

DYNAMISKE SYSTEMER

STYRING AF QUADROTOR

E4DSE

Janus Bo Andersen (JA67494)

11. juni 2020 (~16:00 DK / ~22:00 SG)

PRÆSENTATION AF PROJEKT

10-12 MIN. + DISKUSSION + VOTERING

Spørgsmål

1. Intro til projektet: Problemformulering, styringsmål, afgrænsninger, metode
2. Dynamisk system i 1D og 2D
3. Overføringsfunktioner
4. Lukket-sløjfe med PD-regulatorer
5. Tuning og test
6. Resultater
7. Konklusion
8. Forbedringsmuligheder
9. Litteraturhenvisning

INTRO TIL PROJEKT

Problemformulering

- Beskriv dynamisk opførsel for quadrotor-drone (system) i 1 og 2 dimensioner.
- Udvikl (lukket-sløje) regulatorer til at opnå styringsmål.
- Implementér og simulér i Matlab/Simulink.

Styringsmål

- Navigér til vertikal position og fasthold (svæv) i 1 dimension.
- Navigér til vertikal/horisontal position og fasthold (svæv) i 2 dimensioner.
- Performance skal være sammenlignelig med en rigtig drone:
 - Stigetid, settling time, maksimal kraft og acceleration i simuleret system skal stemme nogenlunde overens med faktisk, observeret system.



Afgrænsninger

- Antager, at målesystem og sensorer er ideelle.
- Antager små vinkler og at bevaegelsesligninger kan lineariseres og afkobles.
- 3 dimensioner kunne ikke nås inden for den tilgængelige tid.
- Teori fra E4DSE + lidt ekstra fra ETALA. Fx:
 - Ikke for alvor benyttet tilstandsligninger, selvom det ville være oplagt.

INTRO TIL PROJEKT: METODE



DYNAMISK SYSTEM 1 OG 2 DIMENSIONER



Dronens fysiske egenskaber

- Modellering baseret på fysiske karakteristika på dronen fra [3].
- De benyttede størrelser til modeller i 1 og 2 dimensioner er:
 - m (masse),
 - I_{xx} (inerti, træghedsmoment for rotation om x -aksen),
 - L (vinkelret afstand mellem rotorer og massemidtpunkt).
- Antagelse om at dronens opdrift:
 - Maksimalt 1 [N], svarer til at de 4 motorer/rotorer tilsammen kan løfte ca. 100 [g].
 - Dvs. ca. 37 [g] nyttelast.

Parrot Mambo Mini		
Property	Value	SI unit
Mass, m	63.0×10^{-3}	kg
Inertia about x-axis, I_{xx}	5.83×10^{-5}	kg m ²
Inertia about y-axis, I_{yy}	7.17×10^{-5}	kg m ²
Inertia about z-axis, I_{zz}	1.00×10^{-4}	kg m ²
Distance from center of mass to rotor, L	6.00×10^{-2}	m

Table 2.1: Physical properties of the modelled quadrotor

TRANSLATION OG ROTATION STIVE LEGEMERS BEVÆGELSE

Fysiske modeller

- Højrehåndet koordinatsystem. Referencerammer:
 - Inertiel referenceramme (hvor Newton's love gælder)
 - Referenceramme påmonteret quadrotor-dronen.
- Frihedsgrader > # aktuatorer (under-aktueret)
- Reduktion af modeller:
 - Små afvigelser fra en konfiguration hvor dronen svæver
 - Små vinkler

Newton's 2. lov, translation

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

Tilsvarende for rotation (langs principale akser)

$$\sum \vec{\tau} = \mathbf{I}_C \vec{\alpha} \quad \mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

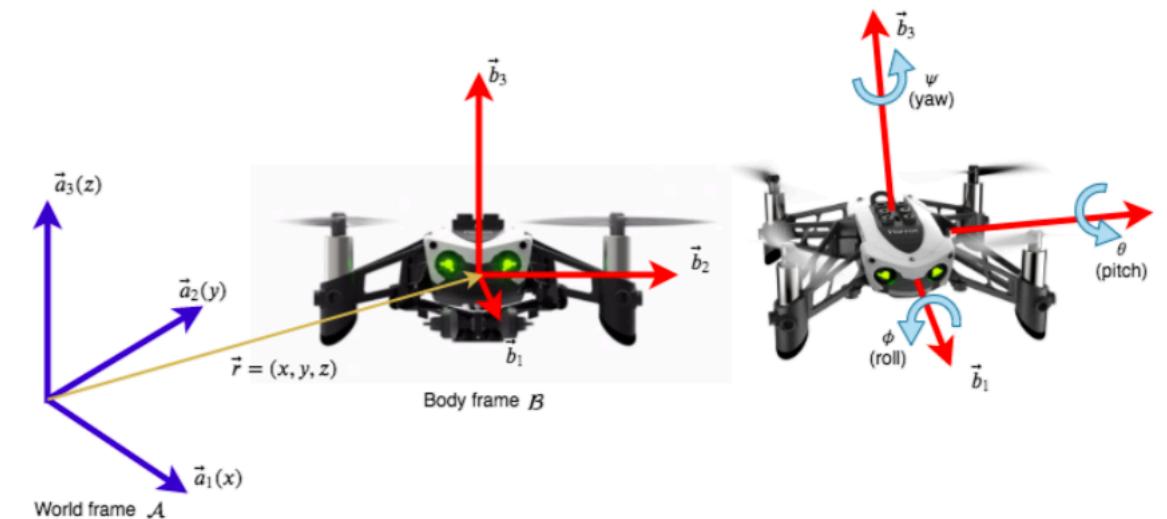
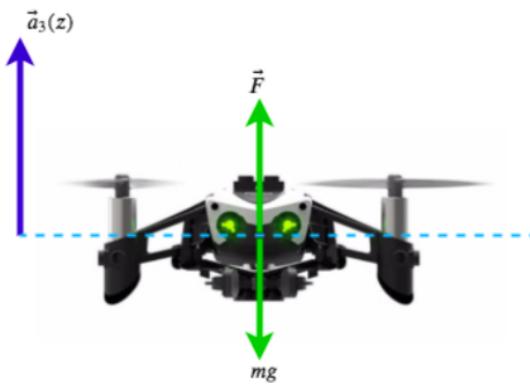


