

# Równania różniczkowe zwyczajne – część II

Jan Sarba, Dariusz Rozmus

27 maja 2025

## 1 Treść zadań

### 1.1 Zadanie 1

Dynamika układu drapieżca-ofiara opisana jest modelem Lotki-Volterry:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) \quad (1)$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) \quad (2)$$

gdzie:

- $x(t)$  – gęstość ofiar (np. liczba zajęcy na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu,
- $y(t)$  – gęstość drapieżców (np. liczba rysy na jednostkę powierzchni) w zależności od czasu,
- $\alpha_1$  – współczynnik przyrostu ofiar w izolowanym środowisku,
- $\beta_1$  – współczynnik intensywności kontaktów między drapieżcami a ofiarami, kończących się upolowaniem ofiary,
- $\alpha_2$  – współczynnik ubywania drapieżców w izolowanym środowisku,
- $\beta_2$  – współczynnik opisujący wpływ obecności ofiar na współczynnik przyrostu drapieżców.

Należy przyjąć wartości początkowe:  $x(0) = 20, y(0) = 20$  oraz następujące wartości parametrów:  $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.5, \beta_2 = 0.02$ . Całkując od  $t = 0$  do  $t = 80$ , należy rozwiązać powyższy układ równań, używając następujących metod:

- jawną metodą Eulera:  $Y_{k+1} = Y_k + h_k f(t_k, Y_k)$ ,
- niejawną metodą Eulera:  $Y_{k+1} = Y_k + h_k f(t_{k+1}, Y_{k+1})$ ,
- półjawną metodą Eulera (dwa warianty):

1.  $x_{n+1} = x_n + h_n f(x_n, y_{n+1}), y_{n+1} = y_n + h_n g(x_n, y_{n+1})$
  2.  $x_{n+1} = x_n + h_n f(x_{n+1}, y_n), y_{n+1} = y_n + h_n g(x_{n+1}, y_n)$
- metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4):  $Y_{k+1} = Y_k + \frac{h_k}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ , gdzie  $k_1 = f(t_k, Y_k)$ ,  $k_2 = f(t_k + h_k/2, Y_k + h_k k_1/2)$ ,  $k_3 = f(t_k + h_k/2, Y_k + h_k k_2/2)$ ,  $k_4 = f(t_k + h_k, Y_k + h_k k_3)$ .

Polecenia szczegółowe:

- (a) Na wspólnym rysunku narysować wykresy liczebności obu populacji w zależności od czasu. Na osobnym rysunku narysować portret fazowy układu, tj. wykres trajektorii punktu  $(x(t), y(t))$  w funkcji czasu. Podać jego fizyczną interpretację.
- (b) Dla jakich warunków początkowych liczebności populacji nie ulegają zmianie? Znaleźć punkty stacjonarne powyższego układu, rozwiązując układ równań:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0 \quad (3)$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0 \quad (4)$$

- (c) Czy zachowany jest niezmiennik:  $H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y)$ ? Na wspólnym rysunku przedstawić wykresy tego niezmiennika znalezione przez każdą metodę numeryczną.
- (d) Wiemy, że na przestrzeni lat populacja rysy i zajęcy kształtowała się wg danych przedstawionych w pliku `LynxHare.txt`. Wybrać jedną z powyższych metod numerycznych i oszacować prawdziwe wartości współczynników  $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$ . W tym celu wykonać minimalizację funkcji kosztu. Jako funkcję kosztu wykorzystać sumę kwadratów reszt (RSS):  $L(\theta) = \sum_{i=0}^T (l_i - \hat{l}_i)^2 + (h_i - \hat{h}_i)^2$ . Ponieważ nie znamy gradientu  $\nabla_{\theta} L(\theta)$ , do minimalizacji wykorzystać metodę Neldera-Meada. Następnie powtórzyć obliczenia, tym razem jako funkcję kosztu wykorzystując:  $L(\theta) = -\sum_{i=0}^T l_i \ln \hat{l}_i - \sum_{i=0}^T h_i \ln \hat{h}_i + \sum_{i=0}^T \hat{l}_i + \sum_{i=0}^T \hat{h}_i$ .

