2. Funktionen mehrerer Variablen

Eine <u>Niveau</u>- oder <u>Hyperfläche</u> erhält man, wenn man $f(\bar{x}) = c$ setzt.

Eine <u>Mittelbare Funktion</u> nennt man eine Funktion wenn $f(\bar{x})$ gegeben u. $x_i = g_i(t)$ für alle i gilt.
Dann folgt $y = f(x_i) = f(g_i(t)) = f(\bar{g}) = f(t)$

Der <u>Gradient</u> ist der Vektor aller partiellen Ableitungen 1. Ordnung. Durch ihn ist eine Ebene bestimmt, die die Hyperfläche im Punkt P berührt. Diese Ebene heißt Tangentialebene. Der Gradient zeigt immer in die Richtung der steilsten Steigung.

<u>Kettenregel</u>: geg.: $y = f(\bar{x})$, $x_i = g_i(t)$ dann gilt

$\frac{dy}{dt} = \langle \text{grad}\, f(\bar{x}), \frac{d\bar{x}}{dt} \rangle$ → Vektor aus abgeleiteten Teilfunktionen

Für Ableitungen höherer Ordnung, gilt der Satz von Schwarz $\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j \partial x_i}$ für gemischte Ableitungen

<u>Totales Differential</u> ist gegeben, wenn Elemente des Gradienten aufsummiert wurden $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$
Es kann überprüft werden ob df ein tot. diff ist, indem ($df = \sum_{i=1}^{n} f_i(\bar{x}) dx_i$) $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ überprüft wird. (Satz von Schwarz) Gilt dies, kann man die Stammfunktion bilden, indem man die einzelnen Terme f_i nach dx_i integriert. u. die einzelnen ~~Stammfunktionen~~ unbest. integrale zusammenführt, indem man alle Terme aus den unbest. Integralen in eine Gleichung schreibt, die Terme die in mehreren Integralen vorkommen werden nur 1 mal aufgeführt.

lineare DGL inhomogene Lösung. $g(x) = p(x)e^{ax}$

Wenn die Störfunktion ein Polynom von grad n ist multipliziert mit e^{ax} (a kann auch 0 sein) so lautet unser Ansatz $y_i = q(x)e^{ax}$ wobei $q(x)$ ein Polynom von Grad n ist. Um die Koeffizienten dieses Polynoms zu ermitteln, leiten wir dies ab und setzen es in die iDGL ein (e^{ax} kürzt sich weg.

Nun trennen wir diese Gleichung auf, alle Terme mit x^n werden in einer separaten Gleichung zusammengeführt (Koeffizienten vergleich) alle Terme links des "=" zeichen bleiben in der neuen Gleichung auch links davon, die rechts davon bleiben rechts davon.

Gleichungssystem lösen u. in Ansatz einsetzen. Sollten für sämtliche Koeffizienten 0 herauskommen grad des Ansatzes erhöhen und erneut Versuchen.

- Exakte DGL: Eine DGL der Form $P(t,y) + Q(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$ ($\frac{dy}{dt}$ kann auch als y' geschrieben sein) heißt Exakte DGL, wenn $P(t,y)\,dt + Q(t,y)\,dy$ das totale Differential einer Funktion $F(t,y)$ ist. Überprüfung durch Satz von Schwarz

$\Rightarrow$ Stammfunktion bilden, wenn möglich nach y auflösen (nicht immer möglich) nur bei DGL. 1. Ordnung anwendbar

überprüfen durch einsetzen oder Ableiten.

- Separation der Variablen (DGL 1. Ordnung)

Gleichung in Form bringen: ausdruck mit abhängigen variablen = ausdruck mit unabh. Variablen

nun kann man beide Seiten integrieren $\int_{z=y_0}^{y} f(z)\,dz = \int_{s=x_0}^{x} g(s)\,ds$

oder mit unbest Integralen arbeiten. nach integration wenn möglich nach y umstellen.

überprüfen durch Einsetzen oder ableiten

- Variablen - Substitution

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2} - y} = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$ $\Rightarrow$ nicht separierbar subst. $u(x) = \frac{y(x)}{x}$

2. $u' = \frac{y'x - y}{x^2}$ (Quotientenregel) $= \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx} - u\right)$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{1+u^2}$

1. in 2. einsetzen $\Rightarrow$ $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{1+u^2}$

<u>Richtungsableitung</u>: Steigung an der Stelle x_0 in Richtung des Vektors v $f_{\vec{v}}(\vec{x}_0) = \text{grad} f|_{x_0} \cdot \frac{\vec{v}}{|v|}$

Steigung = skalarprodukt aus grad f an x_0 und Einheitsvektor in Richtung v.

