2\alpha x(1-\alpha t^2)}{(1+\alpha t^2)^2} + \frac{4\alpha^2 x t^2}{(1+\alpha t^2)^2} = \frac{2\alpha x}{1+\alpha t^2}$.

Všimněme si, že zatímco zrychlení každé částice „pojmenované“ X zůstává v Lagrangeově popisu konstantní s časem, $a_L = 2\alpha X$, Eulerovo zrychlení v daném místě x klesá, $a_E = \frac{2\alpha x}{1+\alpha t^2} \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$. To proto, že s rostoucím t procházejí místem x částice vyslané v $t = 0$ z čím dál bližšího okolí počátku, $X \rightarrow 0$, a jejich (Lagrangeovo) zrychlení $a_L = 2\alpha X$ je stále menší.

10.1.1 Deformační tenzory

Deformační zobrazení χ kompletně popisuje vývoj kontinua. Referenční konfiguraci v čase $t = 0$ reprezentované souřadnicemi X_k přiřazuje předpisem (10.1) okamžitou konfiguraci v libovolném čase t reprezentované souřadnicemi $x_i = \chi_i(X_k, t)$. Popisuje tedy i charakter a velikost deformace. Ta je určena **deformačním gradientem**, což je matice všech prostorových parciálních derivací deformačního zobrazení,

$$\boxed{F_{ik} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \chi_{i,k}(X_j, t)}. \quad (10.8)$$

Je to *lineární approximace změn* popsaných obecným deformačním zobrazením χ , určuje dominantní příspěvek. Úplný diferenciál χ (což je Taylorův rozvoj do prvního řádu) totiž zjevně pro malé rozdíly okamžitých poloh dx_i , vyjádřených pomocí malých změn výchozích referenčních poloh dX_k , dává vztah $dx_i = F_{ik} dX_k$. Lze ukázat, že tato lineární transformace od referenčního vektoru (dX_1, dX_2, dX_3) k okamžitému vektoru (dx_1, dx_2, dx_3) se dá rozložit na dvě postupné operace, totiž *protoření* (nebo stlačení) refrenčního vektoru a následou *rotaci*.

Chceme-li vyjádřit invariantní vzdálenost $dl^2 \equiv dx_i dx_i$ dvou blízkých bodů po deformaci, platí

$$dl^2 = (F_{ik} dX_k) (F_{il} dX_l) = F_{ik} F_{il} dX_k dX_l.$$

Je tedy přirozené definovat **Greenův deformační tenzor** vztahem

$$C_{kl} \equiv F_{ik} F_{il},$$

takže **invariantní vzdálenost po deformaci** je vyjádřena kvadartickou formou

$$\boxed{dl^2 = C_{kl} dX_k dX_l, \quad \text{kde} \quad C_{kl} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_i}{\partial X_l}}, \quad (10.9)$$

pomocí počátečního referenčního vektoru (dX_1, dX_2, dX_3) . Z definice je zřejmé, že $C_{kl} = C_{kl}(X_j, t)$, tedy Greenův deformační tenzor je také vyjádřen v parametrech *referenční konfigurace*.

Tuto analýzu lze otočit a místo deformační zobrazení χ použít k němu *inverzní zobrazení* χ^{-1} , tedy funkci $X_k = \chi_k^{-1}(x_j, t)$. Namísto deformačního gradientu (10.8), neboli matice $F_{ik} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_k}$, dostaneme matici s prvky $\frac{\partial X_k}{\partial x_j}$, která je *inverzní* k F_{ik} , neboť $\frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \delta_{ij}$. Protože $dX_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_j$, je invariantní vzdálenost $dL^2 \equiv dX_k dX_k$ před deformací dána komplementárním vzorcem¹

$$dL^2 = c_{ij} dx_i dx_j, \quad \text{kde} \quad c_{ij} \equiv \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad (10.10)$$

je **Cauchyho deformační tenzor**. Počáteční referenční vzdálenost dL^2 je tedy naopak určena pomocí okamžitého vektoru (dx_1, dx_2, dx_3) a Cauchyho deformační tenzor $c_{ij} = c_{ij}(x_k, t)$ je také vyjádřen v *okamžité konfiguraci*.

Existují ještě dva deformační tenzory, konkrétně **Piolův** a **Fingerův**, které jsou *inverzní* ke Greenovu a Cauchyho. Tyto **čtyři související deformační tenzory** shrnuje následující tabulka:

Greenův	deformační tenzor	$C_{kl} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_i}{\partial X_l}$
Cauchyho	deformační tenzor	$c_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}$
Piolův	deformační tenzor	$B_{kl} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_l}{\partial x_i}$
Fingerův	deformační tenzor	$b_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_j}{\partial X_k}$

Jedná se zjevně o *symetrické tenzory*. Mají tedy jen *šest nezávislých složek a lze je diagonalizovat*. Tyto tenzory jsou klíčové pro zavádění specifických reologických vztahů. Konkrétní volba se liší podle vhodnosti jejich aplikace na daný problém.

Pomocí Greenova a Cauchyho deformačního tenzoru se v mechanice kontinua definují ještě další dva důležité **tenzory deformace** jako **odchyly od identity**:

$$C_{kl} = \delta_{kl} + 2 E_{kl} \quad \text{a} \quad c_{ij} = \delta_{ij} - 2 e_{ij}, \quad \begin{array}{l} \text{prehodit,} \\ \text{aby bolo vidieť} \\ \text{tieto odchyly od} \\ \text{idemtit?} \end{array} \quad (10.12)$$

tedy

lagrangeovský tenzor deformace	$E_{kl} = \frac{1}{2}(C_{kl} - \delta_{kl})$
eulerovský tenzor deformace	$e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - c_{ij})$

Tyto tenzory se obvykle vyjadřují pomocí pole **vektoru posunutí** \mathbf{u} takového, že platí

$$x_i = X_i + u_i, \quad \leftarrow \text{definovať aj } U_i \quad (10.13)$$

a jeho gradientu. Lze ho vyjádřit lagrangeovsky (pomocí X_k) anebo eulerovsky (pomocí x_k):

$$U_i(X_k, t) \equiv \chi_i(X_k, t) - X_i \quad \text{anebo} \quad u_i(x_k, t) \equiv x_i - \chi_i^{-1}(x_k, t),$$

viz zavedení deformačního zobrazení (10.1) a jeho inverze. Platí tedy vztahy

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \delta_{ik} + \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \quad \text{a} \quad \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \delta_{ki} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}.$$

¹Nelze si nevšimnout, že kvadratické formy (10.9) a (10.10) připomínají výraz $dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ pro invariantní vzdálenost dvou blízkých bodů vyjádřenou v diferenciální geometrii pomocí metrického tenzoru g_{ij} a jeho analogii $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ v obecné teorii relativity. Správně bychom i zde měli rozlišovat horní a dolní indexy. Připomínáme ale opět, že se omezujeme jenom na kartézské souřadnice s triviální prostorovou metrikou $g_{ij} = \delta_{ij}$, takže polohu indexů veličin nemusíme sledovat.

Rozvinutím funkcí χ_i v (10.1) do Taylorovy řady podle malého parametru $t \equiv \Delta t$,

$$x_i = X_i + v_i(X_k) t + \frac{1}{2} a_i(X_k) t^2 + \mathcal{O}(t^3)$$

získáme prvky matice deformačního gradientu (10.8)

$$F_{ik} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \delta_{ik} + \frac{\partial v_i}{\partial X_k} t + \dots$$

Nahradiť $\mathcal{O}(t^2)$

nech vidíme, (10.19)

aly řad zanedbávame?

Její determinant, což je příslušný jacobian, proto bude mít tvar

$$J = \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial v_1}{\partial X_1} t & \frac{\partial v_1}{\partial X_2} t & \frac{\partial v_1}{\partial X_3} t \\ \frac{\partial v_2}{\partial X_1} t & 1 + \frac{\partial v_2}{\partial X_2} t & \frac{\partial v_2}{\partial X_3} t \\ \frac{\partial v_3}{\partial X_1} t & \frac{\partial v_3}{\partial X_2} t & 1 + \frac{\partial v_3}{\partial X_3} t \end{pmatrix} + \dots,$$

kde zanedbáváme členy s vyššími mocninami t . Obvyklé pravidlo pro výpočet determinantu dává

$$\begin{aligned} J &= \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial X_1} t\right) \left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial X_2} t\right) \left(1 + \frac{\partial v_3}{\partial X_3} t\right) + \dots \\ &= 1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial X_1} + \frac{\partial v_2}{\partial X_2} + \frac{\partial v_3}{\partial X_3}\right) t + \dots, \end{aligned}$$

takže

$$\frac{\partial |J|}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial X_1} + \frac{\partial v_2}{\partial X_2} + \frac{\partial v_3}{\partial X_3} + \dots \equiv \operatorname{div} \mathbf{v} + \dots. \quad (10.20)$$

Dosadíme-li do (10.18) a použijeme větu o střední hodnotě, dostaneme pro $t \rightarrow 0$ vyjádření

$$\frac{d}{dt} \Delta V_t = \int_{\Omega_0} \operatorname{div} \mathbf{v} dX_1 dX_2 dX_3 = \operatorname{div} \mathbf{v} \int_{\Omega_0} dX_1 dX_2 dX_3 = \operatorname{div} \mathbf{v} \Delta V_0,$$

kde veličina $\operatorname{div} \mathbf{v}$ vytknutá před integrál je vzata v určitém *vnitřním* bodě tekoucího objemu. Pro $t \rightarrow 0$ navíc zjevně platí $\Delta V_t \rightarrow \Delta V_0$, takže dostáváme velmi důležitý vztah

$$\boxed{\frac{d}{dt} \Delta V = \operatorname{div} \mathbf{v} \Delta V}, \quad (10.21)$$

platný v každém okamžiku a v každém místě.

Výsledek odpovídá fyzikální intuici: pro $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$ se objem v daném místě *zvětšuje*, pro $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$ naopak *zmenšuje* a pro $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ zůstává objem ΔV stejně velký.

Připomeňme, že stejný výsledek lze formálně získat i pomocí **Gaussovy věty** vektorové analýzy

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} dV, \quad (10.22)$$

kde $d\mathbf{\Sigma} = \mathbf{n} d\Sigma$ je orientovaný element plochy $\partial\Omega$, která je (uzavřenou) hranicí oblasti Ω , neboli zapsáno ve složkách

$$\oint_{\partial\Omega} v_j n_j d\Sigma = \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dV. \quad (10.23)$$

Na levé straně se integruje rychlosť proudění \mathbf{v} kontinua promítnutá do směru \mathbf{n} kolmého na plošku $d\Sigma$, což dává elementární změnu objemu skrze tuto plošku za jednotku času. Celý integrál tedy opravdu dává časovou změnu (derivaci) tekoucího materiálového objemu ΔV .

Je-li toto číslo kladné, dochází v daném směru \mathbf{n} k *roztažování* kontinua vlivem tenze, je-li číslo záporné, dochází naopak ke *stlačování*. Tím je dán fyzikální význam *diagonálních složek* tenzoru napětí. Jeho *nediagonální* složky jsou zodpovědné za tečná *smyková napětí*.

10.2.1 Podmínky rovnováhy kontinua

Vyjádřeme nyní **celkovou sílu** a **celkový moment sil**, které působí v oblasti Ω kontinua.

Nejdříve spočteme výslednou **sílu**. Uvnitř libovolné konečné oblasti Ω je rozložena objemová síla $d\mathbf{F}^{\text{obj}}$ s hustotou f , zatímco na hranici $\partial\Omega$ této oblasti působí plošné síly $d\mathbf{F}^{\text{plo}}$ s napětím $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ (vnitřní plošné síly se navzájem kompenzují). Po integraci užitím (10.24) a (10.25) tedy dostaváme

$$\mathbf{F}^{\text{celk}} = \int_{\Omega} d\mathbf{F}^{\text{obj}} + \int_{\partial\Omega} d\mathbf{F}^{\text{plo}} = \int_{\Omega} \mathbf{f} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^{(\mathbf{n})} d\Sigma,$$

neboli vyjádřeno ve složkách pomocí (10.26)

$$F_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} f_i dV + \int_{\partial\Omega} T_i^{(\mathbf{n})} d\Sigma = \int_{\Omega} f_i dV + \int_{\partial\Omega} \tau_{ji} n_j d\Sigma = \int_{\Omega} \left(f_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV, \quad (10.29)$$

kde v poslední úpravě jsme použili Gaussovou větu (10.23) přímočaře zobecněnou na tenzory. Vidíme, že výslednice plošné síly je *formálně* stejná, jako kdyby v oblasti byla rozložena objemová síla s hustotou $\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$.

Výsledný **moment sil** působících na oblast Ω bude integrálem

$$\mathbf{M}^{\text{celk}} = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}^{\text{obj}} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}^{\text{plo}} = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{T}^{(\mathbf{n})} d\Sigma,$$

tedy ve složkách

$$M_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j T_k^{(\mathbf{n})} d\Sigma = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{lk} n_l d\Sigma.$$

Plošný integrál opět převedeme pomocí Gaussovy věty na objemový, takže

$$M_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} \left(x_j f_k + \frac{\partial(x_j \tau_{lk})}{\partial x_l} \right) dV = \int_{\Omega} \left[\varepsilon_{ijk} x_j \left(f_k + \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} \right) + \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} \right] dV. \quad (10.30)$$

Odvodili jsme tedy důležité vztahy

$$F_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} \left(f_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV,$$

$$M_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} \left[\varepsilon_{ijk} x_j \left(f_k + \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} \right) + \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} \right] dV.$$

(10.31)

Má-li být kontinuum **v rovnováze**, musí být výsledná síla i výsledný moment na každou oblast nulové, tedy integrály (10.31) musí vymizet při *libovolné* volbě Ω . To nastane právě tehdy, platí-li všude **podmínky rovnováhy kontinua**

$$f_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = 0,$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}.$$

(10.32)

Druhá rovnice plyne z podmínek $\varepsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0$ v důsledku antisimetrie Levi-Civitova symbolu (např. pro volbu $i = 1$ podmínka dává $\varepsilon_{123} \tau_{23} + \varepsilon_{132} \tau_{32} = \tau_{23} - \tau_{32} = 0$). Cauchyho tenzor napětí τ_{ji} tedy musí být **symetrický**. Tato symetrie **platí obecně i mimo rovnováhu**, viz část 10.3.3.

Když nyní použijeme pohybovou rovnici (10.42), člen nalevo se zkrátí s prvním členem napravo a zbyde podmínka $\varepsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0$, která stejně jako v případě rovnováhy implikuje $\tau_{jk} = \tau_{kj}$.

Ve velké většině situací je tedy Cauchyho tenzor napětí symetrický, zejména v případě prostých newtonovských tekutin (10.46) anebo Hookova elastického zákona (10.47), které důkladněji probereme. Existují však i kontinua, kdy tomu tak není. To není v rozporu s naším odvozením. Druhá věta impulzová totiž platí jen za předpokladu, že *vnitřní sily jsou centrální*. Také se může stát, že celkový moment hybnosti zahrnuje i dodatečné *vnitřní rotace* částí tekoucího materiálového objemu ΔV , nikoli jen celkový makroskopický pohyb. V těchto případech se může stát, že $\tau_{ij} \neq \tau_{ji}$.

10.3.4 Rovnice pro vnitřní energii

Jak uvidíme v dalším textu, soustava rovnic (10.40), (10.42) a specifikace tenzoru τ_{ij} splňujícího (10.43) dostačují pro nalezení pohybu jednoduchého mechanického kontinua, jako je například dokonalá tekutina anebo vazká newtonovská tekutina. Ve složitějších, realističtějších situacích je ale nutné uvážit i **termodynamické souvislosti**. Především je tu **první zákon termodynamiky**, který je energetickou (termální) bilancí. Lze ukázat, že časový vývoj **vnitřní energie** (skryté v mikroskopickém pohybu a v potenciálu krátkodosahových sil) je dán rovnicí

$$\rho \frac{de}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \tau_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho h, \quad (10.44)$$

kde e je hustota *vnitřní energie* kontinua připadající na jednotku hmotnosti, \mathbf{q} je vektor popisující hustotu *tepelného toku* (reprezentuje tepelnou výměnu přes hranice oblasti) a h je *mírou tepla produkovaného vnitřními zdroji* (radioaktivita, chemické reakce, latentní teplo při fázových přechodech). V integrálním tvaru určuje levá strana přírůstek vnitřní energie dané části kontinua, na pravé straně pak první člen *představuje* vykonanou práci (deformační energii) a druhý a třetí člen popisuje dodané teplo (přes hranice oblasti a zevnitř)

10.3.5 Rovnice pro entropii

Ještě uplatníme **druhý zákon termodynamiky** určující *změnu entropie*. Příslušný vztah zní

$$\rho \frac{ds}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} \right) + \frac{\rho h + D}{T}, \quad (10.45)$$

kde s je *entropie* kontinua připadající na jednotku hmotnosti, T je *termodynamická teplota* a D je *disipativní funkce* (určující energii disipovanou v jednotce objemu za jednotku času). Princip růstu entropie vyžaduje, aby $D \geq 0$. Tato **Clausiova–Duhemova nerovnost** se v mechanice kontinua používá k testu, zda reologický vztah daného materiálu je termodynamicky přípustný.

10.4 Popis materiálů v teorii kontinua

Evoluční rovnice (10.40)–(10.45), které určují časový vývoj mechanického kontinua, obsahují velké množství polních fyzikálních veličin (v eulerovském popisu jsou to funkce polohy x_i a času t). Veličiny f_i a h popisují *zdroje* a v dané úloze musí být *zadány*. Ostatní jsou *neznámé* a musí být nalezeny **konzistentním řešením** výše uvedené soustavy parciálních diferenciálních rovnic při zadaných počátečních a okrajových podmínkách. Tyto **hledané polní veličiny** jsou

$$\rho, v_i, \tau_{ij}, e, q_i, s, T, D.$$

Značné zjednodušení nastává, když v kontinuu není tok tepla, lze zanedbat disipaci a materiál je v termodynamické rovnováze při stejně teplotě. V tom případě jsou relevantní proměnné jen

$$\rho, v_i, \tau_{ij}.$$

Naopak, další veličiny a rovnice je nutné přidat, chceme-li zahrnout elektromagnetické, chemické a jaderné procesy (například v magnetohydrodynamice, teorii plazmatu, při modelování atmosféry, nitra planet, v astrofyzice a v dalších aplikacích).

Je zjevné, že rovnic je zatím *mnohem méně* než hledaných veličin. Abychom pokročili dále, musíme specifikovat **vztahy a parametry charakterizující daný materiál**. Tyto takzvané **konstitutivní vztahy** vznikaly historicky na základě fenomenologických pozorování a praktických potřeb. V nedávných desetiletích se daří rozvíjet i obecnější teoretické přístupy, které umožňují modelovat složitější typy materiálů.

Klasické, velmi **schematické členění** materiálových prostředí a fyzikálních témat studovaných v kontextu teorie kontinua je

- **mechanika tekutin:**

studium spojitých *prostředí*, která rychle anebo pomalu *tečou* vlivem působících sil

- **mechanika pevných látek:**

studium deformací *těles* s dobře definovaným *klidovým tvarem*

V rámci těchto rozsáhlých oborů se zkoumají specifické vlastnosti různých typů kontinua, zejména **viskozita, elasticita, plasticita**, jejich různé kombinace a zobecnění. Zatímco viskozita je typickou vlastností tekutin, elasticita a plasticita jsou vlastnosti charakterizující pevné materiály. Složitějšími deformačními odezvami materiálů se zabývá **reologie**. Dnes se studují i křehké, sypké a lámavé materiály, vícefázové směsi, kvantové systémy a podobně.

10.4.1 Tekutiny

Tekutiny se deformují již při nepatrném napětí a tvarově se snadno přizpůsobují kontejneru, ve kterém se nacházejí. Mezi tekutiny obecně spadají *plyn*, *kapaliny* a *plazma*. Tak různorodá a široká škála materiálů pochopitelně vyžaduje různé způsoby popisu. Nejvíce prostudované jsou takzvané **newtonovské tekutiny**, které jsou charakterizovány **kontantními parametry viskozity**.

- **newtonovské tekutiny:**

smykové napětí je *přímo úměrné* rychlosti deformací

viskozitu jednoduše určují *materiálové konstanty*

- **nenewtonovské tekutiny:**

viskozita není materiálová konstanta, *závisí na okamžité deformaci*

vztah smykového napětí a rychlosti deformace je *nelineární*



vložit příklady?

U **newtonovské tekutiny** se konkrétně **předpokládá vztah**

$$\boxed{\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}, \quad (10.46)$$

kde v_i je pole **rychlosti proudění** tekutiny. Zde zavedená funkce p je pole **izotropního tlaku**, zatímco λ a μ jsou materiálové **parametry viskozity**. Cauchyho tenzor napětí τ_{ij} má v tomto případě podobu nejobecnějšího izotropního symetrického tenzoru 2. řádu, který se dá vytvořit lineárně z prostorových derivací (gradientů) rychlosti.

Zbývá jen specifikovat tlak p pomocí *stavové rovnice*. Je přirozené předpokládat, že tlak je pouze funkce hustoty, tedy $p = p(\rho)$, v tom případě hovoříme o *barotropní tekutině*. Speciálním případem je stavová rovnice *ideálního plynu* pro izotermický děj, $p = \kappa \rho$, anebo stavová rovnice pro adiabatický děj, $p = \kappa \rho^\gamma$, kde κ, γ jsou konstanty.

Celkem tedy máme 4 parciální diferenciální rovnice (10.41) a (10.50), neboli rovnici kontinuity a Eulerovu rovnici, pro 4 neznámé funkce, totiž hustotu ρ a tři složky rychlosti \mathbf{v} . K jednoznačnému určení řešení musíme kromě *počáteční podmínky* položit *okrajovou podmíinku* na hranici oblasti zaujímané tekutinou, která pro dokonalou tekutinu má tvar $v_n = 0$, kde v_n značí složku rychlosti kolmou k hranici (např. stěnám trubice, kterou tekutina protéká). Na otevřené hranici lze zadávat i tlak.

↓ nahradit slovom
specifikovat?

10.5.1 Vlny v dokonalé tekutině

Předpokládejme, že dokonalá tekutina v rovnovážném stavu má homogenní hustotu $\rho_0 = \text{konst}$. Uvažujme *malé poruchy hustoty* takové, že aktuální hustota je $\rho_0 + \rho$, kde $\rho \ll \rho_0$. Tyto poruchy hustoty vyvolají malé změny pole rychlosti, předpokládejme však, že $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} \gg (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}$. Předpokládejme dále, že objemové (gravitační) síly \mathbf{g} vymizí. Pak rovnice kontinuity (10.41) a Eulerova pohybová rovnice (10.50) mají tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &\doteq -\rho_0 \text{div } \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &\doteq -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p \doteq -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho} \Big|_0 \text{grad } \rho,\end{aligned}\quad (10.51)$$

kde jsme Taylorovým rozvojem approximovali stavovou rovnici, $p(\rho_0 + \rho) = p(\rho_0) + \frac{dp}{d\rho} \Big|_0 \rho + \dots$. První rovnici zderivujeme podle t , zatímco na druhou rovnici aplikujeme operátor div, takže

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} &\doteq -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{v}, \\ \text{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &\doteq -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho} \Big|_0 \text{div grad } \rho \equiv -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho} \Big|_0 \Delta \rho.\end{aligned}$$

Operátor časové derivace komutuje s prostorovým operátorem div, takže dosazením ze druhé rovnice do první ihned dostáváme *vlnovou rovnici pro poruchy hustoty*

$$\boxed{\Delta \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0}, \quad (10.52)$$

což je *zvuková vlna* šířící se *rychlosťí* $c \equiv \sqrt{(dp/d\rho) \Big|_0}$. Rovnice připouští řešení ve tvaru rovinné harmonické vlny $\rho = C \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$. Dosazením tohoto řešení do rovnice (10.51) zjistíme, že vektor \mathbf{v} musí být rovnoběžný s vlnovým vektorem \mathbf{k} . Jde tedy o *podélnou vlnu*. V *ideálním plynu* ze stavové rovnice $p = \kappa \rho^\gamma$ vyplývá rychlosť šíření $c^2 = \kappa \gamma \rho_0^{\gamma-1}$, speciálně pro izotermický děj pak $c = \sqrt{\kappa}$.