## 2 Argumentacja

W ramach laboratorium zaimplementowano i przeanalizowano model Lotki-Volterry opisany równaniami (1) i (2). Dla części (a), (b) i (c) zadania przyjęto następujące wartości parametrów:  $\alpha_1 = 1.0$ ,  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\beta_2 = 0.02$ . Warunki początkowe to  $x(0) = 20$  i  $y(0) = 20$ . Symulacje przeprowadzono w przedziale czasu  $t \in [0, 80]$  z krokiem  $h_{sim} = 0.05$  (oznaczanym dalej jako  $h$ ).

### Zaimplementowane metody numeryczne:

- **Jawna metoda Eulera:**  $Y_{k+1} = Y_k + hf(t_k, Y_k)$ , gdzie  $Y_k = [x_k, y_k]^T$ , a  $f(t_k, Y_k) = [x_k(\alpha_1 - \beta_1 y_k), y_k(-\alpha_2 + \beta_2 x_k)]^T$ .
- **Niejawna metoda Eulera:**  $Y_{k+1} = Y_k + hf(t_{k+1}, Y_{k+1})$ . Równanie nieliniowe  $G(Y_{k+1}) = Y_{k+1} - Y_k - hf(t_{k+1}, Y_{k+1}) = 0$  rozwiązywano w każdym kroku za pomocą funkcji `scipy.optimize.fsolve`.
- **Półjawna metoda Eulera (wariant 1):** Schemat jest dany przez:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + hf_1(x_k, y_{k+1}) \\ y_{k+1} &= y_k + hf_2(x_k, y_{k+1})\end{aligned}$$

gdzie  $f_1(u, v) = u(\alpha_1 - \beta_1 v)$  oraz  $f_2(u, v) = v(-\alpha_2 + \beta_2 u)$  (zgodnie z ogólnym zapisem  $x' = f_1(x, y)$ ,  $y' = f_2(x, y)$ ). Podstawiając, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + hx_k(\alpha_1 - \beta_1 y_{k+1}) \\ y_{k+1} &= y_k + hy_{k+1}(-\alpha_2 + \beta_2 x_k)\end{aligned}$$

Układ ten rozwiązuje się sekwencyjnie. Najpierw z drugiego równania wyznacza się  $y_{k+1}$  (które zależy niejawnie od siebie oraz jawnie od  $x_k$ ):  $y_{k+1}(1 - h(-\alpha_2 + \beta_2 x_k)) = y_k$ , co daje  $y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + h\alpha_2 - h\beta_2 x_k}$ . Następnie, obliczoną wartość  $y_{k+1}$  podstawia się do pierwszego równania, aby jawnie wyznaczyć  $x_{k+1}$ :  $x_{k+1} = x_k + hx_k(\alpha_1 - \beta_1 y_{k+1})$ .

- **Półjawna metoda Eulera (wariant 2):** Schemat jest dany przez:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + hf_1(x_{k+1}, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + hf_2(x_{k+1}, y_k)\end{aligned}$$

Podstawiając definicje  $f_1$  i  $f_2$ :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + hx_{k+1}(\alpha_1 - \beta_1 y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + hy_k(-\alpha_2 + \beta_2 x_{k+1})\end{aligned}$$

Układ ten również rozwiązuje się sekwencyjnie. Najpierw z pierwszego równania wyznacza się  $x_{k+1}$  (które zależy niejawnie od siebie oraz jawnie od  $y_k$ ):  $x_{k+1}(1 -$

$h(\alpha_1 - \beta_1 y_k)) = x_k$ , co daje  $x_{k+1} = \frac{x_k}{1 - h\alpha_1 + h\beta_1 y_k}$ . Następnie, obliczoną wartość  $x_{k+1}$  podstawia się do drugiego równania, aby jawnie wyznaczyć  $y_{k+1}$ :  $y_{k+1} = y_k + h y_k(-\alpha_2 + \beta_2 x_{k+1})$ .

- **Metoda Rungego-Kutty rzędu 4 (RK4):**

$$k_1 = f(t_k, Y_k)$$

$$k_2 = f(t_k + h/2, Y_k + h k_1/2)$$

$$k_3 = f(t_k + h/2, Y_k + h k_2/2)$$

$$k_4 = f(t_k + h, Y_k + h k_3)$$

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

**Punkty stacjonarne (część b)** wyznaczono poprzez rozwiązanie układu równań (3) i (4).

**Nieziemiennik (część c)**  $H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y)$  był obliczany dla każdej z metod. W implementacji, aby uniknąć problemów z logarytmem zera lub bardzo małych liczb, argumenty logarytmu były ograniczane od dołu przez małą wartość  $\epsilon = 10^{-12}$ .

