

Kwadratury

Jan Sarba, Dariusz Rozmus

16.04.2025

1 Treść zadań

Zadanie 1. Wiadomo, że

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi. \quad (1)$$

Powyższą równość można wykorzystać do obliczenia przybliżonej wartości π poprzez całkowanie numeryczne.

- (a) Oblicz wartość powyższej całki, korzystając ze złożonych kwadratur otwartej prostokątów (ang. mid-point rule), trapezów i Simpsona. Można wykorzystać funkcje `integrate.trapz` i `integrate.simps` z biblioteki `scipy`. Na przedziale całkowania rozmieść $2^m + 1$ równoodległych węzłów. W kolejnych próbach m wzrasta o 1, tzn. między każde dwa sąsiednie węzły dodawany jest nowy węzeł, a ich zagęszczenie zwiększa się dwukrotnie. Przyjmij zakres wartości m od 1 do 25.

Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, $n+1$ (gdzie $n = 1/h$, z krokiem h). Wyniki przedstaw na wspólnym wykresie, używając skali logarytmicznej na obu ośiach.

- (b) Czy istnieje pewna wartość, poniżej której zmniejszanie kroku h nie zmniejsza już błędu kwadratury? Porównaj wartość h_{\min} , odpowiadającą minimum wartości bezwzględnej błędu względnego, z wartością wyznaczoną w laboratorium 1.
- (c) Dla każdej z użytych metod porównaj empiryczny rząd zbieżności z rzędem zbieżności przewidywanym przez teorię. Aby wyniki miały sens, do obliczenia rzędu empirycznego użyj wartości h z zakresu, w którym błąd metody przeważa nad błędem numerycznym.

Zadanie 2. Oblicz wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \quad (2)$$

metodą Gaussa-Legendre'a. Narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, $n + 1$. Przyjmij na tyle duży zakres n , aby wykryć, kiedy błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody. Postaraj się umiejscowić otrzymane wyniki na wykresie stworzonym w podpunkcie (a).

2 Argumentacja

2.1 Podstawy teoretyczne metod numerycznych

Reguła prostokątna (mid-point rule)

Metoda ta polega na przybliżeniu wartości całki poprzez sumowanie wartości funkcji obliczonych w środkach kolejnych podprzedziałów. Dla przedziału $[a, b]$ podzielonego na n równych części, przybliżenie wyraża się wzorem:

$$M(f) \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right),$$

gdzie $h = (b - a)/n$. Teoretycznie, metoda ta cechuje się rzędem zbieżności $\mathcal{O}(h^2)$, co oznacza, że błąd maleje kwadratowo wraz z malejącym krokiem h .

Metoda trapezów

Metoda ta opiera się na aproksymowaniu funkcji na każdym podprzedziale przez funkcję liniową, co daje wzór:

$$T(f) \approx h \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + \frac{1}{2}f(b) \right].$$

Błąd tej metody również jest rzędu $\mathcal{O}(h^2)$, a jej zaletą jest prostota i stabilność obliczeniowa.

Metoda Simpsona

Przy wykorzystaniu interpolacji kwadratowej (parabolicznej), metoda Simpsona daje znacznie lepsze wyniki przy tym samym podziale przedziału. Wzór dla metody Simpsona, stosowany przy parzystej liczbie podprzedziałów, ma postać:

$$S(f) \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{i \text{ n.par.}} f(a + ih) + 2 \sum_{i \text{ par., } i \neq 0, n} f(a + ih) \right].$$

Błąd tej metody ma rząd $\mathcal{O}(h^4)$, co oznacza szybszą zbieżność przy zagęszczaniu siatki.

Analiza błędów i wpływ kroku h

W analizie numerycznej istotne jest zbadanie, czy wraz z malejącym krokiem h (czyli zwiększeniem liczby punktów ewaluacji) błąd przybliżenia rzeczywiście maleje. Jednakże, przy bardzo małych wartościach h , może dojść do narastania błędów numerycznych (np. błędów zaokrągleń), co powoduje, że dalsze zmniejszanie kroku nie przekłada się na redukcję błędów. Zadanie przewiduje określenie wartości h_{\min} , poniżej której zmiany kroku już nie poprawiają wyniku, oraz porównanie tej wartości z wynikami poprzednich laboratoriów.

