Mathematik für Informatiker II

Institut für Informatik
Freie Universität Berlin
Dozent: Dr. Klaus Kriegel

Mitschrift: Jan Sebastian Siwy

Sommersemester 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Themen der Vorlesung:

- Aufbau des Zahlensystems (reelle und komplexe Zahlen)
- Folgen, Reihen und Grenzwerte
- Reelle Funktionen und Stetigkeit
- Differenzialrechnung
- Asymptotisches Wachstum, O-Notation
- Bestimmtes und unbestimmtes Integral
- Potenzreihen und Tayler-Reihen
- Grundbegriffe der Stochastik

Kapitel 1

Aufbau des Zahlensystems

1.1 Zahlenbereiche und algebraische Strukturen

1.1.1 Natürliche und ganze Zahlen

Unser Zahlensystem kann auf $\mathbb{N}$ zurückgeführt werden. Die Grundlegende Operation in $\mathbb{N}$ ist die Addition.
Problem: Nicht alle Gleichungen haben Lösung in $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x+3=5 &\quad\Rightarrow\quad x=2 \\ x+5=3 &\quad\Rightarrow\quad \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

Lösung: Erweiterung durch Einführung von formalen Inversen $-1, -2, -3 \ldots$ führt zur Erweiterung des Zahlenbereiches auf $\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x+5 &= 3 \\ x+5+(-5) &= 3+(-5) \\ x+0 &= -2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

1.1.2 Gruppe

Definition: $(G, *)$ ist eine *Gruppe*, falls

(G1) $\forall a, b, c \in G \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ (Assoziativität)

(G2) $\exists e \in G \quad \forall a \in G \quad a*e = e = e*a$ (neutrales Element)

(G3) $\forall a \in G \quad \exists \bar{a} \in G \quad a*\bar{a} = e = \bar{a}*a$ (inverses Element)

$(G, *)$ ist *kommutative (abelsche) Gruppe*, falls zudem $\forall a, b \in G \quad a*b = b*a$ gilt.

Beispiele:

- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe.
- $(\mathbb{N}, +)$ erfüllt die Kriterien (G1) und (G2) und ist damit ein *Monoid*.
- $(\mathbb{N}^+, +)$ erfüllt nur das Kriterium (G1) und ist damit eine *Halbgruppe*.
- $(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe.
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist ein Monoid (kein zu 0 inverses Element).
- $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.
- $(S(M), \circ)$, wobei $S(M)$ die Menge der bijektiven Funktionen über M ist, ist eine Gruppe.
  - neutrales Element ist Id_M
  - inverses Element ist f^{-1}

Schlussfolgerungen aus der Definition:

1. Das neutrale Element in einer Gruppe ist eindeutig.
   Beweis: Angenommen e und e' mit $e \neq e'$ erfüllen beide (G2).
   Daraus würde folgen:
   $$e = e * e' \quad \wedge \quad e' = e * e' \quad \Rightarrow \quad e = e'$$

2. Das zu einem $a \in G$ inverse Element ist eindeutig.
   Beweis: Angenommen $\bar{a}$ und $\tilde{a}$ mit $\bar{a} \neq \tilde{a}$ erfüllen beide (G3).
   Daraus würde folgen:
   $$\begin{aligned} \bar{a} * a &= e \\ (\bar{a} * a) * \tilde{a} &= e * \tilde{a} \\ \bar{a} * (a * \tilde{a}) &= \tilde{a} \\ \bar{a} * e &= \tilde{a} \\ \bar{a} &= \tilde{a} \end{aligned}$$

3. Man kann von links und rechts „kürzen".
   Das heißt:
   $$\begin{aligned} a * b = a * c &\quad \Rightarrow \quad b = c \\ a * b = c * b &\quad \Rightarrow \quad a = c \end{aligned}$$

1.1.3 Ring

Definition: $(R, \oplus, \odot)$ ist ein *Ring*, falls

(R1) $(R, \oplus)$ kommutative Gruppe

(R2) $(R, \odot)$ Halbgruppe

(R3) $\forall a, b, c \in R$ (Distributivität)

- $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$
- $(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$

Definition: $(R, \oplus, \odot)$ ist *kommutativer Ring* mit 1, falls die Operation $\odot$ kommutativ und $(R, \odot)$ ein Monoid mit dem neutralen Element 1 ist.

Beispiel: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1.

In Ringen mit $\mathbb{Z}$ kann man Gleichungen der Form $a + x = b$ lösen:

$$\begin{aligned} a + x &= b \\ (-a) + a + x &= b + (-a) \\ x &= b - a \end{aligned}$$

Aber Gleichungen der Form $a * x = b$ sind nicht immer lösbar:

$$2 \cdot x = 3$$

Lösung: Erweiterung des Zahlensystems zu den gebrochenen Zahlen $\mathbb{Q}$.

1.1.4 Gebrochen rationale Zahlen

Allgemeine Vorgehensweise:

1. Darstellung von Brüchen als geordnete Paare:

$$\begin{array}{ccccc} B & = & \mathbb{Z} & \times & \mathbb{N}^+ \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Brüche} & & \text{Zähler} & & \text{Nenner} \end{array}$$

2. Da unterschiedliche Brüche die gleiche Zahl darstellen können, muss B partitioniert werden (Bildung einer Äquivalenzrelation):

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

Die Äquivalenzklassen von $\sim$ bilden die *gebrochen rationalen Zahlen*.

$$\mathbb{Q} = B_{/\sim}$$

3. Operationen auf $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}(a,b)_\sim \oplus (c,d)_\sim &= (ad+bc, cd)_\sim \\ (a,b)_\sim \odot (c,d)_\sim &= (ac, bd)_\sim\end{aligned}$$

   Man müsste noch formal zeigen, dass diese Operationen mit $\sim$ verträglich sind.

4. Nachweis der Ringstruktur:

   (a) $\oplus$ und $\odot$ sind assoziativ und kommutativ.

   (b) $(0,1)_\sim$ ist neutrales Element für $\oplus$.

   (c) $(-a,b)_\sim$ ist $\oplus$-invers zu $(a,b)_\sim$.

   (d) $(1,1)_\sim$ ist neutrales Element für $\odot$.

   (e) $(b,a)_\sim$ ist $\odot$-invers zu $(a,b)_\sim$, wenn $(a,b)_\sim \neq (0,1)_\sim$.

1.1.5 Körper

Definition: $(K,\oplus,\odot)$ ist ein *Körper*, falls

(K1) $(K,\oplus)$ kommutative Gruppe mit dem neutralen Element e

(K2) $(K\backslash\{e\},\odot)$ kommutative Gruppe

(K3) $\forall a,b,c \in K \quad a\odot(b\oplus c) = a\odot b \oplus a\odot c$ (Distributivität)

Beispiele:

- $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ist ein Körper.
- $(\mathbb{B},\not\leftrightarrow,\wedge)$ mit $\mathbb{B}=\{0,1\}$ ist ein Körper.

In einem Körper können lineare Gleichungen der Form $a\cdot x+b=c$ mit $a\neq 0$ gelöst werden:

$$x = \frac{c-b}{a}$$

Jedoch gibt es keine Lösung für $x^2=2$ oder $x^2=-1$ in $\mathbb{Q}$.

Potenzen in $\mathbb{Q}$:

- $a^0 = 1$ für $a \neq 0$
- $a^{k+1} = a\cdot a^k$ für alle $k\in\mathbb{N}$
- $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$

Exponenzialgesetz: $a^{k+l} = a^k\cdot a^l$ für $k,l\in\mathbb{Z}$.

1.1.6 Reelle Zahlen

Durch Erweiterung des Exponenzialgesetzes auf $k, l \in \mathbb{Q}$ erhält man eine Lösung z. B. für $a^{\frac{1}{2}}$ oder $a^{\frac{2}{5}}$:

- $a^1 = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{1}{2}}$ muss $\sqrt[2]{a}$ sein
- $a^1 = a^{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = (a^{\frac{1}{5}})^5 \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{1}{5}}$ muss $\sqrt[5]{a}$ sein
- $a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = (a^{\frac{1}{5}})^2 \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{2}{5}}$ muss $(\sqrt[5]{a})^2$ sein

Verfahren zum Wurzelziehen liefern unendliche Dezimalbrüche.

Definition: Eine positive *reelle Zahl* ist ein unendlicher Dezimalbruch der Form $z_0{,}z_1{,}z_2{,}z_3\ldots$, wobei $z_0 \in \mathbb{N}$ und $z_i \in \{0\ldots9\}$ für $i \geq 1$.
Dezimalbrüche, die mit $\bar{9}$ enden, sind nicht zulässig $(2{,}43\bar{9} = 2{,}44)$.

Satz: Eine reelle Zahl $z_0{,}z_1z_2z_3\ldots$ ($z_0 \in \mathbb{N}$, $z_i \in \{0\ldots9\}$ für $i \geq 1$) ist genau dann rational, wenn die Folge $z_1z_2\ldots$ periodisch wird.

Beweis: Beim Ausführen des schriftlichen Divisionverfahrens von $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $q \geq 1$, erhält man, sobald die letzte Stelle von p in den Divisionsalgorithmus aufgenommen ist, in jedem weiteren Schritt einen Rest aus $\{0, \ldots q-1\}$.

- Möglichkeit 1: Irgendwann tritt Rest 0 ein. Damit bricht die Division ab und der Quotient hat die Form $z_0, z_1 \ldots z_k 00\ldots$
- Möglichkeit 2: Rest 0 tritt nie auf. Damit muss sich ein Rest wiederholen und der Dezimalbruch wird periodisch

Beispiel: $93 : 7 = 13{,}\overline{285714}$

Lemma: Ein periodischer Dezimalbruch lässt sich als Bruch darstellen.

Beobachtung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9} &= 0{,}\bar{1} \\
\frac{1}{99} &= 0{,}\overline{01} \\
\frac{1}{999} &= 0{,}\overline{001} \\
&\vdots \\
\frac{1}{10^k - 1} &= 0{,}\overline{\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1}
\end{aligned}$$

Beispiel:

- $7{,}2\bar{3} = \frac{72}{10} + \frac{1}{10} \cdot 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{72}{10} + \frac{1}{30} = \frac{217}{30}$
- $8{,}31\overline{23} = \frac{831}{100} + \frac{1}{100} \cdot 23 \cdot \frac{1}{99} = \frac{831}{100} + \frac{23}{9900} = \frac{20573}{2475}$

1.2 Die reellen Zahlen als geordnete Struktur

1.2.1 Ordnung der reellen Zahlen

Definition: Positive reelle Zahlen werden folgendermaßen geordnet:

Wenn $z = z_0{,}z_1z_2\dots$ und $u = u_0{,}u_1z_2\dots$ $(z, u \in \mathbb{R}^+)$ unterschiedlich sind, dann sei $i \in \mathbb{N}$ der erste Index, an dem ein Unterschied auftritt. Die Werte an dieser Stelle entscheiden, welche Zahl die kleinere ist.

$$z_0{,}z_1z_2\dots < u_0{,}u_1u_2\dots \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in \mathbb{N} \quad z_i < u_i \quad \wedge \quad \forall j < i \quad z_j = u_j$$

Durch Erweitung des Zahlenbereiches auf alle reellen Zahlen $z, u \in \mathbb{R}$, werden die Zahlen folgendermaßen geordnet. Sind beide Zahlen negativ, dann ist diejenige Zahl kleiner, deren Betrag größer ist.

$$-z_0{,}z_1z_2 < -u_0{,}u_1u_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_0, u_1u_2 < z_0, z_1z_2$$

Hat eine Zahl negatives Vorzeichen, die andere aber nicht, dann ist die negative die kleinere.

Satz: Für zwei beliebige reelle Zahlen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $r_1 < r_2$ gibt es eine rationale Zahl q mit $r_1 < q < r_2$.