10.5.2 Nevířivé proudění a Bernoulliho rovnice

Eulerovu rovnici (10.50) pro dokonalou tekutinu lze přepsat do *Gromekaova–Lambova tvaru*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (10.53)$$

Přesněji, a to už je rigorózní matematická definice:

varietu \mathcal{M} je množina, jejíž každý bod P leží v nějaké otevřené množině² \mathcal{U} , která je spojite vzájemně jednoznačně zobrazená na otevřenou podmnožinu \mathbb{R}^n . Symbolicky to lze vyjádřit

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathcal{M} \quad & \exists \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \text{ taková, že } P \in \mathcal{U}, \\ & \text{a } \exists \text{ spojité } \phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ takové, že } \mathcal{U} \leftrightarrow \phi(\mathcal{U}) \text{ je jednoznačné,} \end{aligned}$$

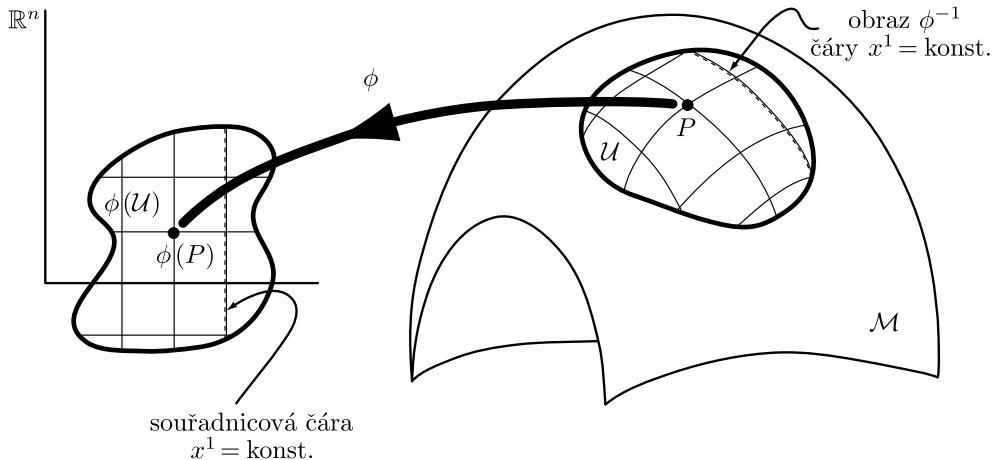
přičemž:

- ϕ nazýváme **souřadnicové zobrazení**,
- dvojici (\mathcal{U}, ϕ) nazýváme **mapa**,
- číslo n nazýváme **dimenze variety** \mathcal{M} .

Zobrazení ϕ přitom zavádí na \mathcal{U} **lokální souřadnicový systém**, který je inverzním³ obrazem ϕ^{-1} kartézského systému \mathbb{R}^n , neboli

$$\boxed{\phi(P \in \mathcal{U}) \equiv (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n},$$

kde x^1, \dots, x^n představují souřadnice bodu P v lokální mapě.



Obrázek 1.1: Varieta \mathcal{M} je pokryta (lokálními) mapami neboli zobrazeními ϕ z \mathcal{U} do \mathbb{R}^n .

Jak jsme již uvedli na příkladě zemského povrchu, celá varieta \mathcal{M} je pokryta **atlasem**, neboli **souborem map**. Požadujeme ovšem, aby v místech překryvu byl *vztah mezi mapami* (resp. jejich souřadnicemi) dostatečně *hladký*.

Konkrétně: Nechť (\mathcal{U}, ϕ) a (\mathcal{V}, ψ) jsou dvě různé mapy, přičemž souřadnice bodu $P \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ jsou $\phi(P) = (x^1, \dots, x^n)$ a $\psi(P) = (y^1, \dots, y^n)$. Tím je definováno zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: $\psi(\phi^{-1})$, tedy explicitně $(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n))$.⁴ Toto zobrazení musí být dostatečně hladké⁵ pro všechny mapy atlasu a všechny překryvy. Odtud název „diferencovatelná varieta“.

²Tento systém otevřených množin tvoří z \mathcal{M} topologický prostor.

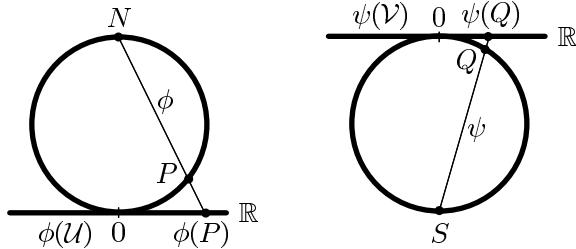
³Zobrazení ϕ^{-1} existuje, neboť ϕ je vzájemně jednoznačné. Obvykle se požaduje také spojitost ϕ^{-1} , tedy ϕ je homeomorfismus $\mathcal{U} \leftrightarrow \phi(\mathcal{U})$.

⁴Zápis $\psi(\phi^{-1})$ zde používáme jako ekvivalentní vyjádření složeného zobrazení $\psi \circ \phi^{-1}$.

⁵Technicky to znamená splnění požadavku spojitosti parciálních derivací $\frac{\partial^r y^i}{(\partial x^j)^r}$ až do jistého rádu r . Hovoříme pak o $C^{(r)}$ varietě. Obvykle hladkostí rozumíme existenci spojitých derivací všech řádů.

↗ zvýraznit číselkov?

- jiný atlas dvou map lze zavést stereografickou projekcí ze severního resp. jižního pólu,



mezera navíc

- v mechanice tvoří S^1 konfigurační varietu matematického kyvadla (konfigurační varieta je množina všech poloh daného systému).

- sféra S^2

- atlas tvoří alespoň 2 mapy,
- lze ho zavést např. pomocí stereografické projekce (viz astroláby a orloje),
- v mechanice tvoří S^2 konfigurační varietu sférického kyvadla.

- torus T^2 (anuloid)

- atlas tvoří alespoň 3 mapy,
- v mechanice tvoří T^2 konfigurační varietu dvojkkyvadla.

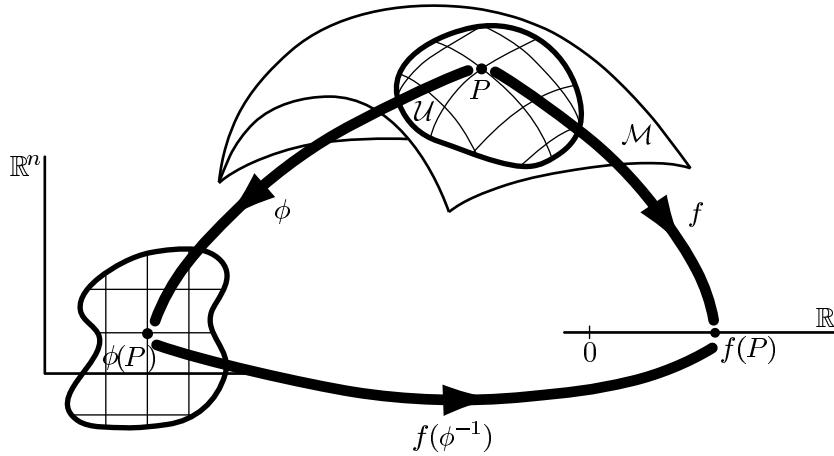
1.1.2 Funkce na varietě

Funkci f na varietě \mathcal{M} nazýváme zobrazení

Iepšlē: operaci?

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

neboli situaci, kdy každému bodu $P \in \mathcal{M}$ je přiřazeno reálné číslo $f(P)$. V lokálních souřadnicích mapy (\mathcal{U}, ϕ) lze funkci f reprezentovat jejím souřadnicovým vyjádřením $f(\phi^{-1}) = f(x^1, \dots, x^n)$.

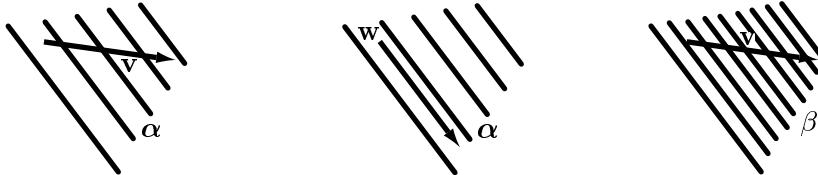


Obrázek 1.3: Funkce f na varietě \mathcal{M} je zobrazení z \mathcal{M} do \mathbb{R} .

Ilustrace: hustota obyvatel na Zemi, teplota bubliny foukané z rozžhaveného skla.

Je tedy vidět, že pojem funkce na varietě je přirozený a intuitivní, neboť s funkcemi na varietách se ve skutečnosti setkáváme docela často.

Výsledkem zúžení vektoru s 1-formou je tedy reálné číslo z definice (1.7). Reprezentujeme-li 1-formu α pomocí vrstevnic a vektor v pomocí šipky, pak význam čísla $\langle \alpha, v \rangle$ geometricky odpovídá počtu vrstevnic, které šipka protne. Záleží zjevně na jejich vzájemné orientaci a velikosti. Čím je 1-forma větší, tím jsou její vrstevnice hustší. Čím je vektor větší, tím delší je jeho šipka.



*nadplachami → termin zavedený
v mat. kurzech*

Ve více dimenzích n je forma α reprezentována vrstevnicovými *plochami* dimenze $(n - 1)$.

Bázi kotečného prostoru $T_P^*\mathcal{M}$ tvoří n 1-formem $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ takových, že každou 1-formu z $T_P^*\mathcal{M}$ lze vyjádřit jako⁸ $\alpha = \alpha_i \varepsilon^i$, kde α_i představují složky α k této bázi. Obvykle za bázi 1-form volíme tzv. *duální bázi* k bázovým vektorům (e_1, \dots, e_n) v $T_P\mathcal{M}$ definovanou předpisem

$$\boxed{\langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \delta_j^i}. \quad (1.9)$$

v?

Jako okamžitý důsledek (1.9) dostáváme následující vztahy

$$\langle \alpha, e_j \rangle = \langle \alpha_i \varepsilon^i, e_j \rangle = \alpha_i \langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \alpha_i \delta_j^i = \alpha_j, \quad (1.10)$$

$$\langle \varepsilon^j, v \rangle = \langle \varepsilon^j, v^i e_i \rangle = v^i \langle \varepsilon^j, e_i \rangle = v^i \delta_i^j = v^j, \quad (1.11)$$

$$\langle \alpha, v \rangle = \langle \alpha_i \varepsilon^i, v^j e_j \rangle = \alpha_i v^j \langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \alpha_i v^j. \quad (1.12)$$

Diferenciál funkce f coby 1-forma df :

Nejdůležitější 1-formou je *diferenciál funkce*. Je-li f hladká funkce na varietě \mathcal{M} , potom diferenciál funkce f v bodě $P \in \mathcal{M}$ je forma df definovaná vztahem

$$\boxed{\langle df, v \rangle \equiv v(f)}. \quad (1.13)$$

Zúžení 1-formy df s vektorem v tedy je právě *derivace funkce f ve směru vektoru v* $\in T_P\mathcal{M}$, viz vztahy (1.3), (1.4).

Důsledek: Vezmeme-li za vektor v přímo vektory (1.6) souřadnicové báze $T_P\mathcal{M}$ a za funkci f přímo různé souřadnice x^i z lokální mapy (U, ϕ) , pak z definice (1.13) plyne

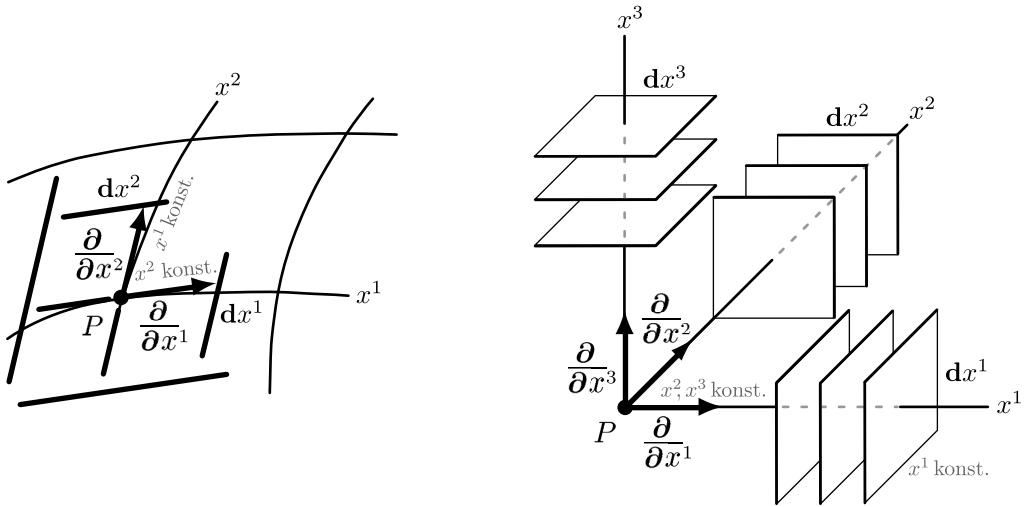
$$\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \equiv v(f) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i. \quad (1.14)$$

Srovnáme-li výraz (1.14) s definicí duální báze (1.9), ihned dostáváme, že

$$\boxed{(dx^1, \dots, dx^n) \text{ je } \text{duální souřadnicová báze kotečného prostoru } T_P^*\mathcal{M}}. \quad (1.15)$$

Geometricky: Vektor $\frac{\partial}{\partial x^i}$ je znázorněn šipkou ve směru souřadnicové čáry x^i , duální 1-forma dx^i je znázorněna množinou vrstevnic (ploch) $x^i = \text{konst.}$, viz obrázek 1.7. Připomeňme, že lokální souřadnicová čára z bodu P je jednorozměrná křivka, kdy se mění jediná souřadnice x^i , zatímco zbylých $(n - 1)$ souřadnic má konstantní hodnotu. Naopak duální vrstevnice (plocha) je definována konstantní hodnotou x^i , přičemž všechny ostatní souřadnice, jichž je $(n - 1)$, se mění.

⁸Srovnej se vztahem $v = v^i e_i$ pro vektory.



Obrázek 1.7: Souřadnicová báze $\frac{\partial}{\partial x^i}$ vektorů a duální souřadnicová báze dx^i 1-form v bodě P . Vlevo je jejich znázornění pro varietu dimenze $n = 2$ s obecnými lokálními souřadnicemi, vpravo pro varietu dimenze $n = 3$ s lokálně kartézskými souřadnicemi.

Každou 1-formu α z kotečného prostoru $T_P^*\mathcal{M}$ lze tedy psát $\boxed{\alpha = \alpha_i dx^i}$, přičemž dle (1.10) a (1.11) platí, že

$$\alpha_j = \langle \alpha, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle, \quad (1.16)$$

$$v^j = \langle dx^j, \mathbf{v} \rangle. \quad (1.17)$$

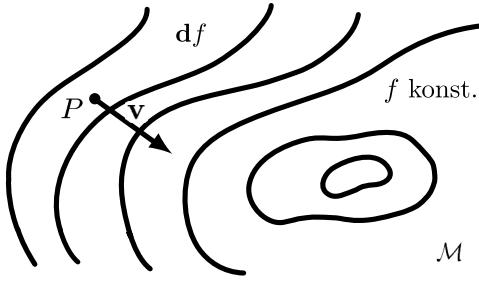
Diferenciál df funkce f jako speciální 1-formu α lze ve složkách zapsat $df = \alpha_i dx^i$, kde podle (1.13) je $\alpha_i = \langle df, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, takže

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i} \quad (1.18)$$

a dále platí, že

$$\langle df, \mathbf{v} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i. \quad (1.19)$$

Geometrický význam: Diferenciál df odpovídá znázornění funkce f pomocí vrstevnic $f = \text{konst.}$ V různých fyzikálních souvislostech se nazývají též ekvipotenciály, izotermy, izobary apod.



platí len pre maleší šípky?

V každém bodě P pak kontrakce $\langle df, \mathbf{v} \rangle$ formy df s vektorem \mathbf{v} udává, o kolik se změní hodnota funkce f , posuneme-li se z bodu P ve směru vektoru \mathbf{v} (rozdíl f mezi koncem a začátkem šipky). Protože vrstevnice mají v okolí různých bodů různý směr a zahuštění, závisí hodnota kontrakce

na volbě $P \in \mathcal{M}$. Takto znázorněný diferenciál $\mathbf{d}f$ je tedy *pole 1-forem*. Přechod od *lokálních vektorů a 1-forem* k příslušným *globálním polím* na varietě \mathcal{M} v kontextu geometrického přístupu je obsahem následujících kapitol.

Poznámka: Ze vztahu (1.18) vidíme, že $\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$ jsou souřadnicové složky 1-formy $\mathbf{d}f \in T_P^*\mathcal{M}$. V prostorech se skalárním součinem (metrikou) lze s touto 1-formou asociovat vektor $\text{grad}f \in T_P\mathcal{M}$ vyjadřující směr největšího růstu f , který je kolmý na ekvipotenciály, neboli

$$\text{grad}f \cdot \mathbf{v} \equiv g_{ki} (\text{grad}f)^k v^i, \quad (1.20)$$

kde

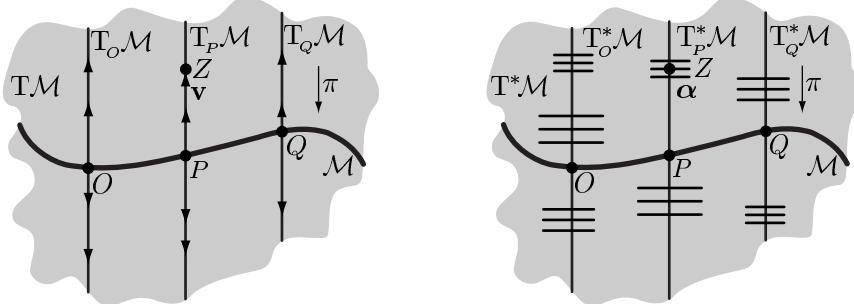
$$(\text{grad}f)^k \equiv g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j}. \quad (1.21)$$

V kartézských souřadnicích v \mathbb{R}^n je pírozená metrika triviální, totiž $g_{ki} = \delta_{ki}$, takže složky vektoru $\text{grad}f$ jsou číselně rovny složkám 1-formy $\mathbf{d}f$. Proto se v základních kurzech fyziky (nepřesně) hovoří o *vektoru gradientu*, jehož složky jsou $\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$, nikoli o *1-formě* $\mathbf{d}f$, která má tyto složky *vždy*.

1.2 Tečný bandl $T\mathcal{M}$ a kotečný bandl $T^*\mathcal{M}$

Tečný bandl $T\mathcal{M}$ je sjednocení všech tečných prostorů $T_P\mathcal{M}$ ve všech bodech P variety, tedy $T\mathcal{M} \equiv \bigcup_{P \in \mathcal{M}} T_P\mathcal{M}$. Je to opět varieta, jejíž dimenze je $2n$. Každý bod z variety $T\mathcal{M}$ přitom představuje nějaký *konkrétní* tečný vektor $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}$ v jistém bodě $P \in \mathcal{M}$.

Kotečný bandl $T^*\mathcal{M}$ je sjednocení všech kotečných prostorů $T_P^*\mathcal{M}$ ve všech bodech P variety, tedy $T^*\mathcal{M} \equiv \bigcup_{P \in \mathcal{M}} T_P^*\mathcal{M}$. Každý bod z variety $T^*\mathcal{M}$ představuje nějakou *konkrétní* 1-formu $\alpha \in T_P^*\mathcal{M}$ v jistém bodě $P \in \mathcal{M}$.



Obrázek 1.8: Tečný bandl $T\mathcal{M}$ je varieta všech tečných prostorů $T_P\mathcal{M}$ (vlevo), zatímco duální kotečný bandl $T^*\mathcal{M}$ je varieta všech kotečných prostorů $T_P^*\mathcal{M}$ (vpravo).

Pro tečný bandl platí, že:

- Bod $Z \in T\mathcal{M}$ jednoznačně určuje:
 1. vektor $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}$ (dané velikosti a orientace)
 2. bod $P \in \mathcal{M}$ (v němž je \mathbf{v} tečný k \mathcal{M}).
- Existuje přirozená (hladká) projekce $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, přičemž platí $\pi(Z) = P$.
- V lokálních souřadnicích má bod $P \in \mathcal{M}$ souřadnice x^i , vektor \mathbf{v} má složky v^i v bázi $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$.
- Bod $Z \in T\mathcal{M}$ má proto přirozené souřadnice $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$, přičemž projekce je v souřadnicích dána jednoduše $\pi(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = (x^1, \dots, x^n)$.

Podobnou strukturu má kotečný bandl, s tím rozdílem, že $Z \in T^*\mathcal{M}$ představuje konkrétní 1-formu $\alpha \in T_P^*\mathcal{M}$ lokalizovanou v daném bodě $P \in \mathcal{M}$. Jeho souřadnice jsou $(x^1, \dots, x^n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, přičemž $\pi(x^1, \dots, x^n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (x^1, \dots, x^n)$.

Pravě díky existenci projekce π mají tečný bandl $T\mathcal{M}$ a kotečný bandl $T^*\mathcal{M}$ speciální strukturu. Jsou příkladem tzv. fíbrovaného prostoru.

1.2.1 Fíbrovaný prostor

*jejíž ?
odkazuje na tú variétu ?*

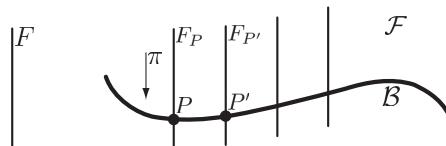
Fíbrovaný prostor je vlastně zobecněním kartézského součinu. Nejsnáze lze podstatu fíbrované struktury přiblížit, pokud si představíme varietu \mathcal{B} , do jejíhož každého bodu $P \in \mathcal{B}$ je jakoby „vlepena“ další varieta F_P , viz obr. 1.9. Přitom musí platit, že variety F_P jsou ve všech bodech $P \in \mathcal{B}$ difeomorfní⁹ s nějakou společnou „typickou“ varietou F , tj. pro $\forall P, P' \in \mathcal{B} : F_P \simeq F_{P'} \simeq F$. Varieta \mathcal{B} se nazývá *bázová varieta*, F je *typický fibr* a F_P je *fibr v bodě P*. Sjednocení

$$\mathcal{F} \equiv \bigcup_{P \in \mathcal{B}} F_P \quad (1.22)$$

pak nazýváme *totální prostor*. Vztah mezi totálním prostorem a bázovou varietou je přitom dán přirozeným zobrazením $F_P \rightarrow P$,

$$\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B} \quad (1.23)$$

nazývaným *kanonická projekce*. Pojem fíbrovaného prostoru tedy obecně rozumíme strukturu $(\mathcal{B}, \pi, F, \mathcal{F})$ zahrnující bázovou varietu, kanonickou projekci, typický fibr a totální prostor.



Obrázek 1.9: Schématické znázornění fíbrované struktury.

Navíc je ale ještě požadována tzv. lokální součinová struktura, tj. existence pokrytí \mathcal{U}_α bázové variety \mathcal{B} a soustavy difeomorfismů

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \rightarrow \mathcal{U}_\alpha \times F, \quad (1.24)$$

takových, že $\pi_{\mathcal{U}_\alpha}(\psi_\alpha) = \pi$, přičemž zobrazením $\pi_{\mathcal{U}_\alpha}$ je myšlena restrikce na \mathcal{U}_α . Vágně řečeno, \mathcal{F} (přinejmenším) lokálně vypadá jako součin $\mathcal{B} \times F$, až na to že fibry F_P mohou být vůči sobě trochu „zkroucené“. Soustava zobrazení ψ_α se nazývá *lokální trivializace*.

⁹Dvě variety nazýváme difeomorfní, pokud mezi nimi existuje bijektivní zobrazení f a přitom platí, že f a f^{-1} jsou hladká zobrazení.

Pro další výklad je důležité, že každé vektorové pole automaticky generuje množinu tzv. integrálních křivek (ve fyzice v různých kontextech nazývaných „silokřivky“, „proudnice“ atd.):

Definice:

Integrální křivky vektorového pole \mathbf{X} jsou křivky $\gamma(t)$ takové, že tečný vektor ke $\gamma(t)$ koinciduje s $\mathbf{X}_P \in T_P \mathcal{M}$, a to v každém bodě $P \in \mathcal{M}$.

