Laboratorium 8: Rozwiązywanie równań nieliniowych

Jan Sarba, Dariusz Rozmus

27 maja 2025

1 Treść zadań

1.1 Zadanie 1

Dla poniższych funkcji i punktów początkowych metoda Newtona zawodzi. Wyjaśnij dlaczego. Następnie znajdź pierwiastki, modyfikując wywołanie funkcji `scipy.optimize.newton` lub używając innej metody.

(a) $f(x) = x^3 - 5x, x_0 = 1$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1, x_0 = 1$

(c) $f(x) = 2 - x^5, x_0 = 0.01$

(d) $f(x) = x^4 - 4.29x^2 - 5.29, x_0 = 0.8$

1.2 Zadanie 2

Dane jest równanie:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1)$$

Każda z następujących funkcji definiuje równoważny schemat iteracyjny:

$$\phi_1(x) = (x^2 + 2)/3, \quad (2)$$

$$\phi_2(x) = \sqrt{3x - 2}, \quad (3)$$

$$\phi_3(x) = 3 - 2/x, \quad (4)$$

$$\phi_4(x) = (x^2 - 2)/(2x - 3). \quad (5)$$

(a) Przeanalizuj zbieżność oraz rząd zbieżności schematów iteracyjnych odpowiadających funkcjom $\phi_i(x)$ dla pierwiastka $\alpha = 2$ badając wartość $|\phi_i'(2)|$.

(b) Potwierdź analizę teoretyczną implementując powyższe schematy iteracyjne i weryfikując ich zbieżność (lub brak). Każdy schemat iteracyjny wykonaj przez 10 iteracji. Wyznacz eksprymentalnie rząd zbieżności każdej metody iteracyjnej ze wzoru

$$r = \frac{\ln \frac{\epsilon_k}{\epsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\epsilon_{k-1}}{\epsilon_k}} \quad (6)$$

gdzie błąd bezwzględny ϵ_k definiujemy jako $\epsilon_k = |x_k - x^*|$, x_k jest przybliżeniem pierwiastka w k-tej iteracji, a x^* dokładnym położeniem pierwiastka równania.

(c) Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy błędu bezwzględnego każdej metody w zależności od numeru iteracji. Użyj skali logarytmicznej na osi y (pomocna będzie funkcja `semilogy`). Stwórz drugi rysunek, przedstawiający wykresy błędu bezwzględnego tylko dla metod zbieżnych.

1.3 Zadanie 3

Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla każdego z następujących równań nieliniowych:

(a) $x^3 - 2x - 5 = 0$

(b) $e^{-x} = x$

(c) $x \sin(x) = 1$.

Jeśli x_0 jest przybliżeniem pierwiastka z dokładnością 4 bitów, ile iteracji należy wykonać aby osiągnąć:

- 24-bitową dokładność
- 53-bitową dokładność?

1.4 Zadanie 4

Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla następującego układu równań nieliniowych:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$
$$x_1^2 - x_2 = 0.$$

Korzystając z faktu, że dokładne rozwiązanie powyższego układu równań to (jedno z nich):

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$
$$x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

oblicz błąd względny rozwiązania znalezionego metodą Newtona.

2 Wstęp Teoretyczny

Metody iteracyjne punktu stałego: Wiele metod iteracyjnych można sprowadzić do postaci punktu stałego $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Jeśli ciąg x_k zbiega do α, to $\alpha = \phi(\alpha)$, czyli α jest punktem stałym funkcji ϕ. Warunkiem wystarczającym zbieżności takiej metody (lokalnie) jest, aby $|\phi'(\alpha)| < 1$. Rząd zbieżności metody iteracyjnej określa, jak szybko błąd maleje. Jeśli $\epsilon_k = x_k - \alpha$ jest błędem w k-tej iteracji, to metodę nazywamy zbieżną rzędu r, jeśli $\lim_{k\to\infty} \frac{|\epsilon_{k+1}|}{|\epsilon_k|^r} = C \neq 0$.