Beweis: Sei $r_1 = z_0, z_1z_2z_3\dots$ und $r_2 = u_0, u_1u_2u_3\dots$ und $r_1 < r_2$, dann gilt nach Definition (siehe 1.2.1) $\exists i \in \mathbb{N} \quad z_i < u_i \quad \wedge \quad \forall j < i \quad z_j = u_j$. Außerdem enden r_1 und r_2 *nicht* auf $\bar{9}$. Sei k erste Stelle hinter i, für die $z_k \neq 9$, dann gibt es ein $q = z_0, z_1z_2\dots(z_k + 1)\bar{0}$, so dass $r_1 < q < r_2$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2{,}1436|4|9997\dots \\ q &= 2{,}1436|4|9998\bar{0} \\ r_2 &= 2{,}1436|5|0000\dots \end{aligned}$$

1.2.2 Schnitte, Schranken Maxima, Minima und Grenzen

Definitionen: Sei $(M, \leq)$ eine linear geordnete Menge.

- Eine Partition von M in die Mengen A und B ist ein *Schnitt* von M, wenn $\forall x \in A \;\; \forall y \in B \;\; x \leq y$.
(Achtung: $A \cup B = M \;\; \wedge \;\; A \cap B = \emptyset$, da Partition)

- Sei C Teilmenge von M.
  - x ist *obere Schranke* von C, falls $\forall y \in C \;\; y \leq x$.
  - x ist *untere Schranke* von C, falls $\forall y \in C \;\; y \geq x$.
  - x ist größtes Element *(Maximum)* von C, falls x obere Schranke von C ist und $x \in C$.
  - x ist kleinstes Element *(Minimum)* von C, falls x untere Schranke von C ist und $x \in C$.
  - x ist obere Grenze *(Supremum)* von C, falls x die kleinste obere Schranke von C ist.
  - x ist untere Grenze *(Infimum)* von C, falls x die größte untere Schranke von C ist.

- Es gibt drei Typen von Schnitten:
  - Typ 1: A hat ein größtes Element und B hat ein kleinstes Element.
  - Typ 2: A hat *kein* größtes Element und B hat *kein* kleinstes Element.
  - Typ 3: A hat ein größtes Element und B hat *kein* kleinstes Element oder umgekehrt *(Dedekind'scher Schnitt)*.

Beispiele:

- $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, \ldots\}$ ist Typ-1-Schnitt von $\mathbb{N}$.
- $A = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 \leq 2\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 \geq 2\}$ ist Typ-2-Schnitt von $\mathbb{Q}^+$.
- $A = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid r^2 \leq 2\}$, $B = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid r^2 > 2\}$ ist Typ-3-Schnitt von $\mathbb{R}^+$.
- $A = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid r^2 < 2\}$, $B = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid r^2 \geq 2\}$ ist Typ-3-Schnitt von $\mathbb{R}^+$.

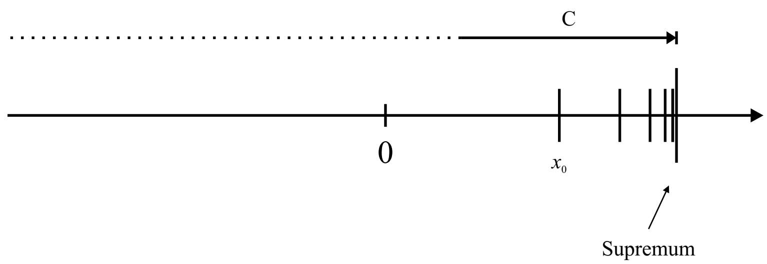
Hilfssatz: Besitzt C ein Maximum, so ist dieses Maximum gleich dem Supremum (entsprechendes gilt für das Minimum in bezug auf das Infimum).

Beweis: Sei a das Maximum von C, dann ist $a \in C$ und a ist obere Schranke von C. Gäbe es eine kleine obere Schranke a', dann müsste a' auch obere Schranke für a sein, da $a \in C$. Daraus würde folgen, dass $a \leq a'$. Das ist ein Widerspruch, da a' kleiner als a sein sollte.

Satz: Jede von oben (unten) beschränke Teilmenge $C \neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum).

Beweis:

- Fall 1: C ist von oben beschränkt und $C \cap \mathbb{R}^{\geq 0} \neq \emptyset$.



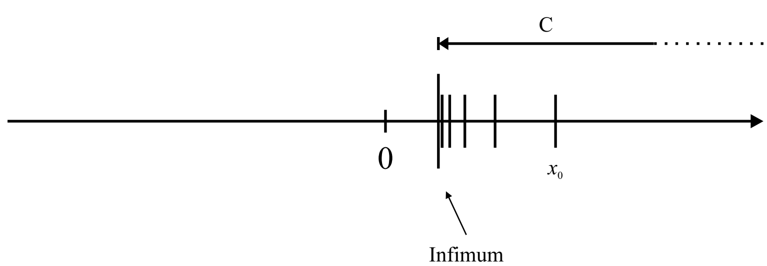
Sei x_0 die größte Zahl aus $\mathbb{N}$, so dass $x_0, \ldots \in C$ existiert;
sei x_1 die größte Zahl aus $\{0 \ldots 9\}$, so dass $x_0, x_1 \ldots \in C$ existiert; ...
sei x_i die größte Zahl aus $\{0 \ldots 9\}$, so dass $x_0, x_1 x_2 \ldots x_i \ldots \in C$ existiert.

Man erhält einen unendlichen Dezimalzahl $x_0, x_1 x_2 \ldots$.

Problem: Für $C = \{0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ \ldots\}$ wäre $0{,}\bar{9}$ nicht zulässig.
Lösung: Endet $x_0{,}x_1 x_2 \ldots$ mit $\bar{9}$ ab der Stelle i, so ersetzen wir diese Folge durch $x_0{,}x_1 x_2 \ldots (x_{i-1} + 1)\bar{0} \ldots$.

$\Rightarrow$ Die so konstruierte Zahl ist das Supremum von C.

- Fall 2: C ist von unten beschränkt, und alle Elemente aus C sind positiv oder 0 (d.h. $C \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$).

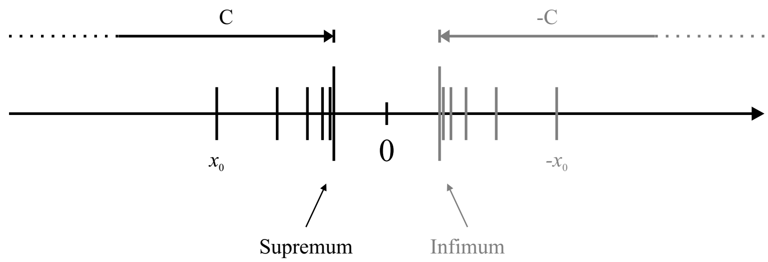


Sei x_0 die kleinste Zahl aus $\mathbb{N}$, so dass $x_0, \ldots \in C$ existiert;
sei x_1 die kleinste Zahl aus $\{0 \ldots 9\}$, so dass $x_0{,}x_1 \ldots \in C$ existiert; ...
sei x_i die kleinste Zahl aus $\{0 \ldots 9\}$, so dass $x_0{,}x_1 x_2 \ldots x_i \ldots \in C$ existiert.

Man erhält einen unendlichen Dezimalzahl $x_0{,}x_1 x_2 \ldots$.

$\Rightarrow$ Die so konstruierte Zahl ist das Infimum von C.

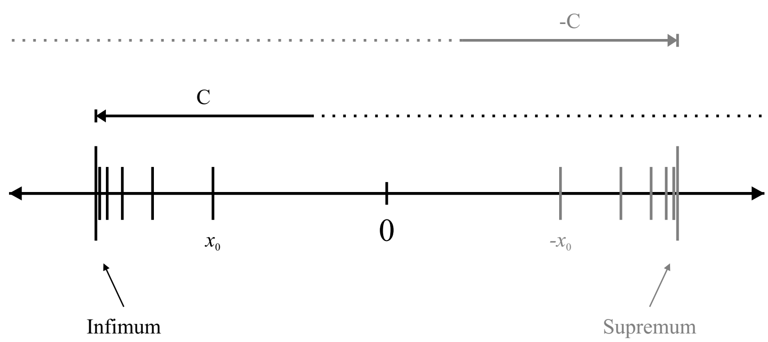
- Fall 3: C ist von oben geschränkt, und alle Elemente aus C sind negativ (d.h. $C \cap \mathbb{R}^{\geq 0} = \emptyset \Rightarrow C \subseteq \mathbb{R}^{-}$).



Man konstruiert $-C = \{x \mid -x \in C\}$ und führt es auf den Fall 2 zurück.

$$\sup C = -\inf -C$$

- Fall 4: C ist von unten geschränkt und $C \not\subseteq \mathbb{R}^{\geq 0} \Rightarrow C \cap \mathbb{R}^{-} \neq \emptyset$.



Man konstruiert $-C = \{x \mid -x \in C\}$ und führt es auf den Fall 1 zurück.

$$\inf C = -\sup -C$$

Satz: Für jeden Schnitt A, B von $\mathbb{R}^+$ gilt $\sup A = \inf B$.

Beweis: Alle $x \in B$ sind obere Schranke für A. Die kleinste obere Schranke (Supremum) von A muss kleiner oder gleich x für alle $x \in B$ sein. Das Supremum von A ist untere Schranke von B. Damit ist die größte untere Schranke (Infimum) von B größer oder gleich dem Supremum von A.
Das heißt: $\sup A \leq \inf B$. Angenommen $\sup A < \inf B$, dann gäbe es ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass $\sup A < q < \inf B$ wobei $q \notin A \wedge q \notin B$. Dies wäre ein Widerspruch, denn $A \cup B = \mathbb{R}^+$.
Damit ist $\sup A = \inf B$.

Folgerung: Jeder Schnitt von $\mathbb{R}^+$ ist ein Dedekind'scher Schnitt. Sei A, B Schnitt in $\mathbb{R}^+$ mit $c = \sup A = \inf B$.

- Fall 1: A hat ein größtes Element und B hat *kein* kleinstes Element.

$$c \in A \wedge c \notin B \quad \Rightarrow \quad \sup A = \max A$$

- Fall 1: A hat *kein* größtes Element und B hat ein kleinstes Element.

$$c \notin A \wedge c \in B \quad \Rightarrow \quad \inf B = \min B$$

1.2.3 Ungleichungen

Basisungleichungen: Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

- $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a + c \leq b + c$
- $a \leq b \quad \wedge \quad c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c$
- $0 \leq a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leq -a \leq 0$
- $a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} > 0$

Weitere Ungleichungen: Für beliebige $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

- $a \leq b \quad \wedge \quad c \leq d \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + d$
- $a \leq b \quad \wedge \quad c \leq 0 \quad \Rightarrow \quad b \cdot c \leq a \cdot c$
- $0 \leq a \leq b \quad \wedge \quad 0 \leq c \leq d \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a \cdot c \leq b \cdot d$
- $0 \leq a \leq b \quad \wedge \quad c \leq d \leq 0 \quad \Rightarrow \quad b \cdot c \leq a \cdot d \leq 0$
- $0 < a \leq b \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
- $a \leq b < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$
- $a^2 \geq 0$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Bernoulli-Ungleichung:

$$(1+h)^n \geq 1+nh \qquad (\text{mit } h \geq -1, h \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+)$$

Beweis über Induktion:

$$\begin{array}{rcll} n=1 & \Rightarrow & 1+h \leq 1+h & \\ n \to n+1 & \Rightarrow & (1+h)^{n+1} & \\ & = & (1+h)^n \cdot (1+h) & (\text{Bemerkung: } 1+h \geq 0) \\ & \geq & (1+nh) \cdot (1+h) & (\text{nach Induktionsvoraussetzung}) \\ & = & 1+nh+h+nh^2 & \\ & = & 1+(n+1)h+n \cdot h^2 & \\ & \geq & 1+(n+1)h & \end{array}$$

1.2.4 Intervalle

Die Klammern [bzw.] bezeichnen ein von links bzw. rechts abgeschlossenes Intervall; die Klammern (bzw.) bezeichnen ein von links bzw. rechts offenes Intervall. Das heißt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ [a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (-\infty,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\ (a,\infty) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ (-\infty,\infty) & = & \mathbb{R} \\ (a-\varepsilon, a+\varepsilon) & & \varepsilon\text{-Umgebung von } a \text{ für } a \in \mathbb{R} \text{ und } \varepsilon > 0 \end{array}$$