Figure 2.1: Frames of reference

1 dimension (z-plan)



Frit-legeme
diagram

2 dimensioner (yz-plan)

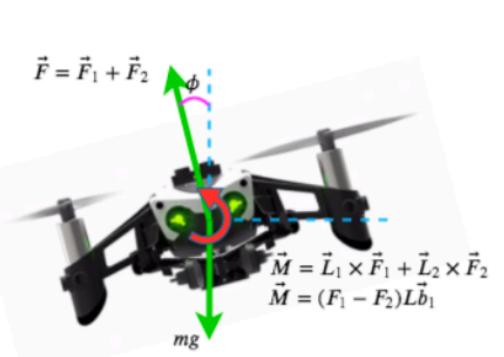
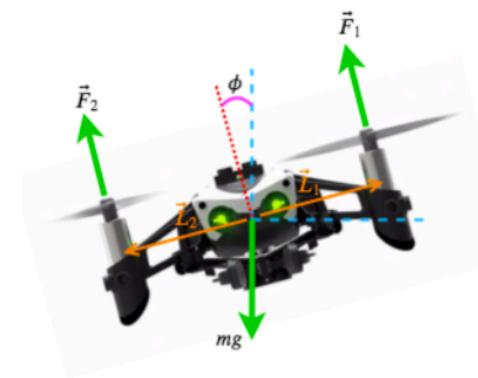


Figure 4.2: Free-body diagram in 2 dimensions

Bevægelses-
ligninger

$$\sum \vec{F} = F(t) - mg = m\ddot{z}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} \sin(\phi)F \\ -g + \frac{1}{m} \cos(\phi)F \\ \frac{1}{I_{xx}} M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} \sin(\phi) & 0 \\ \frac{1}{m} \cos(\phi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{xx}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix}$$

Styrevar.
(omkring
svævepunkt)

$$u(t) = F(t) - mg$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + F_2 \\ (F_1 - F_2)L \end{bmatrix}$$

$$u_1 = u_1(0) + \tilde{u}_1$$

Lineariseret
model

$$\sum \vec{F} = u(t) = m\ddot{z}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -g\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{xx}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

OVERFØRINGSFUNKTIONER

1 dimension (z-plan)

Lineariseret
model

$$\sum \vec{F} = u(t) = m\ddot{z}$$

Overføringsfkt.

$$G(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2}$$

Stabilitet

- Phase Margin = 0
- -> Stabilitet via regulator

Reference og
krævet
Regulator

- Reference er ønsket højde, $z_{ref}(t)$
1 frihedsgrad -> 1 regulator
- Regulator skal være PD-type

2 dimensioner (yz-plan)

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -g\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{xx}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$G_y(s) = \frac{Y(s)}{\Phi(s)} = -g \frac{1}{s^2}$$

$$G_z(s) = \frac{Z(s)}{\tilde{U}_1(s)} = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2}$$

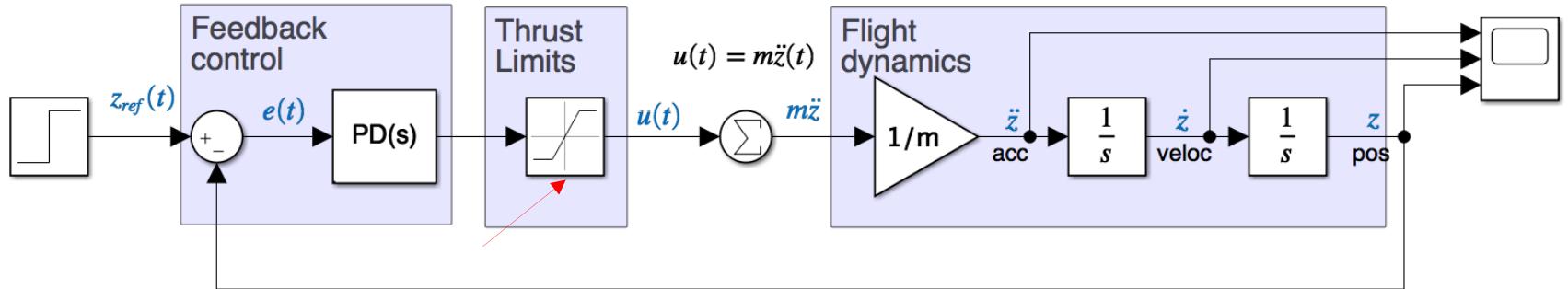
$$G_\phi(s) = \frac{\Phi(s)}{U_2(s)} = \frac{1}{I_{xx}} \frac{1}{s^2}$$