- Jeśli $r = 1$ i $0 < C < 1$, zbieżność jest liniowa ($|\phi'(\alpha)| \neq 0$).
- Jeśli $r = 2$, zbieżność jest kwadratowa ($\phi'(\alpha) = 0$ i $\phi''(\alpha) \neq 0$).

Metoda Newtona (metoda Newtona-Raphsona): Jest jedną z najpopularniejszych metod znajdowania pierwiastków. Dla równania $f(x) = 0$, schemat iteracyjny metody Newtona dany jest wzorem:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Można ją traktować jako metodę punktu stałego z $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Pochodna tej funkcji wynosi $\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Jeśli $f'(\alpha) \neq 0$ (pierwiastek pojedynczy), to $\phi'(\alpha) = 0$, co implikuje zbieżność co najmniej kwadratową. Problemy metody Newtona:

- Wymaga obliczenia pochodnej $f'(x)$.
- Może zawieść, jeśli $f'(x_k) \approx 0$ (duży krok, możliwe "przestrzelenie"pierwiastka).
- Wrażliwa na wybór punktu startowego x_0; może być rozbieżna lub zbiegać do innego pierwiastka.
- Może wpaść w cykl.

Metoda Newtona dla układów równań nieliniowych: Dla układu $F(X) = \mathbf{0}$, gdzie $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$ i $F = [f_1, \ldots, f_n]^T$, schemat Newtona ma postać:

$$X_{k+1} = X_k - J(X_k)^{-1}F(X_k)$$

gdzie $J(X_k)$ jest macierzą Jacobiego układu F w punkcie X_k, $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. W praktyce, zamiast obliczać macierz odwrotną, rozwiązuje się układ równań liniowych w każdej iteracji:

$$J(X_k)\Delta X_k = -F(X_k)$$

a następnie $X_{k+1} = X_k + \Delta X_k$. Metoda ta również charakteryzuje się zbieżnością kwadratową przy odpowiednich założeniach.

3 Argumentacja

Implementacja zadań została wykonana w języku Python z wykorzystaniem bibliotek NumPy, Matplotlib oraz SciPy.

3.1 Zadanie 1: Problemy z metodą Newtona

Dla każdej z podanych funkcji i punktów startowych analizowano przyczynę niepowodzenia standardowej metody Newtona. Następnie poszukiwano pierwiastków, modyfikując wywołanie funkcji `scipy.optimize.newton` (np. przez zmianę punktu startowego x_0, użycie metody siecznych poprzez niepodawanie jawnej pochodnej, lub dostosowanie parametrów tolerancji i maksymalnej liczby iteracji) lub stosując inną, bardziej robustną metodę, taką jak `scipy.optimize.brentq` (metoda Brenta, która jest metodą bracketingową).

3.2 Zadanie 2: Schematy iteracyjne

Rozpatrywano równanie $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$, którego jednym z pierwiastków jest $\alpha = 2$.

(a) **Analiza teoretyczna:** Dla każdego z czterech schematów iteracyjnych $\phi_i(x)$ obliczano pochodną $\phi_i'(x)$, a następnie wartość bezwzględną $|\phi_i'(2)|$. Na tej podstawie wnioskowano o zbieżności i jej rzędzie.

(b) **Implementacja i weryfikacja:** Każdy schemat iteracyjny $x_{k+1} = \phi_i(x_k)$ uruchamiano dla 10 iteracji, poczynając od $x_0 = 1.5$. W każdej iteracji obliczano błąd bezwzględny $\epsilon_k = |x_k - \alpha|$. Eksperymentalny rząd zbieżności r wyznaczano dla ostatnich dostępnych iteracji za pomocą wzoru (6).