**Estymacja parametrów (część d):** Celem było oszacowanie wektora parametrów  $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$  na podstawie danych historycznych z pliku `LynxHare.txt`. Dane te zawierają roczne ( $h_{data} = 1$ ) wartości populacji zajęcy i rysy. Warunki początkowe dla symulacji w procesie dopasowania były brane jako pierwsze wartości z danych historycznych:  $Y_0 = [hares\_data[0], lynx\_data[0]]$ . Do symulacji modelu wewnątrz pętli optymalizacyjnej użyto metody RK4 z wewnętrznym krokiem  $h_{solver\_internal} = 0.05$ . Wyniki symulacji były następnie próbkowane w punktach czasowych odpowiadających danym historycznym. Zastosowano dwie funkcje kosztu:

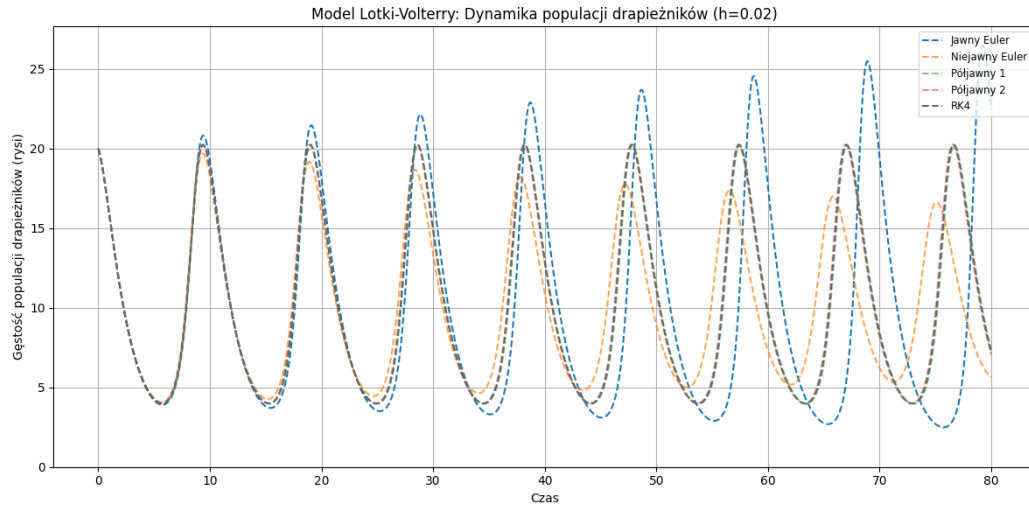
1. Suma kwadratów reszt (RSS):  $L_{RSS}(\theta) = \sum_{i=0}^T (l_i - \hat{l}_i)^2 + (h_i - \hat{h}_i)^2$ , gdzie  $l_i$  i  $h_i$  to dane historyczne, a  $\hat{l}_i$  i  $\hat{h}_i$  to wartości symulowane.
2. Funkcja "Poisson-like":  $L_{PL}(\theta) = -\sum_{i=0}^T l_i \ln \hat{l}_i - \sum_{i=0}^T h_i \ln \hat{h}_i + \sum_{i=0}^T \hat{l}_i + \sum_{i=0}^T \hat{h}_i$ .

Minimalizację obu funkcji kosztu przeprowadzono za pomocą metody Nelder-Meada, dostępnej w `scipy.optimize.minimize`. Jako parametry startowe dla optymalizacji przyjęto  $\theta_0 = [1.0, 0.5, 0.1, 0.02]$  (parametry używane w częściach a-c).