—

<u>Extremwerte</u>: Grundvoraussetzung $\underline{\text{grad} f|_{x_0} = 0}$

dann heißt x_0 <u>ein stationärer Punkt</u>.

- Ein Maximum liegt vor, wenn Eigenwerte der Hesse Matrix negativ ~~positiv~~
- Ein Minimum liegt vor, wenn Eigenwerte der Hesse Matrix positiv
- Ein Sattelpunkt ist es wenn 1EW der Hm positiv u. 1 negativ.

Eigenwerte $\underline{\text{Det}(A - \lambda E) = 0} = |A - \lambda E|$

Hesse Matrix: $\left.\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_1 x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_n x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}\right|_{x_0}$ → Punkt einsetzen dann EW berechnen

—

<u>Normalbereich</u>:

- $f_1(x)$, $f_2(x)$ sind zw. a u. b integrierbar
- $f_1(x) < f_2(x)$ zw a u. b
- Integrand hat das selbe Vz innerhalb des Normalbereichs.

—

<u>Integration in Polarkoordinaten</u>:

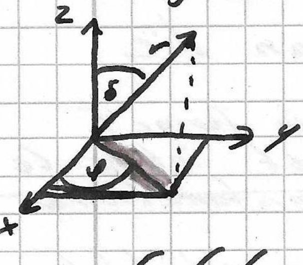
Koordinatentransformation: $x = r\cos\varphi$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$

Dann gilt: $\int_B f(x,y)\,db = \iint f(r,\varphi)\, \underline{r}\, d\varphi\, dr$ $\quad$! r nicht vergessen

—

Integration in Kugelkoordinaten



$z = \cos(\delta) \cdot r$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$x = \sin(\delta) \cdot r \cdot \cos(\varphi)$ $\quad \delta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$

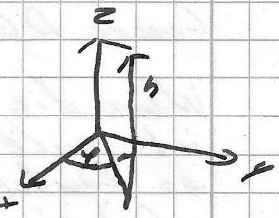
$y = \underline{\sin(\delta) \cdot r} \cdot \sin(\varphi)$

$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{\sin(\delta) \cdot r}\right)$

$$\iiint f(r,\delta,\varphi)\, \underline{\underline{r^2 \sin\delta}}\, dr\, d\delta\, d\varphi$$

! $r^2 \sin\delta$ nicht vergessen

Integration in Zylinderkoordinaten:



Koordinatentransformation $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = h$

$I = \int f(r,\varphi,h)\,\underline{\underline{r}}\,dr\,d\varphi\,dh$! r nicht vergessen

---

Ist in einer DGL keine unabhängige Variable x vorhanden so nennt man diese <u>autonom</u>.

Fügt man einer DGL Anfangsbedingungen hinzu, so wird aus der Lösungsmenge eine spezielle Lösung ausgewählt. man nennt dies dann Anfangswertproblem.

Die höchste in der DGL vorhandene Ableitung gibt deren Ordnung an. (Die Anzahl der AB ist gleich der Ordnung der DGL)

Lineare DGL: $y^{(n)}(x) + c_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + c_0 y(x) = g(x)$
- ist $g(x) = 0$ so nennt man dies eine homogene DGL
- " $g(x) \neq 0$ " " " " " inhomogene DGL.
- sind alle c_i konstanten, so handelt es sich um eine DGL mit konstanten Koeffizienten.

Eine lineare homogene DGL hat ein Fundamentalsystem

Superpositionsprinzip (addition zweier Lösungen ist auch eine Lösung) die allgemeine homogene Lösung einer DGL ist $z(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$

Die allgemeine Lsg der inhomogenen Lsg ist die Lösung der homogenen DGL + eine spezielle Lsg der iDGL.

<u>Eulerscher Ansatz</u>: $y(x) = e^{\lambda x}$ allgemeine Lsg. der <u>homogenen</u> DGL mit <u>konstanten Koeffizienten</u>.

λ bilden FS der DGL werden charakteristische Zahlen ~~der~~ oder Eigenwerte der DGL genannt.