- Phase Margin = 0
- -> Stabilitet via regulator

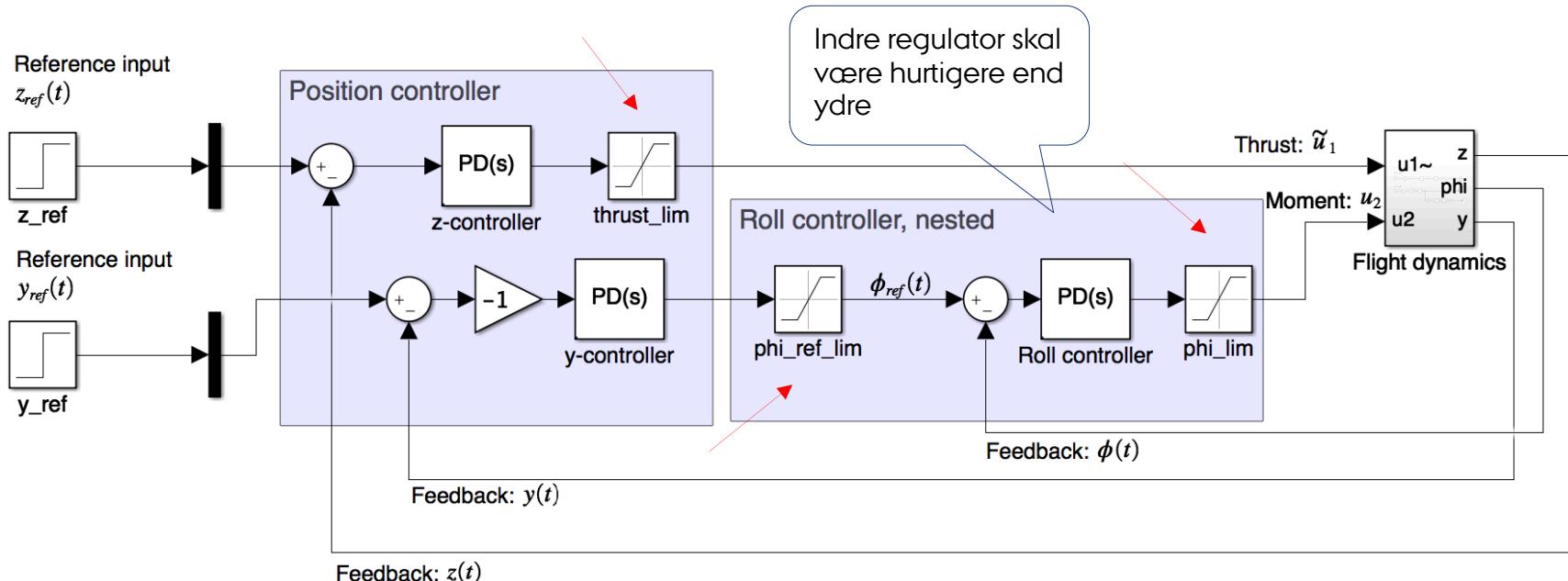
- Reference er ønsket $(y, z) = (y_{ref}(t), z_{ref}(t))$
3 frihedsgrader -> 3 regulatorer
- Regulatorer skal være PD-type
 - Indlejret regulator: ϕ er en indre variabel ift. y .

LUKKET-SLØJFE MED PD-REGULATORER OG BEGRÆNSERE

1 dimension



2 dimensioner



Poler i venstre halvplan med regulatorer

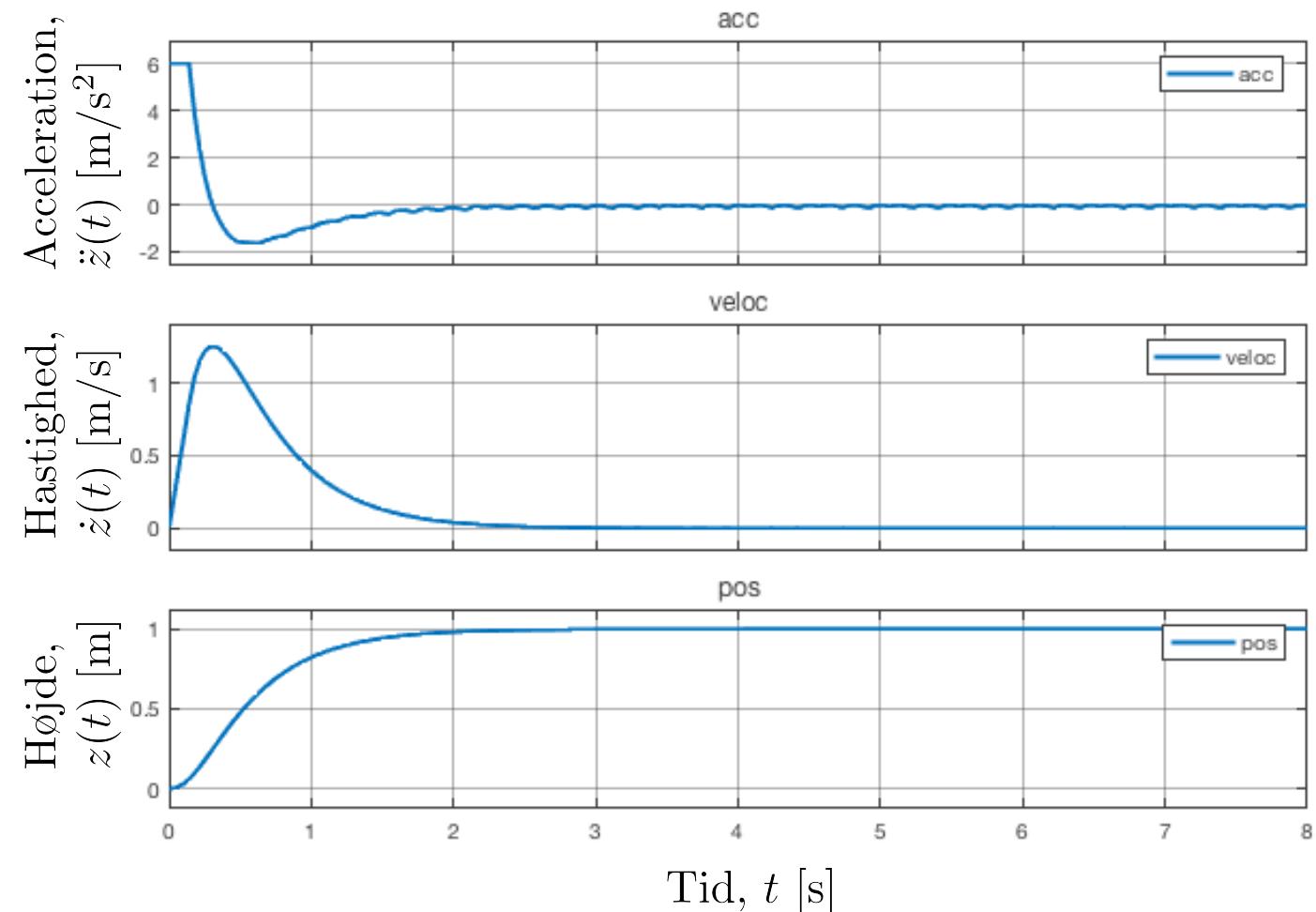
ITERATIV TUNING OG TEST, NUMERISK 1 DIMENSION

