Interpolacja

Jan Sarba, Dariusz Rozmus

19.03.2025

1 Treść zadań

1.1 Zadanie 1

Zadanie 1. Populacja Stanów Zjednoczonych na przestrzeni lat przedstawiała się następująco:

Rok	Populacja
1900	76 212 168
1910	92 228 496
1920	106 021 537
1930	123 202 624
1940	132 164 569
1950	151 325 798
1960	179 323 175
1970	203 302 031
1980	226 542 199

Istnieje dokładnie jeden wielomian ósmego stopnia, który interpoluje powyższe dziewięć punktów, natomiast sam wielomian może być reprezentowany na różne sposoby. Rozważamy następujące zbiory funkcji bazowych $\phi_j(t)$, $j = 1, \ldots, 9$:

$$\phi_j(t) = t^{j-1} \tag{1}$$

$$\phi_j(t) = (t - 1900)^{j-1} \tag{2}$$

$$\phi_j(t) = (t - 1940)^{j-1} \tag{3}$$

$$\phi_j(t) = ((t - 1940)/40)^{j-1} \tag{4}$$

a. Dla każdego z czterech zbiorów funkcji bazowych utwórz macierz Vandermonde'a.

b. Oblicz współczynnik uwarunkowania każdej z powyższych macierzy, używając funkcji `numpy.linalg.cond`.

c. Używając najlepiej uwarunkowanej bazy wielomianów, znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego dla danych z zadania. Narysuj wielomian interpolacyjny. W tym celu użyj schematu Hornera i oblicz na przedziale [1900,1990] wartości wielomianu w odstępach jednorocznych. Na wykresie umieść także węzły interpolacji.

d. Dokonaj ekstrapolacji wielomianu do roku 1990. Porównaj otrzymaną wartość z prawdziwą wartością dla roku 1990, wynoszącą 248 709 873. Ile wynosi błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990?

e. Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a na podstawie 9 węzłów interpolacji podanych w zadaniu. Oblicz wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.

f. Wyznacz wielomian interpolacyjny Newtona na podstawie tych samych węzłów interpolacji i oblicz wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.

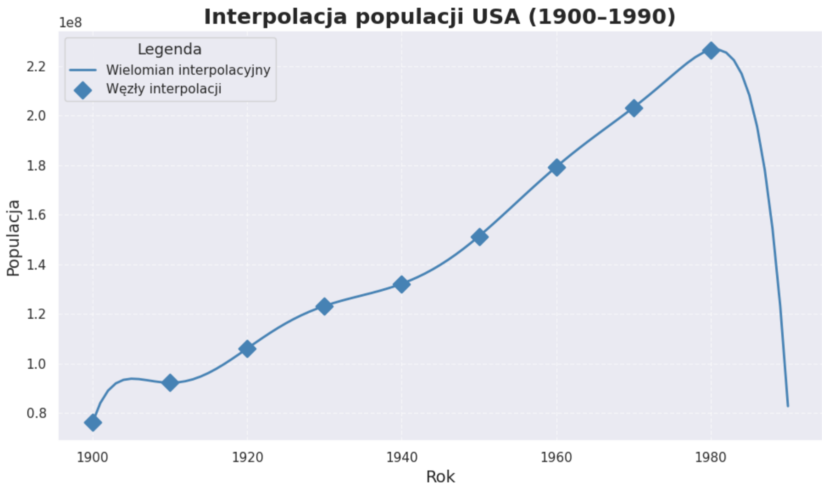
g. Zaokrąglij dane podane w tabeli do jednego miliona. Na podstawie takich danych wyznacz wielomian interpolacyjny ósmego stopnia, używając najlepiej uwarunkowanej bazy z podpunktu (c). Porównaj wyznaczone współczynniki z współczynnikami obliczonymi w podpunkcie (c). Wyjaśnij otrzymany wynik. Ile wynosi błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990 obliczony przy pomocy tak wyznaczonego wielomianu interpolacyjnego?

