# Wnioskowanie probabilistyczne (bayesowskie)

Dla dowolnych dwóch zdarzeń ***A***, i ***B***, wzór Bayesa opisuje następującą zależność prawdopodobieństw warunkowych:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A)\Pr(B|A)}{\Pr(B)}$$

## Uprawdopodobnianie hipotez przez fakty

Wśród stwierdzeń, jakie są przetwarzane przy wnioskowaniu, wyróżnimy dwie kategorie:

fakty: stwierdzenia dotyczące dziedziny, których prawdziwość jest znana,

hipotezy: stwierdzenia o nieznanym prawdopodobieństwie prawdziwości.

**Wnioskowanie o prawdziwości możliwych hipotez przy założeniu prawdziwości pewnego zestawu faktów**

Wzór Bayesa ze zmienionymi oznaczeniami:

$$\Pr(h|F) = \frac{\Pr(h)\Pr(F|h)}{\Pr(F)}$$

gdzie ***h***, oznacza pewną hipotezę, a ***F*** pewien zbiór faktów. Tak interpretowany wzór Bayesa mówi, w jaki sposób na prawdopodobieństwo rozważanej hipotezy wpływa znajomość faktów.

Pr(***h***) : prawdopodobieństwo *a priori* hipotezy ***h***, (bez znajomości lub uwzględniania żadnych faktów),

Pr(***h*|*F***): prawdopodobieństwo *a posteriori* hipotezy ***h***, po uwzględnieniu faktów ***F***,

Pr(***F***): prawdopodobieństwo wystąpienia faktów ***F*,**

Pr(***F*|*h***): prawdopodobieństwo, że fakty ***F*** należą do hipotezy ***h***.

Wzór Bayesa, podając przepis na wyznaczenie prawdopodobieństwa *a posteriori*, określa wpływ faktów na uprawdopodobnienie hipotezy. Bezpośrednie zastosowanie w przedstawiony sposób wzoru Bayesa można traktować jako elementarny krok wnioskowania bayesowskiego, który jest w pewnym sensie odpowiednikiem zastosowania reguły wnioskowania w logice.

Prawdopodobieństwo występujące w mianowniku ułamka nie zależy od rozważanej hipotezy. Wynika z tego, że gdyby interesowało nas wyłącznie wybranie hipotezy najbardziej prawdopodobnej z pewnego zestawu, wystarczy ograniczyć się do obliczenia licznika ułamka.

Aby poznać dokładne, bezwzględne wartości prawdopodobieństw a posteriori poszczególnych hipotez, należy wziąć pod uwagę sytuację, w której mamy skończoną liczbę możliwych hipotez $\boldsymbol{h_1}$, $\boldsymbol{h_2}$,... , $\boldsymbol{h_n}$, wykluczających się parami i wyczerpujących wszystkie możliwości (czyli takich, że dokładnie jedna z nich jest prawdziwa). Wówczas:

$$\Pr(F) = \Pr(h_1)\Pr(F|h_1) + \cdots + \Pr(h_n)\Pr(F|h_n)$$

czyli:

$$\Pr(h_i|F) = \frac{\Pr(h_i)\Pr(F|h_i)}{\sum_{j=1}^{n}\Pr(h_j)\Pr(F|h_j)}$$

Zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{n}\Pr(h_i|F) = 1$$

W szczególności biorąc pod uwagę dwie wykluczające się hipotezy $h$ , i $\neg h$, dostajemy:

$$\Pr(h|F) = \frac{\Pr(h)\Pr(F|h)}{\Pr(h)\Pr(F|h)+\Pr(\neg h)\Pr(F|\neg h)}$$

$$\Pr(\neg h|F) = \frac{\Pr(\neg h)\Pr(F|\neg h)}{\Pr(h)\Pr(F|h)+\Pr(\neg h)\Pr(F|\neg h)}$$

## Uwzględnianie pojedynczych faktów

Problematyczne jest określanie prawdopodobieństwa $\Pr(\boldsymbol{F}|\boldsymbol{h})$, gdyż $\boldsymbol{F}$, może oznaczać dowolny zbiór znanych faktów. Jeśli mamy ustalony pewien zbiór $\boldsymbol{F'}$ wszystkich możliwych faktów które mogą być uwzględniane przy wnioskowaniu, to $\boldsymbol{F}$ może być jego dowolnym podzbiorem. Bezpośrednie przypisanie każdemu podzbiorowi prawdopodobieństwa na ogół przekracza możliwości eksperta czy użytkownika systemu wnioskującego.

Przy pewnych założeniach można uniknąć konieczności określania $\Pr(\boldsymbol{F}|\boldsymbol{h})$ dla dowolnego $\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{F'}$, opierając się wyłącznie na prawdopodobieństwach dla pojedynczych faktów $\Pr(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{h})$, gdzie $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{F'}$.