Mål:

- Navigér til vertikal position og fasthold (svæv) i 1 dimension
- Realistisk performance *med* begrænsninger.

Resultat:

- Respons som overdæmpet 2.-ordenssystem (se næste slide)
 - Opnår og fastholder ønsket position uden oversving
 - Ingen stationær fejl
- Stigetid ~ 1 [s]
- Indsvingningstid / stabiliseringstid < 2 [s]



OVERDÆMPET TYPE 2-SYSTEM

1 DIMENSION

Overdæmpet system

- 2 forskellige poler på den reelle akse
- Svarer til $\zeta > 1$ (overdæmpet).

Controller	Saturation limits	K_p	K_d
z -position	+0.38, -0.62	0.81	0.49

$$G_{cl}(s) = \frac{Z(s)}{Z_{ref}(s)} = \frac{PD(s) \cdot G(s)}{1 + PD(s) \cdot G(s)} = \frac{(K_d s + K_p) \left(\frac{1}{ms^2} \right)}{1 + (K_d s + K_p) \left(\frac{1}{ms^2} \right)} = \frac{\frac{K_d}{m} s^3 + \frac{K_p}{m} s^2}{s^4 + \frac{K_d}{m} s^3 + \frac{K_d}{m} s^2} \quad (3.11)$$

Stabilt

$$G_{cl,\text{tuned}}(s) = \frac{7.778s + 12.86}{s^2 + 7.778s + 12.86} \frac{s^2}{s^2}$$

Type 2

- 2 rene integratorer i åben-sløjfe overføringsfunktionen
- -> Reguleringsnøjagtighed over for referenceinput trin og rampe.