Ilustrace: Integrální křivku můžeme přirovnat k turistické trase lemované orientačními šipkami udávajícími směr a dobu dalšího pochodu.

Věta: Pro spojitá vektorová pole na diferencovatelné varietě integrální křivky existují.

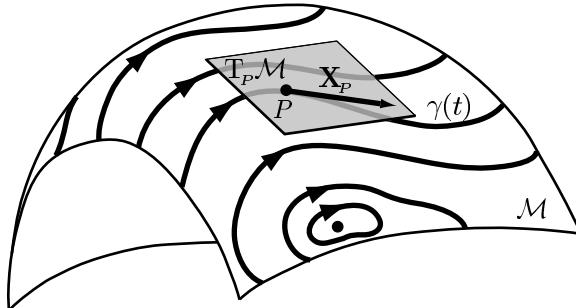
Důkaz: lze podat konstruktivně

V lokálních souřadnicích (x^1, \dots, x^n) v okolí každého bodu $P \in \mathcal{M}$ musí platit

$$\boxed{\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.28)$$

kde $\frac{dx^i}{dt}$ jsou složky tečného vektoru ke křivce $\gamma(t) \equiv (x^1(t), \dots, x^n(t))$ a $X^i(x^k)$ jsou složky vektorového pole \mathbf{X} v bodě P , tedy \mathbf{X}_P . Tím dostáváme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu tvaru (1.28). Existence jejího řešení $x^k(t)$ je zaručena matematickou větou o (lokální) existenci.

Picard-Lindelöf
↳ známe z mat.



Obrázek 1.10: Integrální křivky vektorového pole.

Platí:

- každým bodem $P \in \mathcal{M}$ prochází nějaká integrální křivka,
- integrální křivky vyplňují celou varietu (tvoří tzv. kongruenci, která je $n - 1$ rozměrná),
- integrální křivky se mohou „protínat“ jen v bodech kde $\mathbf{X} = 0$ (tzv. singulární body).

1.4 Tok Φ_t generovaný vektorovým polem

Vektorové pole \mathbf{X} tedy generuje integrální křivky $\gamma(t)$. Celá kongruence (množina) těchto křivek definuje zobrazení variety \mathcal{M} na sebe. Toto důležité zobrazení nazýváme tok generovaný polem \mathbf{X} .

Definice:

Tok Φ_t generovaný vektorovým polem \mathbf{X} je množina zobrazení $\Phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ definovaných

$$\boxed{\Phi_t : \gamma(t_0) \rightarrow \gamma(t_0 + t)}. \quad (1.29)$$

kde Lieovsky přenesené funkce, vektory a 1-formy mají v bodě P hodnotu

$$\tilde{f}(P) \equiv f(\tilde{P}), \quad \tilde{\mathbf{Y}}(P) = \Phi_{t*}^{-1}(\mathbf{Y}(\tilde{P})) = \Phi_{-t*}(\mathbf{Y}(\tilde{P})), \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}(P) = \Phi_t^*(\boldsymbol{\theta}(\tilde{P})), \quad (1.57)$$

přičemž $\tilde{P} = \Phi_t(P)$.¹⁴ S přihlédnutím k (1.46) a (1.40) vidíme, že (1.54)–(1.56) lze zapsat jednotným způsobem, jenž umožňuje koncept Lieovy derivace zobecnit na **libovolné tenzorové pole \mathbf{T}**

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{T} \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{T}] \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Phi_t^*(\mathbf{T}) - \mathbf{T}], \quad (1.58)$$

kde *pull-back* Φ_t^* obecného tenzoru (příslušející toku Φ_t) je definován v (1.38). Protože $\Phi_0^*(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ a definice platí pro libovolný tenzor, můžeme **operátor Lieovy derivace** symbolicky zapsat

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \Big|_0 \Phi_t^*. \quad (1.59)$$

Tento operátor exaktně vyjadřuje změnu (nekonstantnost) příslušného geometrického objektu ve směru vektorového pole \mathbf{X} . Pomocí Lieovy derivace lze naopak vyjádřit pull-back (konečného) toku „exponenciálním“ vzorcem

$$\Phi_t^* = \mathbf{1} + t \mathcal{L}_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} t^2 \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathcal{L}_{\mathbf{x}} + \dots. \quad (1.60)$$

Nyní lze ukázat, že platí následující důležité vztahy:

1. Lieova derivace funkce je přímo rovna derivaci ve směru \mathbf{X} :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} f = \mathbf{X}(f) = \frac{df}{dt} = \langle \mathbf{d}f, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{d}f(\mathbf{X}) = i_{\mathbf{x}} \mathbf{d}f.$$

2. Platí, že

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(f\mathbf{Y}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{x}} f)\mathbf{Y} + f\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{Y}, \quad (1.62)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(f\boldsymbol{\theta}) = (\mathcal{L}_{\mathbf{x}} f)\boldsymbol{\theta} + f\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\theta}. \quad (1.63)$$

3. Pro Lieovu derivaci zúžení platí Leibnizovo pravidlo

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{\theta}, \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{Y} \rangle. \quad (1.64)$$

4. Pro diferenciál platí $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{d}f) = \mathbf{d}(\mathcal{L}_{\mathbf{x}} f)$, tedy

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{d} = \mathbf{d} \mathcal{L}_{\mathbf{x}}. \quad (1.65)$$

5. Definujeme-li **Lieovu závorku** vektorových polí vztahem¹⁵

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv \mathbf{XY} - \mathbf{YX}, \quad (1.66)$$

pak platí

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]. \quad (1.67)$$

6. Explicitní vyjádření ve složkách je

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{Y} = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (1.68)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\theta} = \left(X^j \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} + \theta_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{d}x^i. \quad (1.69)$$

¹⁴V definicích Lieova přenosu (1.51), (1.52), (1.53) jsme nyní provedli formální přeznačení $\tilde{f} \leftrightarrow f$, $\tilde{\mathbf{Y}} \leftrightarrow \mathbf{Y}$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \leftrightarrow \boldsymbol{\theta}$. To odpovídá pouze „otočení směru“ Lieova přenosu: místo posouvání objektů tokem „vpřed“ z P do \tilde{P} uvažujeme jejich komplementární stahování „zpět“ z \tilde{P} do P , jak je v literatuře týkající se Lieovy derivace běžné.

¹⁵Výraz $\mathbf{XY} - \mathbf{YX}$ má význam *komutátora* operátorů daných vektorovými poli \mathbf{X} a \mathbf{Y} , tedy pro libovolnou funkci f platí $(\mathbf{XY} - \mathbf{YX})(f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$.

Důkazy:

- alternativ.
Fazito
podopitelné*
- Tvrzení plyne z definice (1.54) a (1.57), neboli $\mathcal{L}_x f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\tilde{P}) - f(P)]$, což pomocí (1.29) dává $\mathcal{L}_x f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\gamma(t_0 + t)) - f(\gamma(t_0))]$. To opravdu je derivace funkce f ve směru \mathbf{X} , protože $\gamma(t)$ je jeho integrální křivka procházející bodem $P \in \gamma(t_0)$.
 - Vztahy dostaneme z definic (1.54)–(1.56). Například v důkazu (1.62) se využije identita $\tilde{f}\tilde{\mathbf{Y}} - f\mathbf{Y} = (\tilde{f} - f)\tilde{\mathbf{Y}} + f(\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y})$, takže $\mathcal{L}_x(f\mathbf{Y}) = (\mathcal{L}_x f)(\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{Y}}) + f\mathcal{L}_x \mathbf{Y}$. A protože podle (1.57) je $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{Y}} = \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_{-t*}(\mathbf{Y}) = \Phi_{0*}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$, dostáváme (1.62).
 - Pomocí (1.50) a Leibnizova pravidla odvodíme vztah

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^*(\langle \theta, \mathbf{Y} \rangle) = \frac{d}{dt} \langle \Phi_t^*(\theta), \Phi_t^*(\mathbf{Y}) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \Phi_t^*(\theta), \Phi_t^*(\mathbf{Y}) \right\rangle + \left\langle \Phi_t^*(\theta), \frac{d}{dt} \Phi_t^*(\mathbf{Y}) \right\rangle.$$

Nyní již jen provedeme limitu $t \rightarrow 0$ a aplikujeme identitu (1.59), takže

$$\mathcal{L}_x \langle \theta, \mathbf{Y} \rangle \equiv \frac{d}{dt} \Big|_0 \Phi_t^*(\langle \theta, \mathbf{Y} \rangle) = \langle \mathcal{L}_x \theta, \Phi_0^*(\mathbf{Y}) \rangle + \langle \Phi_0^*(\theta), \mathcal{L}_x \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathcal{L}_x \theta, \mathbf{Y} \rangle + \langle \theta, \mathcal{L}_x \mathbf{Y} \rangle.$$

- Pro libovolnou funkci f díky (1.49) platí $\mathbf{d}(\Phi_t^*(f)) = \Phi_t^*(\mathbf{d}f)$. Proto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x(\mathbf{d}f) &\equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Phi_t^*(\mathbf{d}f) - \mathbf{d}f] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathbf{d}(\Phi_t^*(f)) - \mathbf{d}f] \\ &= \mathbf{d} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Phi_t^*(f) - f] \right) \equiv \mathbf{d}(\mathcal{L}_x f). \end{aligned}$$

- Abychom ukázali platnost rovnice (1.67), aplikujeme vztah (1.64) na $\theta = \mathbf{d}f$, tedy na 1-formu, která je diferenciálem funkce f . Užitím (1.13) tedy platí

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}f, \mathcal{L}_x \mathbf{Y} \rangle &= \mathcal{L}_x \langle \mathbf{d}f, \mathbf{Y} \rangle - \langle \mathcal{L}_x \mathbf{d}f, \mathbf{Y} \rangle = \mathcal{L}_x \langle \mathbf{d}f, \mathbf{Y} \rangle - \langle \mathbf{d} \mathcal{L}_x f, \mathbf{Y} \rangle \\ &= \mathcal{L}_x \mathbf{Y}(f) - \langle \mathbf{d}(\mathbf{X}(f)), \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) \\ &= (\mathbf{XY} - \mathbf{YX})(f). \end{aligned}$$

Užitím (1.13) ale také platí, že

$$\langle \mathbf{d}f, \mathcal{L}_x \mathbf{Y} \rangle = (\mathcal{L}_x \mathbf{Y})(f).$$

Porovnáním obou vztahů tak dostáváme $\mathcal{L}_x \mathbf{Y} = \mathbf{XY} - \mathbf{YX} \equiv [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, čímž je důkaz hotov.

- První vztah dokážeme tak, že levou stranou (1.68) působíme na funkci f . Dále postupujeme rozepsáním podle (1.67), (1.66), přechodem ke složkám v souřadnicové bázi a přeznačením sčítacích indexů. Odmyslíme-li si nakonec funkci f , dostáváme požadovaný vztah:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_x \mathbf{Y})(f) &= \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) f - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f \\ &= X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} f. \end{aligned}$$

Při důkazu (1.69) postupujeme opět rozepsáním do složek a přeznačením sčítacích indexů:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x \theta &= \mathcal{L}_x(\theta_i \mathbf{d}x^i) = (\mathcal{L}_x \theta_i) \mathbf{d}x^i + \theta_i \mathcal{L}_x \mathbf{d}x^i \\ &= (\mathcal{L}_x \theta_i) \mathbf{d}x^i + \theta_i \mathbf{d}(\mathcal{L}_x x^i) = X^j \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} \mathbf{d}x^i + \theta_i \mathbf{d} \left(X^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right) \\ &= X^j \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} \mathbf{d}x^i + \theta_j \mathbf{d}X^j = \left(X^j \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} + \theta_j \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \right) \mathbf{d}x^i. \end{aligned}$$

■

1.6 Lieova závorka $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$

Lieova závorka $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ dvou vektorových polí definovaná vztahem (1.66), jež je podle (1.67) rovna Lieově derivaci $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$, má několik pozoruhodných vlastností a hráje důležitou geometrickou roli.

Platí, že tato operace je *(bi)lineární, antisymetrická* a splňuje *Jacobiho identitu*:

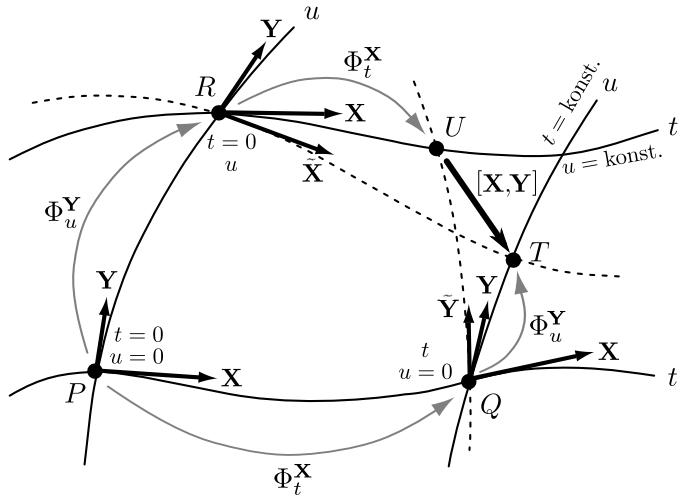
$$[c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}] = c_1 [\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}] + c_2 [\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}], \quad (1.70)$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}], \quad (1.71)$$

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}] + [[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}] + [[\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}] = 0. \quad (1.72)$$

Díky operaci Lieovy závorky tedy vektorová pole na varietě získávají strukturu *Lieovy algebry*.

Lieova závorka je také *mírou nekomutativity* dvou vektorových polí, chápáných jako operátory derivací v nezávislých směrech $\mathbf{X} \equiv \frac{d}{dt}$ a $\mathbf{Y} \equiv \frac{d}{du}$. Obecně totiž záleží na pořadí, v jakém tyto operátory aplikujeme. Geometricky odpovídá jejich Lieova závorka $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ *neuzavřené části malého rovnoběžníka*, jehož strany jsou přírůstky podél integrálních křivek polí \mathbf{X} a \mathbf{Y} o stejnou hodnotu parametrů $t = u$ (v limitě $\rightarrow 0$), viz obrázek 1.13.



Obrázek 1.13: Lieova závorka $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv \mathbf{XY} - \mathbf{YX}$ dvou vektorových polí \mathbf{X} a \mathbf{Y} určuje míru jejich nekomutativity. Je to *vektor*, o který se liší aplikace operátorů \mathbf{X} , \mathbf{Y} provedené v opačném pořadí.

vektorové pole

Důkaz:

Uvažujme výchozí bod $P \in \mathcal{M}$. Integrální křivky $\gamma(t)$ vektorového pole \mathbf{X} generují tok $\Phi_t^{\mathbf{X}}$, který zobrazuje bod P na bod $Q \equiv \Phi_t^{\mathbf{X}}(P)$. Podobně integrální křivky $\delta(u)$ pole \mathbf{Y} generují tok $\Phi_u^{\mathbf{Y}}$, jenž zobrazuje bod Q na jiný bod $T \equiv \Phi_u^{\mathbf{Y}}(Q) = \Phi_u^{\mathbf{Y}}(\Phi_t^{\mathbf{X}}(P))$. Oba toky ale můžeme poskládat také v opačném pořadí. Pak se výchozí bod P nejprve zobrazí na bod $R \equiv \Phi_u^{\mathbf{Y}}(P)$ a ten pak dále na bod $U \equiv \Phi_t^{\mathbf{X}}(R) = \Phi_t^{\mathbf{X}}(\Phi_u^{\mathbf{Y}}(P))$. Koncové body T a U jsou obecně různé, a právě jejich rozdíl definuje vektor daný Lieovou závorkou $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv \mathbf{XY} - \mathbf{YX}$, když zvolíme stejné parametry toků $t = u \equiv \varepsilon$ a uvážíme limitu $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proveděme zmíněný výpočet v lokálních souřadnicích variety \mathcal{M} . Souřadnice x^i bodů jsou funkce, jejichž pull-back je dán vztahem (1.46) neboli $x^i(\Phi) = \Phi^*(x^i)$. Bod T je obrazem bodu $P \mapsto Q \mapsto T$ složeného toku $\Phi \equiv \Phi_u^{\mathbf{Y}}(\Phi_t^{\mathbf{X}})$, tedy $x^i(\Phi) = [\Phi_u^{\mathbf{Y}}(\Phi_t^{\mathbf{X}})]^*(x^i)$. Použitím pravidla (1.39) pro skládání dvou pull-backů dostáváme $x^i(\Phi) = [\Phi_t^{\mathbf{X}*}(\Phi_u^{\mathbf{Y}*})](x^i)$, kde $T = \Phi(P)$. Platí proto

1.7 Diferenciální 2-formy ω a jejich vztah k 1-formám

Definice: *0-forma* f je funkce, viz část 1.1.2.

Definice: *1-forma* α je lineární zobrazení: vektor $\mathbf{X} \rightarrow$ číslo $\alpha(\mathbf{X})$, viz (1.7).

Definice: *2-forma* ω je bilineární antisymetrické zobrazení: dva vektory $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rightarrow$ číslo $\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, neboli požadujeme, aby

$$\omega(\mathbf{Y}, c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2) = c_1 \omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_1) + c_2 \omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_2), \quad (1.75)$$

$$\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}), \quad \Rightarrow \quad \text{pro } \mathbf{Y} = \mathbf{X} \text{ platí:} \quad (1.76)$$

$$\omega(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \equiv 0. \quad (1.77)$$

Složky ω v lokální souřadnicové bázi $\left(\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^{2n}}\right)$ jsou sadou čísel

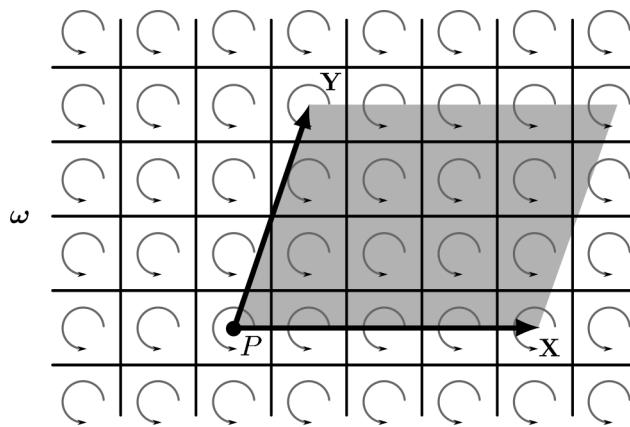
$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \omega\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta}\right). \quad \begin{matrix} \text{trochu mělké,} \\ \text{bez kontextu} \end{matrix} \xrightarrow{(1.78)} \begin{matrix} \text{specifikovat} \\ \text{dim.} \\ \text{variety} \end{matrix}$$

Řecké indexy $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ zde nabývají hodnot $1, 2, \dots, 2n$ odpovídající souřadnicím $(z^1, z^2, \dots, z^{2n})$ v Hamiltonově formalismu (viz kapitola 3). Zjevně platí:

$$\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \equiv \omega\left(Y^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, X^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta}\right) = \omega_{\alpha\beta} Y^\alpha X^\beta, \quad (1.79)$$

přičemž $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ v důsledku antisymetrické vlastnosti (1.76).

Tak jako lze v každém bodě P reprezentovat vektor \mathbf{X} šipkou a 1-formu α vrstevnicemi (viz část 1.1.5), lze také 2-formu ω s výhodou znázornit, a to pomocí *dvojice vrstevnic* neboli dvou soustav paralelních čar (ve vyšší dimenzi než 2 jsou to dvě soustavy ploch), jak je nakresleno na obrázku 1.14. Vidíme, že 2-forma ω je reprezentována *mřížkou* (zde pravidelnou čtvercovou pláštiví). Čím větší je forma ω , tím menší má buňky, protože příslušné vrstevnice jsou hustší (v jednom anebo v obou směrech).



Obrázek 1.14: Geometrické znázornění 2-formy ω v podobě pravidelné mřížky (čtvercové pláštve). Tako reprezentovaná 2-forma přirozeně umožňuje vyčíslit plochu orientovaného rovnoběžníka definovaného dvěma vektory \mathbf{X} a \mathbf{Y} (je vyznačen šedě). Plocha tohoto rovnoběžníka je $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 12$. Vektor \mathbf{X} totiž protíná 4 svislé čáry a \mathbf{Y} protíná 3 vodorovné čáry mřížky, zatímco naopak \mathbf{X} neprotíná žádnou vodorovnou a \mathbf{Y} protíná 1 svislou. Plocha se spočítá podle vzorce $4 \times 3 - 0 \times 1 = 12$.

Připomeňme, že kontrakce $\langle \alpha, \mathbf{X} \rangle \equiv \alpha(\mathbf{X})$ je číslo, jež geometricky odpovídá počtu vrstevnic α , které šipka \mathbf{X} protne. Podobně i „dvojitá kontrakce“ 2-formy ω se dvěma vektory \mathbf{X} a \mathbf{Y} dává reálné číslo $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Toto číslo je právě **velikost plochy rovnoběžníku** definovaného oběma vektory.

Číslo určující velikost plochy získáme jako **součin** počtu „svislých“ vrstevnic, které protne šipka \mathbf{X} (zde 4) a počtu „vodorovných“ vrstevnic, které protne šipka \mathbf{Y} (zde 3), od něhož **odečteme součin** počtu „vodorovných“ vrstevnic, které protne šipka \mathbf{X} (zde 0) a počtu „svislých“ vrstevnic, které protne šipka \mathbf{Y} (zde 1). (zde $4 \times 3 - 0 \times 1 = 12$). *délce?*

Hodnota $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ závisí na konkrétní podobě 2-formy (tedy na tvaru a velikosti buněk mřížky) i na směrech a velikosti obou vektorů (tedy směru a délce šipek). Pochopitelně závisí také na **poradí**, v jakém vektory do 2-formy „dosazujeme“. Podle (1.76) musí být $\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ číslo s opačným znaménkem. Proto hovoříme o velikosti **orientované plochy** a kvůli jednoznačnosti musíme mřížce vrstevnic přiřadit také její **točivost**. Ta je na obrázku 1.14 vyznačena v každé buňce kruhovým orientovaným symbolem, který říká:

Určete počet průsečíků 1. šipky se svislými čárami směrem doprava a vynásobte ho počtem průsečíků 2. šipky s vodorovnými čárami směrem nahoru. Potom odečtěte číslo získané stejným postupem, ale při vzájemném prohození šipek.

Velikost $\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ opačně orientované plochy na obrázku 1.14, určené vektory \mathbf{Y} a \mathbf{X} , tedy dává opačnou hodnotu $1 \times 0 - 3 \times 4 = -12$.

Všimněme si ještě, že v dimenzi 2 mají vektory složky $\mathbf{X} \equiv (X^1, X^2)$, $\mathbf{Y} \equiv (Y^1, Y^2)$ a jediné nenulové složky $\omega_{\alpha\beta}$ formy ω jsou $\omega_{12} = -\omega_{21}$. Výraz (1.79) se tedy redukuje na

$$\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \omega_{12} (Y^1 X^2 - Y^2 X^1). \quad (1.80)$$

Pro $\omega_{12} = 1$ to je přesně výraz pro 3. složku **vektorového součinu** vektorů s kartézskými složkami $(Y^1, Y^2, 0)$ a $(X^1, X^2, 0)$ (zbylé dvě složky vektorového součinu jsou v tomto případě nulové). O velikosti vektorového součinu již ze střední školy víme, že dává velikost plochy příslušného rovnoběžníku. Tato souvislost samozřejmě není náhodná a vrátíme se k ní v závěrečné časti 3.9.

Vztah 2-forma → 1-forma:

- operace $i_{\mathbf{X}}$ vložení vektoru \mathbf{X} do formy (anglicky *insert*, proto symbol „i“)

Definice:

Pro **0-formu** f a vektor \mathbf{X} definujeme

$$i_{\mathbf{X}} f \equiv 0 \quad \dots \text{nula.} \quad (1.81)$$

Pro **1-formu** $\alpha(\bullet)$ a vektor \mathbf{X} definujeme

$$i_{\mathbf{X}} \alpha \equiv \alpha(\mathbf{X}) = \langle \alpha, \mathbf{X} \rangle \quad \dots \text{což je 0-forma,} \quad (1.82)$$

a to číslo *totožné s kontrakcí* α a \mathbf{X} .