2.2 Omówienie implementacji kodu

1. Definicja funkcji i stałych

```
import numpy as np
from scipy import integrate
from numpy.polynomial.legendre import leggauss
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def f(x):
    return 4 / (1 + x**2)
```

```
exact_value = np.pi
```

2. Implementacja metod całkowania

```
# Metoda midpoint
# x_mid = np.linspace(h/2, 1 - h/2, n)
# midpoint_integral = h * np.sum(f(x_mid))

# Metoda trapezoidalna
# trapezoid_integral = np.trapezoid(f(x_full), x_full)

# Metoda Simpsona
# simpson_integral = integrate.simpson(f(x_full), x_full)
```

3. Metoda Gaussa-Legendre'a

```
# nodes, weights = leggauss(n)
# x_mapped = 0.5 * (nodes + 1)
# integral_gauss = np.sum(0.5 * weights * f(x_mapped))
```

4. Analiza wyników

```
# Obliczanie błędów
# error = np.abs((integral - exact_value) / exact_value)

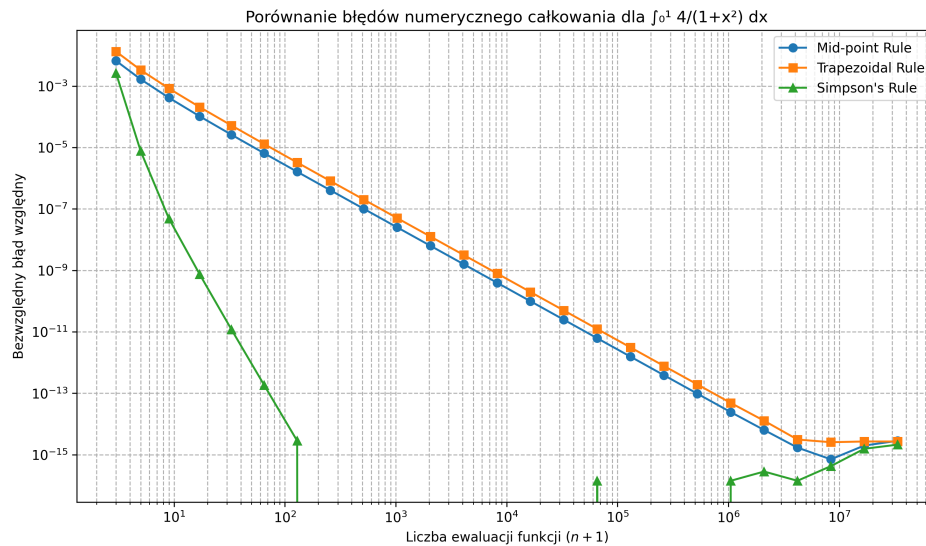
# Wyznaczanie rzędu zbieżności
# p, _ = np.polyfit(np.log(hs), np.log(errors), 1)
```