$$p_i = \{0, 0, -5.3943, -2.3835\}$$

$$z_i = \{0, 0, -1.65\}$$

TEST: SINUSSVAR OG LANDING

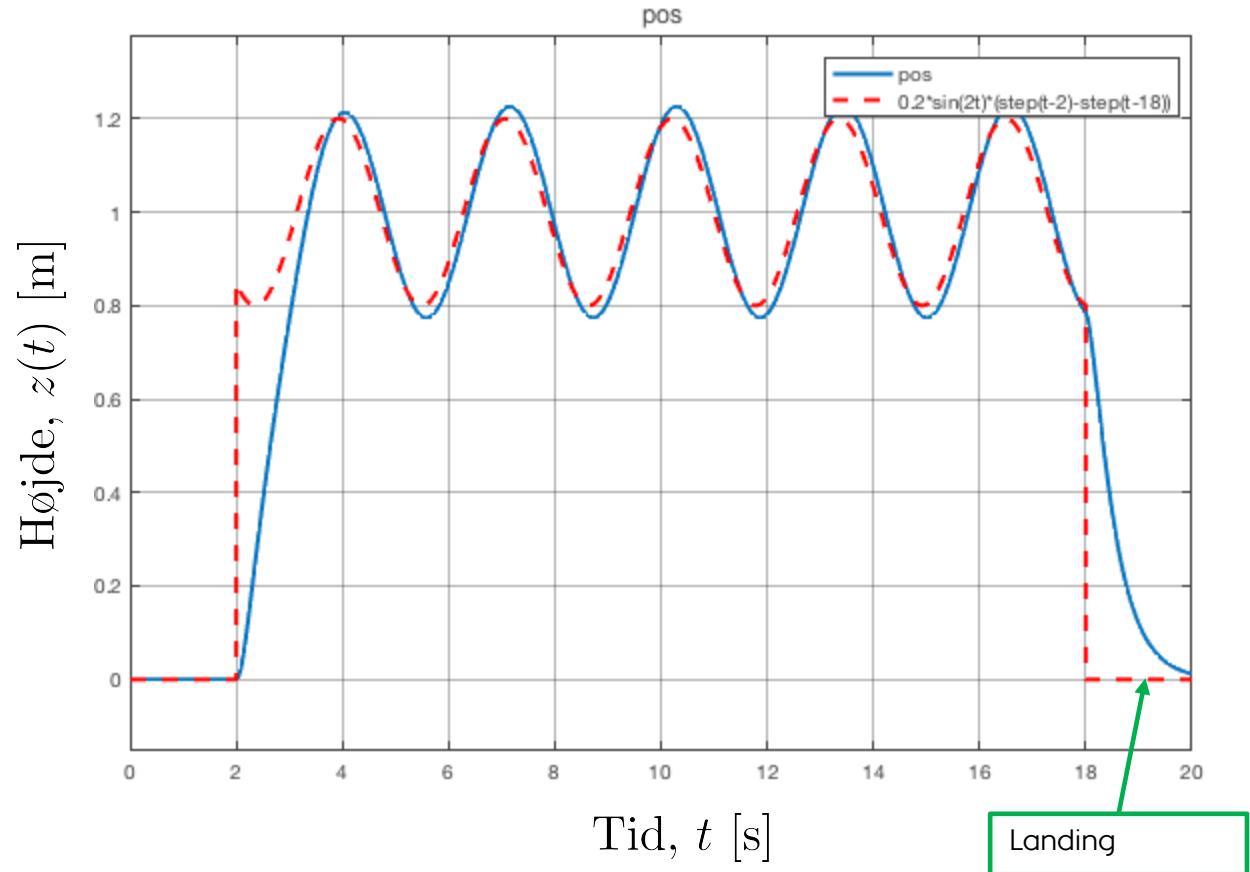
1 DIMENSION

Hovedpointer:

- Ideen med at vælge et overdæmpet trinrespons er bl.a. at landing kan foretages "realistisk".
- Tunet system tracker sinus-referencen påent
 - Type 2-system har reguleringsnøjagtighed, så det kan tracke "position" (trin) og "hastighed" (rampe) uden stationære fejl
 - Sinus'en er "højere orden", og kan ikke trackes uden stationær fejl.
 - Regulator "hurtig nok" til at tracke en sinus påent ved den givne frekvens.

$$z_{ref}(t) = 0.2 \sin(2t) (\mathbf{1}(t - 2) - \mathbf{1}(t - 18))$$

Hvor $\mathbf{1}(t)$ er enhedstrin-funktionen.



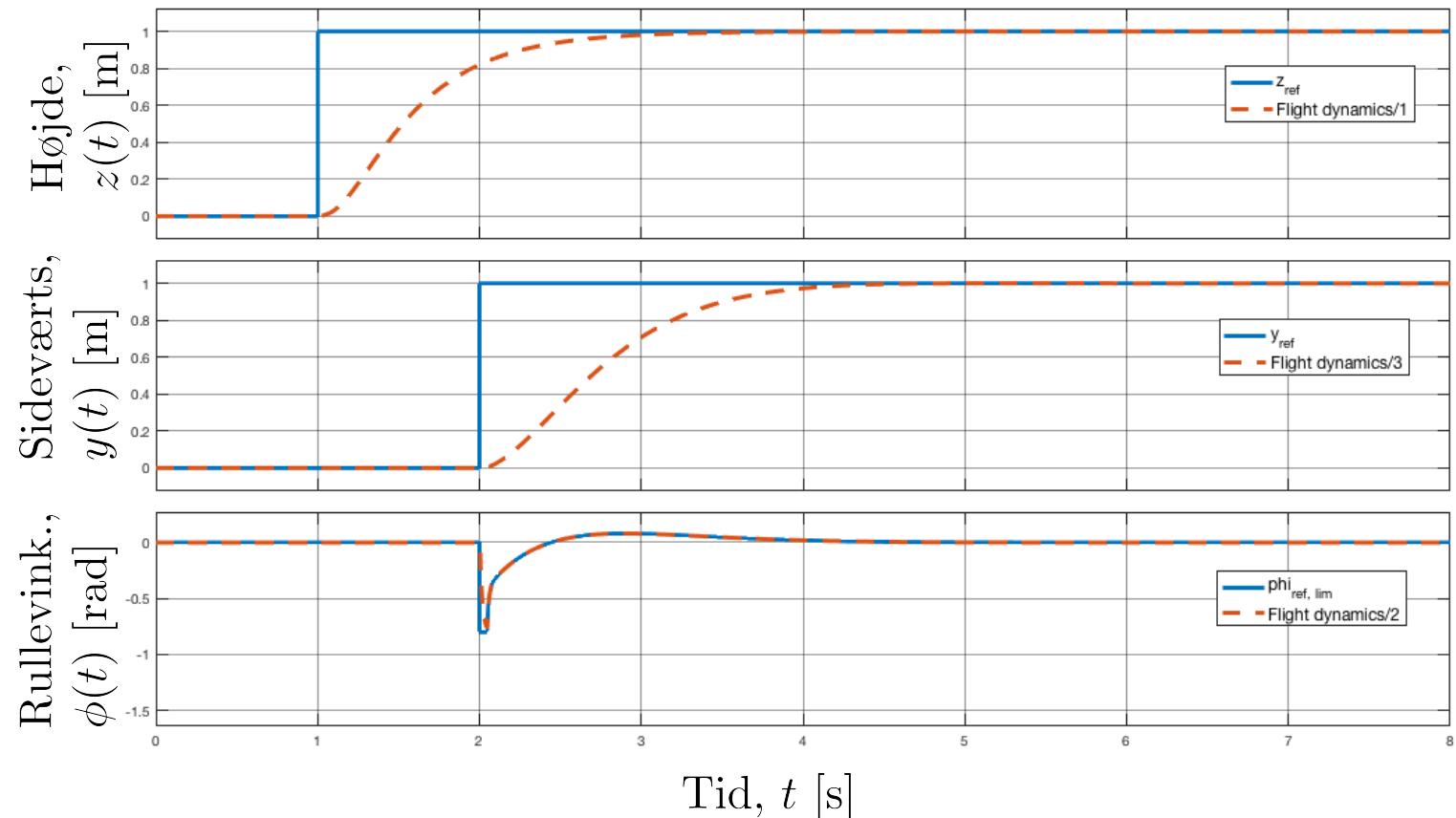
ITERATIV TUNING OG TEST, NUMERISK 2 DIMENSIONER