2 Argumentacja

a. Utworzenie i wypisanie macierzy Vandermonde'a, dla każdego z czterech zbiorów funkcji bazowych.

```
years = np.array([1900, 1910, 1920, 1930, 1940, 1950,
1960, 1970, 1980])
population = np.array([76212168, 92228496,
106021537, 123202624, 132164569, 151325798,
179323175, 203302031, 226542199])

V1 = np.vander(years, increasing=True)

V2 = np.vander(years - 1900, increasing=True)

V3 = np.vander(years - 1940, increasing=True)

V4 = np.vander((years - 1940) / 40, increasing=True)

print("Macierz V1 (bazowa t^j):\n", V1)
print("Macierz V2 (bazowa (t-1900)^j):\n", V2)
print("Macierz V3 (bazowa (t-1940)^j):\n", V3)
print("Macierz V4 (bazowa ((t-1940)/40)^j):\n", V4)

cond_V1 = np.linalg.cond(V1)
cond_V2 = np.linalg.cond(V2)
cond_V3 = np.linalg.cond(V3)
cond_V4 = np.linalg.cond(V4)
```

b. Na podstawie najlepiej uwarunkowanej bazy wielomianów wyznaczono współczynniki wielomianu interpolacyjnego dla podanych danych. Następnie narysowano wykres wielomianu interpolacyjnego, wykorzystując schemat Hornera do obliczenia wartości na przedziale [1900, 1990] w odstępach jednorocznych. Na wykresie uwzględniono również węzły interpolacji.



Rysunek 1: Interpolacja populacji USA 1900-1990

c. Dokonano ekstrapolacji wielomianu na rok 1990 i porównano uzyskaną wartość z rzeczywistą, wynoszącą 248 709 873. Obliczono błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990.

```
x_1990 = (1990 - 1940) / 40
pop_1990_est = horner_eval(np.array([x_1990]), coeffs)[0]
pop_1990_true = 248_709_873
rel_error = abs(pop_1990_est - pop_1990_true) / pop_1990_true
```

d. Wyznaczono wielomian interpolacyjny Lagrange'a na podstawie dziewięciu podanych węzłów interpolacji oraz obliczono jego wartości w odstępach jednorocznych.

```
def lagrange_basis(x, xi, i):
    terms = [(x-xi[j]) / (xi[i]-xi[j]) for j in range(len(xi)) if j!=i]
    return np.prod(terms, axis=0)

def lagrange_interp(x, xi, yi):
    result = np.zeros_like(x, dtype=np.float64)
    for i in range(len(xi)):
        Li = np.ones_like(x, dtype=np.float64)
        for j in range(len(xi)):
            if i != j:
                Li *= (x - xi[j]) / (xi[i] - xi[j])
        result += yi[i] * Li
    return result

t_full = np.arange(1900, 1991)
lagrange_vals = lagrange_interp(t_full, years, population)
```

e. Wyznaczono wielomian interpolacyjny Newtona na podstawie tych samych węzłów interpolacji i obliczono jego wartości w odstępach jednorocznych.

```
def newton_coeffs(xi, yi):
    n = len(xi)
    coeffs = np.copy(yi).astype(np.float64)
    for j in range(1, n):
        for i in range(n - 1, j - 1, -1):
            coeffs[i] = (coeffs[i] - coeffs[i - 1]) /
                        (xi[i] - xi[i - j])
    return coeffs

def newton_eval(x, xi, coeffs):
```

```
    n = len(xi)
    result = coeffs[-1]
    for i in range(n - 2, -1, -1):
        result = coeffs[i] + (x - xi[i]) * result
    return result

coeffs_newton = newton_coeffs(years, population)
t_full = np.arange(1900, 1991)
newton_vals = newton_eval(t_full, years, coeffs_newton)
```