(c) **Wykresy:** Wygenerowano dwa wykresy przy użyciu `matplotlib.pyplot.semilogy`: błąd bezwzględny ϵ_k w funkcji numeru iteracji k dla wszystkich metod oraz osobno dla metod zbieżnych.

Schemat $\phi_4(x) = (x^2 - 2)/(2x - 3)$ jest tożsamy z metodą Newtona dla $f(x) = x^2 - 3x + 2$. W przypadku punktu startowego $x_0 = 1.5$, mianownik $2x_0 - 3$ staje się zerem, co uniemożliwia wykonanie pierwszej iteracji dla $\phi_4(x)$.

3.3 Zadanie 3: Schemat Newtona i precyzja

Dla każdego z trzech podanych równań nieliniowych $f(x) = 0$ wyprowadzono wzór iteracyjny metody Newtona. Następnie oszacowano liczbę iteracji potrzebnych do osiągnięcia 24-bitowej i 53-bitowej dokładności, zakładając, że początkowe przybliżenie x_0 ma 4 bity dokładności i że metoda Newtona wykazuje zbieżność kwadratową (liczba poprawnych bitów podwaja się w każdej iteracji).

3.4 Zadanie 4: Metoda Newtona dla układu równań

Zaimplementowano metodę Newtona dla układu równań:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 = 0$$

Analityczne rozwiązanie (jedno z dwóch) to $x_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$ oraz $x_1 = \sqrt{x_2}$. Metoda Newtona była uruchamiana z punktem startowym $X_0 = [0.7, 0.7]^T$. Obliczono błąd względny rozwiązania $\frac{\|X_k - X_{exact}\|_2}{\|X_{exact}\|_2}$ w kolejnych iteracjach. Wynik porównano z funkcją `scipy.optimize.root`.

4 Wyniki

4.1 Zadanie 1: Problemy z metodą Newtona

(a) $f(x) = x^3 - 5x, x_0 = 1$

```
Wyjaśnienie: Metoda Newtona wpada w cykl.
x1 = 1 - f(1)/f'(1) = 1 - (-4)/(-2) = 1 - 2 = -1.
x2 = -1 - f(-1)/f'(-1) = -1 - (4)/(-2) = -1 + 2 = 1. Cykl: 1, -1, 1, ...
Newton (standard): Nie zbiegł (zgodnie z oczekiwaniami).
Brentq pierwiastki: -2.236067977499974, 0.0, 2.236067977499974
Newton (x0=2): 2.23606797749979 (zbiega do sqrt(5))
```

Rzeczywiste pierwiastki: $0, \pm\sqrt{5} \approx \pm 2.236$.

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1, x_0 = 1$

```
Wyjaśnienie: f'(1) = 3*(1)^2 - 3 = 0. Pochodna w punkcie startowym
jest zerowa, dzielenie przez zero.
Newton (standard): Nie zbiegł - Derivative was zero.
  Failed to converge after 1 iterations, value is 1.0.
Newton (metoda siecznych, x0=1): 1.0000007188230098
Newton (x0=0.5): 0.3472963553338607
```

Rzeczywiste pierwiastki: ok. -1.879, 0.347, 1.532.

(c) $f(x) = 2 - x^5, x_0 = 0.01$

```
Wyjaśnienie: f'(x0) jest bardzo małe (-5e-8). Może prowadzić do
dużego kroku i 'przestrzelenia' pierwiastka.
Newton (standard): Nie zbiegł - Failed to converge after 50 iterations,
  value is 713.6238464957056.
Dokładny pierwiastek: 1.148698354997035
Newton (x0=1): 1.148698354997035
Brentq: 1.1486983549970349
```

Rzeczywisty pierwiastek: $2^{1/5} \approx 1.1487$.