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y_h(x) = k_1 e^{\lambda x} + k_2 e^{\lambda x}$

$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow y_h(x) = (k_1 + k_2 x)\,e^{\lambda x}$

$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \Rightarrow k_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$

$\Rightarrow x\,(k_1\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$

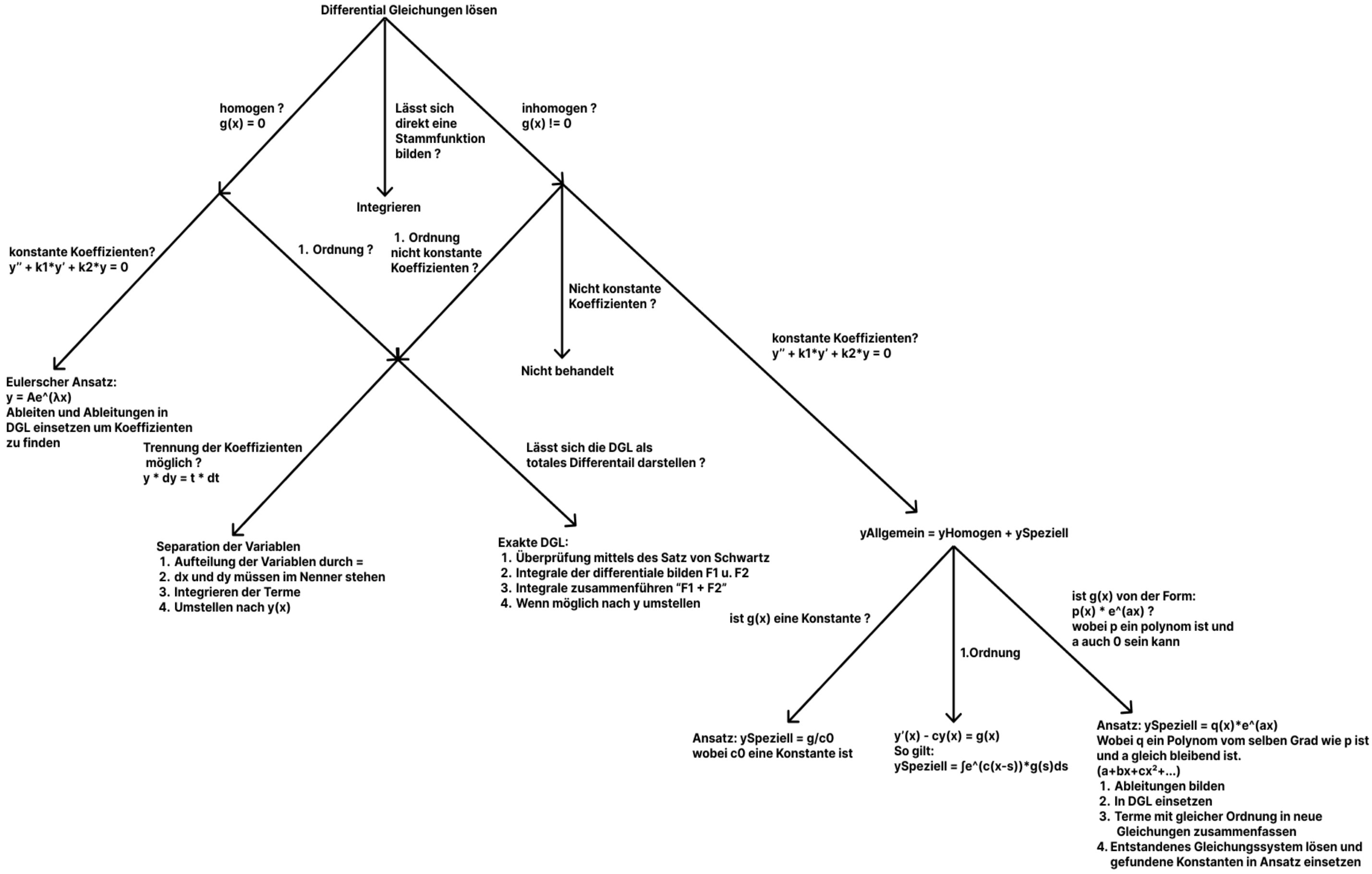
Lineare DGL 1. Ordnung inhomogene Lsg. $y'(x) - c\,y(x) = g(x)$

$$y_i(x) = \int_{s=x_0}^{x} e^{c(x-s)}\,g(s)\,ds \quad \text{(konst Koeff)}$$

Lineare ~~Wenn~~ DGL 1. Ordnung inhomogene Lösung $y'(x) - c(x)y(x) = g(x)$

$$y(x) = \underset{AB}{y_0}\,e^{K(x)-K(x_0)} + \int_{s=x_0}^{x} e^{K(x)-K(s)}\,g(s)\,ds \quad \text{(nicht Konst Koeff)}$$

$$\underline{\underline{K(x) = \int c(x)\,dx}}$$



bezüglich	sin θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
sin θ	$\sin\theta$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\csc\theta}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$
cos θ	$\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\pm\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$
tan θ	$\pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$	$\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\cot\theta}$
csc θ	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\csc\theta$	$\pm\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}$
sec θ	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\pm\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$	$\sec\theta$	$\pm\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$
cot θ	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\pm\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\pm\sqrt{\csc^2\theta-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\cot\theta$