1.2.5 Beträge

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$$

Regeln:

- $-|a| \leq a \leq |a|$
- $|-a| = |a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- $|a| \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leq a \leq b$
- $-\left(|a| + |b|\right) \leq a + b \leq |a| + |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
- $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$
- $2 \cdot |a \cdot b| \leq a^2 + b^2$

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq (a-b)^2 & \wedge & 0 \leq (a+b)^2 \\ 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab & \wedge & 0 \leq a^2 + b^2 + 2ab \\ 2ab \leq a^2 + b^2 & \wedge & -(a^2 + b^2) \leq 2ab \\ -(a^2 + b^2) \leq & 2ab & \leq a^2 + b^2 \\ 2 \cdot |a \cdot b| & \leq & a^2 + b^2 \end{array}$$

1.3 Komplexe Zahlen

1.3.1 Einführung

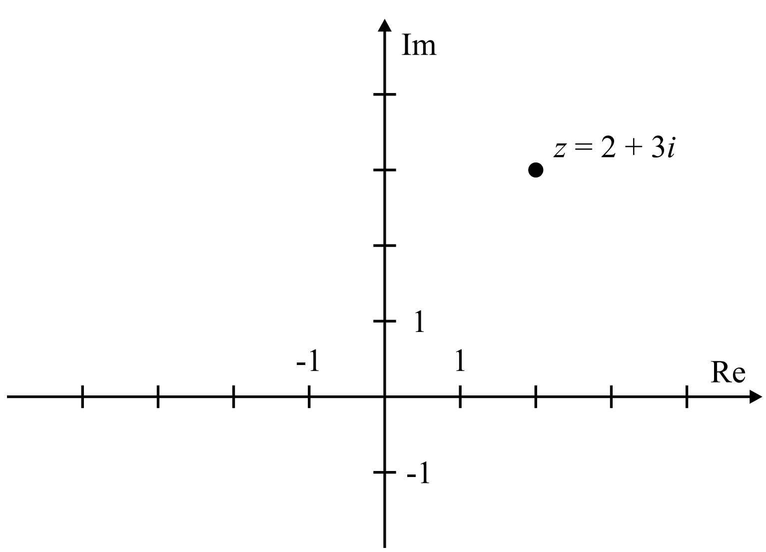
Idee: Einführung einer imaginären Einheit für $i = \sqrt{-1}$. Damit werden die folgenden Gleichungen lösbar:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \pm\sqrt{-1} \\ &= \pm i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 5 &= 0 \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{-4} \\ &= 1 \pm \sqrt{4(-1)} \\ &= 1 \pm 2\sqrt{-1} \\ &= 1 \pm 2i \end{aligned}$$

Definition: Eine *komplexe Zahl* $z \in \mathbb{C}$ hat die Form $z = x + yi$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $x = \text{Re } z$ der Realteil und $y = \text{Im } z$ der Imaginärteil von z genannt wird.

Darstellung: Eine komplexe Zahl wird als Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bzw. als Punkt in der Ebene (komplexe Zahlenebene, *Gauss-Ebene*) dargestellt.



Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist auch eine komplexe Zahl $x+0i$, insbesondere $0 = 0+0i$.

1.3.2 Gleichheit und Rechenregeln

Rechenregeln: $z = x + yi$ und $w = u + vi$ mit $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z = w \quad &\Leftrightarrow \quad x = u \;\wedge\; y = v \\ z \pm w \quad &= \quad (x \pm u) + (y \pm v)i \\ z \cdot w \quad &= \quad (xu - yv) + (xv + yu)i \\ \frac{z}{w} \quad &= \quad \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}i \qquad \text{für } w \neq 0 \end{aligned}$$

Herleitung: Multiplikation

$$\begin{aligned} z \cdot w \quad &= \quad (x + yi)(u + vi) \\ &= \quad xu + xvi + yiu + yivi \qquad \text{(Bemerkung: } i^2 = -1\text{)} \\ &= \quad (xu - yv) + (xv + yu)i \end{aligned}$$

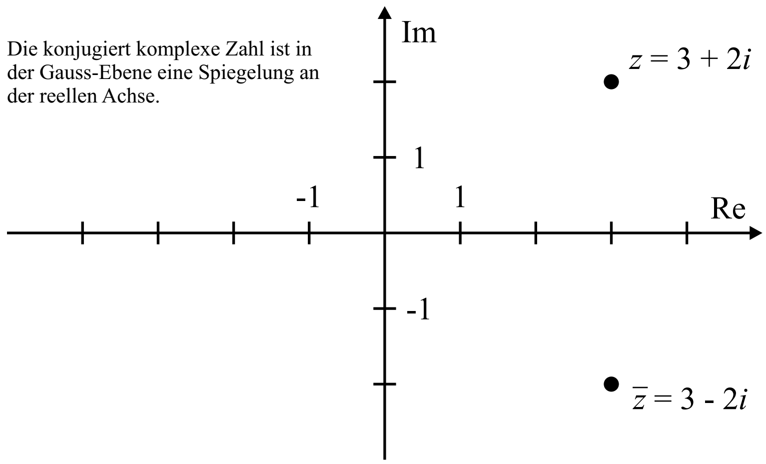
Herleitung: Division

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} \quad &= \quad \frac{x + yi}{u + vi} \\ &= \quad \frac{(x + yi)(u - vi)}{(u + vi)(u - vi)} \\ &= \quad \frac{(xu + yv) + (yu - xv)i}{u^2 - v^2 i^2} \\ &= \quad \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \frac{yu - xv}{u^2 + v^2}i \end{aligned}$$

1.3.3 Konjugiert komplexe Zahl und Betrag

Definition: Für eine komplexe Zahl $z = x + yi \in \mathbb{C}$ wird die Zahl $\overline{z} = x - yi$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl* genannt.

Folgerung: $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$



Definition: Der Betrag $|z| \in \mathbb{R}$ einer komplexen Zahl $z = x + yi$ ist definiert durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Folgerung: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

Rechenregeln: $z, w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\overline{z + w} &= \overline{z} + \overline{w} \\
\overline{z \cdot w} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \\
\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \\
\overline{\overline{z}} &= z \\
\text{Re } z &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\
\text{Im } z &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \\
|z \cdot w| &= |z| \cdot |w| \\
\left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|} \\
|\overline{z}| &= |z|
\end{aligned}$$

Herleitung: $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ mit $z = x + yi$ und $w = u + vi$

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= (xu - yv) + (xv + yu)i \\
\overline{z \cdot w} &= (xu - yv) + (-xv - yu)i \\
\overline{z} \cdot \overline{w} &= (x - yi) \cdot (u - vi) \\
&= (xu - yv) + (-xv - yu)i
\end{aligned}$$

Herleitung: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

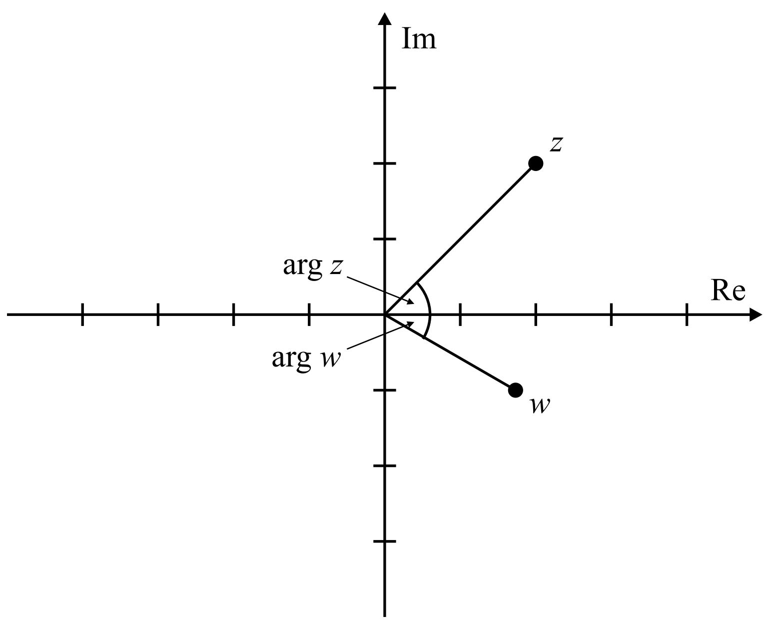
$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= \sqrt{(zw)(\overline{zw})} \\ &= \sqrt{z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}} \\ &= \sqrt{z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}} \\ &= \sqrt{z \cdot \overline{z}} \cdot \sqrt{w \cdot \overline{w}} \\ &= |z| \cdot |w| \end{aligned}$$

1.3.4 Polarform

Definition: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist eindeutig bestimmt durch ihre Polarkordinaten $|z|$ und $\arg z$, wobei das Argument (Phase) von z, der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 nach z ist, der mit (entgegen) den Uhrzeigersinn negativ (positiv) gemessen wird. Der Hauptwert für $\arg z$ wird aus $(-\pi, \pi]$ gewählt.

Achtung: Für die Zahl 0 ist arg nicht definiert!

Beispiel: $z = 2 + 2i$ und $w = \sqrt{3} - i$



$|z| = \sqrt{8} \qquad \arg z = \dfrac{\pi}{4} \qquad\qquad |w| = \sqrt{3+1} = 2 \qquad \arg w = -\dfrac{\pi}{6}$

Kartische Darstellung $\mapsto$ Polardarstellung:

$$z = x + yi \quad \mapsto \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \arg = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|} & \text{falls} \quad y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{|z|} & \text{falls} \quad y < 0 \end{cases}$$

Polardarstellung $\mapsto$ Kartische Darstellung:

$$r = |z| \quad \varphi = \arg z \quad \mapsto \quad z = r \cdot \cos \varphi + r \cdot i \cdot \sin \varphi$$

1.3.5 Eulers komplexe Exponentialfunktion

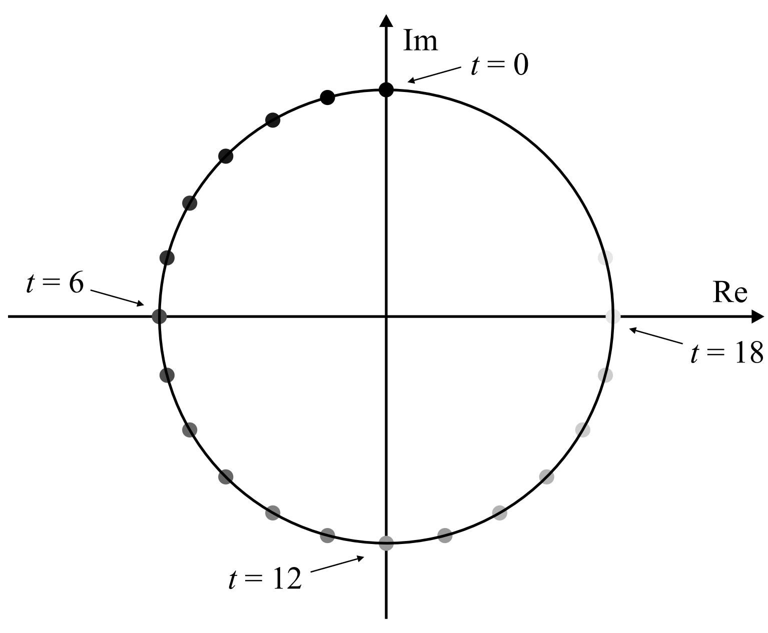
Definition: *Eulers komplexe Exponentialfunktion* ist definiert durch

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Bemerkungen:

1. In diesem Fall handelt es sich um eine Definition. Es ist jedoch auch die einzig sinnvolle Erweiterung der reellen Exponentialfunktion auf komplexe Zahlen.
2. $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \sqrt{1} = 1$
   D.h. $e^{i\varphi}$ liegt auf dem Einheitskreis.
3. Wächst $\varphi(t) = \alpha + \omega t$ linear, so bewegt sich $z(t) = e^{i\varphi(t)}$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf dem Einheitskreis.