Dla dowolnego faktu $\boldsymbol{f_1}$ możemy – stosując wzór Bayesa – uzyskać:

$$\Pr(h|f_1) = \frac{\Pr(h)\Pr(f_1|h)}{\Pr(f_1)}$$

Dokładając kolejny znany fakt $\boldsymbol{f_2}$, rozważając dwuelementowy zbiór faktów $\{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$, otrzymujemy:

$$\Pr(h|f_1 \wedge f_2) =$$

$$\frac{\Pr(h|f_1)\Pr(f_2|f_1 \wedge h)}{\Pr(f_2|f_1)} =$$

$$\frac{\Pr(h)\Pr(f_1|h)\Pr(f_2|f_1 \wedge h)}{\Pr(f_1)\Pr(f_2|f_1)} =$$

$$\frac{\Pr(h)\Pr(f_1|h)\Pr(f_2|f_1 \wedge h)}{\Pr(f_1 \wedge f_2)}$$

Jeśli założymy, że pojedyncze fakty są warunkowo niezależne względem hipotezy, czyli:

$$\Pr(f_2|f_1 \wedge h) = \Pr(f_2|h)$$

$$\Pr(f_1|f_2 \wedge h) = \Pr(f_1|h)$$

TZW. KLASYFIKATOR NAIWNY

to uzyskujemy:

$$\Pr(h|f_1 \wedge f_2) = \frac{\Pr(h)\Pr(f_1|h)\Pr(f_2|h)}{\Pr(f_1 \wedge f_2)}$$

Dla dowolnej liczby pojedynczych faktów:

$$\Pr(h|f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_m) = \frac{\Pr(h)\prod_{k=1}^{m}\Pr(f_k|h)}{\Pr(f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_k)}$$

Aby posłużyć się nim w celu obliczenia bezwzględnych prawdopodobieństw *a posteriori*, należy tak jak poprzednio wziąć pod uwagę zbiór $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ hipotez wykluczających się parami i wyczerpujących wszystkie możliwości. Wówczas, przy założeniu warunkowej niezależności faktów względem każdej hipotezy, mianownik powyższego ułamka może być wyznaczony w następujący sposób:

$$\Pr(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_m) = \sum_{i=1}^{n}\Pr(h_i)\prod_{k=1}^{m}\Pr(f_k|h_i)$$

W szczególności dla zbioru dwóch wykluczających się hipotez $\{h, \neg h\}$, dostajemy w ten sposób:

$$\Pr(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_m) = \Pr(h)\prod_{k=1}^{m}\Pr(f_k|h) + \Pr(\neg h)\prod_{k=1}^{m}\Pr(f_k|\neg h)$$

Uzyskaliśmy prosty mechanizm wnioskowania bayesowskiego, w którym możemy wyznaczać prawdopodobieństwa *a posteriori* dowolnych hipotez na podstawie znajomości dowolnych zbiorów faktów, pod warunkiem określenia prawdopodobieństw *a priori* każdej hipotezy oraz prawdopodobieństw każdego pojedynczego faktu pod warunkiem prawdziwości każdej hipotezy. Prawdopodobieństwa te stanowią reprezentację niepewnej wiedzy o dziedzinie wnioskowania, która musi być dostarczona systemowi wnioskującemu. Określenie tych prawdopodobieństw w rozsądny sposób jest często możliwe, chociaż oczywiście może niekiedy być trudne.

Przykład: diagnostyka grypy.

Rozważmy następującą prostą ilustrację przedstawionego mechanizmu wnioskowania, traktując rozważane w niej przykładowe fakty i hipotezy z należnym dystansem. Weźmiemy pod uwagę sytuację, w której diagnozując dolegliwości pacjenta ograniczono zbiór możliwych diagnoz do następujących dwóch wykluczających się hipotez:

$\boldsymbol{h}$: pacjent jest chory na grypę,

$\neg\boldsymbol{h}$: pacjent nie jest chory na grypę.

Niech podstawą do wnioskowania będą następujące pojedyncze fakty:

$\boldsymbol{f_1}$ : pacjent ma katar,

$\boldsymbol{f_2}$ : pacjent ma kaszel,

$\boldsymbol{f_3}$ : pacjent ma gorączkę.

Przyjmijmy, że dostarczający wiedzę do systemu diagnostycznego ekspert ustalił następujące wartości prawdopodobieństw:

$$
\begin{array}{ll}
\Pr(h) = 0.1 & \Pr(\neg h) = 0.9 \\
\Pr(f_1|h) = 0.5 & \Pr(f_1|\neg h) = 0.3 \\
\Pr(f_2|h) = 0.3 & \Pr(f_2|\neg h) = 0.3 \\
\Pr(f_3|h) = 0.8 & \Pr(f_3|\neg h) = 0.4
\end{array}
$$

Na tej podstawie obliczamy prawdopodobieństwa faktów:

$$\Pr(f_1) = \Pr(h)\Pr(f_1|h) + \Pr(\neg h)\Pr(f_1|\neg h) = 0.1 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.3 = 0.32$$

$$\Pr(f_2) = \Pr(h)\Pr(f_2|h) + \Pr(\neg h)\Pr(f_2|\neg h) = 0.1 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.3 = 0.3$$

$$\Pr(f_3) = \Pr(h)\Pr(f_3|h) + \Pr(\neg h)\Pr(f_3|\neg h) = 0.1 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.4 = 0.44$$

Aby wyznaczyć prawdopodobieństwa *a posteriori* rozważanych hipotez na podstawie każdego z pojedynczych objawów należy zastosować bezpośrednio wzór Bayesa:

$$\Pr(h|f_1) = \frac{\Pr(h)\Pr(f_1|h)}{\Pr(f_1)} = \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.32} = 0.15625$$

$$\Pr(h|f_2) = \frac{\Pr(h)\Pr(f_2|h)}{\Pr(f_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.3}{0.3} = 0.1$$

$$\Pr(h|f_3) = \frac{\Pr(h)\Pr(f_3|h)}{\Pr(f_3)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.44} = 0.18182$$

W ten sam sposób można wyliczyć prawdopodobieństwa rozważanych hipotez na podstawie dowolnych dwóch objawów oraz wszystkich trzech objawów.