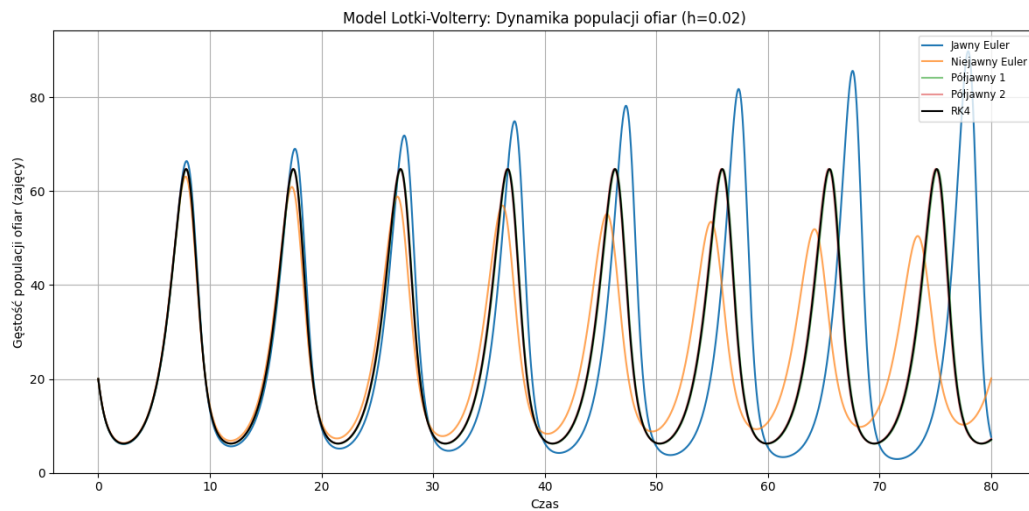
### 3 Wyniki

#### 3.1 Część (a): Symulacje i wykresy

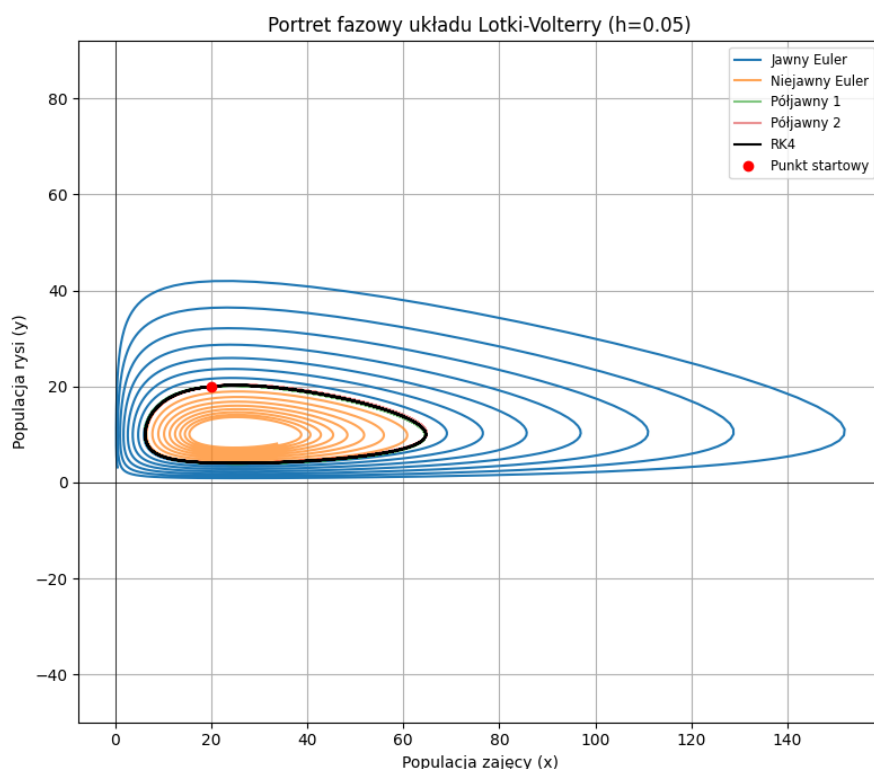
Na Rysunkach 1 i 2 przedstawiono dynamikę populacji zajęcy i rysi w czasie, obliczoną za pomocą różnych metod numerycznych. Rysunek 3 ukazuje portret fazowy układu.



Rysunek 1: Dynamika populacji zajęcy i rysi w czasie dla różnych metod numerycznych ( $h_{sim} = 0.05$ ).



Rysunek 2: Dynamika populacji zajęcy i rysi w czasie dla różnych metod numerycznych ( $h_{sim} = 0.05$ ).



Rysunek 3: Portret fazowy układu Lotki-Volterra dla różnych metod numerycznych ( $h_{sim} = 0.05$ ). Punkt startowy  $(20, 20)$  zaznaczono czerwoną kropką.