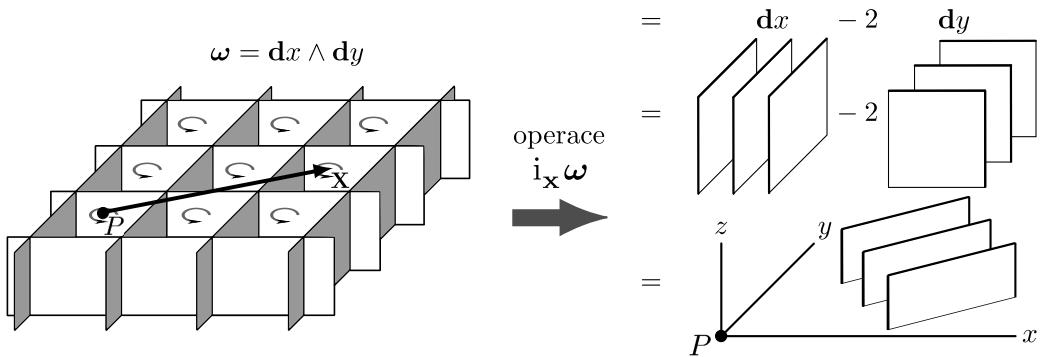
Pro **2-formu** $\omega(\bullet, \bullet)$ a vektor \mathbf{X} definujeme

$$i_{\mathbf{X}} \omega(\bullet) \equiv \omega(\bullet, \mathbf{X}) \quad \dots \text{což je 1-forma,} \quad (1.83)$$

čekající na vektor \mathbf{Y} , která po jeho dosazení za (zbylé) \bullet dá příslušné číslo $\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.

V naší definici se vektor \mathbf{X} **vkládá do druhého argumentu** formy $\omega(\bullet, \bullet)$. V některých jiných publikacích se \mathbf{X} vkládá do **prvního argumentu**, tedy operace dá **opačné znaménko**.

Graficky lze znázornit také operaci (1.83) *vložení vektoru \mathbf{X}* do 2-formy $\omega = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$, neboli $i_{\mathbf{X}}\omega(\bullet) = \omega(\bullet, \mathbf{X}) = (\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y)(\bullet, \mathbf{X}) = dx(\bullet) dy(\mathbf{X}) - dy(\bullet) dx(\mathbf{X})$. Na obrázku 1.16 protíná \mathbf{X} dvě stěny ve směru x a jednu ve směru y , takže $\mathbf{d}x(\mathbf{X}) = 2$ a $\mathbf{d}y(\mathbf{X}) = 1$. Proto je $i_{\mathbf{X}}\omega = \mathbf{d}x - 2\mathbf{d}y$. Tato 1-forma je reprezentována vrstevnicovými plochami rovnoběžnými s vektorem \mathbf{X} . Ten opravdu nemůže protnout žádnou plochu, neboť $(i_{\mathbf{X}}\omega)(\mathbf{X}) = \omega(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$.



Obrázek 1.16: Geometrická reprezentace operace $i_{\mathbf{X}}\omega$ vložení vektoru \mathbf{X} do 2-formy $\omega = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$. Zde $\mathbf{X} = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ a výsledkem je 1-forma $\mathbf{d}x - 2\mathbf{d}y$ se svislými plochami rovnoběžnými s \mathbf{X} .

Důležité je také *vyjádření vnějšího součinu ve složkách*. Platí, že

$\{\mathbf{d}z^\alpha\} \dots$ tvoří **bázi všech 1-forem**,

$\{\mathbf{d}z^\alpha \wedge \mathbf{d}z^\beta\} \dots$ tvoří **bázi všech 2-forem**, neboli lze vyjádřit

$$\omega = \frac{1}{2!} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d}z^\alpha \wedge \mathbf{d}z^\beta = \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d}z^\alpha \wedge \mathbf{d}z^\beta, \quad (1.93)$$

takže

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (\mathbf{d}z^\alpha \otimes \mathbf{d}z^\beta - \mathbf{d}z^\beta \otimes \mathbf{d}z^\alpha)(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (\mathbf{d}z^\alpha(\mathbf{Y}) \mathbf{d}z^\beta(\mathbf{X}) - \mathbf{d}z^\beta(\mathbf{Y}) \mathbf{d}z^\alpha(\mathbf{X})) \\ &= \frac{1}{2} (\omega_{\alpha\beta} \mathbf{Y}^\alpha \mathbf{X}^\beta - \omega_{\alpha\beta} \mathbf{Y}^\beta \mathbf{X}^\alpha) = \omega_{\alpha\beta} \mathbf{Y}^\alpha \mathbf{X}^\beta, \end{aligned} \quad (1.94)$$

což je konzistentní s výrazem (1.79).

nemá být tu něco

- operace **vnější derivace d**

Jedná se o zobecnění diferenciálu funkce

$$f \Rightarrow \mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \mathbf{d}z^\mu. \quad (1.95)$$

Definice: *vnější derivace* pole **1-forem** je pole 2-forem dané vlastnostmi

$$\mathbf{d}(\alpha + \beta) = \mathbf{d}\alpha + \mathbf{d}\beta, \quad (1.96)$$

$$\mathbf{d}(f\beta) = (\mathbf{d}f) \wedge \beta + f \mathbf{d}\beta, \quad (1.97)$$

$$\boxed{\mathbf{d}^2 = 0}. \quad (1.98)$$

Pro speciální 1-formu $\alpha = f \mathbf{d}g$, kde f a g jsou funkce, plyne z (1.97), (1.98), že

$$\boxed{\alpha = f \mathbf{d}g \Rightarrow \mathbf{d}\alpha = \mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}g}. \quad (1.99)$$

Existenci a jednoznačnost takto definované operace nejlépe vidíme ve složkách. Pomocí (1.96), (1.97) a (1.95) snadno dokážeme, že

$$\boxed{\alpha = \alpha_\mu \mathbf{d}z^\mu \Rightarrow \mathbf{d}\alpha = \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial z^\kappa} \mathbf{d}z^\kappa \wedge \mathbf{d}z^\mu}. \quad (1.100)$$

Pro $\alpha = \mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial z^\mu} \mathbf{d}z^\mu$ odtud dostáváme $\mathbf{d}\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial z^\kappa \partial z^\mu} \mathbf{d}z^\kappa \wedge \mathbf{d}z^\mu = 0$, neboť člen $\frac{\partial^2 f}{\partial z^\kappa \partial z^\mu}$ je symetrický v κ a μ , zatímco člen $\mathbf{d}z^\kappa \wedge \mathbf{d}z^\mu$ je antisymetrický. Vlastnost $\mathbf{d}^2 f = 0$ uvedená v definici (1.98) tedy odpovídá záměnnosti smíšených parciálních derivací funkce f .

1.8 Diferenciální p -formy

Operaci vnější derivace lze rozšířit na **obecné p -formy**, tedy na *zcela antisymetrické tenzory typu* $\binom{0}{p}$, což jsou multilineární zobrazení p -tice vektorů do reálných čísel.

V tom případě zůstávají požadavky linearity (1.96) a uzavřenosti (1.98) stejné. Leibnizovo pravidlo (1.97) ale má nyní obecnější (graduovanou) podobu

$$\boxed{\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathbf{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (\mathbf{d}\beta)}, \quad (1.101)$$

kde α je p -forma a β je q -forma, takže $\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta)$ je $(p+q+1)$ -forma. Pokud speciálně β je 1-forma, výsledkem (1.101) je $(p+2)$ -forma. Jestliže α je 1-forma, pak

$$\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathbf{d}\alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge (\mathbf{d}\beta). \quad (1.102)$$

Pro 1-formu α a 1-formu β je $\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta)$ 3-formou.

Pro obecnou formu p -formu α a obecnou q -formu β se antikomutační pravidlo (1.90) pro vnější součin zobecní na (anti)komutační pravidlo

$$\boxed{\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha} \quad (1.103)$$

a pravidlo (1.92) pro vložení \mathbf{X} je zobecněno na

$$\boxed{i_{\mathbf{X}}(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge (i_{\mathbf{X}}\beta) + (-1)^q (i_{\mathbf{X}}\alpha) \wedge \beta}. \quad (1.104)$$

Viděli jsme, že *2-forma ω umožňuje spočítat* (orientovanou)

plochu $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ rovnoběžníku definovaného *dvěma vektory \mathbf{X} a \mathbf{Y}* .

Analogicky *3-forma ω umožňuje spočítat* (orientovaný)

objem $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ rovnoběžnostěnu definovaného *třemi vektory \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z}* .

Obecně *p-forma ω umožňuje spočítat* (orientovaný)

objem $\omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p)$ p-rozměrného rovnoběžnostěnu

definovaného *p vektory $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$* .

Tuto vlastnost využijeme v části 3.9 textu věnované geometrické formulaci Liouvilleovy věty.

Na závěr ještě uvedeme významnou identitu, která dává do souvislosti Lieovu a vnější derivaci.

Cartanova identita: Pro každou p -formu platí

$$\mathcal{L}_x = (-1)^p [i_x d - d i_x]. \quad (1.105)$$

Důkaz: Nechť f, g jsou libovolné funkce, potom

- pro 0-formy f :

Přímočarou aplikací (1.61) a (1.81) dostáváme

$$\mathcal{L}_x f = i_x d f = [i_x d - d i_x] f. \quad (1.106)$$

- pro 1-formy dg :

Pomocí (1.65) a (1.98) snadno dokážeme, že

$$\mathcal{L}_x d g = d (\mathcal{L}_x g) = d (i_x d g) = -[i_x d - d i_x] d g. \quad (1.107)$$

- pro zcela obecné p -formy:

Operátor Lieovy derivace \mathcal{L}_x je lineární a splňuje Leibnizovo pravidlo. Stačí tedy dokázat, že také operátor $(-1)^p [i_x d - d i_x]$ je lineární (což je triviální) a splňuje Leibnizovo pravidlo. K tomu použijeme graduované verze Leibnizova pravidla pro vnější derivaci (1.101) a vložení do vnějšího součinu (1.104).

Definujme Cartanův operátor

$$(-1)^r \mathcal{C} \equiv i_x d - d i_x, \quad (1.108)$$

který aplikujeme na obecnou r -formu $\alpha \wedge \beta$, kde α je p -forma a β je q -forma, takže $r \equiv p + q$. Tím dostaneme r -formu

$$\begin{aligned} (-1)^r \mathcal{C}(\alpha \wedge \beta) &\equiv i_x [d(\alpha \wedge \beta)] - d [i_x (\alpha \wedge \beta)] \\ &= i_x [(d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)] - d [\alpha \wedge (i_x \beta) + (-1)^q (i_x \alpha) \wedge \beta] \\ &= (d\alpha) \wedge (i_x \beta) + (-1)^q (i_x d\alpha) \wedge \beta \\ &\quad + (-1)^p [\alpha \wedge (i_x d\beta) + (-1)^{q+1} (i_x \alpha) \wedge (d\beta)] \\ &\quad - [(d\alpha) \wedge (i_x \beta) + (-1)^p \alpha \wedge (d i_x \beta)] \\ &\quad - (-1)^q [(d i_x \alpha) \wedge \beta + (-1)^{p-1} (i_x \alpha) \wedge (d\beta)]. \end{aligned}$$

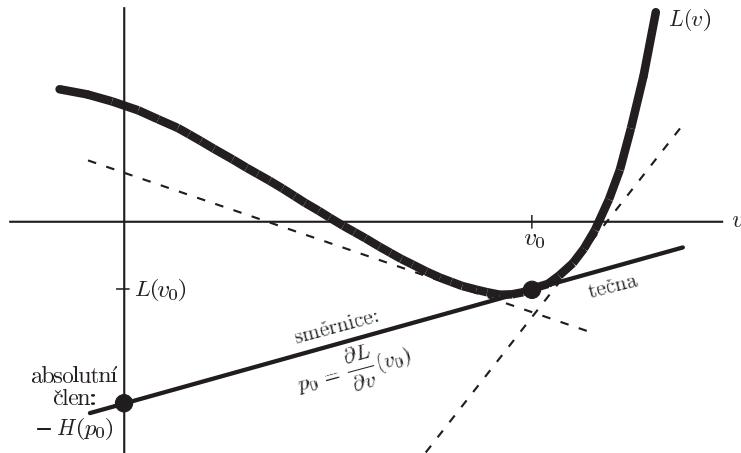
Čtyři z osmi členů se navzájem odečtou a zbylé čtyři lze uspořádat do tvaru

$$\begin{aligned} (-1)^r \mathcal{C}(\alpha \wedge \beta) &= (-1)^q [(i_x d\alpha) \wedge \beta - (d i_x \alpha) \wedge \beta] \\ &\quad + (-1)^p [\alpha \wedge (i_x d\beta) - \alpha \wedge (d i_x \beta)] \\ &= (-1)^q ([i_x d - d i_x] \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge [i_x d - d i_x] \beta \\ &= (-1)^q (-1)^p \mathcal{C}(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (-1)^q \mathcal{C}(\beta) \\ &= (-1)^{p+q} (\mathcal{C}(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{C}(\beta)), \end{aligned}$$

tedy

$$\mathcal{C}(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{C}(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{C}(\beta). \quad (1.109)$$

✉

Obrázek 3.1: Názorná ilustrace vztahu mezi L a H .**Další důsledky Legendreovy duality:**

Legendreovým obrazem Lagrangeovy 1-formy θ_L definované na $T\mathcal{Q}$ (přesněji $\theta_L \in T^*(T\mathcal{Q})$) vztahem (2.21), tedy

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} dq^j, \quad (3.9)$$

je významná Cartanova 1-forma θ_0 :

Definice: **kanonická Cartanova 1-forma** θ_0 na $T^*\mathcal{Q}$ (přesněji $\theta_0 \in T^*(T^*\mathcal{Q})$) je definována vztahem

$$\boxed{\theta_0 = p_j dq^j}. \quad (3.10)$$

Její geometrická důležitost spočívá v tom, že

- existuje globálně na celém $T^*\mathcal{Q}$,
- nezávisí na konkrétní funkci L ,
- je jednoznačně a přirozeně určena fíbrovanou strukturou kotečného bandlu $T^*\mathcal{Q}$.

Podobně lze Legendreovu dualitu aplikovat i na integrální křivky dynamického vektorového pole $\mathbf{X} \equiv \frac{d}{dt}$ určující vývoj daného systému. V Lagrangeově formalismu na $T\mathcal{Q}$ je

$$\mathbf{X}_L = \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j} + W^j(q^i, \dot{q}^i) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, \quad (3.11)$$

kde $W^j(q^i, \dot{q}^i)$ je kontrémá (obvykle složitá) funkce daná Lagrangeovými pohybovými rovnicemi viz (A.7). Naproti tomu ve formalismu Hamiltonově na $T^*\mathcal{Q}$ platí

$$\mathbf{X}_H = \frac{dq^j}{dt} \frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{dp_j}{dt} \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad \text{proc?} \rightarrow \text{nie je jasne oddikt su vezme} \quad (3.12)$$

kde $\frac{dq^j}{dt}$ a $\frac{dp_j}{dt}$ jsou určeny Hamiltonovými kanonickými rovnicemi $\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ a $\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$, tedy

$$\boxed{\mathbf{X}_H = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j}}. \quad (3.13)$$

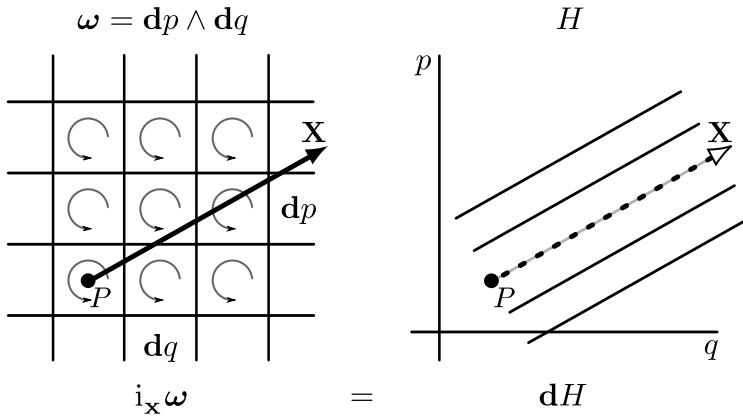
Na $T^*\mathcal{Q}$ je proto vývoj systému určen trajektoriemi $(q^j(t), p_j(t))$, což jsou integrální křivky přirozeného vektorového pole $\mathbf{X}_H = (\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q^j})$.

Hamiltonovy kanonické rovnice v čistě geometrické řeči tedy mají velmi elegantní tvar

$$i_X \omega = dH. \quad (3.29)$$

Vyjádřeno slovy: *vývoj systému je určen integrálními křivkami takového vektorového pole \mathbf{X} , které vložením do symplektické 2-formy ω dá právě diferenciál zadané Hamiltonovy funkce.*

Tuto rovnici můžeme graficky vizualizovat a názorně interpretovat, použijeme-li námi již zavedené reprezentace vektoru \mathbf{X} pomocí šipky a 1-formy dH pomocí soustavy vrstevnic (viz podsekce 1.1.5 textu) a také 2-formy ω pomocí orientované mřížky resp. pláštve, včetně operace vložení vektoru $i_X \omega$ do ní (viz sekce 1.7). Výsledkem je „grafická rovnice“ znázorněná na tomto obrázku:



Obrázek 3.2: Geometrická interpretace Hamiltonových rovnic. Operace $i_X \omega$ vložení vektoru \mathbf{X} do symplektické 2-formy $\omega = dp \wedge dq$ vytváří 1-formu, jejíž plochy vedou ve směru šipky vektoru \mathbf{X} . Tyto plochy musí všude souhlasit s plochami dH .

Rozeberme trochu podrobněji geometrické objekty zde zobrazené i vztahy mezi nimi.

Symplektickou 2-formu můžeme vyjádřit v bázi vztahem (1.93) jako $\omega = \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta$. Pro mechanický systém s jedním stupněm volnosti ($n = 1$) má fázový prostor pouze souřadnice $(z^1, z^2) \equiv (q, p)$, takže $\omega = \omega_{12} dz^1 \wedge dz^2 \equiv -dq \wedge dp = dp \wedge dq$. Symplektická forma ω je tedy dána jen kanonicky sdruženými proměnnými q a p , což jsou souřadnice fázového prostoru T^*Q . Konkrétně je to vnější součin příslušných 1-form dq a dp , vynásobených spolu v opačném pořadí. Tím vzniká orientovaná mřížka $\omega = dp \wedge dq$ znázorněná na levé straně obrázku 3.2.

Vložíme-li do této 2-formy vektor \mathbf{X} , vzniká 1-forma, jejíž vrstevnice vždy „vedou ve směru vektoru“ \mathbf{X} , viz obrázek 1.16. Podle Hamiltonovy geometrické rovnice (3.29) musí tyto vrstevnice (v obecné dimenzi jsou to **plochy**) v každém bodě fázového prostoru souhlasit s dH , tedy s vrstevnicemi 1-formy, která je diferenciálem zadané Hamiltonovy funkce H , jak je znázorněno na pravé straně obrázku 3.2.

Z této konstrukce je zřejmé, že **dynamické vektorové pole \mathbf{X}** udávající směr vývoje mechanického systému **musí být všude tečné k plochám $H = \text{konst.}$** neboli k plochám konstantní energie. Opravdu, **Hamiltonova funkce H je integrálem pohybu** ve smyslu definice (2.43), neboť díky (1.61), (1.8), (1.82) a (3.29) platí

$$\mathcal{L}_X H = \mathbf{X}(H) = \langle dH, \mathbf{X} \rangle = dH(\mathbf{X}) = i_X dH = i_X i_X \omega = \omega(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0. \quad (3.30)$$

Navíc má \mathbf{X} správnou velikost určující správnou rychlosť parametrizace integrálních křivek $\gamma(t)$, a to v následujícím smyslu: Pro každý vektor \mathbf{Y} platí $\mathcal{L}_Y H = \mathbf{Y}(H) = i_Y dH = i_Y i_X \omega = \omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, tedy změna Hamiltonovy funkce H v kterémkoliv směru \mathbf{Y} číselně souhlasí s hodnotou $\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.

Vidíme tedy, že symplektická forma ω je opravdu centrálním pojmem geometrické formulace Hamiltonovy mechaniky. Ukážeme nyní, že tento geometrický objekt je přirozeně definován samou strukturou kotečného bandlu T^*Q neboli fázového prostoru.

Platí tedy:

- Složení ω^\flat a ω^\sharp je identita:

$$\omega^\flat \omega^\sharp = \text{identita} = \omega^\sharp \omega^\flat. \quad (3.38)$$

- Ve složkách platí

$$\theta_\alpha = \omega_{\alpha\beta} X^\beta, \quad (3.39)$$

$$X^\beta = \omega^{\beta\alpha} \theta_\alpha. \quad (3.40)$$

- Speciálně na T^*Q s přirozenými souřadnicemi (q^j, p_j) máme

$$\frac{\partial}{\partial q^j} \stackrel{\sharp}{\longleftrightarrow} {}^\flat \mathbf{d} p_j, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \stackrel{\sharp}{\longleftrightarrow} {}^\flat -\mathbf{d} q^j. \quad (3.42)$$

Díky této symbolice můžeme Hamiltonovy kanonické rovnice (3.29) $i_{\mathbf{X}} \omega = \mathbf{d}H$ přepsat do podoby

$$\omega^\flat(\mathbf{X}) = \mathbf{d}H, \quad (3.43)$$

neboli

$$\boxed{\mathbf{X} = \omega^\sharp(\mathbf{d}H)}. \quad (3.44)$$

To je *explicitní* výraz pro dynamické vektorové pole \mathbf{X} , které jednoznačně určuje vývoj systému pro danou Hamiltonovu funkci H .

Obecně se pomocí symplektické formy ω zavádí tzv. hamiltonovské vektorové pole, které je přiřazeno *libovolné* funkci f na fázovém prostoru.

Definice: *hamiltonovské vektorové pole* \mathbf{X}_f vůči dynamické proměnné f je takové pole, že

$$\boxed{i_{\mathbf{X}_f} \omega = \mathbf{d}f}, \quad (3.45)$$

neboli

$$\mathbf{X}_f = \omega^\sharp(\mathbf{d}f), \quad (3.46)$$

neboli

$$\omega(\bullet, \mathbf{X}_f) = \mathbf{d}f. \quad (3.47)$$

Přiřazení vektorového pole \mathbf{X}_f funkci f je jednoznačné. Zdaleka ne každé pole je ale hamiltonovské.

3.5 Poissonovy závorky geometricky

Symplektická forma ω je úzce svázána s Poissonovými závorkami, neboť *geometrická podoba Poissonových závorek* je

$$\boxed{\{f, g\} = \omega(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_f)} = -\omega(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g), \quad (3.48)$$

kde \mathbf{X}_g je Hamiltonovské pole vůči g , zatím co \mathbf{X}_f je Hamiltonovské pole vůči f .

Důkaz: Nechť dle (3.45)

$$\mathbf{X}_g = \omega^\sharp(\mathbf{d}g), \quad \mathbf{X}_f = \omega^\sharp(\mathbf{d}f), \quad (3.49)$$

3.8 Invariance symplektické formy

Pro každé hamiltonovské pole \mathbf{X}_g vůči g platí

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} \omega = 0. \quad (3.64)$$

Speciálně platí $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \omega = 0$ pro dynamické vektorové pole \mathbf{X} odpovídající Hamiltonově funkci H . Jinými slovy **symplektická forma ω se při vývoji systému „nemění“**.

Důkaz: Provedeme pomocí *Cartanovy identity* pro 2-formy, podle níž platí $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = i_{\mathbf{x}} d - d i_{\mathbf{x}}$, viz (1.105). Je tedy $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} \omega = i_{\mathbf{X}_g} d\omega - d i_{\mathbf{X}_g} \omega = 0 - d\omega = -d^2 g = 0$, kde jsme využili uzavřenosť symplektické formy ω (tedy že $d\omega = 0$) a definice hamiltonovského pole (3.45).