(d) $f(x) = x^4 - 4.29x^2 - 5.29, x_0 = 0.8$

```
Newton (standard): Nie zbiegł - Failed to converge after 50 iterations,
  value is 0.7876130494100906.
Brentq pierwiastki: 2.3, -2.3
Wyjaśnienie: W tym przypadku Newton z x0=0.8 nie zbiegł w domyślnej
liczbie iteracji. Mógłby zbiec do -2.3 przy większej liczbie iteracji
lub innej tolerancji. Start daleko od pierwiastka lub blisko
ekstremum lokalnego może być problemem.
```

Rzeczywiste pierwiastki: ± 2.3.

4.2 Zadanie 2: Schematy iteracyjne

Pierwiastek badany: $\alpha = 2$. Punkt startowy: $x_0 = 1.5$.

(a) **Analiza teoretyczna zbieżności do $\alpha = 2$:**

- $\phi_1(x) = (x^2 + 2)/3 \Rightarrow \phi_1'(x) = 2x/3$. $|\phi_1'(2)| = |4/3| \approx 1.3333 > 1$. Schemat rozbieżny.
- $\phi_2(x) = \sqrt{3x-2} \Rightarrow \phi_2'(x) = 3/(2\sqrt{3x-2})$. $|\phi_2'(2)| = |3/(2\sqrt{4})| = |3/4| = 0.7500 < 1$. Schemat zbieżny liniowo.
- $\phi_3(x) = 3 - 2/x \Rightarrow \phi_3'(x) = 2/x^2$. $|\phi_3'(2)| = |2/4| = 0.5000 < 1$. Schemat zbieżny liniowo.
- $\phi_4(x) = (x^2-2)/(2x-3) \Rightarrow \phi_4'(x) = (2x^2-6x+4)/(2x-3)^2$. $|\phi_4'(2)| = 0$. Schemat zbieżny co najmniej kwadratowo.

(b) **Implementacja i weryfikacja (iteracje dla $x_0 = 1.5$):**

```
Metoda: fi1(x)
Iter 0: x = 1.50000000, błąd = 5.00e-01
... (pozostałe iteracje jak w logu)
Iter 10: x = 1.02313164, błąd = 9.77e-01

Metoda: fi2(x)
Iter 0: x = 1.50000000, błąd = 5.00e-01
...
Iter 10: x = 1.95453471, błąd = 4.55e-02

Metoda: fi3(x)
Iter 0: x = 1.50000000, błąd = 5.00e-01
...
Iter 10: x = 1.99902439, błąd = 9.76e-04
```

```
Metoda: fi4(x) (Newton)
Iter 0: x = 1.50000000, błąd = 5.00e-01
Iter 1: x = nan - przerwanie iteracji.
```

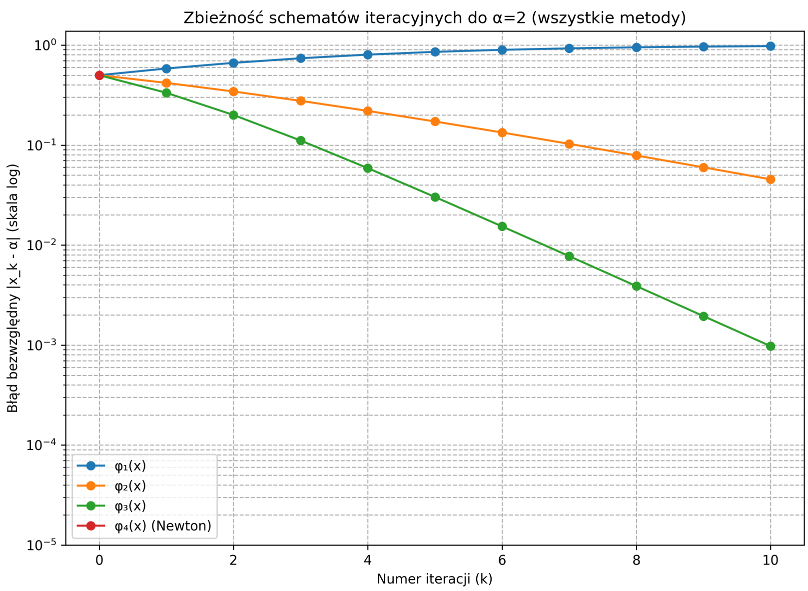
Dla $\phi_4(x)$ i $x_0 = 1.5$, mianownik $2x_0 - 3$ wynosi 0, co powoduje błąd dzielenia przez zero i przerwanie iteracji.