Mål:

- Navigér til vertikal/horisontal position og fasthold (svæv) i 2 dimensioner
- Realistisk performance *med* begrænsninger.

Resultat:

- Afkoblede responser som overdæmpede eller kritisk dæmpede 2.-ordenssystemer
 - Opnår og fastholder ønskede positioner uden oversving
 - Ingen stationær fejl
- Stigetid ~ 1 [s]
- Indsvingningstid / stabiliseringstid < 2 [s]



PD-controller values for 3-DoF controller			
Controller	Saturation limits	K_p	K_d
z -position	$+0.38, -0.62$	0.81	0.49
y -position	± 0.5	0.5	0.4
ϕ -roll	± 0.5	50	0.7

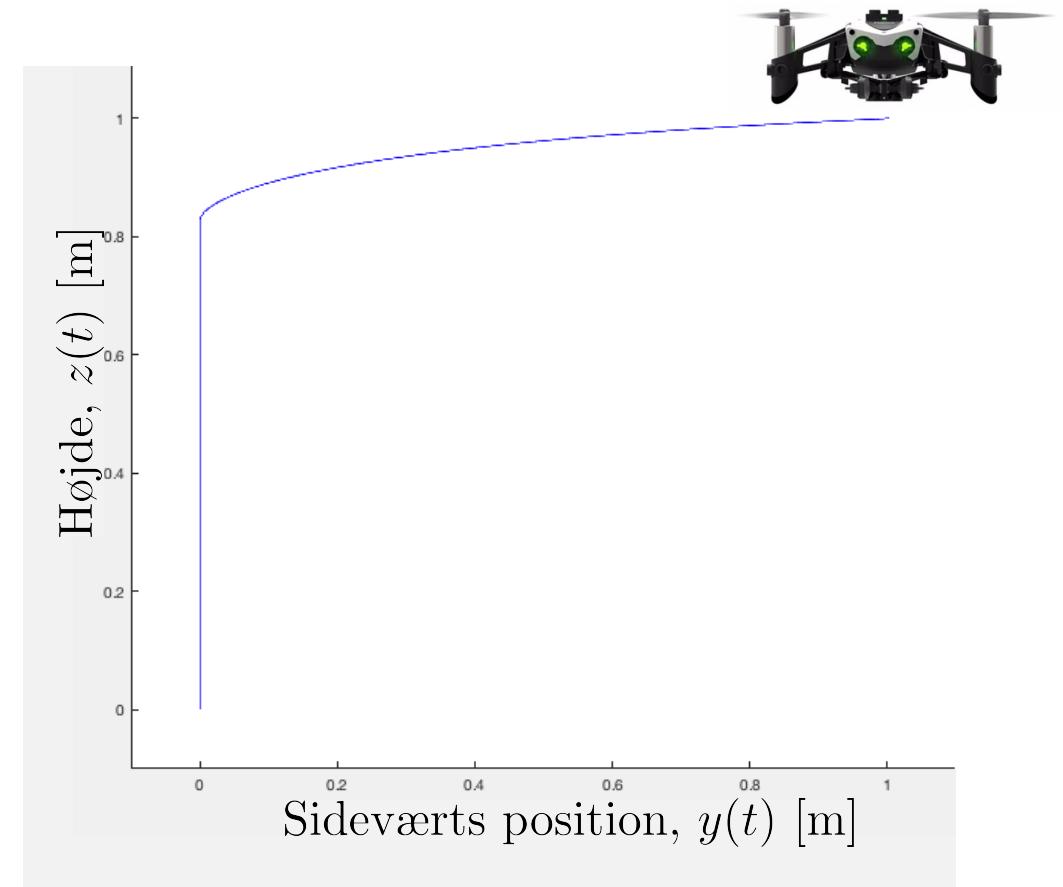
Table 4.1: Tuned controller parameters

RESULTATER

Resultater:

I 1 og 2 dimensioner opnås:

- Ønsket vertikal position
- Ønsket horisontal position
- Trinrespons:
 - Kritisk dæmpet / overdæmpet 2.-ordenssystem
 - Stigetid ~ 1 s
 - Indsvingningstid < 2 s
- Sammenlignelig performance med en faktisk drone
- Simuleret landing uden "crash".