**Interpretacja fizyczna portretu fazowego:** Portret fazowy przedstawia trajektorie układu w przestrzeni stanów (populacja zajęcy, populacja rysi). W przypadku modelu Lotki-Volterra dla danych parametrów i warunków początkowych, obserwujemy cykliczne zmiany populacji. Trajektorja tworzy zamkniętą krzywą, co oznacza, że populacje oscylują w sposób okresowy. Kształt i położenie tej krzywej zależą od parametrów modelu oraz warunków początkowych. Dla idealnego, zachowawczego modelu, trajektorja powinna być dokładnie zamknięta. Metody numeryczne mogą wprowadzać błędy, które powodują "dryfowanie" trajektorii (np. rozszerzanie się spirali dla jawnego Eulera lub zwijanie dla niejawnego Eulera przy zbyt dużym kroku, co jest widoczne na wykresie). Metoda RK4 najlepiej odwzorowuje oczekiwaną zamkniętą orbitę.

### 3.2 Część (b): Punkty stacjonarne

Rozwiązując układ równań  $x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0$  oraz  $y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0$ , otrzymujemy dwa punkty stacjonarne:

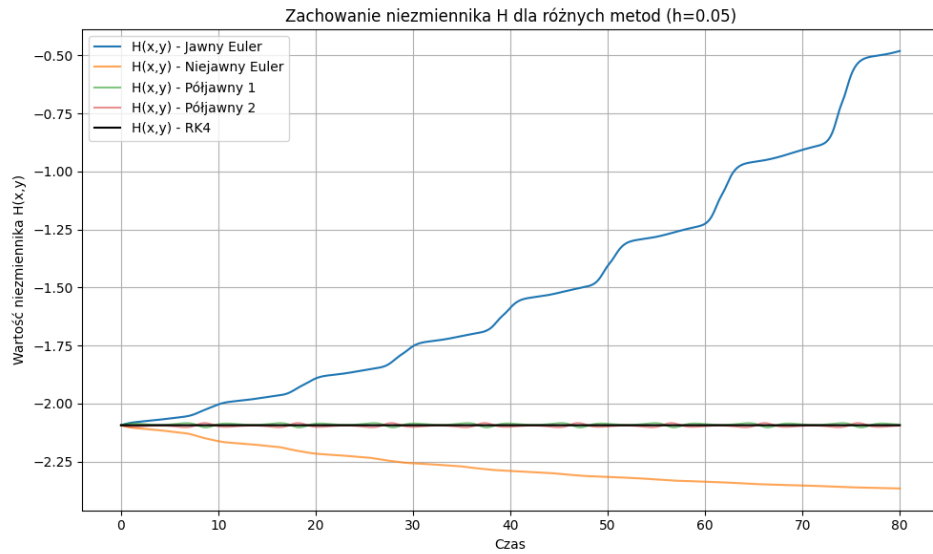
- Trywialny punkt stacjonarny (wymarcie obu populacji):  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ .

- Nietrywialny punkt stacjonarny (współistnienie populacji):  $(x^*, y^*) = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$ .  
Dla parametrów  $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.5, \beta_2 = 0.02$ , otrzymujemy  $(x^*, y^*) = (\frac{0.5}{0.02}, \frac{1.0}{0.1}) = (25, 10)$ .

Punkt  $(0, 0)$  oznacza wymarcie obu populacji. Punkt  $(25, 10)$  oznacza stan równowagi, w którym populacje drapieżników i ofiar współistnieją na stałym poziomie liczebności.

### 3.3 Część (c): Niezmiennik $H(x, y)$

Na Rysunku 4 przedstawiono zachowanie niezmiennika  $H(x, y)$  w czasie dla różnych metod numerycznych. Dla dokładnego rozwiązania układu Lotki-Volterry, niezmiennik



Rysunek 4: Zachowanie niezmiennika  $H(x, y)$  w czasie dla różnych metod numerycznych ( $h_{sim} = 0.05$ ).

$H$  powinien pozostawać stały w czasie. Wykres pokazuje, jak różne metody numeryczne radzą sobie z zachowaniem tej własności. Metoda RK4 najlepiej zachowuje stałość  $H$ . Jawny Euler wykazuje systematyczny wzrost  $H$  (dryf numeryczny, kumulacja "energii"), podczas gdy niejawny Euler i metody półjawne wykazują mniejsze wahania lub tłumienie w porównaniu do jawnego Eulera, ale nadal nie zachowują niezmiennika idealnie tak jak RK4.