   Beispiel: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\omega = \frac{\pi}{12}$



Exponentialform: Man erweitert Eulers komplexe Exponentialfunktion auf alle komplexen Zahlen.

$$e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}$$

D.h. $|e^{x+yi}| = e^x$ und $\arg\left(e^{x+yi}\right) = y \pm 2k\pi \in (-\pi, \pi]$

Vorteile: Einfache Multiplikations- und Divisionsformeln.

$$\begin{aligned}
z &= |z| \cdot e^{i\varphi} \\
w &= |w| \cdot e^{i\psi} \\
z \cdot w &= |z| \cdot e^{i\varphi} \cdot |w| \cdot e^{i\psi} = |z| \cdot |w| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = |z| \cdot |w| \cdot e^{i\cdot(\varphi+\psi)} \\
\frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|} \cdot \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = \frac{|z|}{|w|} \cdot e^{i\cdot(\varphi-\psi)}
\end{aligned}$$

Satz (De Moivre):

a) $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot (\cos\psi + i\sin\psi) \\
&= \cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi + i\left(\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\psi\right) \\
&= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \\
&= e^{i(\varphi+\psi)}
\end{aligned}$$

b) $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}$ (Beweis über Induktion von a))

c) $\overline{\left(e^{i\varphi}\right)} = e^{i(-\varphi)} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$

$$\begin{aligned}
\overline{\left(e^{i\varphi}\right)} &= \overline{(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \\
&= \cos\varphi - i\sin\varphi \\
&= \cos\varphi + i\left(-\sin\varphi\right) \\
&= \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) \\
&= e^{i(-\varphi)} \\
&= \frac{1}{e^{i\varphi}}
\end{aligned}$$

Einheitswurzel in $\mathbb{C}$:

Definition: $\sqrt[n]{1}$ bezeichnet in $\mathbb{C}$ die Menge aller Nullstellen des Polynoms $x^n - 1$ (d.h. $\mathbb{L}$ von $x^n = 1$).

$$\sqrt[n]{1} = \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_{n-1}\} = \left\{1, e^{i \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{n}}, e^{i \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{n}}, \dots e^{i \cdot (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}}\right\}$$

Bemerkung: In $\mathbb{R}$ ist es nur die positive Wurzel, falls sie existiert.

$$\begin{array}{lcl} \text{in } \mathbb{R} \ \sqrt[2]{1} & = & 1 \\ \text{in } \mathbb{C} \ \sqrt[2]{1} & = & \{1, -1\} \end{array}$$

Überprüfung der Formel durch Potenzieren:

$$\left(e^{i \cdot \left(j \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}\right)^n = e^{i \cdot n \cdot j \cdot \frac{2\pi}{n}} = e^{i \cdot (2\pi j)} = 1$$

Wurzel beliebiger Zahlen in $\mathbb{C}$:

$\sqrt[n]{a}$ (mit $a = |a| \cdot e^{i\varphi}$) wird folgendermaßen bestimmt:

$$\sqrt[n]{a} \Rightarrow \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi}{n}}$$

Dies ist das erste Element der Lösungsmenge. Alle weiteren Lösungen durch Multiplikation dieser Lösung mit den Lösungen der n-ten Einheitswurzel ermittelt.

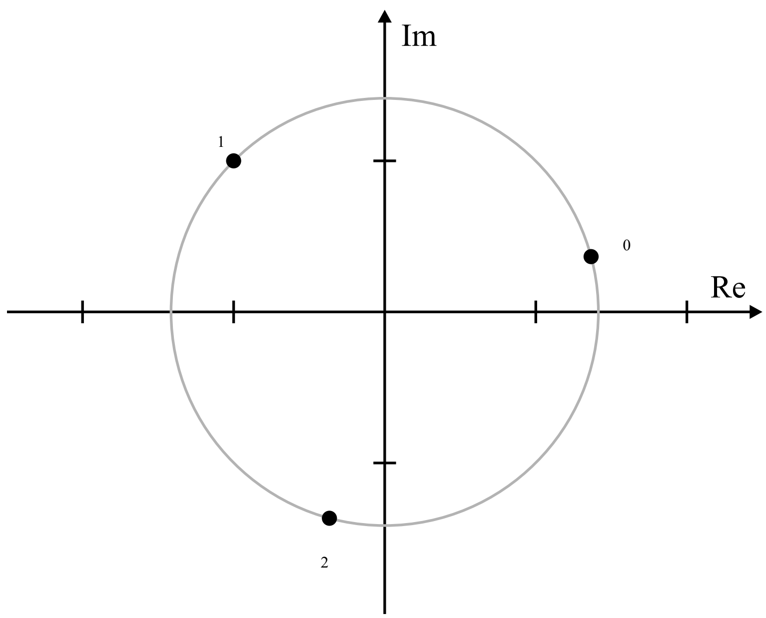
$$\sqrt[n]{a} = \left\{ \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi}{n}} \cdot \zeta_j \;\middle|\; 0 \leq j \leq n \right\}$$

Überprüfung der Formel durch Potenzieren:

$$\left(\sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi}{n}}\right)^n = \sqrt[n]{|a|}^n \cdot \left(e^{i \cdot \frac{\varphi}{n}}\right)^n = |a| \cdot e^{i\varphi} = a$$

Beispiel: Zu bestimmen ist $\sqrt[3]{2+2i}$.

$$\begin{aligned}
a &= 2+2i \\
|a| &= \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} \\
\sqrt[3]{|a|} &= \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{2} \\
\arg a &= \varphi = \frac{\pi}{4} \\
\sqrt[3]{a} &\Rightarrow \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}} \\
\sqrt[3]{a} &= \left\{\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}, \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right\} \\
&= \left\{\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{17\pi}{12}}\right\}
\end{aligned}$$



1.3.6 Fundamentalsatz der Algebra (Gauss)

Satz: Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-a} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ hat eine komplexe Nullstelle. Folglich kann $p(z)$ in der Form

$$a_n \cdot \prod_{\mu=1}^{n} (z - z_\mu)$$

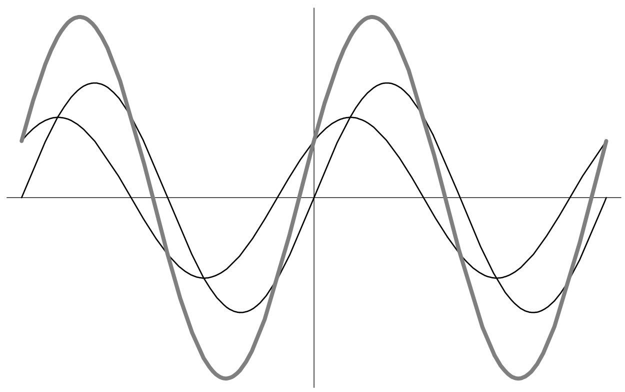
dargestellt werden, wobei z_μ die Nullstellen von $p(z)$ sind.

1.3.7 Harmonische Schwingungen

Definition: Eine physikalische Größe $s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ mit $A, \omega, \alpha \in \mathbb{R}$ wird harmonische Schwingung genannt.

- Amplitude: A
- Periode: $\frac{2\pi}{\omega}$
- Frequenz: $\frac{\omega}{2\pi}$

Überlagerung: Wir betrachten Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen gleicher Frequenz.



$$
\begin{aligned}
s_1(t) &= A_1 \cdot \cos(\omega t + \alpha_1) \\
s_2(t) &= A_2 \cdot \cos(\omega t + \alpha_2) \\
s(t) &= s_1(t) + s_2(t)
\end{aligned}
$$

$s_i(t)$ wird behandelt als Realteil von $A_j \cdot e^{\omega t + \alpha_j}$:

$$
\begin{aligned}
s_1(t) + s_2(t) &= \mathrm{Re}(A_1 \cdot e^{i(\omega t + \alpha_1)} + A_2 \cdot e^{i(\omega t + \alpha_2)}) \\
&= \mathrm{Re}(A_1 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\alpha_1} + A_2 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\alpha_2} \\
&= \mathrm{Re}((A_1 \cdot e^{i\alpha_1} + A_2 \cdot e^{i\alpha_2}) \cdot e^{i\omega t} \\
&= \mathrm{Re}((a_1 + a_2) \cdot e^{i\omega t}) \\
&= \mathrm{Re}(A \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}) \\
&= \mathrm{Re}(A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}) \\
&= A \cdot \cos(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
$$

Damit handelt es sich um eine harmonische Schwingung (wobei $A = |a_1 + a_2|$ und $\varphi = \arg(a_1 + a_2)$).

Wechselstromnetze: Wir betrachten die Wechselspannung $u(t)$ mit dem Strom $j(t)$.

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \cos(\omega t + \alpha) \\ j(t) &= j_0 \cos(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

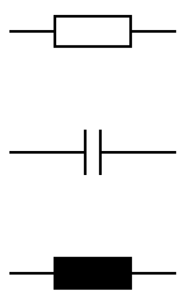
- $u(t)$ ist Realteil von $U(t) = u_0 \cdot e^{i(\omega t+\alpha)}$
- $j(t)$ ist Realteil von $J(t) = j_0 \cdot e^{i(\omega t+\beta)}$
- komplexer Widerstand: $Z(t) = \frac{U(t)}{J(t)}$ ist eine Konstante

$$Z(t) = \frac{U(t)}{J(t)} = \frac{u_0 \cdot e^{i\cdot(\omega t+\alpha)}}{j_0 \cdot e^{i\cdot(\omega t+\beta)}} = \frac{u_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\alpha}}{j_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\beta}} = \frac{u_0}{j_0} \cdot e^{i(\alpha-\beta)} \in \mathbb{C}$$

- Re Z: Wirkwiderstand
- Im Z: Blindwiderstand
- $|Z|$: Scheinwiderstand

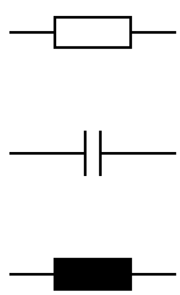
Symbole:

- Ohmscher Widerstand: $Z = R$



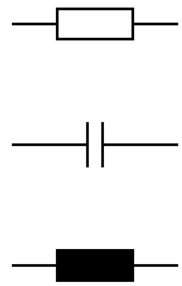
- Kapazität C

  kapazitiver Widerstand: $Z = \frac{1}{i\omega C}$

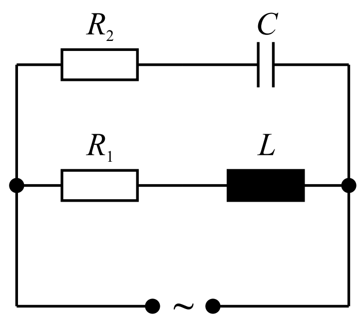


- Induktivität L

  induktiver Widerstand: $Z = i\omega L$



Beispiel:



Bei welcher Frequenz verhält sich der Gesamtwiderstand wie ein Ohmscher?