KONKLUSION

I dette projekt er der:

- Modelleret dynamik for quadrotor-drone i 1 og 2 dimensioner, med hhv. 1 og 3 frihedsgrader.
- Implementeret PD-regulatorer til opnå givne styringsmålsætninger.
 - Stabile systemer.
 - Reguleringsnøjagtighed: Type 2, tracker referencer uden stationær fejl.
 - Ønsket hastighed på responser, også med ikke-lineære elementer indbygget.
- Verifikation vha. simulering i Simulink og Matlab.
- Anvendt relevante metoder fra E4DSE.

FORBEDRINGSMULIGHEDER

Dynamiske modeller:

- 3 dimensioner, 6 frihedsgrader
- → koblede differentialligninger
- Fulde tilstandsmodeller (12 tilstandsvariable).

Regulatorer:

- Designe regulatorer ud fra krav til fejlen (fx eksponentielt aftagende)
 - Cost-funktioner, LQR.
- Tag højde for digitale / samplede systemer.
- Realisérbar implementering af derivative-gain i PD-controller, fx med digitalt differentiationsfilter eller *lead compensation*.

Styringsmålsætninger:

- Mere komplekse mål for navigation, ruter.

Realisering:

- Implementering og test på faktisk quadrotor-drone.

LITTERATURHENVISNING

- [1] Caitlin Powers, Daniel Mellinger, and Vijay Kumar. "Quadrotor Kinematics and Dynamics". In: *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*. Ed. by Kimon P. Valavanis and George J. Vachtsevanos. Dordrecht: Springer Netherlands, 2015, pp. 307–328. ISBN: 978-90-481-9707-1. DOI: [10.1007/978-90-481-9707-1_71](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9707-1_71). URL: https://doi.org/10.1007/978-90-481-9707-1_71.
- [2] David C. Lay, Steven R. Lay, and Judi J. McDonald. *Linear Algebra and Its Applications (5th Edition)*. Pearson, 2015. ISBN: 978-0321982384.
- [3] The Mathworks. *Quadcopter Project*. 2020. URL: <https://au.mathworks.com/help/aeroblks/quadcopter-project.html>.
- [4] Gene F. Franklin, J. David Powell, and Abbas Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems (7th Edition)*. Pearson, 2014. ISBN: 0133496597.

BACKUP

EMNER FRA E4DSE

Spørgsmål

1. PID-regulering
2. Reguleringsnøjagtighed
3. Tidsdomænespecifikationer
4. Placering og tilføjelse af poler og nulpunkter
5. Systemidentifikation, Blackbox-modellering
6. **Stabilitet:**
 1. Gain margin, phase margin
7. **Kompensatorer:**
 1. Lead compensator, lag compensator

PID-REGULERING (1)

P

Proportional
forstærkning

Virkemåde

Simpelt gain. Regulerer proportionalt ift. *nuværende fejl*

Rykker pol(er)

- -> Hurtigere respons
 - dominerende pol rykkes væk fra origo, indtil breakaway: oscillérende
 - -> Mindes stationær fejl

I

Integral
forstærkning

Regulerer ift. integral (sum) af nuværende og *tidligere fejl*

- Benyttes til at fjerne stationær fejl

Tilføjer en pol (integrator) i åben-sløjfe overføringsfunktionen (øger type med 1)

D

Derivativ
forstærkning

Regulerer ift. *ændringer i fejl*

- Virker som dæmpning
 - Fx hvis fejl hurtigt lukkes, fås stort negativt bidrag til styringsvariabel -> dæmpende effekt.

Tilføjer et nulpunkt i åben-sløjfe overføringsfunktionen

- Lead-kompensering: Giver fasemargin (stabilitet).

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \dot{e}(t)$$

$$PID(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

"Grænser"

Høj K_p kan give oscillationer, oversving, møetning af komponenter, osv.

Typisk:

- $K < K_{kritisk}$ -> ellers ustabil (RHP poler)

Med et oprindeligt ustabilt system:

- $K > K_{min}$ så flyttes pol(er) til LHP

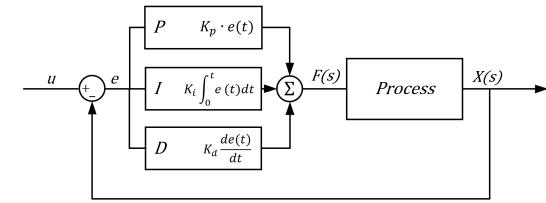
Stor øændring i reference ->

- regulering over maksimum for styringsvariabel (windup) -> oversving indtil den store fejl er udlignet til 0 igen.
 - Slå integral fra når fejl er uden for fastsat område, sæt begrænsning så integral har maks.-værdi.

Hurtig øændring i reference ->

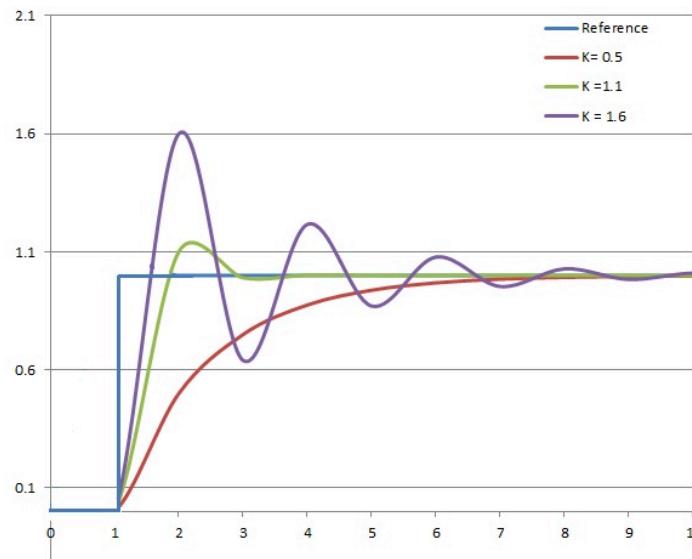
- derivative kick.
 - Brug evt. afledeede for procesvariablen i stedet.