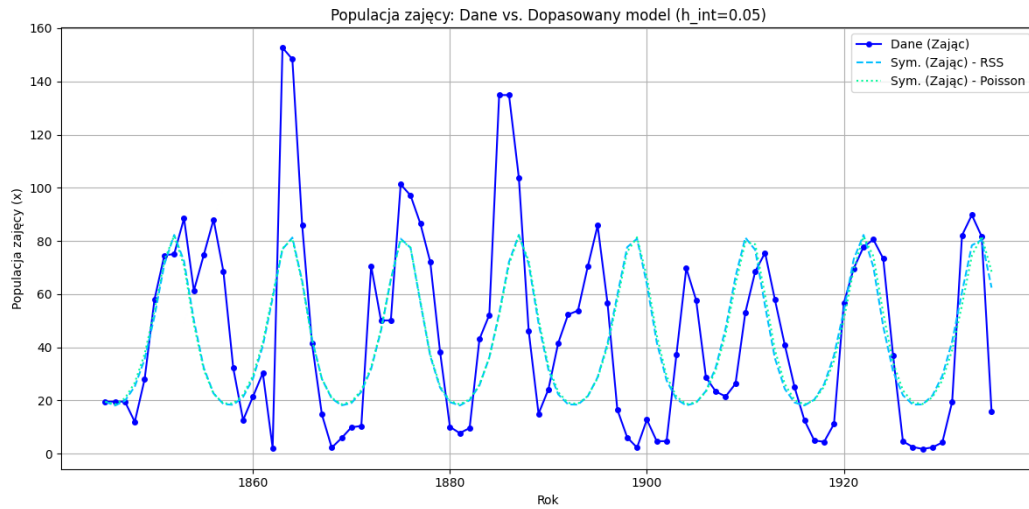
### 3.4 Część (d): Estymacja parametrów

Na podstawie danych z pliku `LynxHare.txt` oszacowano parametry modelu  $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$ . Otrzymano następujące wyniki:

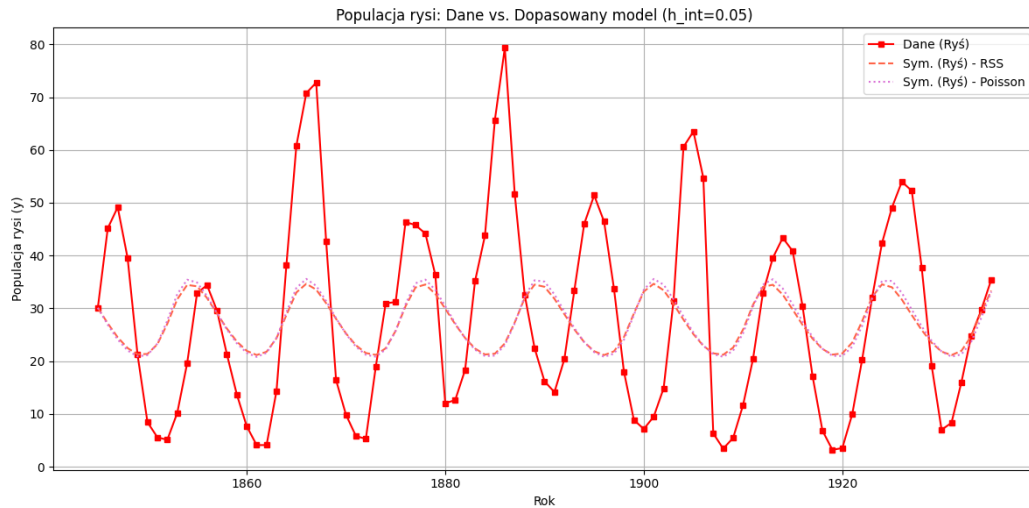
- Minimalizacja funkcji kosztu **RSS**: Zoptymalizowane parametry:  $\hat{\alpha}_1 \approx 1.6711$ ,  $\hat{\alpha}_2 \approx 0.1832$ ,  $\hat{\beta}_1 \approx 0.0611$ ,  $\hat{\beta}_2 \approx 0.0043$ . Wartość funkcji kosztu:  $L_{RSS}(\hat{\theta}) \approx 1.1513 \times 10^5$ .