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{(R_1 + i\omega L)(R_2 + \frac{1}{i\omega C})}{R_1 + i\omega L + R_2 + \frac{1}{i\omega C}} \\
&= \frac{R_1^2 R_2 + R_1 R_2^2 + R_1 \frac{1}{\omega^2 C^2} + R_2 L^2 \omega + i(R_2^2 \omega L - \frac{R^2}{\omega C} + \frac{L}{\omega C^2} - \frac{\omega L^2}{C})}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}
\end{aligned}$$

Suche ω, so dass $\operatorname{Im} Z = 0$ wird.

$$\begin{aligned}
\omega \left(R_2^2 L - \frac{L^2}{C} \right) &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{R_1^2}{C} - \frac{L}{C^2} \right) \\
\omega &= \sqrt{\frac{\frac{R_1^2}{C} - \frac{L}{C^2}}{R_2^2 L - \frac{L^2}{C}}}
\end{aligned}$$

Kapitel 2

Grenzwerte von Folgen und Funktionen

2.1 Grenzwerte von Folgen

2.1.1 Einleitung

Definition: Eine Folge ist eine Funktion von $\mathbb{N}$ (oder $\mathbb{N}^+$) nach $\mathbb{R}$, d.h. jedem $n \in \mathbb{N}$ wird ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Schreibweisen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ oder $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Beispiele:

- explizite Definition:

    1. konstante Folge ($c \in \mathbb{R}$):
        - $a_n = c$
        - $(c)_{n\in\mathbb{N}}$
    2. arithmetische Folge ($c, d \in \mathbb{R}$):
        - $a_n = c + n \cdot d$
        - $(c + n \cdot d)_{n\in\mathbb{N}}$
        - $c, c + d, c + 2d, \ldots$
    3. geometrische Folge ($c, q \in \mathbb{R}, q \neq 0$):
        - $a_n = c \cdot q^n$
        - $(c \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}$
        - $c, cq, cq^2, cq^3, \ldots$

4. harmonische Folge ($n \geq 1$):
   - $a_n = \frac{1}{n}$
   - $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^+}$
   - $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

- rekursive Definition:
  1. konstante Folge:
     - $a_0 = c$, $a_{n+1} = a_n$
  2. arithmetische Folge:
     - $a_0 = c$, $a_{n+1} = a_n + d$
  3. geometrische Folge:
     - $a_0 = c$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$
  4. Fibonacci-Zahlen:
     - $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

2.1.2 Beschränktheit und Monotonie

Definition: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt genau dann ..., wenn

- beschränkt
$$\exists K \in \mathbb{R} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; |a_n| \leq K$$
- von unten beschränkt
$$\exists K \in \mathbb{R} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n \geq K$$
- von oben beschränkt
$$\exists K \in \mathbb{R} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; a_n \leq K$$
- monoton wachsend
$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{n+1} \geq a_n$$
- streng monoton wachsend
$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{n+1} > a_n$$
- monoton fallend
$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{n+1} \leq a_n$$
- streng monoton fallend
$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{n+1} < a_n$$

2.1.3 Konvergenz

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (strebt) gegen den *Grenzwert* a, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Schreibweise:

$$\begin{array}{rcl} a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a & \text{oder} & a_n \longrightarrow a \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a & \text{oder} & \lim a_n = a \end{array}$$

Satz: Für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt die Eindeutigkeit des Grenzwerts.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b \quad \Rightarrow \quad a = b$$

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon & := & \dfrac{|b-a|}{3} \\ \exists n_{0,a} \quad \forall n \geq n_{0,a} & & |a_n - a| < \varepsilon \\ \exists n_{0,b} \quad \forall n \geq n_{0,b} & & |a_n - b| < \varepsilon \\ n_0 & = & \max(n_{0,a}, n_{0,b}) \\ n & > & n_0 \\ |a_n - a| < \varepsilon & \wedge & |a_n - b| < \varepsilon \\ |a-b| & \leq & |a - a_n| + |a_n - b| \\ & < & \varepsilon + \varepsilon \\ & \leq & 2\varepsilon \\ & \leq & \dfrac{2}{3} \cdot |a-b| \\ \dfrac{1}{3} \cdot |a-b| & < & 0 \quad \text{Widerspruch!} \\ \Rightarrow \quad a & = & b \end{array}$$

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis:

$$\varepsilon := 1 \quad \Rightarrow \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 |a - a_n| \leq 1$$

Man wählt:

$$K = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots |a_{n_0} - 1|, |a-1|, |a+1|\}$$

Dann ist:

$$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.1.4 Nullfolgen und Teilfolgen

Definition: Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, wird *Nullfolge* genannt.

Definition: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine Folge von natürlichen Zahlen, dann wird $(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt.

Satz: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, dann konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Beispiele:

1. Zu zeigen: $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.
   - ε ist größer 0.
   - Man sucht eine Zahl n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - 0| < \varepsilon$.
   - Man weiß, damit ist $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
   - Daraus folgt, dass $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ genau dann, wenn $n > \frac{1}{\varepsilon}$.
   - Deswegen setzt man $n_0 := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$.
   - Für alle $n \geq n_0$ gilt dann $n \geq n_0 > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \geq \frac{1}{\varepsilon}$.
   - Daraus folgt: $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
   - Damit ist $a_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Zu zeigen: $b_n = \frac{1}{n^2+4n+5}$ ist eine Nullfolge
   - $c_n = (n^2 + 4n + 5)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet nur auf Zahlen in $\mathbb{N}$ ab.
   - c_n ist streng monoton wachsend.
   - Damit ist b_n streng monoton fallend.
   - Daraus folgt: b_n ist eine Teilfolge von $a_n = \frac{1}{n}$.
   - Damit ist auch b_n eine Nullfolge: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+4n+5} = 0$.

2.1.5 Partialsummenfolge

Definition: Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgendermaßen definiert:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Man nennt $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die *Partialsummenfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder die zu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörende *Reihe*.

Konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen S, dann schreibt man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = S$$

2.1.6 Bestimmte Divergenz

Definition: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen den *uneigentlichen Grenzwert* $\pm\infty$ (bestimmte Divergenz), falls

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad a_0 \gtreqless K$$

Beispiele:

1. $a_n = c \cdot q^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \text{unbestimmt divergent} & \text{falls } q \leq -1 \text{ und } c \neq 0 \\ 0 & \text{falls } |q| < 1 \text{ oder } c = 0 \\ c & \text{falls } q = 1 \text{ und } c \neq 0 \\ \infty & \text{falls } q > 1 \text{ und } c \neq 0 \end{cases}$$

2. $a_n = c + n \cdot d$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} c & \text{falls } d = 0 \\ \infty & \text{falls } d > 0 \\ -\infty & \text{falls } d < 0 \end{cases}$$

2.1.7 Grenzwertregeln

Satz: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kovergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ (Spezialfall: $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot b_n) = c \cdot b$)
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ (falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für $n > n_0$)
- $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|} = \sqrt{|a|}$

Beweis: Zu zeigen: $a + b$ ist Grenzwert von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n > n_0 \;\; |a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann wählt man $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ und $n \geq n_0$.

$$\begin{gathered}\exists n_{0,a} \;\; \forall n \geq n_{0,a} \;\; |a_n - a| < \varepsilon' \\ \exists n_{0,b} \;\; \forall n \geq n_{0,b} \;\; |b_n - b| < \varepsilon' \\ n_0 = \max(n_{0,a}, n_{0,b})\end{gathered}$$

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (a + b)| &= |a_n - a + b_n - b| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon \end{aligned}$$

Beweis: Zu zeigen: $a \cdot b$ ist Grenzwert von $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n \underbrace{- a_n \cdot b + a_n \cdot b}_{0} - a \cdot b| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon' &= \tfrac{\varepsilon}{2\cdot(|a|+1)} \\ \varepsilon'' &= \tfrac{\varepsilon}{2\cdot(|b|+1)} \end{aligned}\right\} \text{ für } n > \max(n_{0,b}, n_{0,a})$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} 3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{2+3\cdot 0}{1+0} = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{8n^3+5n-18}{36n^3-100n^2}} &= \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3\cdot\left(8+\frac{5}{n^2}-\frac{18}{n^3}\right)}{n^3\cdot\left(36-100\cdot\frac{1}{n}\right)}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\frac{5}{n^2}-\frac{18}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(36-100\cdot\frac{1}{n}\right)}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{9}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

2.1.8 Vergleichskriterium

Satz: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für $n \geq n_0$ und ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, dann ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ (wobei $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

Beispiele:

- Zu bestimmen ist der Grenzwert von $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}$.
  - Da $\sin^2 n \leq 1$, ist $0 \leq \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n}$.
  - Außerdem ist $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
  - Daraus folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right) = 0$.
- Zu zeigen: Der Grenzwert von $a_n = \sqrt[n]{n}$ mit $n \geq 1$ ist 1.
  - Sei $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$ mit $n \geq 1$.
  - Die Folge b_n ist von unten durch 0 begrenzt.

$$\begin{aligned}
(b_n + 1)^n &= \left(\sqrt[n]{n} - 1 + 1\right)^n = n \\
n &= (1 + b_n)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot b_n + \binom{n}{2} \cdot b_n^2 + \dots \\
n &\geq 1 + \binom{n}{2} \cdot b_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot b_n^2 \\
(n-1) &\geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot b_n^2 \\
1 &\geq \frac{n}{2} \cdot b_n^2 \\
b_n^2 &\leq \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

  - Da b_n^2 von unten auch durch 0 begrenzt und von oben durch $\frac{2}{n}$, und die Grenzwerte beide 0 sind, ist nach dem Vergleichskriterium auch der Grenzwert von b_n^2 0.
  - Der Grenzwert von b_n ist damit auch 0.
  - Da $a_n = b_n + 1$, ist auch $\lim a_n = \lim b_n + 1 = 1$.

Folgerung: Die Limesbildung erhält schwache Ungleichungen, d.h. sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $a_n \leq b_n$ (für $n \geq n_0$), dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Achtung: Dies gilt *nicht* für starke Ungleichungen.

2.1.9 Monotoniekriterium

Satz: Jede monoton wachsende (fallende), beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Beweis:

- Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, dann ist $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Grenzwert.
- Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, dann ist $a = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Grenzwert.

Beispiel:

- Geometrische Reihe (ohne Monotoniekriterium):

$$\begin{aligned}
a_n &= c \cdot q^n && \text{(geometrische Folge)} \\
s_n &= \sum_{k=0}^{n} c \cdot q^n = c \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} && \text{(geometrische Reihe)} \\
\sum_{k=0}^{\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} s_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(c \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \\
&= c \cdot \frac{1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} \\
&= \left\{ \begin{array}{rlrcr} \text{divergent} & \text{falls} & q & \leq & -1 \\ \frac{c}{1-q} & \text{falls} & |q| & < & 1 \\ c & \text{falls} & q & = & 1 \\ \infty & \text{falls} & q & > & 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

- Reihe von $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$:
  - Bildung der Reihe:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

  - Monotonie:

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0 \\ &\Rightarrow s_{n+1} \geq s_n \end{aligned}$$

    Damit ist s_n monoton wachsend.

  - Beschränktheit: Zu zeigen: $0 \leq a_n \leq 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &\leq \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \frac{n-n+1}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n &\leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} \qquad \text{(Teleskopsumme)} \\ &< 2 \end{aligned}$$

    Damit ist s_n von oben durch 2 beschränkt.

  - Daraus folgt: s_n ist konvergent.
  - Man kann zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{\pi^2}{6}$$

- Reihe von $\left(\frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$:
  - Bildung der Reihe:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

  - Monotonie:

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \\ &\Rightarrow \; s_{n+1} \geq s_n \end{aligned}$$

    Damit ist s_n monoton wachsend.
  - Beschränktheit: Zu zeigen: $0 \leq a_n \leq 3$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} s_n &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \leq 3 \end{aligned}$$

    Damit ist s_n von oben durch 3 beschränkt.

Definition: Die Euler'sche Zahl e ist definiert als

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right)$$

- Folge $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
  - Anwenundung: c_n ist der Faktor der Verwertung eines Kapitals in einem Jahr bei Zinssatz von 100% und n-maliger Aufzinsung.

$n = 1$	jährliche Aufzinsung	$c_1 = 2$
$n = 12$	monatliches Aufzinsung	$c_{12} = 2{,}613$
$n = 365$	tägliche Aufzinsung	$c_{365} = 2{,}714$

    Beoachtung: c_n nähert sich mit steigendem n dem Wert von e.

    Ziel: Nachweis für $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$

  - Monotonie:

$$\begin{aligned}
\frac{c_n}{c_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot n}{n^n \cdot n^{n-1 \cdot (n-1) \cdot n}} \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{(n+1)^n \cdot (n-1)^n}{n^{2n}} \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\
&= \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n
\end{aligned}$$

    Anwendung der Bernoulli-Ungleichung: $(1-a)^n \geq 1-n\cdot a$ mit $a = \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

    Damit ist c_n monoton wachsend.