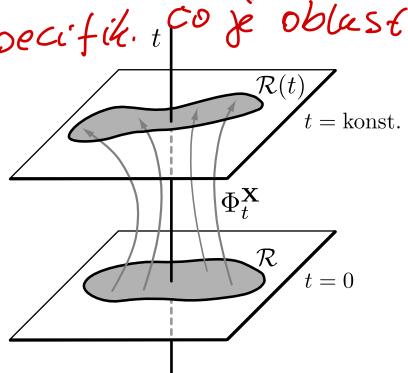
□

3.9 Liouvilleova věta

Důležitým důsledkem invariance symplektické formy ω vůči dynamickému vektorovému poli \mathbf{X} je, že **objem oblasti vymezené ve fázovém prostoru se působením toku popisujícího vývoj hamiltonovského systému nemění**.

Konkrétně, nechť:

- \mathcal{R} je **oblast fázové variety** ($\dim = 2n$),
- při dynamickém vývoji jsou body z \mathcal{R} zobrazeny tokem $\Phi_t^{\mathbf{X}}$ do oblasti $\mathcal{R}(t)$,
- pak objem $\mathcal{R}(t)$ je **stejný** jako objem \mathcal{R} .



Jak počítat (elementární) orientovaný objem na varietě?

- **objem v prostoru \mathbb{R}^2** určený dvěma vektory \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 je

$$v(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \pm |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \epsilon_{ij} x_1^i x_2^j,$$

- **objem v prostoru \mathbb{R}^3** určený třemi vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ je

$$v(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3) = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k,$$



- **objem v prostoru \mathbb{R}^n** určený n vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ je analogicky definován

$$v(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \epsilon_{i\dots k} x_1^i \dots x_n^k. \quad (3.65)$$

POZNÁMKA, ZE JE VEC. PROST?

Obecně je $v(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ tzv. **objemová funkce**, což je zobrazení $\mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, které je

- multilineární,
- antisymetrické,
- nedegenerované.

Linearita souvisí s *aditivitou* objemu, antisimetrie s jeho *orientací* (v závislosti na pořadí vektorových argumentů) a nedegenerovanost zaručuje, že pro lineárně nezávislé vektory je objem *nenulový*.

- **elementární objemový element** v prostoru dimenze n je tedy **n -forma \mathbf{v}** , která n -tici vektorů antisymetricky přiřazuje číslo, jež je objemem rovnoběžnostěnu, jehož hrany jsou určeny zvolenými vektory (viz též závěr části 1.7 textu).

Elementární objemový element na fázové varietě je vhodně zvolená $2n$ -forma. Speciálně: **kanonický objemový element**, takzvaná **Liouvilleova $2n$ -forma**, je definován jako vnější součin n symplektických forem ω ,

$$\boxed{\mathbf{v} \equiv \frac{1}{n!} \omega \wedge \dots \wedge \omega \equiv \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n}}, \quad (3.66)$$

kde ω je symplektická 2-forma. Explicitně v souřadnicích tedy lze psát

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}p_n \wedge \mathbf{d}q^n}. \quad (3.67)$$

Důkaz: Např. pro $n = 2$ je $\omega = \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2$, takže

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{2}(\omega \wedge \omega) = \frac{1}{2}[(\mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2) \wedge (\mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2)] \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 \wedge \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1] = \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2. \end{aligned}$$

✉

Diferenciální tvar Liouvilleovy věty:

Kanonický objemový element \mathbf{v} na fázové varietě je invariantní vůči hamiltonovským tokům, neboli

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = 0}. \quad (3.68)$$

Důkaz:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n} = \frac{n}{n!} \omega^{\wedge (n-1)} \wedge \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \omega = 0,$$

neboť dle (3.64) se symplektická forma při vývoji systému nemění,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \omega = 0, \quad (3.69)$$

neboli symplektická forma je invariantní vůči příslušné kanonické transformaci.

✉

Integrální tvar Liouvilleovy věty:

Nyní provedeme integraci kanonického objemového elementu \mathbf{v} přes *konečnou oblast* \mathcal{R} fázového prostoru tak, že „slepíme dohromady“ elementární objemové elementy na tečných prostorech všech bodů $Z^* \equiv (q^j, p_j) \in T^*\mathcal{Q}$ fázové variety. V obecném čase t užitím (3.67) tak dostaneme

$$V \equiv \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v} = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}p_n \wedge \mathbf{d}q^n.$$

V pozdějším čase $t + \epsilon$ integrujeme přes oblast $\mathcal{R}(t + \epsilon) \equiv \Phi_\epsilon^X(\mathcal{R})$, která je dána tokem generovaným \mathbf{X} . Velikost objemu $V(t + \epsilon)$ oblasti $\mathcal{R}(t + \epsilon)$ spočítáme pomocí příslušného pull-backu Φ_ϵ^{X*} kanonického elementu \mathbf{v} ,

$$V(t + \epsilon) \equiv \int_{\mathcal{R}(t + \epsilon)} \mathbf{v} = \int_{\mathcal{R}} \Phi_\epsilon^{X*} \mathbf{v}.$$

Okamžitou časovou změnu velikosti objemu $V(t)$ dostaneme jako derivaci vyčíslenou pro $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\frac{d}{dt} V(t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_0 \Phi_\epsilon^{X*} \mathbf{v}. \quad \text{intuitivitou, ale technicky ně, až projde}$$

Časová derivace pull-backu je ale totéž co Lieova derivace, viz identita (1.59), takže

$$\frac{d}{dt} V(t) = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{L}_X \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\epsilon}$$

v důsledku (3.68). Tím jsme obecně dokázali, že

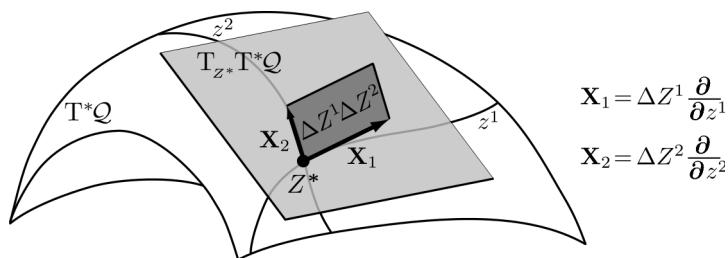
$$V(t) = \text{konst.} \quad (3.70)$$

Fyzikálně to znamená, že *vymezená oblast ve fázovém prostoru při vývoji systému obecně mění tvar, ale nikoli svůj objem*. Tento poznatek je naprosto klíčový ve statistické fyzice.

Poznámka: Riemannova sumace elementárního objemu v přes oblast \mathcal{R} variety se provádí následujícím postupem. V každém bodě $Z^* \in \mathcal{R}$ fázové variety $T^*\mathcal{Q}$ o souřadnicích $(z^\beta) \equiv (q^j, p_j)$ je vymezena elementární buňka, a to pomocí $2n$ speciálních vektorových polí \mathbf{X}_β tečných k souřadnicovým čárám z^β , které v daném bodě Z^* mají *velikost* ΔZ^β , tedy

$$\mathbf{X}_1 = \Delta Z^1 \frac{\partial}{\partial z^1}, \quad \dots, \quad \mathbf{X}_{2n} = \Delta Z^{2n} \frac{\partial}{\partial z^{2n}},$$

viz tento obrázek:



Objemový integrál na varietě $T^*\mathcal{Q}$ je pak chápán jako riemannovská limita sumace prováděné v *tečném prostoru* $T_{Z^*}T^*\mathcal{Q}$ variety $T^*\mathcal{Q}$, neboli

$$\begin{aligned} V &= \int_{\mathcal{R}} \mathbf{v} = (\pm) \int_{\mathcal{R}} \mathbf{d}z^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}z^{2n} \\ &\equiv \lim_{\Delta Z^\beta \rightarrow 0} \sum_{\text{buňky}} i_{\mathbf{x}_1} \dots i_{\mathbf{x}_{2n}} \mathbf{d}z^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}z^{2n} = \lim_{\Delta Z^\beta \rightarrow 0} \sum_{\text{buňky}} \Delta Z^1 \dots \Delta Z^{2n}. \end{aligned}$$

3.10 Poincarého invarianty

Podobnou úvalu, dokazující invarianci Liouvilleova kanonického objemového elementu \mathbf{v} (3.66) vůči hamiltonovským tokům, lze provést i pro formy *nižší dimenze* než je $2n$. Související integrály pohybu se nazývají Poincarého invarianty.

Definujme k -tý diferenciální Poincarého invariant jako $2k$ -formu

$$\omega^{\wedge k} \equiv \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{k-\text{krát}}. \quad (3.71)$$

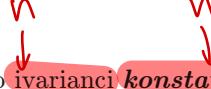
kde ω je symplektická 2-forma. Pak platí, že $\omega^{\wedge k}$ je invariantní vůči hamiltonovským tokům (časovému vývoji systému, kanonickým transformacím).

Důkaz:

$$\mathcal{L}_x \omega^{\wedge k} = k \omega^{\wedge (k-1)} \wedge \mathcal{L}_x \omega = 0,$$

neboť $\mathcal{L}_x \omega = 0$, viz (3.69). \(\square\)

Příslušný *integrální Poincarého invariant* definovaný



$$I_k = \int_S \omega^{\wedge k}, \quad (3.72)$$

je díky této invarianci **konstatní v čase**, tedy je „integrálem pohybu“.

Příklad: První Poincarého invariant pro $k = 1$ je integrál ze samotné symplektické 2-formy



$$I_1 = \int_S \omega, \quad (3.73)$$

kde S je **dojrozměrná** plocha fázové variety T^*Q . Připomeňme, že symplektická forma $\omega = dp_j \wedge dq^j$ je přirozeně definována jako diferenciál kanonické Cartanovy formy $\theta_0 = p_j dq^j$, a to vztahem $\omega = d\theta_0$, viz vzorce (3.31)–(3.33). Použijeme-li tedy slavnou **Stokesovu větu**, lze první Poincarého invariant přepsat do tvaru

$$I_1 = \int_S d\theta_0 = \oint_{\partial S} \theta_0,$$

kde integrál 1-formy θ_0 se provádí po uzavřené křivce ∂S , která je (orientovanou) hranicí S . Proto platí, že

$$I_1 = \oint_{\partial S} p_j dq^j = \text{konst.}, \quad (3.74)$$

což je takzvaný **akční integrál** ve fázovém prostoru.

Odůvodnění: Pro ilustraci uvažme systém **harmonického oscilátoru** popsaný Hamiltovou funkcí $H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{k}{2} q^2$. Explicitní řešení příslušných pohybových rovnic je

$$q(t) = A \cos \omega t, \quad p(t) = -m\omega A \sin \omega t, \quad \text{kde } \omega = \sqrt{k/m},$$

viz rovnice (2.12) a obrázek 2.3, a zachová se celková energie $E = H = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$. Křívkový integrál (3.74) vyčíslíme pomocí vztahu $dq(t) = \dot{q}(t) dt = -\omega A \sin \omega t dt$, kde čas $t \in [0, T]$ je parametr křívek (eliptické trajektorie) ve fázovém prostoru a $T = 2\pi/\omega$ je perioda jedné oscilace:

$$I_1 = \oint_{\partial S} p dq = \int_0^T m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t dt = 2E \int_0^T \sin^2 \omega t dt.$$

Příloha B

Další vlastnosti tečného bandlu $T\mathcal{Q}$

V tomto dodatku ukážeme, že regulární Lagrangeova funkce L umožňuje zavést *symplektickou strukturu na $T\mathcal{Q}$* . Existence symplekticé formy ω tak není doménou jen „hamiltonovského“ kotečného bandlu $T^*\mathcal{Q}$, ale také „lagrangeovského“ tečného bandlu $T\mathcal{Q}$.

B.1 Symplektická struktura na $T\mathcal{Q}$

Nejprve definujeme několik důležitých pojmu.

Definice: *Lagrangeova 1-forma θ_L* je 1-forma na $T\mathcal{Q}$ definovaná v lokálních zobecněných souřadnicích vztahem (2.21), tedy

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i. \quad (\text{B.1})$$

Definice: *Lagrangeova 2-forma ω_L* je 2-forma definovaná jako

$$\omega_L \equiv \mathbf{d}\theta_L = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial q^j} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}\dot{q}^j, \quad (\text{B.2})$$

což lze pomocí „blokového“ přepisu v souřadnicové bázi 2-forem vyjádřit následujícím způsobem

$$(\omega_L)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} & & \\ \ddots & & & \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} & 0 & -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} & \\ & 0 & & \\ & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

vizuálně očekávat
bloky?
d

Ukážeme nyní, že Lagrangeova 2-forma ω_L je *symplektická*, tedy uzavřená a neegenerovaná. Uzavřenosť Lagrangeovy 2-formy je vidět přímo z definice (B.2) užitím (1.98),

$$\mathbf{d}\omega_L = \mathbf{d}^2\theta_L \equiv 0. \quad (\text{B.4})$$

Podmínkou její nedegenerovanosti je regularita Lagrangeovy funkce. Každou 2-formu lze totiž ve složkách zapsat jako

$$\omega = \frac{1}{2!} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d}u^\alpha \wedge \mathbf{d}u^\beta = \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d}u^\alpha \wedge \mathbf{d}u^\beta, \quad (\text{B.5})$$

přičemž $\{\mathbf{d}u^\alpha \wedge \mathbf{d}u^\beta\}$ tvoří bázi všech 2-form, zde $\mathbf{d}u^\alpha$ jsou buď $\mathbf{d}q^i$ nebo $\mathbf{d}\dot{q}^i$. Podmínkou pro nedegenerovanost 2-formy zapsané ve tvaru (B.5) je pak existence inverzní matice $\omega^{\alpha\beta}$, což je ekvivalentní podmínce

$$\det(\omega_{\alpha\beta}) \neq 0. \quad (\text{B.6})$$

Zavedením jednotného značení lokálních souřadnic na tečném bandlu $T\mathcal{Q}$ dimenze $2n$ vztahem

$$(u^1, \dots, u^n, u^{n+1}, \dots, u^{2n}) \equiv (q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad (\text{B.7})$$

tedy

$$u^j = q^j, \quad u^{j+n} = \dot{q}^j \quad \text{pro } j = 1, \dots, n, \quad (\text{B.8})$$

lze pak z (B.3) již snadno ukázat, že podmínka (B.6) odpovídá platnosti

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0, \quad (\text{B.9})$$

což je podle předpokladů o regularitě L splněno.

Shrnutí: Je vidět, že pro regulární Lagrangeovu funkci je Lagrangeova 2-forma ω_L symplektická forma na tečném bandlu konfigurační variety $T\mathcal{Q}$ a činí tak z $T\mathcal{Q}$ symplektickou varietu.

B.2 Hamiltonovská dynamika na $T\mathcal{Q}$

Nyní explicitně ukážeme, že symplektická struktura na tečném bandlu $T\mathcal{Q}$ konfigurační variety přímo implikuje existenci hamiltonovské dynamiky na $T\mathcal{Q}$. Jedná se přitom právě o dynamiku danou Lagrangeovými rovnicemi.

Chceme-li na varietu $T\mathcal{Q}$, o které již víme, že je díky Lagrangeově 2-formě ω_L nosičem symplektické struktury, zavést dynamiku, můžeme na $T\mathcal{Q}$ zavést tzv. hamiltonovské pole.

Definice: *hamiltonovským vektorovým polem* \mathbf{X}_f odpovídajícím libovolné funkci f na varietě \mathcal{Q} je myšleno vektorové pole splňující definiční vztah (srovnej s (3.45))

$$T\mathcal{Q} \rightarrow \text{např. } \mathbf{X}_f \text{ fce q c q?} \quad i_{\mathbf{X}_f} \omega_L = df. \quad (\text{B.10})$$

Výběrem vhodné generující funkce $f \equiv H$ můžeme získat *hamiltonovský systém* $(T\mathcal{Q}, \omega_L, H)$. Funkci H generující časový vývoj systému pak nazýváme *hamiltonián*.

Ukazuje se navíc, že vhodnou volbou funkce H získáme dynamiku hamiltonovského systému odpovídající dynamice generované Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu.

Definice: Máme-li na $T\mathcal{Q}$ dánu Lagrangeovu funkci $L : T\mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, pak definujeme funkci E_L , které říkáme *zobecněná energie odpovídající Lagrangeově funkci*, vztahem

$$E_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L. \quad (\text{B.11})$$

Funkce E_L v jistém smyslu souvisí s příslušným hamiltoniánem H , neboť integrální křivky dynamického pole příslušejícího funkci E_L (tj. odpovídající Lagrangeovým rovnicím 2. druhu) se po projekci na konfigurační varietu \mathcal{Q} shodují s projekcemi křivek odpovídajících Hamiltonovým rovnicím v Hamiltonově formalismu na fázové varietě $T^*\mathcal{Q}$.

Příloha C

Časově závislé hamiltoniány

$\Gamma = T^*Q$ zadefinovať
na zač. pre nadriazanie

Přirozená geometrická aréna časově závislé Hamiltonovy mechaniky vzniká rozšířením fázového prostoru Γ (s lokálními souřadnicemi q^j a p_j) z bezčasového případu diskutovaného v kapitole 3 o časovou osu \mathbb{R} (se souřadnicí t). Jedná se tedy o kartézský součin zmíněných prostorů tj. $\Gamma \times \mathbb{R}$. Tuto novou varietu nazýváme **rozšířeným fázovým prostorem**. Lokální souřadnice na tomto novém prostoru jsou (q^j, p_j, t) . Dimenze rozšířeného fázového prostoru je zjevně $2n + 1$. Není to proto symplektická varieta, jako v nečasovém případě, jejíž dimenze musí být sudá, ale takzvaná **kontaktní varieta**.

Nejprve zadefinujme dva obecné pojmy:

Definice:

- Vektor \mathbf{X} , pro který platí, že $\Omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ nezávisle na volbě druhého vektoru \mathbf{Y} , nazveme **nulovým vektorem** 2-formy Ω . Tento vektor je jednoznačně určen až na skalární násobek.
- 2-formu Ω nazveme **nesingulárni**, pokud lineární prostor generovaný množinou jejích nulových vektorů \mathbf{X} má minimální možnou dimenzi: tedy $\dim = 1$ pokud je dimenze celého prostoru, na kterém je forma Ω definována, lichá, a $\dim = 0$ pokud je tato dimenze sudá.

e Zavedení pojmu nesingularity 2-formy je jakýmsi zobecněním pojmu nedegenerovanosti formy. Uvědomme si, že pokud je dimenze celého prostoru formy Ω sudá (tedy $2n$), nesingulárnost říká, že **nexistuje žádný nulový vektor**, a forma je tedy nedegenerovaná.

Pokud je dimenze prostoru lichá (tedy $2n + 1$) a forma Ω je nesingulární, pak víme, že forma je degenerovaná speciálním způsobem, a to pouze „v jednom směru“. Nebude se však jednat o symplektickou formu, která musí být dle definice nedegenerovaná a uzavřená¹.

Ilustrace: Je možné ukázat, že

- 2-forma $\omega = dp_j \wedge dq^j$, $\dim = 2n$, je nesingulární a tedy nedegenerovaná.
- 2-forma $\Omega = dp_j \wedge dq^j - d(p_j + q^j) \wedge dt$, $\dim = 2n + 1$, je nesingulární, tedy degenerovaná pouze v jednom směru, a to $\mathbf{X} = a \left(\frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial t} \right)$, kde a je libovolný skalár.

Nyní lze dát do souvislosti nesingulární 2-formu na prostoru liché dimenze a vektorové pole:

Platí: Máme-li na $(2n + 1)$ -dimenzionálním rozšířeném fázovém prostoru zadanou nesingulární 2-formu Ω , potom lze najít právě jedno vektorové pole \mathbf{X} , pro které (až na skalární násobek) platí

$$i_{\mathbf{X}} \Omega = 0. \quad (\text{C.1})$$

Důkaz: Plyne přímo z definice nesingulární 2-formy na celém prostoru liché dimenze.

¹Připomeňme, že forma Ω se nazývá uzavřená, pokud platí $d\Omega = 0$.

\times_H

Důkaz: Vložením i_{x_H} do $\Omega = \omega - dH \wedge dt$, viz (C.8) a (C.9), dostáváme

$$i_{x_H} \Omega = i_{x_H} \omega - dH (i_{x_H} dt) + dt (i_{x_H} dH) = dH - 0 + 0 = dH.$$

□

Jelikož složka vektorového pole do směru osy t je nulová, je výhodné uvažovat pouze projekci tohoto pole a formy Ω na $2n$ -dimenzionální symplektickou varietu se souřadnicemi q^j a p_j . Na tomto novém fázovém prostoru takto dostáváme známou symplektickou formu $\omega = dp_j \wedge dq^j$ a vektorové pole $\mathbf{X} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j}$. Tyto dva objekty jsou přitom spojeny Hamiltonovými kanonickými rovnicemi v geometrickém tvaru, neboli $i_{\mathbf{X}} \omega = dH$.

C.3 Časově závislé kanonické transformace

Na problematiku kanonických transformací, které jsme v bezčasovém případě studovali v části 3.7, je možné pohlížet dvěma ekvivalentními způsoby: Rozlišujeme mezi pohledem *pasivním* a *aktivním*.

V případě transformací pasivních jde pouze o změnu souřadnicového systému, přičemž body v rozšířeném fázovém prostoru zůstávají fixované. Naproti tomu v aktivním přístupu jeden bod z rozšířeném fázovém prostoru přechází pomocí jistého toku na bod jiný.

Od *kanonických* transformací požadujeme zachování jednoduchého tvaru pohybových rovnic nebo ekvivalentně zachování 2-formy Ω . Nadále budeme uvažovat pouze transformace pasivní. Potom je možné zavést kanonické transformace následující definicí⁴:

Definice: *kanonickou transformací* nazýváme takovou zámenou souřadnic na rozšířeném fázovém prostoru, která zachovává kanonický tvar formy Ω , tedy

$$(q^j, p_j, t) \rightarrow (Q^j(q^j, p_j, t), P_j(q^j, p_j, t), t) : \\ dp_j \wedge dq^j - dH \wedge dt = dP_j \wedge dQ^j - dH' \wedge dt. \quad (\text{C.26})$$

Podívejme se nyní na dynamické vektorové pole určené Hamiltonovými rovnicemi.

Tvrzení: Transformace generovaná fázovým tokem $\Phi^{\mathbf{X}}$, tedy určena dynamickým polem \mathbf{X} dle (C.6), je kanonická.

Důkaz: Plyne přímo z ekvivalence vztahů (C.18) a (C.26) pro tok $\Phi^{\mathbf{X}}$, tedy

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \Omega = 0 \Leftrightarrow \Phi^{\mathbf{X}*}(\Omega) = \Omega. \quad (\text{C.27})$$

□

Připomeňme, že každá (lokální) kanonická transformace odpovídá jisté *generující funkci* F na rozšířené fázové varietě. Dále připomeňme, že kontaktní 1-forma má tvar $\Lambda = p_j dq^j - H dt$, a že aplikací vnější derivace dostáváme nesingulární uzavřenou 2-formu Ω , tedy $d\Lambda = \Omega$. Nyní uvažujme novou formu Λ_1 danou výrazem

$$\Lambda_1 = P_j dQ^j - H' dt \quad (\text{C.28})$$

v nových souřadnicích (Q^j, P_j, t) spojených s (q^j, p_j, t) kanonickou transformací. Potom platí $d\Lambda_1 = \Omega$. Odečtením dvou různých souřadnicových vyjádření 2-formy Ω dostáváme

$$d(\Lambda - \Lambda_1) = 0. \quad (\text{C.29})$$

Z předchozího výrazu plyne uzavřenosť formy $\alpha = (\Lambda - \Lambda_1)$. Nyní užijme Poincarého lemma, podle něhož pro uzavřenou 1-formu α lokálně existuje funkce F taková, že $\alpha = dF$.

⁴V aktivním pohledu kanonickou transformací nazýváme diferencovatelné zobrazení g fázového prostoru, které zachovává 2-formu Ω , tedy $g^*(\Omega) = \Omega$, kde g^* je pull-back g .