f. Zaokrąglono dane podane w tabeli do jednego miliona. Na podstawie tak przekształconych danych wyznaczono wielomian interpolacyjny ósmego stopnia, wykorzystując najlepiej uwarunkowaną bazę. Porównano uzyskane współczynniki z tymi wyznaczonymi wcześniej oraz wyjaśniono otrzymane różnice. Obliczono również błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990 przy użyciu tego wielomianu.

```
population_rounded = np.round(population/1000000) * 1000000

t_base_rounded = (years - 1940) / 40
V_rounded = np.vander(t_base_rounded, increasing=True)

coeffs_rounded = np.linalg.solve(V_rounded, population_rounded)

print(coeffs_rounded)

x_1990 = (1990 - 1940) / 40
pop_1990_est_rounded = horner_eval(np.array([x_1990]),
                       coeffs_rounded)[0]

pop_1990_true = 248_709_873

rel_error_rounded = abs(pop_1990_est_rounded-pop_1990_true)
                    /pop_1990_true
```

3 Wyniki

Współczynniki Uwarunkowania Macierzy Vandermonde'a
Macierz Vandermonde'a w różnych bazach przyjmuje następujące wartości współczynnika uwarunkowania (κ):

- V_1 (t^j): 5.11×10^{26}
- V_2 ($(t-1900)^j$): 6.31×10^{15}
- V_3 ($(t-1940)^j$): 9.32×10^{12}
- V_4 ($((t-1940)/40)^j$): 1.61×10^{3}

Niższa wartość współczynnika uwarunkowania oznacza lepszą stabilność numeryczną, dlatego V_4 jest najlepszym wyborem.
Estymacja Populacji dla Roku 1990
Interpolując wartości dla roku 1990 przy użyciu najlepiej uwarunkowanej bazy (V_4), otrzymujemy:

- **Interpolowana populacja:** 82749141
- **Rzeczywista populacja:** 248709873
- **Błąd względny:** 66.73%

Estymacja po Zaokrągleniu Danych do Milionów
Po zaokrągleniu danych do pełnych milionów otrzymujemy:

- **Nowa estymowana populacja:** 109000000
- **Nowy błąd względny:** 56.17%

4 Wnioski

- Użycie najlepiej uwarunkowanej bazy (V_4) znacząco poprawia stabilność numeryczną.
- Interpolacja wielomianowa nie sprawdza się dobrze przy ekstrapolacji – błąd względny dla 1990 roku wynosi aż 66.73%.
- Zaokrąglenie danych zmniejszyło błąd względny do 56.17%, ale nadal nie pozwoliło na poprawną prognozę populacji.
- Niezależnie od użytej bazy funkcji, wielomian interpolacyjny ósmego stopnia jest identyczny, ponieważ jest on jednoznacznie wyznaczony przez węzły interpolacji. Różne bazy wpływają jedynie na reprezentację tego samego wielomianu.
- Znaczące różnice w współczynniku uwarunkowania macierzy Vandermonde'a pokazują, że wybór bazy ma kluczowy wpływ na stabilność numeryczną. Mimo to, końcowy wielomian pozostaje ten sam.
- Wysokie błędy względne przy ekstrapolacji do roku 1990 wskazują na ogólną niestabilność interpolacji wielomianowej poza zakresem węzłów. Nawet najlepiej uwarunkowana baza (V_4) nie zapewniła satysfakcjonującej dokładności.
- Zaokrąglenie danych do pełnych milionów zmniejszyło błąd względny, co sugeruje, że drobne różnice w danych wejściowych mogą znacznie wpływać na wynik ekstrapolacji. Mimo to, zmiana ta nie rozwiązała problemu wysokiego błędu przy prognozowaniu.

5 Bibliografia

- dr Rycerz K. – Wykład 2 – interpolacja (MOWNiT)
- **Wikipedia - Polynomial intepolation**
- prof. Heath M. T. – CS 450—numerical analysis, Chapter 7