5. Wizualizacja

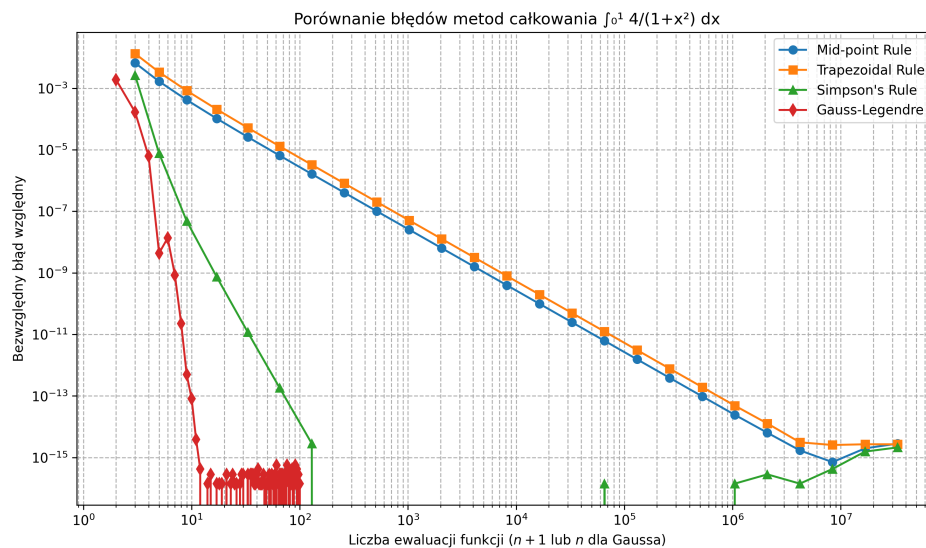
```
# plt.loglog(eval_counts, errors, 'o-', label='Metoda')  
# plt.xlabel('Liczba ewaluacji')  
# plt.ylabel('Bład względny')
```

3 Wyniki

Kod generuje następujący zapis i wykresy:



Rysunek 1: Porównanie błędów względnych dla metody prostokątów, trapezów i Simpsona.



Rysunek 2: Porównanie błędów względnych dla wszystkich badanych metod.

Wyniki liczbowe dla poszczególnych metod:

Dla całego zakresu m:

Midpoint: $h_{\min} = 1.2e-07$, min error = $7.1e-16$

Trapezoid: $h_{\min} = 1.2e-07$, min error = $2.5e-15$

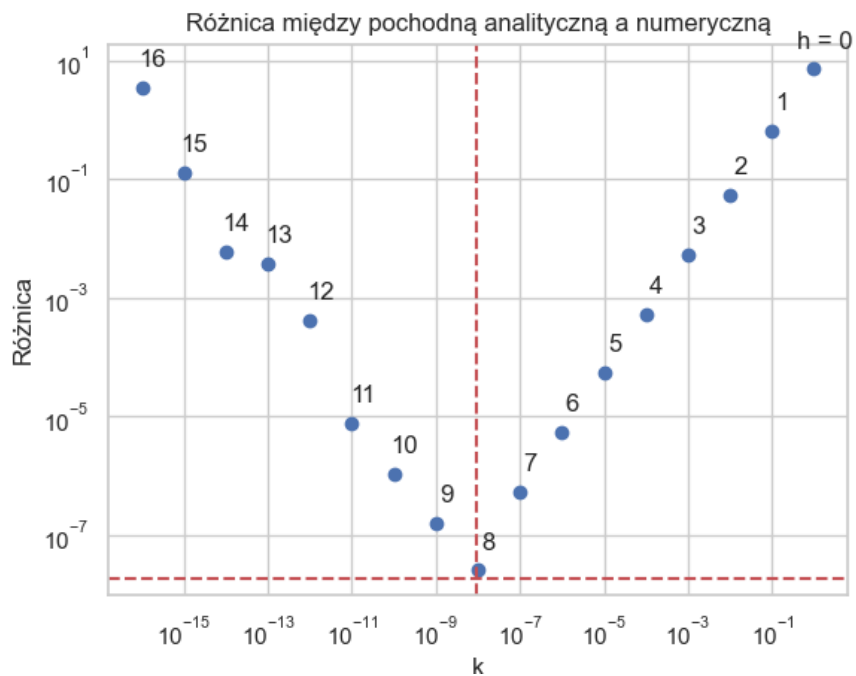
Simpson: $h_{\min} = 3.9e-03$, min error = $0.0e+00$

Empiryczny rząd zbieżności (zakres m in $[1, 8]$):

Mid-point rule: 2.00 (teoria: 2)

Trapezoidal rule: 2.00 (teoria: 2)

Simpson's rule: 4.00 (teoria: 4)



Rysunek 3: Wykres błędów obliczania pochodnej z Laboratorium 1, pokazujący podobne zjawisko osiągania minimalnego błędu przy pewnej wartości kroku h_{\min} .