Předchozí výrazy zároveň určují dynamické vektorové pole \mathbf{X} v nových souřadnicích,

$$\mathbf{X} = \frac{\partial H'}{\partial P_j} \frac{\partial}{\partial Q^j} - \frac{\partial H'}{\partial Q^j} \frac{\partial}{\partial P_j} + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{C.38})$$

Kanonická transformace je zadána svou generující funkcí F , viz (C.30). Tato funkce určuje také nový hamiltonián H' výrazem (C.31). Speciální volbou generující funkce je možné obdržet nový hamiltonián, jehož hodnota je identicky rovna nule, tedy

$$H'(Q^j, P_j, t) \equiv 0. \quad (\text{C.39})$$

Tento volbou se stávají nulovými rovněž levé strany pohybových rovnic (C.37) a vektorové pole (C.38) podél vývoje přechází na velmi jednoduchý tvar

$$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{C.40})$$

Řešením takto transformovaných pohybových rovnic jsou konstanty dané počátečními podmínkami

$$Q^j = \alpha^j, \quad P_j = \beta_j. \quad (\text{C.41})$$

Připomeňme, že vývoj systému je geometricky dán integrálními křivkami dynamického vektorového pole \mathbf{X} . V souřadnicích jsou tyto křivky určeny řešením pohybových rovnic v konkrétních souřadnicích, tedy dvojicí funkcí $q^j(\tau)$ a $p_j(\tau)$ resp. $Q^j(\tau)$ a $P_j(\tau)$. V našem případě jsou řešením v nových souřadnicích konstanty. Neznamená to, že by se systém nevyvíjel, ale pouze to, že v každém časovém řezu máme fixovánu **stále stejnou polohu systému vůči vhodným novým aktuálním souřadnicím**. Tyto souřadnice se však dynamicky mění právě s vývojem systému, tedy dle tvaru popisovaných integrálních křivek. Změna je určena časově závislou generující funkcí kanonické transformace.⁵

Ještě si uvědomme, že kanonická transformace je definována jako jistý speciální tok na rozšířeném fázovém prostroru, podél kterého se zachovává 2-forma Ω . V úvodu této kapitoly jsme rovněž ukázali, že fázový tok určený polem \mathbf{X} generuje kanonickou transformaci. Právě této transformaci odpovídá předchozí popis. To znamená, že celá informace o vývoji systému je nyní „uložena“ v generující funkci.

Uvažujme nyní konkrétní typ kanonické transformace, například typ 1, kdy lze vše vyjádřit pomocí souřadnic (q^j, Q^j, t) a generující funkce $F^{(1)}$. Pro nový hamiltonián a zbylé souřadnice dostáváme vztahy (C.33). Pokud v posledním výrazu uplatníme podmítku nulovosti nového hamiltoniánu, dostáváme požadovanou rovnici pro generující funkci

$$H + \frac{\partial F^{(1)}(q^j, Q^j, t)}{\partial t} = 0. \quad (\text{C.42})$$

Nyní již stačí označit $F^{(1)}$ jako S a dosadit za p_j do $H(q^j, p_j, t)$ výraz $p_j = \frac{\partial S}{\partial q^j}$. Tím dostáváme parciální diferenciální rovnici prvního řádu pro speciální generující funkci S zajišťující nulovost nového hamiltoniánu H' ,

$$H\left(q^j, \frac{\partial S}{\partial q^j}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (\text{C.43})$$

což je **Hamiltonova–Jacobiho rovnice**.

⁵Opět předpokládáme stejné plynutí obou časů, tedy souřadnice rozšířeného fázového prostoru t a parametru τ integrální křivky, neboli volbu $t = \tau$.

Kapitola 1

Newtonovská mechanika

Klasická newtonovská mechanika popisuje pohyb těles, která navzájem interagují skrze síly. Je velmi efektivním fyzikálním konceptem v situacích, kdy lze zanedbat relativistické a kvantové jevy (když mají studované objekty běžné rozměry, hmotnosti, teploty, malé rychlosti a podobně).

V takovém případě lze 3-dimenzionační *prostor* chápout jako spojitý s *euklidovskou geometrií* a 1-dimenzionační *čas* jako *absolutní*, tedy synchronizovaný a rovnoměrně plynoucí. V tomto pevně daném prostoru čase newtonovské fyziky jsou *objekty* approximovány jako soustava *rozlišitelných hmotných bodů*, jejichž *stav* je plně určen *polohou a hybností*.

Časový *vývoj* hmotného bodu je popsán *trajektorií*, tedy křivkou $\mathbf{x}(t)$ vyjadřující *polohu* \mathbf{x} v závislosti na čase t . Derivace této funkce podle času určuje v daném místě tečný vektor *rychlosti* \mathbf{v} a další derivace pak vektor *zrychlení* \mathbf{a} . Časovou derivaci pro zkrácení zápisu označujeme tečkou, tedy symbolicky

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}}. \quad (1.1)$$

Klíčovou veličinou je pak *hybnost* \mathbf{p} tělesa definovaná vztahem

$$\boxed{\mathbf{p} = m \mathbf{v}}, \quad (1.2)$$

kde m je *hmotnost*, kladný parametr určující *setrvačné vlastnosti* daného objektu. Hmotnost určuje míru odporu tělesa vůči snaze urychlit ho působením konkrétní fyzikální *síly* \mathbf{F} . Tak zní *Newtonův pohybový zákon*, který zformuloval roku 1687 v obecně platném vektorovém tvaru,

$$\boxed{\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}}. \quad (1.3)$$

V této podobě platí i pro tělesa s proměnnou hmotností, kdy m není konstanta (například během startu rakety). Pro *jeden hmotný bod* (a také těleso s neměnnou hmotností) je m konstatní, takže $\dot{\mathbf{p}} = m \dot{\mathbf{v}} = m \ddot{\mathbf{x}}$ a Newtonův pohybový zákon má tvar

$$\boxed{m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}}. \quad (1.4)$$

V kartézských souřadnicích a bázích *inerciálního vztažného systému* tedy platí

$$m \ddot{x}_i = F_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.5)$$

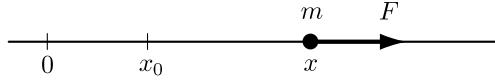
pro jednorozměrné úlohy pak

$$\boxed{m \ddot{x} = F}. \quad (1.6)$$

Konkrétní tvar *působících sil* \mathbf{F} je dán vzorci, které plynou z různých oborů fyziky. Hlavní jsou:

Příklad 1-1.

Částice hmotnosti m je odpuzována sílou F , která je nepřímo úměrná třetí mocnině vzdálenosti od počátku prostorové souřadnice x . Vyřešte pohyb částice vypuštěné z klidu z místa $x_0 > 0$.



Řešení: Nejprve zapíšeme zadanou sílu pomocí vzorce, tedy

$$F = \frac{k}{x^3}, \quad (1.7)$$

kde k je kladná konstanta. **Newtonův pohybový zákon** proto má tvar

$$\boxed{m \ddot{x} = \frac{k}{x^3}}. \quad (1.8)$$

To je nelineární diferenciální rovnice 2. řádu pro hledanou funkci $x(t) \geq x_0 > 0$. Vyřešíme ji následujícím **trikem**: obě strany **vynásobíme rychlosťí** \dot{x} , tedy

$$m \dot{x} \ddot{x} = k \frac{\dot{x}}{x^3}.$$

Tuto rovnici lze ekvivalentně přepsat do podoby

$$m \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right)^{\bullet} = k \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right)^{\bullet},$$

kde (záměrně zvětšené) tečky za závorkami značí časovou derivaci výrazů uvnitř závorek. Integraci nyní provedeme snadno „pouhým smazáním teček“ (protože výrazy v závorkách jsou příslušné primitivní funkce) a přidáním (společné) integrační konstanty E . Tím najdeme **první integrál pohybové rovnice** ve tvaru

$$\boxed{\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = -\frac{k}{2} \frac{1}{x^2} + E}. \quad (1.9)$$

Vlastně jsme v tomto konkrétním případě odvodili **zákon zachování mechanické energie** $T + V = E$, neboť výraz na levé straně je **kinetická energie** T , zatímco první člen na pravé straně je $-V$, tedy záporně vzatá **potenciální energie** $V \equiv - \int F(x) dx$ příslušející konzervativní síle (1.8).

Zbývá najít obecné řešení diferenciální rovnice (1.9), která je 1. řádu. To provedeme standardní metodou **separace proměnných** x a t ,

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = \sqrt{-\frac{k}{m} \frac{1}{x^2} + \frac{2E}{m}} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2E}{m} x^2 - \frac{k}{m}},$$

kde v souladu se zadáním úlohu uvažujeme jen $\dot{x} \geq 0$, což vede na

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} x^2 - \frac{k}{m}}} = \int dt = t - t_0.$$

Substitucí $y \equiv \frac{2E}{m} x^2 - \frac{k}{m}$ přivedeme integrál na

$$\frac{m}{4E} \int \frac{dy}{\sqrt{y}},$$

- $E > 0$ přísluší **nadúnikové rychlosti**, kdy se projektil vymání z gravitačního pole Země a ani v nekonečnu jeho kinetická energie nevymizí ($T_\infty = E > 0$). V tomto případě k řešení integrálu (1.15) použijeme substituci

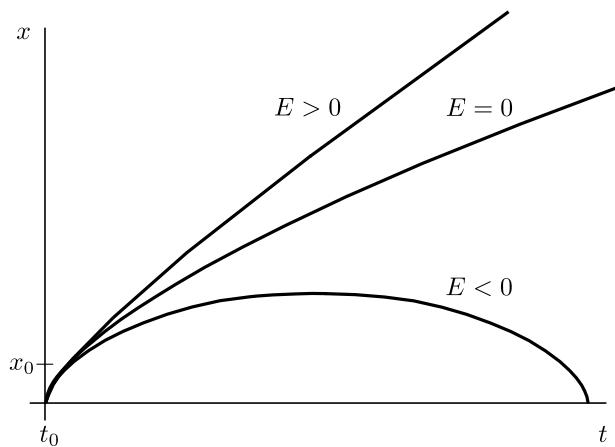
$$x \equiv \frac{GmM}{E} \sinh^2 y = \frac{GmM}{2E} (\cosh 2y - 1).$$

Místo goniometrických tedy aplikujeme hyperbolické funkce, jinak je postup stejný a dává

$$\begin{aligned} x &= \frac{GmM}{2E} (\cosh \tau - 1), \\ t - t_0 &= \frac{GmM}{2E} \sqrt{\frac{m}{2E}} (\sinh \tau - \tau). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Na počátku pro $\tau = 0$ je $t = t_0$ a $x = 0$. Čas t monotónně roste a vzdálenost projektilu x nad Zemí také. Pro velké hodnoty parametru τ se funkce \cosh i \sinh chovají jako exponenciálně a rostou stejným tempem do nekonečna. Pro $t \rightarrow \infty$ je proto $x \sim t$. To souhlasí ze zákonem zachování energie (1.14), podle kterého se pro $x \rightarrow \infty$ blíží rychlosť pohybu \dot{x} konstantě $\dot{x}^2 = 2E/m$.

Graf všech tří typů řešení pro $E > 0$, $E = 0$ a $E < 0$ je na následujícím obrázku:



Taylorovým rozvojem funkcí (1.17) i (1.18) snadno zjistíme, že **pro malé hodnoty** parametru τ je $x \sim \tau^2$ a $t \sim \tau^3$, tedy $x \sim t^{2/3}$, což odpovídá (1.16) pro $x_0 = 0$. Na počátku děje tedy není v charakteru funkcí patrný rozdíl. Podstatné odchylky podle tří možných scénářů nastávají později ve větších časech a vzdálenostech od Země.

Poznámka: Je pozoruhodné, že zcela stejné funkce popisují také **tři možné scénáře rozpínání vesmíru** ve standadních kosmologických modelech v kontextu obecné teorie relativity. Jedná se o takzvané **FLRW modely** homogenního a izotropního vesmíru vyplňeného navzájem **neinteragující hmotou** („galaktickým prachem“) **za předpokladu nulové kosmologické konstanty** (temné energie). Počátek v $t = t_0$ odpovídá okamžiku **velkého třesku**. Mezní případ tvoří takzvaný **Einsteinův-de Sitterův vesmír** s plohou prostorovou geometrií, který se rozpíná podle funkce $x \sim t^{2/3}$. Nadkritický a podkritický případ tvoří dva **Friedmannovy modely**: vesmír s malou hustotou hmoty (má zápornou prostorovou křivost) se od velkého třesku rozpíná navždy podle funkce (1.18), zatímco model s velkou hustotou hmoty (a kladnou křivostí) se řídí funkcií (1.17) tedy cykloidou: po dosažení maximálního rozměru přejde rozpínání vesmíru v kontrakci, která skončí **velkým krachem**.

☒

Pohyb kyvadla závisí skrze parametr k na maximální výchylce φ_0 . Pro větší výchylky se perioda T kmitů prodlužuje. Můžeme ji přímo spočítat: Pohyb z nulové do maximální výchylky se odehrává v intervalu $\varphi \in [0, \varphi_0]$ neboli $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Díky substituci (1.33) je $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Integrál (1.34) s hornímezí rovnou $\frac{\pi}{2}$ se nazývá **úplný elliptický integrál prvního druhu**,

$$K(k) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right). \quad (1.35)$$

Doba t pohybu kyvadla z nulové do maximální výchylky je dána vztahem $\omega t = K(k)$, což je čtvrtina celé periody T , a tedy

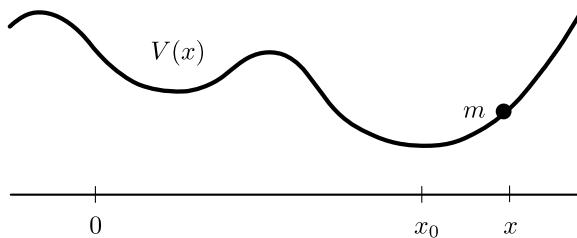
$$T = \frac{4}{\omega} K(k) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right). \quad (1.36)$$

Pro malé výchylky φ_0 dostáváme v souladu s linearizovaným řešením (1.32) vzorec $T = 2\pi \sqrt{l/g}$, pro větší výchylky perioda kmitů matematického kyvadla T roste. Pro $\varphi_0 = \pi$ je $T = \infty$.

◻

Příklad 1-6.

Částice hmotnosti m se pohybuje v silovém poli popsaném analytickým potenciálem $V(x)$. Nalezněte frekvenci **malých kmitů kolem libovolné rovnovážné polohy** a zjistěte, kdy nejsou harmonické.



Řešení: Pro konzervativní silové pole existuje **potenciální energie** (potenciál), tedy funkce $V(x)$ pro kterou platí vztah $\mathbf{F} = -\text{grad } V$. Jednorozměrná pohybová rovnice proto je

$$\boxed{m \ddot{x} = -\frac{dV}{dx}}. \quad (1.37)$$

Analytický potenciál lze rozvinout do Taylorovy řady

$$V(x) = V(x_0) + \frac{dV}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2V}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3V}{dx^3}(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$$

Rovnovážná poloha x_0 je **lokální minimum funkce $V(x)$** , takže musí platit

$$\frac{dV}{dx}(x_0) = 0, \quad \text{a} \quad \frac{d^2V}{dx^2}(x_0) \equiv k > 0.$$

Potenciál v okolí libovolné rovnovážné polohy x_0 proto má tvar

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} l (x - x_0)^3 + \dots,$$

kde jsme zavedli konstantu $l \equiv \frac{d^3V}{dx^3}(x_0)$. Derivací této řady podle x a dosazením do (1.37) získáme pohybovou rovnici

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} (x - x_0) = -\frac{l}{2m} (x - x_0)^2 - \dots. \quad (1.38)$$

Poznámka: *Zákon zachování energie v běžné podobě $T + V = E$ zde tedy již neplatí.*
Lze ho však zobecnit do podoby *energetické bilance*

$$\boxed{W = \Delta T + \mathcal{E}}, \quad \text{kde} \quad \boxed{\mathcal{E} \equiv \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \dot{m}(t) v^2(t) dt}, \quad (1.45)$$

která platí i pro systémy s proměnnou hmotností. Tento vztah odvodíme integrací Newtonova pohybového zákona přes x pro hybnost $p = mv$ a užitím substituce $dx = v dt$,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x F dx &= \int_{x_0}^x \dot{p} dx = \int_{t_0}^t \dot{p} v dt = \int_{t_0}^t (m \dot{v} v + \dot{m} v^2) dt \\ &= \int_{t_0}^t \left(\left(\frac{1}{2} m v^2 \right)^\bullet - \frac{1}{2} \dot{m} v^2 + \dot{m} v^2 \right) dt = \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{t_0}^t + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \dot{m} v^2 dt. \end{aligned}$$

Nalevo je celková práce W vykonaná sílou F , první člen napravo je známý výraz pro změnu ΔT kinetické energie $T \equiv \frac{1}{2} m v^2$ za předpokladu neměnné hmotnosti m , zatímco poslední člen je funkcionál \mathcal{E} definovaný výrazem (1.45). Tento dodatečný člen není stavová veličina, protože **hodnota \mathcal{E} závisí na konkrétním průběhu děje**. Pro obvyklé úlohy s konstantní hmotností, tedy když $\dot{m} = 0$, je $\mathcal{E} = 0$. Pro konzervativní sílu je dále $W = -\Delta V$, takže energetická bilance (1.45) přechází na jednoduchý tvar $\Delta(T + V) = 0$ neboli $T + V = E$.

Pro lepší ilustraci ještě platnost zobecněného zákona zachování energie (1.45) explicitně ověříme na zde řešeném příkladu rozmotávání lanka. Dosazením z (1.43) do (1.44) dostaneme funkci

$$v^2(x) = \frac{F}{\rho} + \left(v_0^2 - \frac{F}{\rho} \right) \frac{x_0^2}{x^2}. \quad (1.46)$$

Protože platí $m(x) = \rho x$, je *okamžitá kinetická energie lanka*

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} F x + \frac{1}{2} (\rho v_0^2 - F) \frac{x_0^2}{x},$$

takže

$$\Delta T \equiv T(x) - T(x_0) = \frac{1}{2} F(x - x_0) + \frac{1}{2} (F - \rho v_0^2)(x - x_0) \frac{x_0}{x}. \quad (1.47)$$

Celková práce W , kterou vykonalá konstantní síla F od počátku děje, je jednoduše

$$W = F(x - x_0), \quad (1.48)$$

takže zákon zachování energie v obvyklém tvaru $W = \Delta T$ evidentně neplatí. Když ale pomocí vztahu $\dot{m}(t) = \rho \dot{x}(t)$ a substitucí upravíme integrál (1.45) do podoby

$$\mathcal{E} = \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^t \dot{x}(t) v^2(t) dt = \frac{\rho}{2} \int_{x_0}^x v^2(x) dx,$$

zachycuje

a pak vyčíslíme jeho hodnotu pro konkrétní funkci (1.46), která *zachycující celý proces* rozvinování lanka (nikoli jen jeho okamžitý stav), dostaneme

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left(F + \left(\rho v_0^2 - F \right) \frac{x_0^2}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[Fx + \left(F - \rho v_0^2 \right) \frac{x_0^2}{x} \right]_{x_0}^x,$$

což je

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} F(x - x_0) - \frac{1}{2} (F - \rho v_0^2)(x - x_0) \frac{x_0}{x}. \quad (1.49)$$

Vidíme, že **součet** (1.47) a (1.49) dává $\Delta T + \mathcal{E} = F(x - x_0)$, což je **přesně celková práce W** (1.48) vykonaná sílou F .

■

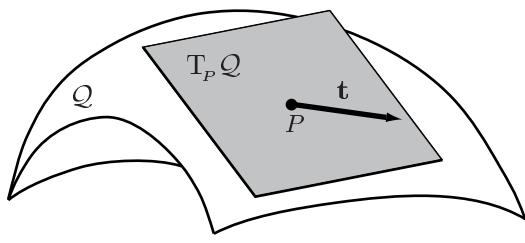
Kapitola 2

Newtonovy rovnice s vazbami

Často musíme řešit Newtonovy rovnice s *dodatečnými vazbami*, jimiž je pohyb objektu určitým způsobem omezen. Například že hmotný bod se smí pohybovat jenom po *zakřivené hladké ploše* \mathcal{Q} , která je v třírozměrném prostoru v každém okamžiku t popsána implicitní rovnicí

$$\mathcal{Q} : \quad \phi(x^j, t) = 0. \quad (2.1)$$

V tomto případě se jedná o vazbu oboustrannou, rheonomní a holonomní, a to podle *klasifikace vazeb dle tří kritérií*:



vazba	$\left\{ \begin{array}{l} \text{oboustranná: } \phi = 0, \\ \text{jednostranná: } \phi \geq 0, \end{array} \right.$
vazba	$\left\{ \begin{array}{l} \text{skleronomní: } \phi(x^j), \\ \text{rheonomní: } \phi(x^j, t), \end{array} \right.$
vazba	$\left\{ \begin{array}{l} \text{holonomní: } \phi(x^j, t), \\ \text{neholonomní: } \phi(x^j, \dot{x}^j, t). \end{array} \right.$

Pozor: ne každá vazba obsahující \dot{x}^j je neholonomní, ale pouze taková, ve které se závislosti na rychlosti nelze zbavit integrací.

Newtonův zákon (1.4) pro hmotný bod (a objekt konstantní hmotnosti m) má nyní tvar

$$m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (2.2)$$

kde \mathbf{F} je působící *vtištěná síla* (gravitační Newtonova, elektromagnetická Lorentzova, síla pružiny a podobně, viz kapitola 1), zatímco \mathbf{R} je *vazbová síla* započítávající interakci s vazbou: má všude *takový směr a velikost, aby se hmotný bod pohyboval v souladu s vazbou* (2.1). V každém okamžiku t a v každém místě P vazby \mathcal{Q} lze sílu \mathbf{R} rozložit na $\mathbf{R} = \mathbf{T} + \mathbf{N}$, kde \mathbf{T} síla *tečná* k ploše vazby $\phi = 0$, zatímco \mathbf{N} je síla k této ploše *kolmá*. Normálovou komponentu \mathbf{N} lze dále vyjádřit jako $\mathbf{N} = \lambda \operatorname{grad} \phi$. Pohybová rovnice tělesa s holonomní oboustrannou vazbou tedy je

$$m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{T} + \lambda \operatorname{grad} \phi, \quad \phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.3)$$

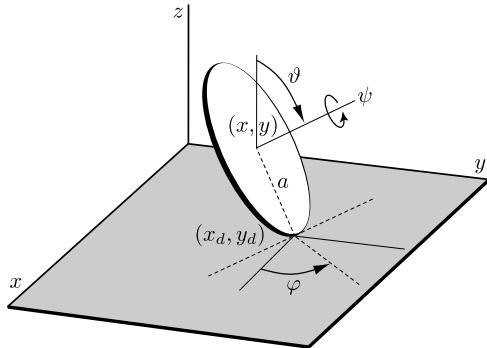
Tato soustava rovnic pro $\mathbf{x}(t)$ a $\lambda(t)$ jsou *Lagrangeovy rovnice I. druhu* (1775).

Lagrangeův koeficient λ určuje *velikost normálové složky vazbové síly*, $N \equiv |\mathbf{N}| = |\lambda| |\operatorname{grad} \phi|$. *Tečná složka vazbové síly* \mathbf{T} reprezentuje *třetí sílu* mezi tělesem a povrchem. Nejjednodušší je model ~~je~~ izotropního vlečného tření $\mathbf{T} = -k N \dot{\mathbf{x}} / |\dot{\mathbf{x}}|$. Je-li povrch dokonale hladký, klademe $\mathbf{T} = \mathbf{0}$. Lagrangeovy rovnice pak mají ve složkách v kartézských souřadnicích tvar

$$m \ddot{x}_i = F_i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad \phi(x^j, t) = 0. \quad (2.4)$$

Příklad 2-7.

Uvažujte pohyb tenké homogenní mince poloměru a , která se kutálí po vodorovné podložce. Za souřadnice zvolte kartézskou polohu středu mince x, y a úhly ϑ, φ, ψ , které udávají sklon a natočení mince. Pomocí nich vyjádřete dvě podmínky na **neprokruzování** a ukažte, že jsou to neholonomní vazby.



Řešení: Úloha má 5 stupňů volnosti, které jsou přirozeně parametrizovány zvolenými souřadnicemi. Z obrázku vidíme, že ϑ a φ jsou sférické úhly určující okamžitý směr osy mince (její odklon od svíslého směru a průměr do podložky) a ψ je celkový úhel otocení mince kolem její osy. **Odvodová rychlosť** otáčení mince v bodě dotyku je tedy $v = a\dot{\psi}$. Má-li se mince valit bez prokluzování, musí být tato rychlosť **rovna rychlosti bodu dotyku** po podložce a mít ve směru čárkované čáry kolmé na radiálu a vyznačené na obrázku, a to směrem „k nám“.

