12. Oktober 2018

Universität Paderborn
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier
Prof. Dr. Heike Wehrheim

Modellierung – WS 2017/2018

Heimübung 1
Abgabe: 22. Oktober 2018 – 11:00 Uhr
(Dieser Übungszettel enthält 7 Aufgaben mit insgesamt 25 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie zur Lösung der Aufgaben bitte Gruppen von 3-4 Personen. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Extensionale Darstellung) (3 Punkte)
Beschreiben Sie die folgenden intensional definierten Mengen jeweils mit einem kurzen Satz und geben Sie zu jeder Menge die entsprechende extensionale Definition an. Denken Sie daran, dass $0 \notin \mathbb{N}$.

1. $M := \{a : a, b \in \mathbb{N} \text{ und } b < 4 \text{ und } a = 2b - 3\}$
2. $M := \{x : a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R} \text{ und } x = \frac{a}{b} \text{ und } 0 < a \leq b < 4\}$
3. $M := \{(j, k, j - k) : j, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } |j \cdot k| \leq 2 \text{ und } j \leq k\}$

Aufgabe 2 (Intensionale Darstellung) (3 Punkte)
Geben Sie nun für die folgenden in Worten beschriebenen Mengen eine intensionalen Definition an. Denken Sie daran, dass $0 \notin \mathbb{N}$.

1. Die Menge aller durch 3 teilbaren, natürlichen Zahlen.
2. Die Menge aller natürlichen Zahlen, deren Quadratwurzel ebenfalls eine natürliche Zahl ist.
3. Die Menge aller endlichen Teilmengen aus den natürlichen Zahlen, die die Zahl 2 enthalten.

Aufgabe 3 (Mengenoperationen / Kardinalitäten) (5 Punkte)

1. Es sei $Holzart := \{Eiche, Kiefer\}$ und $Moebelobjekt := \{Tisch, Schrank, Stuhl\}$. Geben Sie das kartesischen Produkt $Moebelstuecke := Holzart \times Moebelobjekt$ in extensionaler Darstellung sowie die Kardinalität der Mengen $Moebelstuecke$ und $Pow(Moebelstuecke)$ an.
2. Es sei $X := \{Hund\}$, $Y := \{Katze\}$ und $Z := \{Maus, Pferd\}$. Geben Sie die extensionale Darstellung sowie die Kardinalität der Mengen $M_1 := Pow(X \cup Y)$ und $M_2 := Pow(X \times Y) \times Z$ an. Geben Sie ebenfalls die Ergebnisse aller Zwischenschritte an.

3. Es sei

$$\begin{aligned} A &:= \{Englisch, Deutsch, Spanisch, Hollaendisch\} \\ B &:= \{Englisch, Spanisch, Portugiesisch\} \\ C &:= \{Griechisch, Deutsch, Franzoesisch\}. \end{aligned}$$

   a) Geben Sie die extensional Darstellung folgender Mengen an:
      i. $A \cup C$
      ii. $A \cap B$
      iii. $A \setminus C$
   b) Überprüfen Sie die folgende Gleichung auf Korrektheit, indem Sie die extensionale Darstellung beider Seiten der Gleichung berechnen. Geben Sie auch alle Zwischenergebnisse an.

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$$

4. Gegeben seien zwei Mengen M und N mit den Kardinalitäten $|M| = m$ und $|N| = n$. Geben Sie die Kardinalität der Menge $Pow(M \times N)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Sie dürfen die Namen der Elemente in den Mengen abkürzen, wenn Sie die Abkürzungen zuvor definieren.

Aufgabe 4 (Induktiv definierte Menge) (2 Punkte)
Definieren Sie die Menge der ungeraden, natürlichen Zahlen induktiv.

Aufgabe 5 (Vollständige Induktion) (3 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Aufgabe 6 (Folgen) (3 Punkte)
Geben Sie eine formale Definition der folgenden informellen Beschreibung der Menge A an. Die Menge A ist die Menge aller Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ aus natürlichen Zahlen, bei der die erste Zahl x_1, x_1 Mal wiederholt vorkommt.

Beispiel 6.1 $(3,3,3) \in A$, $(2,2,2) \notin A$.

Aufgabe 7 (Modellierung) (6 Punkte)

Auf einer Feier in Mittelerde sind m Hobbits und n Elben, also insgesamt $m+n$ Personen. Das Getränkeangebot umfasst Bier und Wein. Den Wein gibt es in rot und weiß. Man hat die Wahl zwischen drei verschiedenen Bechergrößen, nämlich klein, mittel und groß.

1. Geben Sie Mengen für *Hobbits*, *Elben*, *Personen* und *Getränke* in intensionaler Darstellung oder zusammengesetzt aus zuvor von Ihnen definierten Mengen an. Modellieren Sie dabei eine Person als Tupel bestehend aus ihrem Volk und einer laufenden Nummer. Benutzen Sie außer der Menge der natürlichen Zahlen keine vordefinierten Mengen.

2. Die Personen aus Teil (1) können im Laufe des Abends eine gewisse Anzahl jedes Getränks zu sich nehmen. Entgegen der allgemeinen Auffassung ist die Reihenfolge dabei *nicht* wichtig. Am Ende der Feier haben sich einige Gruppen von Personen gebildet, die sich eine Kutsche für den Heimweg teilen wollen.

   Gesucht ist die Obermenge aller Relationen, die den *Getränkekonsum* der Personen beschreiben, die während der Feier etwas getrunken haben, und die Menge aller möglichen *Kutschengruppen*. Geben Sie diese beiden Mengen an. Sie können dabei die Namen der in (1) gesuchten Mengen verwenden.

3. Auf einer konkreten Feier sind zwei Hobbits und drei Elben, die wir mit h_1, h_2, bzw. e_1, e_2 und e_3 bezeichnen. h_1 trinkt während des Abends drei große Bier, während e_1 einen roten Wein trinkt aus einem kleinen Becher. Alle anderen trinken nichts. Am Ende teilen sich h_1, h_2 und e_1 sowie e_2 und e_3 eine Kutsche.

   Geben Sie eine Relation für den *Getränkekonsum* und die Menge der *Kutschengruppen* an, die die genannten Fakten modellieren. Die Relation und die Menge sollen aus den in Teil (2) definierten Mengen stammen.