Funktion	1. Ableitung	2. (und k-te Ableitung)
`a = const.`	`0`	`0`
$y = x^n$	$y = n \cdot x^{n-1}$	$y = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$
$y = \sqrt{x}$	$y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$y = -\frac{1}{4 \cdot x \cdot \sqrt{x}}$
$y = a^x; \quad (a > 0, a \neq 1)$	$y' = a^x \cdot \ln(a) = \frac{a^x}{\log_a(e)}$	$y'' = a^x \cdot \ln(a) \cdot \ln(a)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y'' = e^x; \quad y^{(k)} = e^x$
$y = \ln(x); \quad (x > 0)$	$y' = \frac{1}{x}$	$y'' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \log_a x;$ $(a > 0, a \neq 1; x > 0)$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$y'' = -\frac{1}{x^2 \cdot \ln(a)}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$	$y'' = -\sin(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$	$y'' = -\cos(x)$
$y = \tan(x)$	$y' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$y'' = 2\tan(x) \cdot (1 + \tan^2(x))$
$y = \arcsin(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y'' = \frac{x}{(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos(x)$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y'' = \frac{-x}{(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan(x)$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
$y = \sinh(x)$	$y' = \cosh(x)$	$y'' = \sinh(x)$
$y = \cosh(x)$	$y' = \sinh(x)$	$y'' = \cosh(x)$
$y = \tanh(x)$	$y' = \frac{1}{cosh^2(x)} = sech^2(x)$	$y'' = -2\tanh(x) \cdot \frac{1}{cosh^2(x)} = -2\tanh(x) \cdot sech^2(x)$
$y = \coth(x)$	$y' = -\frac{1}{sinh^2(x)} = -csch^2(x)$	$y' = 2 \cdot \coth(x) \cdot \frac{1}{sinh^2(x)} = 2 \cdot \coth(x) \cdot csch^2(x)$

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
$a^x \ln a \quad (a > 0)$	a^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$x^x(1 + \ln(x))$	$x^x \quad (x > 0)$
$e^{x\ln\lvert x\rvert}(\ln\lvert x\rvert + 1)$	$\lvert x\rvert^x = e^{x\ln\lvert x\rvert} \quad (x \neq 0)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$[A 1]
$\ln x$	$x\ln(x) - x$
$x^n \ln x$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) \quad (n \geq 0)$
$u'(x)\ln u(x)$	$u(x)\ln u(x) - u(x)$
$\frac{1}{x}\ln^n x \quad (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}\ln^{n+1} x$
$\frac{1}{x}\ln x^n \quad (n \neq 0)$	$\frac{1}{2n}\ln^2 x^n = \frac{n}{2}\ln^2 x$
$\frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$	$\log_a x$
$\frac{1}{x\ln x}$	$\ln\lvert\ln x\rvert \quad (x > 0, x \neq 1)$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}(x\ln x - x)$

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x)$
$\sin(kx) \cdot \cos(kx)$	$-\frac{1}{4k}\cos(2kx)$
$\sin(kx) \cdot \cos(kx)$	$\frac{1}{2k}\sin^2(kx)$
$\frac{\sin(ax)}{\exp(bx)}$	$\frac{a\exp(bx) - a\cos(ax) - b\sin(ax)}{(a^2+b^2)\exp(bx)}$
$\frac{\cos(ax)}{\exp(bx)}$	$\frac{a\sin(ax) - b\cos(ax) + b\exp(bx)}{(a^2+b^2)\exp(bx)}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$\cot x$
$\arcsin x$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\operatorname{arccot} x$	$x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\frac{x^2}{x^2+1}$	$x - \arctan x$
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right)$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$	$\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$

$$\int \sin(kx)\cdot x = \frac{\sin(kx) - kx\cos(kx)}{k^2} + C$$

$$\int \cos(kx)\cdot x = \frac{kx\sin(kx) + \cos(kx)}{k^2} + C$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$