Průměr této rychlosti v do kartézských souřadnicových os podložky je

$$v_x = \dot{x}_d = a\dot{\psi} \sin \varphi, \quad (2.45)$$

$$v_y = \dot{y}_d = -a\dot{\psi} \cos \varphi. \quad (2.46)$$

kde (x_d, y_d) je aktuální poloha dotykového bodu mince s podložkou. Tu lze vyjádřit pomocí polohy středu mince (x, y) a vodorovných průměrů radiály a ,

$$x_d = x + a \cos \vartheta \cos \varphi,$$

$$y_d = y + a \cos \vartheta \sin \varphi.$$

Jejich časová derivace s použitím vztahů (2.45), (2.46) dává

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a \cos \varphi \sin \vartheta \dot{\vartheta} + a \sin \varphi (\cos \vartheta \dot{\varphi} + \dot{\psi}), \\ \dot{y} &= a \sin \varphi \sin \vartheta \dot{\vartheta} - a \cos \varphi (\cos \vartheta \dot{\varphi} + \dot{\psi}). \end{aligned}$$

Nyní stačí první rovnici vynásobit $\cos \varphi$ a sečist ji s druhou rovnicí vynásobenou $\sin \varphi$; potom naopak první rovnici vynásobíme $\sin \varphi$ a sečteme ji s druhou rovnicí vynásobenou $-\cos \varphi$. Tím dostaneme hledané **dvě rovnice neholonomních vazeb**

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \varphi \dot{x} + \sin \varphi \dot{y} - a \sin \vartheta \dot{\vartheta} &= 0, \\ \sin \varphi \dot{x} - \cos \varphi \dot{y} - a \cos \vartheta \dot{\varphi} - a \dot{\psi} &= 0. \end{aligned}} \quad (2.47)$$

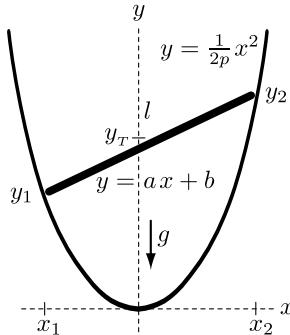
Vazby jsou *lineární v rychlostech* pohybu $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$, ale nelze se jich zbavit časovou integrací. Jinými slovy: neexistují jejich ekvivalentní vyjádření ve tvaru holonomních vazeb tvaru $\phi(x, y, \vartheta, \varphi, \psi) = 0$. Důkaz provedeme sporem užitím fyzikální úvahy. Evidentně je možné dostat se z počátečního stavu $x_0, y_0, \vartheta_0, \varphi_0, \psi_0$ valením bez prokluzování do libovolného místa, s předepsaným úhlem odvalení ψ a s libovolným úhlem natočení mince φ a sklonem ϑ . Stačí zvolit vhodnou trajektorii takovou, že střed mince skončí v bodě (x, y) , mince bude mít sklon ϑ , dráha bodu dotyku bude mít délku $s = a\psi$ a tečna k ní v koncovém bodě směr φ . Všech pět parametrů úlohy je tedy na sobě *nezávislých*, takže pro ně nemůže existovat vazba tvaru $\phi(x, y, \vartheta, \varphi, \psi) = 0$.

☒

jiná
čísla

Příklad 2-10.

V hladkém **korýtku parabolického profilu** $y = \frac{1}{2p}x^2$ klouže v gravitačním poli g homogenní **tyč délky l** . Nalezněte a diskutujte všechny její **rovnovážné polohy**.



Řešení: Jediná působící vtištěná síla je gravitační tíha mg tyče, která míří ve směru $-y$ a je soustředěna v jejím těžišti y_T . Princip virtuální práce (2.9) dává podmínku rovnováhy $-mg\delta y_T = 0$ neboli

$$\delta y_T = 0. \quad (2.53)$$

Výška těžiště je uprostřed tyče, tedy

$$y_T = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{1}{4p}(x_1^2 + x_2^2).$$

Užitím triviální identity $2(x_1^2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$ lze tento **výraz pro výšku těžiště** tyče přepsat do tvaru

$$y_T = \frac{1}{8p} \left[(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \right]. \quad (2.54)$$

Aktuální **polohu tyčky popíšeme úsečkou** $y = ax + b$, tedy parametry a a b určujícími směrnici a absolutní člen. Platí geometrické vztahy

$$x_1 + x_2 = 2pa, \quad (2.55)$$

$$x_1 x_2 = -2pb, \quad (2.56)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{l}{\sqrt{1+a^2}}. \quad (2.57)$$

Ty plynou ihned z rovnice obou **přísečíků** tyče popsané $y = ax + b$ s parabolou $y = \frac{1}{2p}x^2$, neboť $x^2 - 2pa x - 2pb = 0$, která musí mít kořenový rozklad tvaru $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, což je $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$. Porovnáním lineárního a absolutního člena získáme (2.55) a (2.56). Třetí vztah (2.57) je vzorec pro délku přilehlé přepony $x_2 - x_1 = l \cos \alpha$ v pravoúhlém trojúhelníku užitím vzorce pro směrnici tyče $a = \tan \alpha$, přičemž $\cos^2 \alpha = 1/(1 + \tan^2 \alpha) = 1/(1 + a^2)$.

Dosazením (2.55) a (2.57) do (2.54) vyjádříme **výšku těžiště tyče pomocí její směrnice a** ,

$$y_T(a) = \frac{1}{8p} \left[4p^2 a^2 + \frac{l^2}{1+a^2} \right]. \quad (2.58)$$

Princip virtuální práce (2.53) je podmínka $0 = \delta y_T = \frac{dy_T}{da} \delta a$ pro každou virtuální změnu směrnice δa , tedy $\frac{dy_T}{da} = 0$, což dává

$$a \left[4p^2 - \frac{l^2}{(1+a^2)^2} \right] = 0. \quad (2.59)$$

Právě **jen pro tyto hodnoty směrnice je tyč v rovnováze**. Dostali jsme tedy následující geometricky privilegovaná řešení:

e

Kapitola 3

Lagrangeův formalismus

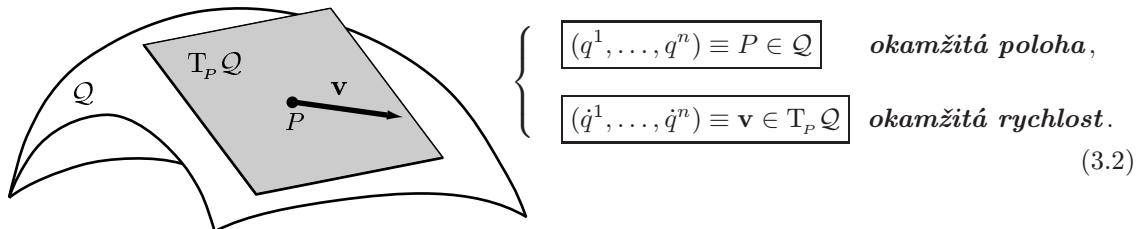
Podstatou Lagrangeova formalismu je zavedení vhodného popisu fyzikálního stavu systému pomocí zobecněných souřadnic q^j a příslušných zobecněných rychlostí \dot{q}^j , které jsou nezávislými parametry Lagrangeovy funkce L . Z této jediné skalární funkce lze pak pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu snadno sestavit pohybové rovnice časového vývoje systému, řešitelné pomocí integrálů pohybu.

Mějme soustavu N **hmotných bodů** podrobených v **holonomním oboustranném vazbám** (mohou být rheonomní), tedy pro všechny hmotné body musí stále platit omezení (2.6). Počet **stupňů volnosti** soustavy ve třírozměrném prostoru je tedy $n \equiv 3N - v$. Právě takový je **počet nezávislých zobecněných souřadnic** q^j . Volíme je libovolně ale výhodně tak, aby jejich každá hodnota (z příslušného definičního oboru) v každém čase t identicky splňovala všechny vazby, tedy

$$\boxed{\mathcal{Q}: \quad \phi_\nu(q^j, t) \equiv 0}, \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \forall t, \quad \forall \nu = 1, \dots, v. \quad (3.1)$$

Prostor \mathcal{Q} lze chápat jako geometrický průsečík všech uvažovaných vazeb, což je *spojitá množina všech přípustných poloh* hmotných bodů. Klasicky se nazývá *konfigurační prostor*, ale z moderního pohledu diferenciální geometrie je to **konfigurační varieta** \mathcal{Q} daného systému, přičemž zobecněné souřadnice q^j jsou *lokální souřadnice* příslušné mapy vhodného atlasu této variety.

Konfigurační varieta \mathcal{Q} ale *není prostorem fyzikální stavů* daného systému, protože reprezentuje pouze **polohy** těles $P \in \mathcal{Q}$, nikoli jejich **okamžitou rychlosť** \mathbf{v} . Protože přípustné rychlosti \mathbf{v} jsou v každém místě P **tečné vektorové** k varietě \mathcal{Q} , leží v lineárním vektorovém **tečném prostoru** $T_P \mathcal{Q}$ (nikoli na konfigurační varietě poloh \mathcal{Q}). Vektor rychlosti $\mathbf{v} \in T_P \mathcal{Q}$ je \mathbf{v} **bází** zvolených zobecněných souřadnic určen *složkami* \dot{q}^j , jimž říkáme **zobecněné rychlosti**. Je tedy:



Až spojením obou těchto druhů informací o všech polohách i rychlostech vzniká prostor fyzikálních stavů zadaného systému, tzv. **tečný bandl** $T\mathcal{Q} \equiv \bigcup_{P \in \mathcal{Q}} T_P \mathcal{Q}$ neboli **rychlostní fázový prostor**. Je to varieta parametrizovaná (navzájem nezávislými) souřadnicemi $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ a má tedy dimenzi $2n$.

Pro *kvalitativní* analýzu možných pohybů v obecném centrálním poli s potenciálem $V(r)$ se používá **metoda efektivního potenciálu**. Definujeme-li tuto veličinu vztahem

$$\boxed{V_{\text{ef}}(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}}, \quad (3.19)$$

lze rovnici (3.14) po vyloučení $\dot{\varphi}$ přepsat do tvaru $\dot{r}^2 = \frac{2}{m}[E - V_{\text{ef}}(r)]$. Odtud ihned vidíme, že

pohyb je možný jen pro takové radiální vzdálenosti r od centra, kde $V_{\text{ef}}(r) \leq E$.

Jestliže vykreslíme funkci $V_{\text{ef}}(r)$, leží pod jejím grafem *zakázaná oblast*, kam se těleso nikdy nemůže dostat, protože by byla porušena uvedená podmínka. Pro danou (konstatní) hodnotu energie E existují **body obratu** (buď pericentrum nebo apocentrum) určené průsečíkem vodorovné přímky $E = \text{konst.}$ s grafem efektivního potenciálu, kde $\dot{r} = 0$ protože $E = V_{\text{ef}}(r)$. Počet bodů obratu a tím i kvalitativní charakter pohybu pochopitelně závisí na hodnotě E . V extrémech funkce $V_{\text{ef}}(r)$ leží **kruhové orbita** (v minimu jsou stabilní, zatímco v maximu labilní).

Zobecněním Keplerovy úlohy pohybu planet kolem *pevného* Slunce je **problém dvou těles**, kdy spolu interagující dva volné objekty (např. dvojhvězdný systém) o hmotnostech m_1 a m_2 . Úloha má 6 stupňů volnosti, ale lze ji rozdělit na *setrvačný pohyb těžiště soustavy \mathbf{R}* a formální úlohu *relativní polohy \mathbf{r}* v centrálním poli. Místo polohových vektorů \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 obou objektů zavedeme

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (3.20)$$

v nichž Lagrangeova funkce bude mít tvar

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|}, \quad (3.21)$$

kde veličina

$$\boxed{\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}} \quad (3.22)$$

*Je to schválene
čučiny?*

se nazývá **redukovaná hmotnost**. Tři souřadnice \mathbf{R} jsou cyklické, takže $(m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}} = \text{konst.}$ Pohyb těžiště je rovnoměrný a bez újmy na obecnosti lze přejít do *těžišťového systému*, kde $\mathbf{R} = 0$, neboli platí $\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} \mathbf{r}$ a $\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2} \mathbf{r}$. V této těžišťové soustavě pak má Lagrangeova funkce (3.21) tvar zcela shodný jako (3.13), pouze m je nahrazeno redukovanou hmotností μ . Pohyb dvojhvězd kolem sebe je tedy nutně rovinný a lze zavést polární souřadnice, ve kterých

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r}}. \quad (3.23)$$

Platí i všechny tři Keplerovy zákony, pouze provedeme formální substituci $M \rightarrow (m_1 + m_2)$ a $m \rightarrow \mu$. Například 3. Keplerův zákon (3.18) má nyní obecnější tvar

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \quad (3.24)$$

Tento výraz se v astronomii používá k určování celkové hmotnosti dvojhvězdných systémů.

Dosazením do rovnic (3.40) dostaneme

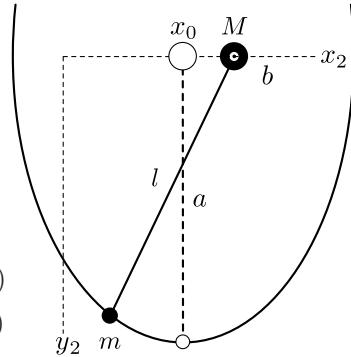
$$x_2 - x_0 = -\frac{M}{M+m} l \sin \varphi, \quad y_2 = l \cos \varphi,$$

což po přímočaré úpravě dává vztah

$$\left(\frac{x_2 - x_0}{\frac{M}{M+m} l} \right)^2 + \left(\frac{y_2}{l} \right)^2 = 1. \quad (3.46)$$

To je evidentně **rovnice elipsy**, přičemž

- **hlavní poloosa** je svislá a má velikost $a = l$
- **vedlejší poloha** je vodorovná a má velikost $b = \frac{M}{M+m} l$
- **střed elipsy** je v místě $x_0 = \frac{Ct + D}{M+m}$,
tedy pohybuje se rovnoměrně přímočaře podél osy x ($y = 0$)
(speciálně lze zvolit počáteční podmínky tak, že $C = 0 = D$)



Zbývá vyřešit ještě druhou pohybovou rovnici (3.43). Z integrálu pohybu (3.44) derivací spočítáme $\ddot{x} = \frac{m}{M+m} l (\cos \varphi \dot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2)$. Dosadíme do (3.43) a po úpravě dostaneme

$$\left[1 - \frac{m}{M+m} \cos^2 \varphi \right] \ddot{\varphi} + \frac{m}{M+m} \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

To je nelinární diferenciální rovnice 2. řádu pro $\varphi(t)$. Pro malé výklyky φ a také malé rychlosti $\dot{\varphi}$ lze provést **lineariaci**, při které $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$ a druhý člen $\sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2$ lze zanedbat. Tím dostaneme přibližnou rovnici

$$\ddot{\varphi} + \frac{M+m}{M} \frac{g}{l} \varphi = 0, \quad (3.47)$$

což je evidentně **rovnice harmonického oscilátoru** tvaru (3.29) s obecným řešením

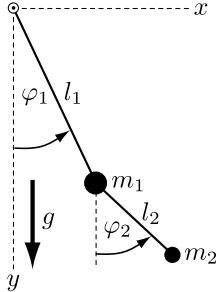
$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \delta), \quad \text{kde} \quad \omega = \sqrt{\frac{M+m}{M} \frac{g}{l}}. \quad (3.48)$$

Pro **velmi hmotné horní těleso** $M \gg m$ bude mít úhlová frekvence malých kmitů v limitě hodnotu $\omega = \sqrt{g/l}$, hlavní i vedlejší poloosa budou shodné $a = l = b$ a systém eliptického kyvadla **přechází na prosté matematické kyvadlo**, viz Příklad 1-5. To je fyzikálně pochopitelné: těžké horní těleso se téměř nehýbe a efektivně tedy funguje jako pevný otočný bod závěsu délky l .

■

Příklad 3-5.

Vyšetřete pohyb **dvojkypadla**. To je tvořeno závěsem délky l_1 , na jehož konci je čep hmotnosti m_1 , ke kterému je druhým závěsem délky l_2 připojeno těleso hmotnosti m_2 (oba závěsy jsou nehmotné). Pohyb se odehrává bez tření jen ve svislé rovině v homogenním gravitačním poli g . Za zobecněné souřadnice zvolte výchylky z rovnovážných poloh φ_1 resp. φ_2 .



Řešení: Úloha má dva stupně volnosti a zvolíme zobecněné souřadnice $q^1 = \varphi_1$, $q^2 = \varphi_2$. Aktuální kartézské souřadnice obou těles jsou

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1, & y_1 &= l_1 \cos \varphi_1, \\ x_2 &= x_1 + l_2 \sin \varphi_2, & y_2 &= y_1 + l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Celková kinetická energie je $T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$ a potenciální energie je $V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2$. Dosazením relací (3.49) a jejich časových derivací dostaneme po úpravě Lagrangeovu funkci

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ &\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Příslušné Lagrangeovy rovnice II. druhu dávají soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{l_2}{l_1} [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_2 - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_2^2] + \frac{g}{l_1} \sin \varphi_1 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{l_1}{l_2} [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \dot{\varphi}_1^2] + \frac{g}{l_2} \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Tato soustava diferenciálních rovnic je *obecně analyticky neřešitelná*, protože **má pouze jeden integrál pohybu**, konkrétně (zobecněnou) energii $h = T + V \equiv E$.

Lze ale provést **linearizaci pro malé výchylky**: funkce sinus approximujeme jejich argumenty, zatímco funkce kosinus approximujeme jedničkou. Členy kvadratické v rychlostech úměrné $\dot{\varphi}_1^2$ a $\dot{\varphi}_2^2$ zcela zanedbáme pro jejich malost za běžných okolností. Tím dostaneme

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{l_2}{l_1} \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l_1} \varphi_1 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{l_1}{l_2} \ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l_2} \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Tato soustava diferenciálních rovnic již je **kompletně řešitelná**. Můžeme postupovat následujícím elegantním postupem. Předpokládejme řešení tvaru

$$\varphi_i(t) = \phi_i \cos(\omega t + \delta), \quad i = 1, 2, \quad (3.53)$$

kde ω , δ , ϕ_1 , ϕ_2 jsou konstanty. Horní i dolní kyvadlo tedy v tomto speciálním případě kmitají **se stejnou frekvencí ω a stejnou fází δ** . Dosazením do (3.52) a vykrácením společného faktoru časové závislosti $\cos(\omega t + \delta)$ získáme *algebraickou* soustavu pro hledané amplitudy ϕ_1 a ϕ_2 ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{g}{l_1} - \omega^2 \right) \phi_1 - \omega^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{l_2}{l_1} \phi_2 &= 0, \\ -\omega^2 \frac{l_1}{l_2} \phi_1 + \left(\frac{g}{l_2} - \omega^2 \right) \phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Tato soustava rovnic má netriviální řešení ***jen pokud je determinant soustavy roven nule*** (jinak bychom dostali jen řešení $\phi_1 \equiv 0 \equiv \phi_2$). To dává explicitní podmítku

$$\boxed{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \omega^4 - \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2} g \omega^2 + \frac{g^2}{l_1 l_2} = 0}. \quad (3.55)$$

Pouze pro takovéto frekvence ω připouští systém dvojkyyadla řešení tvaru (3.53). Tuto kvadratickou rovnici pro ω^2 snadno vyřešíme

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} \frac{g}{l_1 l_2} \left((l_1 + l_2) \pm \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}} \right). \quad (3.56)$$

Vyjma degenerovaného případu $m_2 = 0, l_1 = l_2$ je výraz pod odmocninou kladný, takže existují ***právě dvě kladná řešení*** ω_1 a ω_2 , která se nazývají ***charakteristické (vlastní) frekvence*** malých kmitů systému dvojkyyadla.

Nalezená dvě řešení tvaru (3.53) jsou sice velmi speciální, ale ***díky linearitě*** diferenciálních rovnic (3.52) lze jejich ***superpozicí získat obecné řešení***, které lze psát ve tvaru

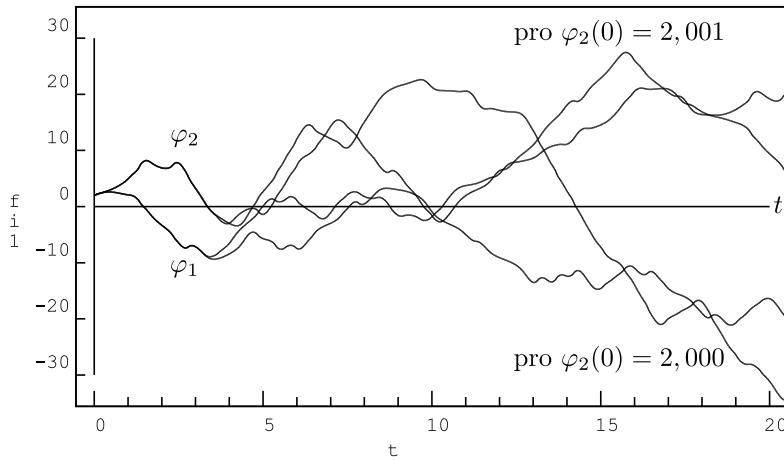
$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \phi_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \phi_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \delta_2), \\ \varphi_2(t) &= \phi_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \phi_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \delta_2), \end{aligned}} \quad (3.57)$$

přičemž ale čtyři amplitudy $\phi_1^{(i)}$ a $\phi_2^{(i)}$ pro obě vlastní frekvence ω_i určené (3.56) nejsou na sobě nezávislé. Příslušný vztah mezi nimi získáme z druhé rovnice (3.54) [která je ekvivalentní první rovnici, protože soustava má nulový determinant], tedy

$$\phi_1^{(i)} = \left(\frac{1}{\omega_i^2} \frac{g}{l_1} - \frac{l_2}{l_1} \right) \phi_2^{(i)}.$$

Obecné řešení (3.57) kmitů linearizovaného dvojkyyadla tak obsahuje ***čtyři nezávislé integrační konstanty*** $\phi_2^{(1)}, \phi_2^{(2)}, \delta_1$ a δ_2 .

Dvě ***nelinearizované*** pohybové rovnice (3.51) pro velké kmity dvojkyyadla jsou na analytické řešení složité, ale lze je integrovat numericky pomocí počítače. Ukazuje se zejména, že takové řešení je ***extrémně citlivé na volbu počátečních podmínek***. Jedná se tak o učebnicový příklad dynamického systému vykazujícího tzv. ***deterministický chaos***.



Chaotické chování nelinearizovaného dvojkyyadla ilustruje tento obrázek, kde jsou vykresleny funkce $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ pro konkrétní volbu parametrů a počátečních dat, konkrétně pro $\varphi_2(0) = 2,000$ a pro $\varphi_2(0) = 2,001$. I když je rozdíl počátečních hodnot $\Delta\varphi_2(0) = 0,001$ malý, po jistém čase se řešení velmi liší. Například $\Delta\varphi_2(16) \approx 40$ radiánů, což je více než 6 plných otáček dolního závěsu!

☒

Příklad 3-11.

Ukažte, že **stáčení perihelia dráhy planety ve sférickém potenciálu** $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta V(r)$, kde $\alpha = GMm$ určuje Newtonův gravitační potenciál, zatímco $\delta V(r)$ je jeho malá porucha, lze spočítat obecným vzorcem $\delta\varphi = 2m \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{1}{l} \int_0^\pi r^2 \delta V(r) d\varphi \right]$. Pak ho aplikujte na dipólovou poruchu $\delta V(r) = \frac{a}{r^2}$ a kvadrupólovou poruchu $\delta V(r) = \frac{b}{r^3}$ z předchozích dvou příkladů.