Eksperymentalny rząd zbieżności (r) dla $\alpha = 2$:

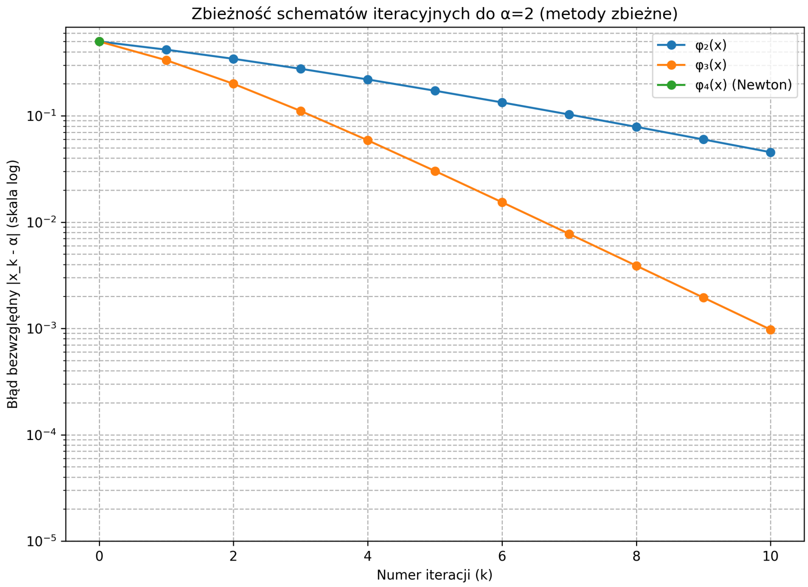
```
fi1(x): r approx 0.69 (metoda rozbieżna, r nie ma tu sensu typowego)
fi2(x): r approx 1.01
fi3(x): r approx 1.00
fi4(x) (Newton): Za mało iteracji do obliczenia r.
```

Wyniki eksperymentalne są zgodne z analizą teoretyczną: ϕ_1 jest rozbieżny, ϕ_2 i ϕ_3 wykazują zbieżność liniową ($r \approx 1$). Dla ϕ_4 nie udało się obliczyć rzędu z powodu przerwania iteracji.

(c) **Wykresy błędów:**



Rysunek 1: Zbieżność schematów iteracyjnych do $\alpha = 2$ (wszystkie metody). Metoda $\phi_4(x)$ nie jest widoczna, gdyż iteracja została przerwana.



Rysunek 2: Zbieżność schematów iteracyjnych do $\alpha = 2$ (metody zbieżne).

4.3 Zadanie 3: Schemat Newtona i precyzja

(a) $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2x_k - 5}{3x_k^2 - 2}$$

(b) $f(x) = e^{-x} - x = 0 \Rightarrow f'(x) = -e^{-x} - 1$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} - x_k}{-e^{-x_k} - 1}$$

(c) $f(x) = x\sin(x) - 1 = 0 \Rightarrow f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k \sin(x_k) - 1}{\sin(x_k) + x_k \cos(x_k)}$$

Liczba iteracji dla precyzji (teoretycznie, dla kwadratowej zbieżności): Zakładając, że liczba poprawnych bitów z grubsza podwaja się w każdej iteracji:

- Start: 4 bity
- Iter 1: ≈ 8 bitów
- Iter 2: ≈ 16 bitów
- Iter 3: ≈ 32 bity

- Iter 4: ≈ 64 bity

Aby osiągnąć 24-bitową dokładność: potrzeba około 3 iteracji. Aby osiągnąć 53-bitową dokładność: potrzeba około 4 iteracji.