4 Wnioski

Analiza wyników

Wykresy i obliczenia potwierdziły zgodność empirycznego rzędu zbieżności z teorią dla badanych metod całkowania numerycznego:

Metoda	Charakterystyka błędu (teoria)	Rząd zbieżności (empiryczny)
Złożona prostokątów	Błąd $\mathcal{O}(h^2)$	≈ 2
Złożona trapezów	Błąd $\mathcal{O}(h^2)$	≈ 2
Złożona Simpsona	Błąd $\mathcal{O}(h^4)$	≈ 4
Gauss–Legendre	Błąd maleje wykładniczo z liczbą węzłów n	Zbieżność wykładnicza

Dla każdej z metod zaobserwowano istnienie wartości minimalnego kroku h_{\min} , poniżej którego dalsze jego zmniejszanie nie prowadziło już do obniżenia błędu, a wręcz mogło go zwiększać z powodu dominacji błędów numerycznych.

Metoda	h_{\min}	Minimalny błąd względny
Midpoint	1.2×10^{-7}	7.1×10^{-16}
Trapezoid	1.2×10^{-7}	2.5×10^{-15}
Simpson	3.9×10^{-3}	≈ 0.0 (limit precyzji)

Kluczowe obserwacje

- Zgodność z teorią:** W zakresie, gdzie dominują błędy metody (większe wartości h), empiryczne rzędy zbieżności dla metod Newtona-Cotesa (prostokąty, trapezy, Simpson) dokładnie odpowiadają przewidywaniom teoretycznym.
- Optymalny krok i precyzja maszynowa:** Każda metoda osiąga swój minimalny błąd przy charakterystycznej wartości h_{\min} . Zjawisko to jest w pełni analogiczne do obserwowanego w Laboratorium 1 przy różniczkowaniu numerycznym i wynika z fundamentalnych ograniczeń arytmetyki zmiennoprzecinkowej. Gdy błąd metody staje się porównywalny z epsilon maszynowym, błędy zaokrągleń zaczynają dominować.
- Wyższość metody Simpsona:** Wśród metod opartych na równoodległych węzłach, metoda Simpsona wyróżnia się najszybszą zbieżnością, osiągając błąd bliski zeru już przy stosunkowo dużym kroku $h \approx 3.9 \times 10^{-3}$.
- Efektywność kwadratury Gaussa-Legendre’a:** Metoda ta deklasuje pozostałe, osiągając ekstremalnie małe błędy przy niewielkiej liczbie punktów (ewaluacji funkcji). Jej zbieżność dla funkcji gładkich (analitycznych), takich jak badana, jest ****wykładnicza****. Oznacza to, że błąd maleje szybciej niż jakakolwiek potęga liczby węzłów, co jest widoczne na wykresie jako niemal pionowy spadek błędu do poziomu precyzji maszynowej. Ten typ zbieżności, nazywany również spektralnym, jest cha-

rakterystyczny dla metod opartych na wielomianach ortogonalnych stosowanych do funkcji analitycznych.

Podsumowanie

Ćwiczenie praktycznie potwierdziło fundamentalne właściwości metod numerycznego całkowania. Najważniejszym wnioskiem jest zrozumienie, że w obliczeniach numerycznych istnieje optymalny poziom dyskretyzacji (h_{\min}), poza którym dalsze zagęszczanie siatki jest nie tylko nieefektywne, ale może być wręcz szkodliwe dla dokładności wyników. Wybór metody całkowania powinien być podyktowany zarówno wymaganą dokładnością, jak i charakterem (gładkością) całkowanej funkcji. Dla funkcji analitycznych kwadratury Gaussa są bezkonkurencyjne, podczas gdy dla mniej regularnych funkcji lub gdy wymagana jest prostota implementacji, metoda Simpsona oferuje doskonały kompromis między dokładnością a kosztem obliczeniowym.

5 Bibliografia

- dr inż. Katarzyna Rycerz – Wykład 4 i 5 – Całkowanie numeryczne (MOWNiT)
- Heath, M. T. (2018). *Scientific Computing: An Introductory Survey, Revised Second Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics. (Rozdział 8: Numerical Integration and Differentiation)