– Beschränkung: Zu zeigen: $c_n \leq e$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} c_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &\overset{*}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leq e \end{aligned}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \quad \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k! \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{k!}$$

– Behauptung: $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = e$

$N \geq 1$ beliebig, aber fest ($n > N$):

$$\begin{aligned} c_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n^k}\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n^k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{N}{n}\right)^N \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} c_n &\geq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{N}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{N}{n}\right)\right)^N \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

Vergleichskriterium:

$$
\begin{aligned}
e &\geq \lim_{n\to\infty} c_n \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \\
e &\geq \lim_{n\to\infty} c_n \geq \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \right) \geq e
\end{aligned}
$$

Daraus folgt: $\lim_{n\to\infty} c_n = e$.

2.1.10 Exponentialfunktion als Grenzwert

Satz: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

- Monotonie: wie für $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- Beschränkheit: Man betrachtet zwei Fälle.

  1. Fall: $x \leq 0$ für alle $n > -x$

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 + \frac{x}{n} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

  2. Fall: $x > 0$

$$\begin{aligned} a_n &:= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ b_n &:= \left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n \qquad \text{(1. Fall: } b_n \text{ ist konvergent)} \\ a_n b_n &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{\frac{x^2}{n}}{n}\right)^n \\ &\geq 1 - \frac{x^2}{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a_n b_n \leq 1 \qquad (n \geq x^2)$$

- Vergleichskriterium:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n b_n &= 1 \\
a_n &= \frac{a_n b_n}{b_n} \\
\lim_{n\to\infty} a_n &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}
\end{aligned}$$

- Mit ähnlichen Argumenten kann man zeigen:
  - Produkt zweier Exponentialfunktionen:

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

  - Euler'sche Zahl:

$$\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

  - für $x \in \mathbb{N}$:

$$\exp(x) = e^x$$

  - auch für $x \in \mathbb{Z}$, d.h. für $x = -n$:

$$\exp(x) = \exp(-n) = \frac{1}{e^n}$$

  - für $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^+$

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{e}\right)^m = e^{\frac{m}{n}}$$

2.1.11 Cauchy-Kriterium

Satz: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n,m \geq n_0 \;\; |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Anwendung:

- Die harmonische Reihe s_n ist *nicht* kovergent.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \underbrace{\frac{1}{1}} + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}} + \ldots + \frac{1}{n} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \underbrace{8 \cdot \frac{1}{16}} + \ldots + \frac{1}{n} \\ &\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{\lfloor \log_2 n \rfloor} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \lfloor \log_2 n \rfloor \end{aligned}$$

  Das heißt, s_n ist nicht beschränkt.

- Die alteriende harmonische Reihe s_n ist konvergent.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

  Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ mit $n, m \geq n_0$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m > n$.

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+2} + \ldots + \frac{(-1)^{m+1}}{m} \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

2.2 Polynome und rationale Funktionen

2.2.1 Polynome

Definition: Ein *Polynom* über einen kommutativen Ring R ist ein formaler Ausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

wobei $a_k \in R$ und $a_n \neq 0$. Der Rang dieses Polynoms ist n.

Jedes Polynom bestimmt eine Funktion $R \to R$ durch Einsetzen von Werten für x.

Die Polynome

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \quad \text{und} \quad q(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k x^k$$

sind (syntaktisch) gleich (als formaler Ausdrücke), falls $n = m$ und $a_k = b_k$ für $k = 0, \ldots n$

Satz: Für Polynome über $\mathbb{R}$ (und über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$) gilt: $p(x)$ und $q(x)$ sind syntaktisch gleich, wenn die zugehörigen Polynomfunktion semanisch gleich sind.

2.2.2 Horner-Schema

Funktionswertbestimmung durch das *Horner-Schema*:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad\qquad (2n \text{ Multiplikationen und } n \text{ Additionen}) \\
&= a_n x^k + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
&= \underbrace{\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{a_n}_{c_n} x + a_{n-1})}_{c_{n-1}} \cdot x \ldots a_3)}_{c_3} \cdot x + a_2)}_{c_2} \cdot x + a_1)}_{c_1} \cdot x + a_0}_{c_0}
\end{aligned}$$

(n Multiplikationen und n Additionen)

Allgemeiner Lösungsweg:

$f(x) =$	a_n	a_{n-1}	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
$+$		$c_n \cdot x$	$c_{n-1} \cdot x$		$c_2 \cdot x$	$c_1 \cdot x$
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	c_2	c_1	c_0

Der Wert von c_0 ist der Funktionswert von $f(x)$.

Beispiel: Bestimme $f(3)$ von $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x + 10$.

$f(3) =$	2	-4	0	3	10
$+$		6	6	18	63
	2	2	6	21	73

Damit ist $f(3) = 73$.

Satz: Sei $f(x)$ das Polynom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
c_n &= a_n \\
c_{n-1} &= c_n \cdot b + a_{n-1} \\
&\vdots \\
c_0 &= c_1 \cdot b + a_0 \\
\\
c_0 &= f(x) \\
\\
f(x_0) &= (x - x_0) \cdot (c_n x^{n-1} + \ldots + c_2 x + c_1) + c_0
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei $f(x_0)$ und $(x - x_0) \cdot (c_n x^{n-1} + \ldots + c_2 x + c_1) + c_0$ für x^k

- links: a_k
- rechts: $a_n - b \cdot c_{k+1} = b \cdot c_{k+1} + a_k - b \cdot c_{k+1} = a_k$.

2.2.3 Nullstellen

Definition: $x_0 \in \mathbb{R}$ ist Nullstelle von $f(x)$, falls $f(x_0) = 0$.

Satz: Ist x_0 Nullstelle von $f(x)$, dann existiert ein Polynom $g(x)$:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$$

Beweis: folgt aus der Anwendung des Horner-Schemas.

Definition: x_0 ist k-fache Nullstelle des Polynoms $f(x)$, falls ein Polynom $g(x)$ existiert:

$$f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x)$$

Satz: Jedes reele Polynom $f(x)$ kann folgendermaßen zerlegt werden:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n \cdot \prod_{i=1}^{l} (x - b_i)^{k_i} \cdot \prod_{i=1}^{m} (x^2 + c_i x + d_i)$$

- $k_1 + k_2 + \ldots + k_l + 2m = n$ ist Grad des Polynoms.
- $b_1, b_2, \ldots b_l$ sind $k_1, k_2, \ldots, k_l$-fache reelen Nullstellen von $f(x)$.
- Die Polynome $x^2 + c_i \cdot x + d_i$ haben keine reelen Nullstellen.

2.2.4 Rationale Funktionen

Definitionen:

- Eine *ganz rationale Funktion* ist ein Poylnom.
- Eine *(gebrochen) rationale Funktion* ist ein Quotient aus zwei Polynomen $\frac{f(x)}{g(x)}$.
- Eine *echt gebrochen rationale Funktion* ist ein Quotient von zwei Polynomen $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $\mathrm{Grad}(f(x)) < \mathrm{Grad}(g(x))$.

Satz: Jede rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\mathrm{Grad}(p(x)) \geq \mathrm{Grad}(q(x))$ lässt sich darstellen in der Form

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

wobei $h(x)$ ganz rational und $\frac{r(x)}{q(x)}$ echt gebrochen rational ist.

Beweis:

Bemerkung: Dieser Beweis zeigt, warum *Polynomdivision* überhaupt funktioniert.

Es seien die Polynome $p(x)$ und $q(x)$ gegeben:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ q(x) &= \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \qquad \text{(mit } n \geq m) \end{aligned}$$

- Induktion nach $d = n - m$
- Induktionsanfang: $d = 0$, d.h. $n = m$

  $$p_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_n} \cdot q(x)$$

  Behauptung: $\text{Grad}(p_1(x)) < n$

  Koeffizient von x^n: $a_n - \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n = 0$

  $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{q(x)}{q(x)} + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

  Damit ist $p_1(x) = r(x)$ und $\frac{a_n}{b_n} = h(x)$ aus dem Satz.

- Induktionsschritt $d \to d + 1$

  Sei $n = m + d + 1$

  $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} + \frac{p_1(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{x^{n-m} \cdot q(x)}{q(x)} + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

  wobei

  $$p_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot q(x)$$

  Behauptung: $\text{Grad}(p_1(x)) < n$

  Koeffizient von x^n: $a_n - \frac{a_n}{b_m} \cdot b_m = 0$

  Da $\text{Grad}(p_1(x)) - \text{Grad}(g(x)) < n - m \leq d)$, kann auf $\frac{p_1(x)}{q(x)}$ Induktion angewendet werden.

  $$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{\frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} + b_1(x)}_{h(x)} + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Euklidischer Algorithmus:

```
// Grad von p(x) >= Grad von q(x)
procedure ggT(p(x), q(x) : Menge der Polynome über real)
    s(x) = p(x)
    t(x) = q(x)
    while (t(x) != 0)
      r(x) = Rest von s(x) / t(x)
      s(x) = t(x)
      t(x) = r(x)
```

Definition (ggT): Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynome, dann ist der *größte gemeinsame Teiler* $\mathrm{ggT}(p(x), q(x))$ ein Polynom $d(x)$ maximalen Grades, so dass

$$p(x) = d(x) \cdot h(x) \quad \text{und} \quad g(x) = d(x) \cdot g(x)$$

und der führende Koeffizent von $d(x)$ gleich 1 ist.

Achtung: Bei der Bestimmung der Definitionsbereichs von rationalen Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$ wird vorausgesetzt, dass $\mathrm{ggT}(p(x), q(x)) = 1$

Beispiel: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x+1}{1}$ ist definiert auf ganz $\mathbb{R}$.

Definition (Polstelle): Ist $\mathrm{ggT}(p(x), q(x)) = 1$ und ist b eine k-fache Nullstelle von $q(x)$, dann nennt man b einen k-fache *Pol* der rationalen Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$.

2.3 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

2.3.1 Definition der Grenzwerte

Definition: Es seien

- $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall
- $a \in I$ bzw. $a \in \{\pm\infty\}$
- $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ bzw. $f : I \to \mathbb{R}$ (falls $a \in \{\pm\infty\}$) eine Funktion

Dann gilt:

- Die Funktion f hat in a den *Grenzwert* c, falls für jede Folge $x_n \in I$ mit dem Grenzwert a gilt:
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$
- Die Funktion f hat in a den *linksseitigen Grenzwert* c, falls für jede Folge $x_n \in I$ mit dem Grenzwert a gilt:
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \quad \text{und} \quad x_n < a$$
- Die Funktion f hat in a den *rechtsseitigen Grenzwert* c, falls für jede Folge $x_n \in I$ mit dem Grenzwert a gilt:
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c \quad \text{und} \quad x_n > a$$

Schreibweise:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$
- $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = c$ (linksseitiger Grenzwert)
- $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = c$ (rechtsseitiger Grenzwert)

2.3.2 Asymptoten

Definition: Asymptoten einer Funktion (Kurve) $y = f(x)$ sind Geraden der folgenden Form:

a) Vertikale Asymptote:
$$x = a$$
mit $\lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$ oder $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$

b) Horizontale Asymptote:
$$y = c$$
mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ oder $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$

c) Schräge Asymptote:
$$y = ax + b$$
mit $a \neq 0$ und $\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ oder $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0$

Beispiel: Sei $f(x)$ eine rationale Funktion mit $\mathrm{ggT}(p(x), q(x)) = 1$:
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

a) Ist b eine Polstelle von $f(x)$, dann ist $x = b$ vertikale Asymptote.