- Minimalizacja funkcji kosztu **Poisson-like**: Zoptymalizowane parametry:  $\hat{\alpha}_1 \approx 1.5062$ ,  $\hat{\alpha}_2 \approx 0.2014$ ,  $\hat{\beta}_1 \approx 0.0547$ ,  $\hat{\beta}_2 \approx 0.0047$ . Wartość funkcji kosztu:  $L_{PL}(\hat{\theta}) \approx -1.8058 \times 10^4$ .

Rysunki 5 i 6 przedstawiają porównanie danych historycznych z symulacjami modelu przy użyciu zoptymalizowanych parametrów. Rysunek 7 pokazuje błędy (reszt) dopasowania dla metody Poisson-like.



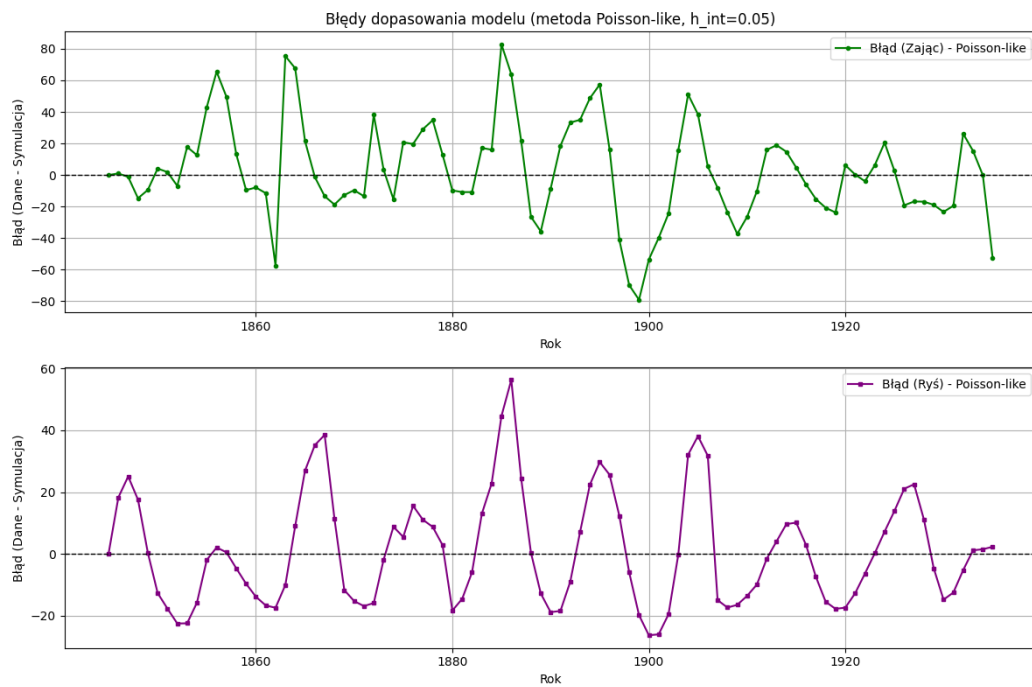
Rysunek 5: Porównanie danych historycznych populacji zajęcy z symulacjami modelu dla zoptymalizowanych parametrów.



Rysunek 6: Porównanie danych historycznych populacji rysy z symulacjami modelu dla zoptymalizowanych parametrów.

Obie metody optymalizacji pozwoliły na znalezienie parametrów modelu Lotki-Volterry, które próbują odtworzyć historyczne dane populacji rysy i zajęcy. Wizualnie,





Rysunek 7: Błędy dopasowania (dane rzeczywiste - dane symulowane) dla populacji zając i rysy przy użyciu parametrów zoptymalizowanych funkcją kosztu Poisson-like.

dopasowanie może nie być idealne, co sugeruje, że prosty model Lotki-Volterry może nie w pełni oddawać złożoności rzeczywistych interakcji ekologicznych. Wykres błędów resztkowych dla metody Poisson-like pokazuje, jak różnią się wartości symulowane od rzeczywistych w poszczególnych latach.

## 4 Wnioski

Przeprowadzone w ramach laboratorium symulacje i analizy pozwoliły na ocenę różnych metod numerycznych w kontekście rozwiązywania układu równań Lotki-Volterry oraz na próbę dopasowania tego modelu do rzeczywistych danych historycznych.