4.4 Zadanie 4: Metoda Newtona dla układu równań

Rozwiązywano układ równań:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 = 0$$

Macierz Jacobiego: $J(X) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{pmatrix}$. Jedno z dokładnych rozwiązań: $x_1 = \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2} \approx 0.786151$, $x_2 = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.618034$. Punkt startowy: $X_0 = [0.7, 0.7]^T$.
Wyniki iteracji Newtona:

```
Iteracje Newtona dla układu z Zadania 4:
Iter 1: X = [0.793452, 0.620833], błąd względny = 7.82e-03
Iter 2: X = [0.786187, 0.618037], błąd względny = 3.60e-05
Iter 3: X = [0.786151, 0.618034], błąd względny = 8.18e-10
Iter 4: X = [0.786151, 0.618034], błąd względny = 1.11e-16
Osiągnięto zbieżność.

Rozwiązanie z scipy.optimize.root dla Zadania 4: [0.78615138 0.61803399]
Błąd względny rozwiązania scipy dla Zadania 4: 3.28e-14
```

Metoda Newtona zbiegła kwadratowo do oczekiwanego rozwiązania. Wynik z `scipy.optimize.root` jest zgodny.

5 Wnioski

- **Zadanie 1:** Metoda Newtona jest wrażliwa na wybór punktu startowego x_0. Może zawieść, gdy $f'(x_0) \approx 0$ (prowadząc do dzielenia przez zero lub dużych kroków) lub gdy x_0 prowadzi do cyklu iteracyjnego. W takich przypadkach konieczne jest użycie zmodyfikowanych parametrów metody Newtona (np. inny x_0, metoda siecznych) lub zastosowanie bardziej robustnych metod, jak metoda Brenta.

- **Zadanie 2:** Analiza teoretyczna zbieżności schematów iteracyjnych oparta na wartości $|\phi'(\alpha)|$ została potwierdzona eksperymentalnie. Schematy z $|\phi'(\alpha)| < 1$ (tj. $\phi_2(x)$ i $\phi_3(x)$) były zbieżne liniowo ($r \approx 1$). Schemat $\phi_1(x)$ z $|\phi_1'(2)| > 1$ okazał się rozbieżny. Schemat $\phi_4(x)$, będący metodą Newtona, teoretycznie powinien zbiegać kwadratowo ($|\phi_4'(2)| = 0$). Jednak dla $x_0 = 1.5$ metoda ta zawiodła z powodu dzielenia przez zero w pierwszej iteracji, co uniemożliwiło weryfikację jej rzędu zbieżności dla tego punktu startowego.

- **Zadanie 3:** Metoda Newtona, przy założeniu kwadratowej zbieżności, pozwala na bardzo szybkie uzyskanie wysokiej precyzji pierwiastka, jeśli punkt startowy jest odpowiednio blisko. Szacunkowa liczba iteracji potrzebna do zwiększenia precyzji z 4 bitów do 24 bitów to około 3, a do 53 bitów to około 4 iteracje.

- **Zadanie 4:** Metoda Newtona dla układów równań nieliniowych również wykazuje kwadratową zbieżność w pobliżu rozwiązania, pod warunkiem że macierz Jacobiego jest nieosobliwa i punkt startowy jest odpowiednio dobrany. Dla badanego układu i punktu startowego $X_0 = [0.7, 0.7]^T$ metoda zbiegła szybko do rozwiązania.

- Wybór metody rozwiązywania równań nieliniowych oraz jej parametrów (np. punktu startowego) ma kluczowe znaczenie dla powodzenia obliczeń. W przypadkach problematycznych standardowe metody mogą wymagać modyfikacji lub zastąpienia przez algorytmy bardziej odporne na trudne warunki początkowe lub specyfikę funkcji.