- Wenn b ein k-facher Pol und k *gerade*, dann sind rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert *gleich*.
- Wenn b ein k-facher Pol und k *ungerade*, dann haben rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert *entgegengesetztes Vorzeichen*.

b) Sei $n = \mathrm{Grad}(p(x))$ und $m = \mathrm{Grad}(q(x))$

- Ist $m > n$, dann ist $y = 0$ eine horizontale Asymptote von $f(x)$.
- Ist $m = n$, dann ist $y = \frac{a_n}{b_m}$ eine horizontale Asymptote von $f(x)$.

c) Ist $n = m + 1$, dann ist y folgende schräge Asymptote von $f(x)$.

$$y = \frac{a_n}{b_n} \cdot x + \frac{b_{n-1} \cdot a_{n-1} - a_n \cdot b_{n-2}}{b_{n-1}^2}$$

Zu zeigen:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{a_n}{b_{n-1}} \cdot x \right) = 0$$

mit:

$$\begin{array}{lcccccccc} p(x) & = & a_n x^n & + & a_{n-1}x^{n-1} & + & \dots & + & a_0 \\ q(x) & = & & & b_{n-1}x^{n-1} & + & \dots & + & b_0 \end{array}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty} \left(\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{a_n}{b_{n-1}} \cdot x \right) \\
= \; & \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} - \frac{a_n \cdot x}{b_{n-1}} \right) \\
= \; & \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^n}{x^{n-1}} \cdot \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}}{b_{n-1} + \frac{b_{n-2}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^{n-1}}} - \frac{a_n \cdot x}{b_{n-1}} \right) \\
= \; & \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot b_{n-1} \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) - a_n \cdot x \cdot \left(b_{n-1} + \frac{b_{n-2}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^{n-1}}\right)}{b_{n-1} \cdot \left(b_{n-1} + \ldots + \frac{b_0}{x^{n-1}}\right)} \\
= \; & \lim_{x\to\infty} \frac{b_{n-1} \cdot a_{n-1} - a_n \cdot b_{n-2} + \frac{1}{x} \cdot (\ldots)}{b_{n-1} \cdot \left(b_{n-1} + \frac{b_{n-2}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^{n-1}}\right)}
\end{aligned}$$

2.3.3 Grenzwertregeln

Satz: Aus $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d$ folgt

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = c \pm d$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = c \cdot d$ (Spezialfall: $\lim\limits_{x\to a}(b \cdot f(x)) = b \cdot d$ für $b \in \mathbb{R}$)
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$ (falls $d \neq 0$)

Beispiele: Umformung von Termen

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x^{n-1} + x^{x-2} + \ldots + x + 1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} x^{n-1} + \lim_{x\to 1} x^{n-2} + \ldots + \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1 \\
&= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1} - 1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1} + 1\right)}{x \cdot \sqrt{x+1} + 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x + 1 - 1}{x \cdot \sqrt{x+1} - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x \cdot \sqrt{x+1} - 1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2.3.4 Vergleichskriterium

Satz: Seien f, g und h Funktionen mit

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{für alle } x \in I$$

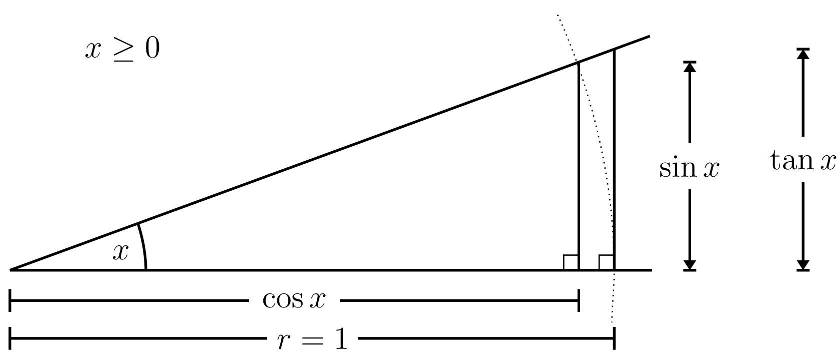
und $a \in I$, so dass

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = c$$

dann ist auch

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

Beispiel:



- Aus der Grafik sieht man:

$$\underbrace{\frac{\cos x \cdot \sin x}{2}}_{\text{kleines Dreieck}} \leq \frac{x \cdot \pi}{2\pi} \leq \underbrace{\frac{1 \cdot \tan x}{2}}_{\text{großes Dreieck}}$$

Daraus folgt:

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Nun kann den Limes für die beiden äußeren Werte bestimmen:

$$\lim_{x \to 0+} \cos x = 1 = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\cos x}$$

Damit folgt aus dem Vergleichskriterium:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0+} \frac{-x}{\sin(-x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Nun muss nur noch der Kehrwert betrachtet werden:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}} = 1$$

2.3.5 Stetigkeit

Definition: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Die Funktion f heißt *stetig* in $x_0 \in I$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(wenn x_0 Rand von I, dann nur einseitiger Limes)

Satz: f ist stetig in x_0 genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I \;\; (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Beweis (⇐):

- Zu zeigen ist: Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x_0$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.
- Das heißt: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- Man betrachtet $\delta > 0$ für das gegebene ε, da für $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$

  $$\exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; |a_n - x_0| < \delta$$

- Behauptung: Dieses n_0 ist das gesuchte n_0.
- Sei $n \geq n_0$, dann gilt

  $$|a_n - x_0| < \delta$$

  und nach Voraussetzung

  $$|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Beweis (indirekt, $\Rightarrow$): Angenommen

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in I \quad (|x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

dann konstruiert man eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$, so dass

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \quad \text{aber} \quad \lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq f(x_0)$$

$$\begin{aligned}
a_1 \quad &: \quad \text{Setze } \delta = 1 \quad \exists \underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{x} \in I \quad (|x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon) \\
a_n \quad &: \quad \text{Setze } \delta = \frac{1}{n} \quad \exists \underset{\substack{\uparrow \\ a_n}}{x} \in I \quad (|x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)
\end{aligned}$$

Damit ist $\lim\limits_{n \to x_0} a_n = x_0$ (da $|a_n - x_0| < \frac{1}{n}$), aber $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt: f nicht stetig in x_0.

Bemerkung: Ist f in x_0 nicht definiert, aber $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ existiert, dann kann man die Definition von f auf x_0 erweitern durch $f(x_0) := \lim_{x \to x_0} f(x)$ (f ist dann stetig in x_0).

Beispiele:

a) Rationale Funktionen schon per Definition stetig

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x - 1} = x + 1$$

Damit ist $f(1) = 2$.

b) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ definiert.

$$g(0) := 1$$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ ist auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ definiert.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$h(0) := \frac{1}{2}$$

Satz: Sind f und g stetig auf I, dann sind auch

- $f+g$, $f-g$ und $f \cdot g$ stetig auf I
- $\frac{f}{g}$ stetig in allen x_0, für die $g(x_0) \neq 0$

Satz: Wenn

- die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I ist,
- die Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ stetig auf D ist und
- das Bild $g(D) \subseteq I$ ist

dann ist $h(x) := f(g(x))$ stetig auf D.

Folgerungen:

- Polynome sind auf $\mathbb{R}$ stetig.
- Rationale Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\mathrm{ggT}(p(x), q(x)) = 1$ sind stetig in allen $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$.

Satz: Für jede auf einem *abgeschlossenen* Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f gilt:

- Schrankensatz:
$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b] \quad |f(x)| < K$$
- Satz vom Minimum und Maximum:
$$\exists x_0, x_1 \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$
- Zwischenwertsatz:
$$\forall c \quad f(x_0) \leq c \leq f(x_1) \quad \exists x \in [a,b] \quad f(x) = c$$
- Gleichmäßige Stetigkeit:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in [a,b] \quad (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

2.4 Asymptotische Schranken ($\mathcal{O}$-Notation)

2.4.1 Laufzeit

Anwendungen: Laufzeitanalyse von Algorithmen

Definition: Die *Laufzeit* $T(n)$ eines Algorithmus ist die maximale Anzahl der Schritte bei Eingaben der Länge n.

Beispiele: c_i ist eine Konstante, die modell- und implementierungsabhängig ist:

- Binärsuche:

  $T_1(n) = c_1 \lceil \log_2 n \rceil$

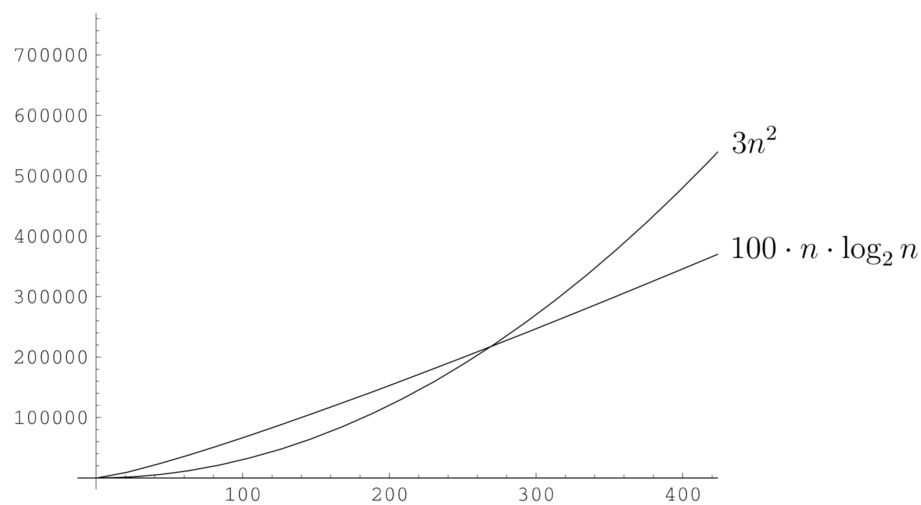
- Quicksort:

  $T_2(n) = c_2 \cdot n^2$

- Mergesort:

  $T_3(n) = c_3 \cdot n \cdot \lceil \log_2 n \rceil$

Vergleich: $T_2 = 3n^2$ und $T_3 = 100 \cdot n \cdot \log_2 n$



n	$3n^2$	Zeit in s bei 1 GHz	$100n \cdot \lceil \log_2 n \rceil$	Zeit in s bei 1 GHz
2	12	0,012 μs	200	0,2 μs
4	48	0,048 μs	800	0,8 μs
10^3	$3 \cdot 10^6$	3 ms	$\approx 10^6$	1 ms
10^6	$3 \cdot 10^{12}$	$3000s \approx 0{,}833$ h	$\approx 2 \cdot 10^9$	2 s
10^9	$3 \cdot 10^{18}$	$3 \cdot 10^9$ s ≈ 100 Jahre	$\approx 3 \cdot 10^{12}$	3000 s $\approx 0{,}833$ h

2.4.2 Asymptotische Schranken

Definition: $g(n)$ ist *asymptotische obere Schranke* von $f(n)$, falls

- eine Konstante $c > 0$ und
- ein $n_0 \in \mathbb{N}$

existieren, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Schreibweise:

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$$

Definition: Seien f und g Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

- Obere Schranke:

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \;\mid\; \exists c > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

- Untere Schranke:

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \;\mid\; \exists c > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

- Wachstum

$$\Theta(g(n)) = \mathcal{O}(g(n) \cap \Omega(g(n)))$$

- Starke obere Schranke:

$$o(g(n)) = \{f(n) \;\mid\; \forall c > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

- Starke untere Schranke:

$$\omega(g(n)) = \{f(n) \;\mid\; \forall c > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

Achtung: $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ usw. heißt eigentlich $f(n) \in O(g(n))$.

Lemma:

$$
\begin{aligned}
f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt} \\
&\Leftrightarrow \quad g(n) = \Omega(f(n))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(n) = o(g(n)) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad g(n) = \omega(f(n))
\end{aligned}
$$

2.4.3 Beispiele für Laufzeiten

Funktionen, die bei Laufzeitabschätzung eine wichtige Rolle spielen:

- n: jede Eingabestelle sehen
- $\log_2 n$: Teile-und-Herrsche-Prinzip
- $\sqrt{n}$: Anwendung von Seperatoren in planaren Graphen
- 2^n: Untersuchung aller Teilmengen (Brute force)
- $n!$: Untersuchung aller Permutationen
- Summen: Hintereinander-Ausführung
- Produkte: geschachtelte Schleifen

Beispiel eines komplexen Ausdrucks:

- $2^{\sqrt{n}\cdot\log_2 n}$: Faktorisierung n-stelliger Zahlen

2.4.4 Die wichtigsten Werkzeuge

Stirling-Formel: Zur Abschätzung von $n!$ kann folgende Formel benutzt werden:

$$n! = \Omega\left(\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}^n\right)\right)$$

genauer:

$$\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \leq \quad n! \quad \leq \quad \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{12n}}$$

Eigenschaften der Logarithmus-Funktion:

Aufgrund der Definition des Logarithmus gilt:

$$n = c^{\log_c n}$$

Anwendung: $T(n) = a^{\log_2 n}$

$$\begin{aligned} a^{\log_2 n} &= \left(2^{\log_2 a}\right)^{\log_2 n} \\ &= 2^{\log_2 a \cdot \log_2 n} \\ &= \left(2^{\log_2 n}\right)^{\log_2 n} \\ &= n^{\log_2 a} \end{aligned}$$

Das heißt: $T(n) = n^{\log_2 a}$ ein Polynom.