Řešení: Použijeme obecné vzorce (3.14) pro zachování momentu hybnosti a energie při pohybu v centrálním silovém poli, z nichž lze přímočaře odvodit vztahy

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \quad \text{a} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(r)] - \frac{l^2}{m^2 r^2}} \geq 0. \quad (3.82)$$

Protože pro dráhu planety vyjádřenou v polárních souřadnicích je $r(t(\varphi))$, lze spočítat derivaci $\frac{dr}{d\varphi} = \dot{r}/\dot{\varphi}$. Po dosazení z (3.82) a separaci proměnných lze tuto diferenciální rovnici vyintegrovat,

$$\Delta\varphi = \int_{r_p}^{r_a} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m[E - V(r)] - l^2 r^{-2}}}, \quad (3.83)$$

číarka ?

kde r_p je vzdálenost perihelia, r_a afelia. Úhlový rozdíl $\Delta\varphi_{oběh}$ mezi dvěma po sobě následujícími průchody perihelii je *dvojnásobkem* $\Delta\varphi$. Je zajímavé, že integrál lze s výhodou vyjádřit v jednodušší podobě pomocí *derivace podle parametru l* tak, že

$$\Delta\varphi_{oběh} = -2 \frac{\partial}{\partial l} \left[\int_{r_p}^{r_a} \sqrt{2m[E - V(r)] - l^2 r^{-2}} dr \right]. \quad (3.84)$$

Pro **Newtonův** gravitační potenciál $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ jsou řešením vázaných orbit *elipsy*, viz (3.16),

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \text{kde} \quad p = \frac{l^2}{\alpha m}, \quad \varepsilon^2 - 1 = \frac{2l^2 E}{G^2 M^2 m^3}, \quad (3.85)$$

což jsou uzavřené 2π -periodické dráhy, takže $\Delta\varphi_{oběh} = 2\pi$.

V **perturbovaném případě** $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta V(r)$ provedeme **Taylorův rozvoj** integrantu

$$\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{l^2}{r^2}} = \sqrt{2m[E + \frac{\alpha}{r}] - \frac{l^2}{r^2}} - \frac{m \delta V(r)}{\sqrt{2m[E + \frac{\alpha}{r}] - \frac{l^2}{r^2}}},$$

jehož dosazením do (3.84) dostaneme

$$\Delta\varphi_{oběh} = 2\pi + 2m \frac{\partial}{\partial l} \left[\int_{r_p}^{r_a} \frac{\delta V(r) dr}{\sqrt{2m[E + \frac{\alpha}{r}] - \frac{l^2}{r^2}}} \right].$$

Na zavěr provedeme substituci v integrálu od proměnné r k úhlové proměnné φ pomocí diferenciálu relace (3.83), přičemž rozdíl mezi $V(r)$ a $\frac{\alpha}{r}$ zde můžeme zanedbat, neboť je vyššího rádu. Tím dostaneme hledaný vzorec pro výpočet **stáčení perihelia dráhy planety** $\delta\varphi \equiv \Delta\varphi_{oběh} - 2\pi$

$$\boxed{\delta\varphi = 2m \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{1}{l} \int_0^\pi r^2 \delta V(r) d\varphi \right]}, \quad (3.86)$$

kde vzdálenost planety r od centra je počítána pomocí keplerovské funkce $r(\varphi)$ pro elipsu (3.85).

Protože $V = e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$ je skalární výraz, stačí, když důkaz provedeme v kartézských souřadnících $q^j = x^j \equiv (x, y, z)$, takže $Q_j = F_j$. Počítejme tedy

$$F_x \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \text{kde} \quad V = e(\varphi - \dot{x}A_x - \dot{y}A_y - \dot{z}A_z), \quad (3.98)$$

analogické složky F_y a F_z dostaneme prostou cyklickou záměnou $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$. Připomeňme, že skalární i vektorový potenciál jsou **polní veličiny**, tedy $\varphi(x, y, z, t)$ a $\mathbf{A}(x, y, z, t)$.

Nejprve spočítáme parciální **derivative** V podle x a \dot{x} ,

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = -e A_x, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right).$$

Nyní (v souladu s Lagrangeovými rovnicemi II. druhu) budeme uvažovat **časovou závislost** stejných výrazů vyčíslenou podél trajektorie částice. Úplná časová derivace prvního výrazu pak je

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) = -e \frac{d}{dt} A_x(t) = -e \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \right),$$

takže výraz pro sílu F_x daný (3.98) má podobu

$$F_x = -e \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) - e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right),$$

jehož přeskupením a úpravou dostaneme

$$F_x = e \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) + e \dot{y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - e \dot{z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right).$$

Ve všech třech závorkách nyní rozpoznáváme kartézské složky známých vztahů Maxwellovy elektrodynamiky platných mezi potenciály a elektrickými a magnetickými silovými poli, konkrétně

$$\boxed{\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \quad \text{a} \quad \boxed{\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}}. \quad (3.99)$$

Dokázali jsme

$$\boxed{F_x = e(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y) = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x}, \quad (3.100)$$

tedy že

$$\boxed{V = e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})} \quad (3.101)$$

opravdu **je zobecněný potenciál pro Lorentzovu sílu.**

Díky tomu lze i v případě elektromagnetické interakce místo obecného tvaru Lagrangeových rovnic II. druhu použít jejich mnohem jednodušší vyjádření

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0} \quad (3.102)$$

pomocí skalární **Lagrangeovy funkce** $\boxed{L \equiv T - V}$, kde ovšem místo obvyklého potenciálu V vezmeme právě zobecněný potenciál (3.101).

✉

Příklad 3-14.

Uvažuje nabité částici pohybující se v časově neproměnném elektromagnetickém poli. Nalezněte příslušný integrál pohybu odpovídající zobecněné energii.

Řešení: Lagrangeova funkce $L = T - V$ částice hmotnosti m a náboje e obsahuje zobecněný potenciál (3.101). V kartézských souřadnicích má tvar (3.98), tedy je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e(\varphi - \dot{x}A_x - \dot{y}A_y - \dot{z}A_z). \quad (3.103)$$

Příslušné parciální derivace podle rychlostí jsou

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z. \quad (3.104)$$

Protože L nezávisí na čase t , existuje integrál pohybu $h(q^i, \dot{q}^i)$, což je **zobecněná energie**. Pro studovaný systém (3.103) užitím (3.104) dostaneme

$$\begin{aligned} h &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} - L \\ &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) - L, \end{aligned}$$

tedy

$$h = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi. \quad (3.105)$$

Hodnota tohoto výrazu se podél každé trajektorie nabité částice zachovává.

Vidíme, že **zachovávající se energie** je dána vzorcem

$$h = T + e\varphi, \quad (3.106)$$

což není součet $T + V$. Členy s vektorovým potenciálem \mathbf{A} , jež popisují interakci s magnetickým polem, při odvozování h všechny vypadly (protože jejich příspěvek k zobecněnému potenciálu je lineární v rychlostech).

Tento výsledek je fyzikálně pochopitelný: **Lorentzova magnetická síla** $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ působí vždy kolmo na pohyb, takže nekoná žádnou práci. Proto nemůže nabité částici přidávat ani ubírat energii. Naproti tomu elektrická síla popsaná časově neproměnným skalárním potenciálem φ obecně působí ve směru pohybu, takže práci o velikosti $e\varphi$ koná.

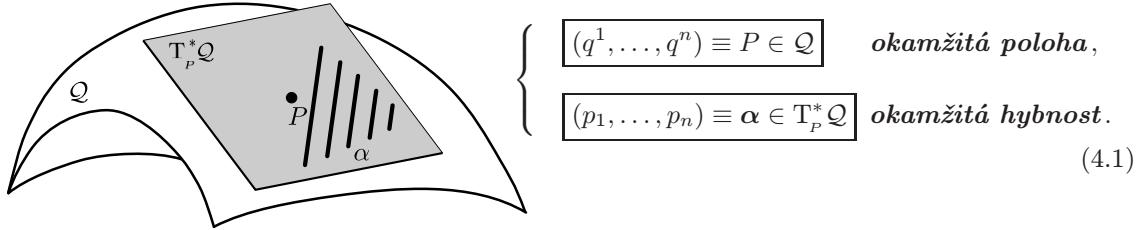
✉

Kapitola 4

Hamiltonův formalismus

V Hamiltonově formalismu nadále používáme k popisu systému *zobecněné souřadnice* q^j , ale místo zobecněných rychlostí \dot{q}^j Lagrangeova formalismu se zavádějí k nim duální *kanonické hybnosti* p_j . Prostor popsaný nezávislými parametry (q^j, p_j) , takzvaný *fázový prostor*, je prostorem fyzikálních stavů. Na něm je definována *Hamiltonova funkce* H . Z této skalární funkce lze pomocí *Hamiltonových kanonických rovnic* sestavit pohybové rovnice pro časový vývoj systému.

Z hlediska diferenciální geometrie je *fázový prostor* varietou dimenze $2n$, která je *kotečným bandlem* $T^*Q \equiv \bigcup_{P \in Q} T_P^*Q$ konfigurační varieta Q . Rozdíl oproti Lagrangeovu formalismu je, že místo složek vektoru rychlosti $\mathbf{v} \equiv (q^1, \dots, \dot{q}^n)$ z $T_P Q$ se ve fázovém prostoru používají *složky 1-formy kanonické hybnosti* $\alpha \equiv (p_1, \dots, p_n)$ z *duálního kotečného prostoru* T_P^*Q v bodě $P \in Q$ (proto také mají dolní indexy, nikoli horní):



Přechod od Lagrangeovy k Hamiltonově formulaci (a naopak) odpovídá *Legendreově duální transformaci* mezi tečným a kotečným bandlem, což je vzájemně jednoznačné zobrazení $TQ \leftrightarrow T^*Q$, které v každém bodě $P \in Q$ identifikuje vektor \mathbf{v} rychlosti (se složkami \dot{q}^j) s příslušnou 1-formou α hybnosti (se složkami p_j). Složky *kanonické hybnosti* p_j jsou definovány předpisem

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Ke každé zobecněné souřadnici q^j je tedy přidružena konkrétní kanonická hybnost p_j . Existuje n párů *kanonicky sdružených proměnných*, a těchto $2n$ veličin tvoří *nezávislé souřadnice* fázového prostoru (varieta T^*Q).

Hamiltonova funkce H neboli *hamiltonián* je skalární funkce na fázovém prostoru. Spočítáme ji z Lagrangeovy funkce L daného systému pomocí vzorce

$$H(q^j, p_j, t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - L \equiv h. \quad (4.3)$$

tedy je to *zobecněná energie* h zavedená v Lagrangeově formalismu vzorcem (3.11). *Ale pozor!*

Hamiltonova funkce (4.29) má v tomto případě tvar

$$H = \frac{1}{2m} \left((p_x + \frac{1}{2}eB y)^2 + (p_y - \frac{1}{2}eB x)^2 + p_z^2 \right) \quad (4.40)$$

a příslušné **Hamiltonovy kanonické rovnice** (4.31), (4.32) jsou

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} (p_x + \frac{1}{2}eB y), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{m} (p_y - \frac{1}{2}eB x), \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{m} p_z, \quad (4.41)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{eB}{2m} (p_y - \frac{1}{2}eB x), \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{eB}{2m} (p_x + \frac{1}{2}eB y), \quad \frac{dp_z}{dt} = 0. \quad (4.42)$$

Řešení pro p_z a odtud pak z je triviální, konkrétně jde o rovnoměrně přímočarý pohyb

$$p_z = p_{z0}, \quad z(t) = \frac{p_{z0}}{m} t + z_0. \quad (4.43)$$

Porovnáním zbylých dvou páru rovnic dostaneme vztahy

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{1}{2}eB \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dp_x}{dt} = \frac{1}{2}eB \frac{dy}{dt},$$

neboli po časové integraci

$$p_y = -\frac{1}{2}eB x + p_{y0}, \quad p_x = \frac{1}{2}eB y + p_{x0}.$$

Dosazením těchto výrazů do (4.41) dostaneme

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eB}{m} y + \frac{p_{x0}}{m}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{eB}{m} x + \frac{p_{y0}}{m}. \quad (4.44)$$

Zderivováním obou rovnic podle času a rekurentním dosazením za vzniklé první derivace dostaneme **rovnice harmonického oscilátoru** s konstatní pravou stranou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 x = \frac{eB}{m^2} p_{y0}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 y = -\frac{eB}{m^2} p_{x0}.$$

Jejich *obecné řešení*, splňující i původní rovnice (4.44), je

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - R \cos(\omega_c t + \delta), \\ y(t) &= y_0 + R \sin(\omega_c t + \delta), \end{aligned} \quad (4.45)$$

kde $x_0 = \frac{p_{y0}}{eB}$, $y_0 = -\frac{p_{x0}}{eB}$ a

$$\omega_c \equiv \frac{eB}{m} \quad (4.46)$$

je **Larmorova (cyklotronní) frekvence**. V průmětu do roviny (x, y) kolmé na homogenní magnetické pole \mathbf{B} nabité částice obíhá po kružnici $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ s Larmorovým poloměrem R , jejíž střed se nachází na pevném místě (x_0, y_0) . Opravdu, pro $x = 0 = y$ dostáváme vztah $R^2 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{p_{x0}^2 + p_{y0}^2}{e^2 B^2} = \frac{m^2 (x_0^2 + y_0^2)}{e^2 B^2}$, tedy $R = \frac{v_0}{\omega_c}$. V kombinaci s rovnoměrně přímočarým pohybem (4.43) ve směru osy z tedy dostáváme pohyb **po šroubovici**.

✉

Příklad 4-6.

Je dána Lagrangeova funkce

$$L = \frac{a}{2} \ln\left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{a}\right) + b(x + y) + \frac{a}{2},$$

kde a, b jsou konstanty. Odvodte příslušnou Hamiltonovu funkci H a sestavte Hamiltonovy kanonické rovnice. Nalezněte jejich řešení pro počáteční podmínky $p_x(t=1) = b = p_y(t=1)$.

Řešení: Nejprve spočítáme dvě kanonické hybnosti (4.2), tedy

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = a \frac{\dot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad p_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = a \frac{\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (4.55)$$

Nyní si všimneme, že platí vztah

$$p_x^2 + p_y^2 = \frac{a^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (4.56)$$

který nám umožní snadno provést inverzi (4.55):

$$\dot{x} = a \frac{p_x}{p_x^2 + p_y^2}, \quad \dot{y} = a \frac{p_y}{p_x^2 + p_y^2}. \quad (4.57)$$

Nyní spočítáme (4.3),

$$h \equiv p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = a \frac{p_x^2}{p_x^2 + p_y^2} + a \frac{p_y^2}{p_x^2 + p_y^2} - L = a - L. \quad (4.58)$$

Nakonec užitím vztahu (4.56) vyjádříme Lagrangeovu funkce L pomocí kanonických hybností, čímž dostaneme **Hamiltonovu funkci** úlohy

$$H = \frac{a}{2} \ln\left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{a}\right) - b(x + y) + \frac{a}{2}. \quad (4.59)$$

Parciálním derivováním H podle všech čtyř proměnných fázového prostoru získáme pravé strany Hamiltonových kanonických rovnic (4.6),

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{p_x}{p_x^2 + p_y^2}, \quad \frac{dy}{dt} = a \frac{p_y}{p_x^2 + p_y^2}, \quad (4.60)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = b, \quad \frac{dp_y}{dt} = b. \quad (4.61)$$

Rovnice (4.61) vyřešíme triviálně,

$$p_x(t) = b t + p_{x0}, \quad p_y(t) = b t + p_{y0}.$$

Počáteční podmínky $p_x(t=1) = b = p_y(t=1)$ implikují $p_{x0} = 0 = p_{y0}$, tedy $p_x(t) = b t = p_y(t)$. Dosazením do (4.60) získáme diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{2b} \frac{1}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{a}{2b} \frac{1}{t},$$

které pro $t > 0$ mají řešení

$$x(t) = \frac{a}{2b} \ln t + x_0, \quad y(t) = \frac{a}{2b} \ln t + y_0, \quad (4.62)$$

kde x_0, y_0 jsou libovolné integrační konstanty $x_0 = x(t=1)$ a $y_0 = y(t=1)$.

■

Příklad 4-15.

Pomocí Poissonových závorek zjistěte, pro jaké hodnoty konstant a, b je vztah

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & p_x &= p_r \cos \varphi + a \frac{p_\varphi}{r} \sin \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, & p_y &= p_r \sin \varphi + b \frac{p_\varphi}{r} \cos \varphi, \end{aligned}$$

kanonickou transformací.

Řešení: Fázový prostor má 4 dimenze s parametry $(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$. Poissonova závorka (4.7) např. pro funkce x a p_x proto je

$$\begin{aligned} \{x, p_x\} &= \left(\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial p_x}{\partial p_r} - \frac{\partial x}{\partial p_r} \frac{\partial p_x}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial p_x}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial x}{\partial p_\varphi} \frac{\partial p_x}{\partial \varphi} \right) \\ &= \cos \varphi \cos \varphi - 0 + (-r \sin \varphi) a \frac{1}{r} \sin \varphi - 0 = \cos^2 \varphi - a \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Podobně spočítáme všech 6 netriviálních Poissonových závorek. Výsledek je

$$\begin{aligned} \{x, y\} &= 0, \\ \{x, p_x\} &= \cos^2 \varphi - a \sin^2 \varphi, \\ \{x, p_y\} &= (1 - b) \sin \varphi \cos \varphi, \\ \{y, p_x\} &= (1 + a) \sin \varphi \cos \varphi, \\ \{y, p_y\} &= \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi, \\ \{p_x, p_y\} &= -\frac{p_\varphi}{r^2} (a \sin^2 \varphi - b \cos^2 \varphi) - (a + b) \frac{p_r}{r} \sin \varphi \cos \varphi + ab \frac{p_\varphi}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Aby transformace byla kanonická, musí být splněny podmínky

$$\begin{aligned} \{x, p_x\} &= 1, & \{y, p_y\} &= 1, \\ \{x, p_y\} &= 0, & \{y, p_x\} &= 0, \\ \{x, y\} &= 0, & \{p_x, p_y\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Nulovost $\{x, x\}$, $\{y, y\}$, $\{p_x, p_x\}$ a $\{p_y, p_y\}$ je zaručena antisymetrií Poissonových závorek.

Ze dvou podmínek (4.93) ihned dostáváme, že musí platit

první?

$a = -1, \quad b = 1.$

(4.94)

Pro tuto speciální volbu konstant a a b jsou splněny i všechny ostatní podmínky kanoničnosti transformace, například (4.92) má hodnotu

$$\{p_x, p_y\} = \frac{p_\varphi}{r^2} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 0 - \frac{p_\varphi}{r^2} = 0.$$

Transformace je tedy kanonická právě tehdy, když platí (4.94).

□

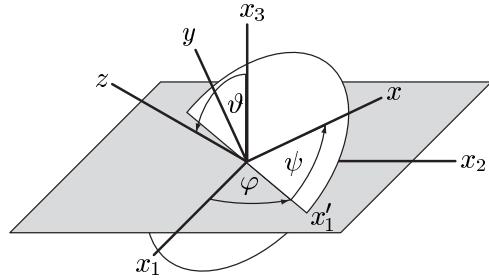
Nejjednodušší rotaci tělesa je **otáčení kolem osy x_3 o úhel $\varphi(t)$** , kdy

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega' = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = (0, 0, \dot{\varphi}). \quad (5.4)$$

Obecné otáčení tuhého tělesa je **posáno třemi Eulerovými úhly**, které plně charakterizují 3 nezávislé složky ortogonální matice A (jejich $3 \times 3 = 9$ prvků je svázáno 6 nezávislými relacemi ortogonality $A_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}$). Libovolnou rotaci kolem počátku lze totiž realizovat *třemi po sobě jdoucími jednoduchými rotacemi typu* (5.4), vždy *kolem jedné kartézské osy*.

Za úhlové parametry těchto tří jednoduchých rotací zvolil Euler

- φ ... *precesní úhel*
- ϑ ... *nutační úhel*
- ψ ... *rotační úhel*



Jejich význam plyne z následující konstrukce:

- Vyjdeme z báze \mathbf{e}_i pevné v prostoru a provedeme otočení kolem osy x_3 o úhel φ . Otočení je dánno maticí (5.4)

$$D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tedy} \quad \Omega^D = (0, 0, \dot{\varphi}).$$

- Následně provedeme otočení (sklopení) kolem osy x'_1 o úhel ϑ dané maticí

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{tedy} \quad \Omega^C = (\dot{\vartheta}, 0, 0).$$

- Nakonec provedeme otočení (rotaci) kolem osy $x''_3 \equiv z$ o úhel ψ dané maticí

$$B = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tedy} \quad \Omega^B = (0, 0, \dot{\psi}).$$

Výsledná celková matice A transformace od báze pevné v prostoru do báze korotující s tělesem je dána maticovým součinem $A = BCD$. Příslušný **celkový vektor úhlové rychlosti** $\Omega \equiv \Omega^A$, jenž odpovídá A , získáme *skládáním dílčích vektorů úhlových rychlostí* $\Omega = \Omega^B + B\Omega^C + BC\Omega^D$. Explicitním výpočtem dostáváme **Eulerovy kinematické rovnice**

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi, \\ \Omega_y &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi, \\ \Omega_z &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

kde jsme označili **osy výsledné báze korotující s tělesem** $(x, y, z) \equiv (x''_1, x''_2, x''_3)$.

Setrvačné vlastnosti tuhého tělesa při obecném otáčení (kolem těžiště tělesa) jsou popsány **tenzorem setrvačnosti**, což je *symetrický tenzor 2. řádu*, tedy *symetrické bilineární zobrazení I* přiřazující dvojici vektorů reálné číslo. Vystupuje ve vztazích pro hlavní fyzikální veličiny, např.

$$\boxed{\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi} = I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega})}, \quad (5.6)$$

kde \mathbf{L} je **celkový moment hybnosti** tuhého tělesa, $\boldsymbol{\Omega}$ je **vektor úhlové rychlosti** jeho otáčení a $\boldsymbol{\xi}$ je **libovolný vektor**, anebo

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega})}, \quad (5.7)$$

kde T je **celková kinetická energie** otáčejícího se tělesa (při nulové translaci).

Pro tuhé těleso složené z N hmotných bodů o hmotnostech m^a nacházejících se v místech \mathbf{r}^a , kde $a = 1, 2, \dots, N$, je tenzor setrvačnosti vystupující v (5.6) definován vztahem

$$\boxed{I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \sum_a m^a (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a)}. \quad (5.8)$$

Ve fyzikálních aplikacích obvykle pracujeme se **složkami I_{ij} tenzoru setrvačnosti I** , což jsou příslušné *obrazy všech kombinací vektorů zvolené ortonormální báze \mathbf{e}_i a \mathbf{e}_j* ,

$$\boxed{I_{ij} \equiv I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)}. \quad (5.9)$$

Důležité vztahy (5.6) a (5.7) pro složky momentu hybnosti a kinetickou energii lze pak psát

$$\boxed{\begin{aligned} L_i &= I_{ij} \Omega_j, \\ T &= \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j, \end{aligned}} \quad (5.10)$$

přičemž složky tenzoru setrvačnosti (5.9) lze explicitně spočítat vzorcem

$$\boxed{I_{ij} = \sum_a m^a (\delta_{ij} x_k^a x_k^a - x_i^a x_j^a)}, \quad (5.11)$$

resp. pro *spojité prostředí* s hustotou ρ

$$\boxed{I_{ij} = \int (\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j) \rho dV}. \quad (5.12)$$

Protože matice I_{ij} složek tenzoru setrvačnosti je symetrická, lze ji *diagonalizovat* do tvaru $I_{ij} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$, kde vystupují **vlastní čísla**. Příslušná ortonormální báze **vlastních vektorů** určuje tzv. **hlavní osy tenzoru setrvačnosti**. V nich se výrazy (5.10) zjednoduší na

$$\boxed{\begin{aligned} L_1 &= I_1 \Omega_1, & L_2 &= I_2 \Omega_2, & L_3 &= I_3 \Omega_3, \\ T &= \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2). \end{aligned}} \quad (5.13)$$

Pomocí tenzoru setrvačnosti ***I* moment setrvačnosti** lze snadno spočítat **moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení definované jednotkovým vektorem \mathbf{n}** , a to prostým dosazením

$$\boxed{I_{\mathbf{n}} \equiv I(\mathbf{n}, \mathbf{n})}. \quad (5.14)$$

Díky bilinearitě je $I(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = I(n_i \mathbf{e}_i, n_j \mathbf{e}_j) = n_i n_j I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = n_i n_j I_{ij}$, takže ve složkách platí

$$\boxed{I_{\mathbf{n}} = I_{ij} n_i n_j}. \quad (5.15)$$

Odtud lze užitím (5.12) ukázat, že $I_{\mathbf{n}} = \int r_{\perp}^2 dm$, kde r_{\perp} je *kolmá vzdálenost* elementu hmotnosti $dm = \rho dV$ od osy otáčení, což je obecně známý vzorec.