### 1. Porównanie metod numerycznych (części a-c):

- Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4) wykazała zdecydowanie najlepsze właściwości numeryczne. Zarówno w odwzorowaniu dynamiki populacji w czasie (Rysunek ??), jak i w konstrukcji portretu fazowego (Rysunek 3), metoda RK4 generowała stabilne, cykliczne trajektorie, które nie wykazywały numerycznego dryfu. Co kluczowe, RK4 niemal idealnie zachowywała wartość niezmiennika  $H(x, y)$  (Rysunek 4), co świadczy o jej wysokiej dokładności i zdolności do konserwacji własności analitycznych modelu.
- Metody półjawne Eulera (oba warianty) okazały się być rozwiązaniem znacznie przewyższającym klasyczne metody jawne i niejawne, oferując wyniki bliskie jakościowo metodzie RK4. Wykazały one dobrą stabilność i znacznie lepsze zachowanie niezmiennika  $H(x, y)$  w porównaniu do prostej metody jawnej czy niejawnej Eulera, co czyni je atrakcyjną alternatywą, gdy koszt obliczeniowy RK4 jest zbyt wysoki.
- Jawna metoda Eulera, jako metoda najprostszego rzędu, wykazywała wyraźny dryf numeryczny, prowadzący do systematycznego wzrostu wartości niezmiennika  $H(x, y)$  i rozszerzania się trajektorii na portrecie fazowym. Niejawna metoda Eulera, choć stabilniejsza, miała tendencję do numerycznego tłumienia oscylacji, co również objawiało się w zmianach wartości niezmiennika.

### 2. Estymacja parametrów modelu Lotki-Volterry (część d):

- W procesie estymacji parametrów  $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$  na podstawie danych historycznych populacji rysy i zajęcy (`LynxHare.txt`), obie zastosowane funkcje kosztu (suma kwadratów reszt RSS oraz funkcja Poisson-like) w połączeniu z metodą optymalizacji Nelder-Meada dały zbliżone wyniki. Oszacowane wartości parametrów dla obu funkcji kosztu były podobne, co sugeruje pewną spójność w identyfikacji obszaru optymalnego.
- Uzyskane dopasowanie modelu do danych historycznych (Rysunki 5 i 6) można określić jako częściowe. Model z oszacowanymi parametrami odtwarza ogólny, cykliczny charakter dynamiki populacji, jednakże widoczne są istotne rozbieżności. Wydaje się, że populacja zajęcy została nieco lepiej odwzorowana niż populacja rysy.

- Głównymi mankamentami dopasowania są:
    - **Przesunięcie fazowe:** Symulowane cykle populacyjne są często przesunięte w fazie względem danych historycznych.
    - **Niedoszacowanie amplitud:** Model ma tendencję do generowania oscylacji o mniejszych amplitudach niż te obserwowane w rzeczywistych danych, szczególnie dla szczytowych wartości populacji.
  - Analiza wykresu błędów resztkowych (Rysunek 7), zwłaszcza dla populacji rysii, ujawnia pewną regularność, która może sugerować cykliczny charakter nieuwzględnionych w modelu czynników. Wskazuje to, że prosty model Lotki-Volterry może nie wychwytywać wszystkich złożonych interakcji lub zewnętrznych wpływów okresowych (np. klimatycznych, chorób) oddziałujących na rzeczywiste populacje.
3. **Ograniczenia modelu:** Wyniki estymacji parametrów podkreślają, że choć model Lotki-Volterry jest cennym narzędziem koncepcyjnym do zrozumienia podstawowych interakcji drapieżnik-ofiara, jego nieodłączna prostota (np. brak uwzględnienia samozagęszczenia ofiar, funkcjonalnej odpowiedzi drapieżnika innego typu niż liniowy, czy wpływu czynników środowiskowych) ogranicza jego zdolność do precyzyjnego ilościowego odwzorowania złożonych danych empirycznych. Obserwowane rozbieżności mogą wynikać właśnie z tych uproszczeń. Dalsze prace mogłyby obejmować testowanie bardziej rozbudowanych modeli ekologicznych.

## 5 Bibliografia

- dr Rycerz K. – Wykład 9 – Równania różniczkowe (MOWNiT)