Umformungsregeln für Logarithmen:

- $\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c$
- $\log_a b \cdot \log_b c = \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln c}{\ln b} = \frac{\ln c}{\ln a} = \log_a c$
- $\log_a(f(n) \cdot g(n)) = \log_a f(n) + \log_a g(n)$
- $\log_a \frac{f(n)}{g(n)} = \log_a f(n) - \log_a g(n)$
- $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ (Folgerung: $\log_a n^k = \Theta(\log_a n)$)

Wachstum der Logarithmus-Funktion:

Es gilt:

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \quad \Rightarrow \quad \log_a(f(n)) = \mathcal{O}(\log_a(g(n)))$$

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} f(n) & \leq & c \cdot g(n) \\ \\ \Rightarrow \quad \log_a f(n) & \leq & \log_a(c \cdot g(n)) \\ & = & \log_a c + \log_a g(n) \\ & \leq & c' \cdot \log_a g(n) \quad (\text{mit } c' = \log_a(c+1)) \end{array}$$

Achtung: Die Regel gilt nicht für die starte obere Schranke!

$$f(n) = o(g(n)) \quad \not\Rightarrow \quad \log_a(f(n)) = o(\log_a(g(n)))$$

Beispiel:

$$f(n) = \sqrt{n} \qquad g(n) = n$$

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} & = & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n} \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0 \\ & \Rightarrow & f(n) = o(g(n)) \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a f(n)}{\log_a g(n)} & = & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a \sqrt{n}}{\log_a n} \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}\log_a n}{\log_a n} \\ & = & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ & \not\Rightarrow & \neg(\log_a f(n) = o(\log_a g(n))) \end{array}$$

Grundlagen für das Wachstum von Standardfunktionen:

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$, dann gilt:

- Wenn $a < b$, dann gilt
$$n^a = o(n^b)$$
Beweis:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^b} = \lim_{n\to\infty} n^{a-b} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{b-a}} = 0$$

- Es gilt (auch wenn b sehr groß und a sehr klein):
$$(\log_2 n)^b = o(n^a)$$

- Es gilt (auch wenn b sehr groß und a sehr klein):
$$n^b = o(2^{a\cdot n})$$

2.5 Polynominterpolation und Nullstellenbestimmung

Aufgabe: Gegeben sind $n+1$ Messpunkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$, wobei alle x-Werte verschieden sind. Gesucht wird ein Polynom $p(x)$ vom Grad n, so dass $p(x_i) = y_i$ für $i = 0 \ldots n$.

Satz: Zu $n+1$ Stützpunkten $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ mit $x_i \neq x_j$ gibt es *genau* ein Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n$ mit $p(x_i) = y_i$ für $i = 0 \ldots n$.

Beweis:

1. Existenz eines Polynoms $p(x)$ (Lagrange-Polynom):

   Es sei $0 \leq i \leq n$.

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

Vorlesung vom 18.6.2002 (fehlt)

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

Vorlesung vom 20.6.2002 (fehlt)

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

Kapitel 3

Differentation

3.1 Ableitung einer differenzierbaren Funktion

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

Vorlesung vom 20.6.2002 (fehlt)

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

Vorlesung vom 25.6.2002 (fehlt)

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

Mittelwertsatz: $f : [ab] \to \mathbb{R}$ (differentierbar)

$$\exists x_0 \in (a,b) \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Folgerung 1: $f : I \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 \text{ auf I} \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton wachsend} \\
f'(x) < 0 \text{ auf I} \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton fallend} \\
f'(x) \geq 0 \text{ auf I} \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist monoton wachsend} \\
f'(x) \leq 0 \text{ auf I} \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist monoton wachsend} \\
f'(x) = 0 \text{ auf I} \quad &\Rightarrow \quad f \text{ ist konstant}
\end{aligned}$$

Beweis (indirekt): Folgt aus dem Mittelwertsatz

Folgerung 2: $f, g : I \to \mathbb{R}$ und $f'(x) = g'(x)$ auf I

$$f(x) = g(x) + c$$

Beweis:

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \to \quad f(x) - g(x) \text{ ist konstant}$$

3.1.1 Stationäre Punkte

Definition: Nullstellen der ersten Ableitung $f'(x)$ werden *stationäre Punkte* von f genannt.

Welche stationären Punkte sind lokale Extrema?

- Notwendig: $f'(x) = 0$
- Hinrichend für Maximum: f ist streng monoton wachsend links von x und streng monoton fallend rechts von x, d.h.
  - $f' > 0$ links von x
  - $f' < 0$ rechts von x

  GRAFIK: Graph mit Maximum und Ableitung

  also: $f''(x) < 0$
- Hinreichend für Minimum: entsprechend $f''(x) > 0$

Die zweite Ableitung beschreibt die Krümmung der Funktionskurve von f.

GRAFIK

- $f''(x) > 0$: Kurve ist linksgekrümmt (konvex von unten)
- $f''(x) < 0$: Kurve ist rechtsgekrümmt (konvex von oben)

Wendepunkt: Ein Wendepunkt ist ein Punkt, in dem Linkskrümmung in Rechtskrümmung übergeht (oder umgekehrt).

- notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
- hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$

Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz): $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (differenzierbar in (a, b), stetig auf $[a, b]$ und $g'(x) \neq 0$ in (a, b)).

Es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beweis: $g(a) \neq g(b)$ wegen $g'(x) \neq 0$ (da entweder streng monoton wachsend oder fallend)

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(b)} \cdot g(x)$$

Mittelwertsatz für F:

$$F(a) = \frac{f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a)}{g(b) - g(a)} = F(b)$$

$$\exists x_0 \quad F'(x_0) = 0$$

Daraus folgt:

$$0 = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

$$\frac{x_0}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Satz (Regel von Bernoulli-L'Hospital): $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$

Voraussetungen:

- differenzierbar auf (a, b)
- $g'(x) \neq 0$ auf (a, b)
- $f(x) \underset{x \to b-}{\longrightarrow} 0$ und $g(x) \underset{x \to b-}{\longrightarrow} 0$ oder
  $f(x) \underset{x \to b-}{\longrightarrow} \infty$ und $g(x) \underset{x \to b-}{\longrightarrow} \infty$

- $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Dann ist:

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = f$$

Beweis: Nur $f(x), g(x) \underset{x \to b-}{\longrightarrow} 0$

- Setzen $f(b) = g(b) = 0$ (stetige Erweiterung)
- Für jedes $x \in (a, b)$ betrachten wie verallgemeinerten Mittelwertsatz auf $[x, b]$.

$$\exists x_0 \in (x, b) \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Daraus folgt:

$$x \to b- \quad \Rightarrow \quad x_0 \to b- \quad \to \quad \lim_{x \to b-} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Anwenundung oft nach vorherigen Umformungen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) &= -\infty \\
\frac{1}{x} - \frac{1}{1 - \cos x} &= \frac{\overbrace{1 - \cos x - x}^{f(x)}}{\underbrace{x \cdot (1 - \cos x)}_{g(x)}} \\
\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{\sin x - 1}{(1 - \cos x) + x \cdot \sin x} \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} = -\infty
\end{aligned}$$

3.2 Umkehrfunktion

$f : I \to \mathbb{R}, D \subseteq I$

f ist umkehrbar auf D, falls die eingeschränkte Funktion

$$f|_D : D \to f(D) = \mathrm{Im}(f|_D)$$

ist bijektiv.

Beispiel:

- $f(x) = x^2 \ (I = \mathbb{R})$

- $f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bijektiv
- Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- x^2 auch umkehrbar über $\mathbb{R}^-$: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

GRAFIK: x^2 hat zu $\sqrt{x}$ eine Symmetrieachse, aber auch $-\sqrt{x}$

Satz:

a) f streng monoton auf D, daraus folgt f umkehrbar auf D, d.h. f differenzierbar auf D und $f'(x) \neq 0$ auf $D \Rightarrow f$ umkehrbar auf D

b) Die Graphen von f und der Umkehrung f^{-1} sind symmetrisch bezüglich derGeraden $y = x$.

c) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ über D umkehrbar und differenzierbar, so ist auch die Umkehrfunktion $g : f(D) \to \mathbb{R}$ in allen $x \in f(D)$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

Beweis c):

$$\frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\lim\limits_{y \to g(x)} \frac{f(y)-f(g(x))}{y-g(x)}}$$

g stetig, $x' \to x$, dann $g(x') \to g(x)$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x' \to x} \frac{f(g(x'))-f(g(x))}{g(x')-g(x)}}$$

g ist Umkehrfunktion von f, also $fg = \mathrm{Id}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lim\limits_{x' \to x} \frac{x'-x}{g(x')-g(x)}} \\
&= \lim_{x' \to x} \frac{g(x') - g(x)}{x' - x} \\
&= g'(x)
\end{aligned}$$

Beispiele:

1. $f(x) = x^3$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, f ist streng monoton wachsend, f ist umkehrbar

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x} \\
\left(\sqrt[3]{x}\right)' &= \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

2. $f(x) = x^n$, n gerade, f ist umkehrbar über $\mathbb{R}^+$ oder
$f(x) = x^n$, n ungerade, f ist umkehrbar über $\mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{-n+1}{n}}$$

rationale Potenzen:
$f_\alpha(x) = x^\alpha$ mit $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $n > 0$

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \text{falls } m > 0 \\ 1 & \text{falls } m = 0 \\ \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{-m}} & \text{falls } m < 0 \end{cases}$$

Einheitlicher Definitionsbereich $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= m \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{m}{n} \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-1-(n-1)} \\ &= \frac{m}{n} \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m-n} \\ &= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}} \\ &= \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

3. Winkelfunktionen

GRAFIK: $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, umkehrbar auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, da cos in diesem Bereich ≥ 0, also sin monoton steigend
Umkehrfunktion: $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (0-ter Zweig von arcsin)
1. Zweig wäre z.B. die Umkehrung von sin auf $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Ableitung: Aus $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ folgt $\cos(\arcsin x) \geq 0$
$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ für $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, da cos in diesem ≥ 0

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ umkehrbar auf $[0,\pi]$
$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\tan : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \to (-\infty, +\infty)$
umkehrbar auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned}(\arctan' x)' &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{\frac{sin^2(\arctan x)+\cos^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{\tan^2(\arctan x)+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1}\end{aligned}$$

arccot $: \mathbb{R} \to (0,\pi)$

$$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{x^2+1}$$

4. Exponentialfunktion:

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Idee für Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}\overset{n\to\infty}{\lim}\left(1+\frac{1+\frac{x}{n}}{}\right)^n \\ &\overset{?}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right] \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)}\end{aligned}$$

genaue Gründung mit Mittelwertsatz! Daraus folgt: $\exp'(x) = \exp(x)$
Aus $e^x > 0$ folgt, dass exp streng monoton wachsend ist
exp ist umkehrbar über $\mathbb{R}$
Umkehrfunktion: $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

Kapitel 4

Integration

4.1 Stammfunktionen

Definition: Eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wnn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Fakt 1: Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, dann gilt $F_1(x) = F_2(x) + c$ für alle $x \in I$ und ein $c \in \mathbb{R}$ (aus dem Mitterlwertsatz).

Definition: Die Menge aller Stammfunktionen von f wird das unbestimmte Integral von f genannt und mit $\int f(x)dx = F(x) + c$ bezeichnet.