PID-REGULERING (2)

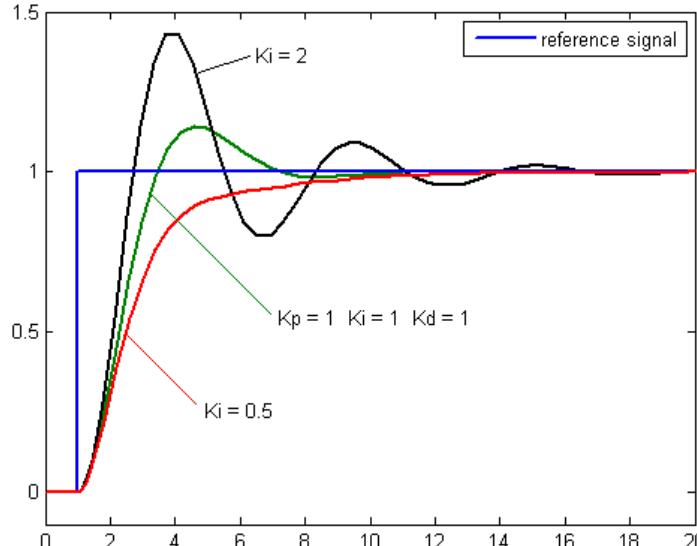


CL RESPONSE	RISE TIME	OVERSHOOT	SETTLING TIME	S-S ERROR
K _p	Decrease	Increase	Small Change	Decrease
K _i	Decrease	Increase	Increase	Decrease
K _d	Small Change	Decrease	Decrease	No Change

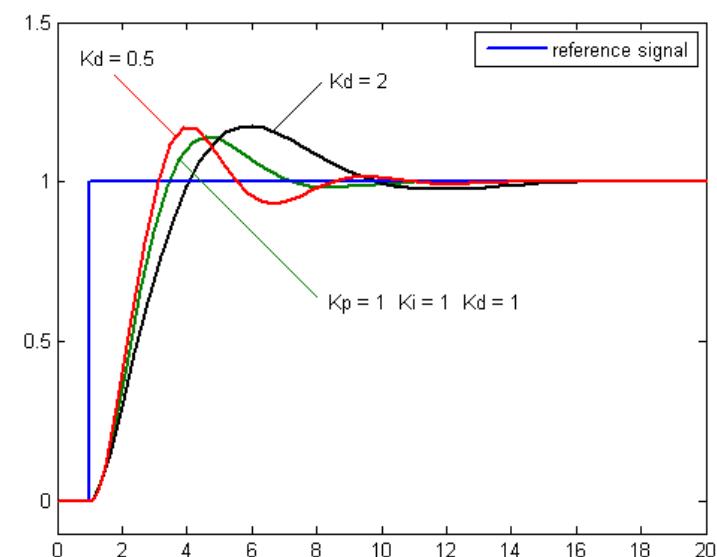
Proportional



Integral



Derivative



Kilder:

Tabel: <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction§ion=ControlPID>

Figurer: https://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller

DIMENSIONERING AF REGULERING SIMPLESTE MODEL SOM OPFYLDER KRAV

Tidsdomænespecifikationer

Relevante undersøgelser og kriterier

- Reguleringshastighed:
 - Stigetid, indsvingningstid
 - Oversving (% af slutværdi)
- Reguleringsnøjagtighed
 - Systemtype -> stationær fejl
 - Stationær fejl (% af trinhøjde), osv.

Frekvensdomænespecifikationer

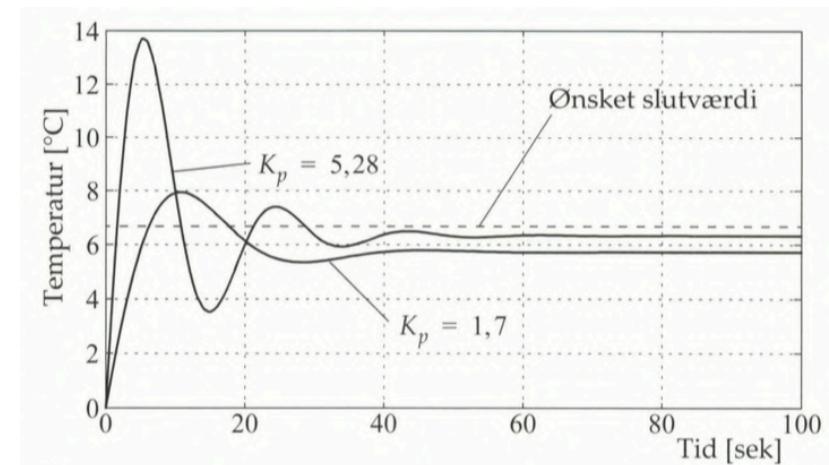
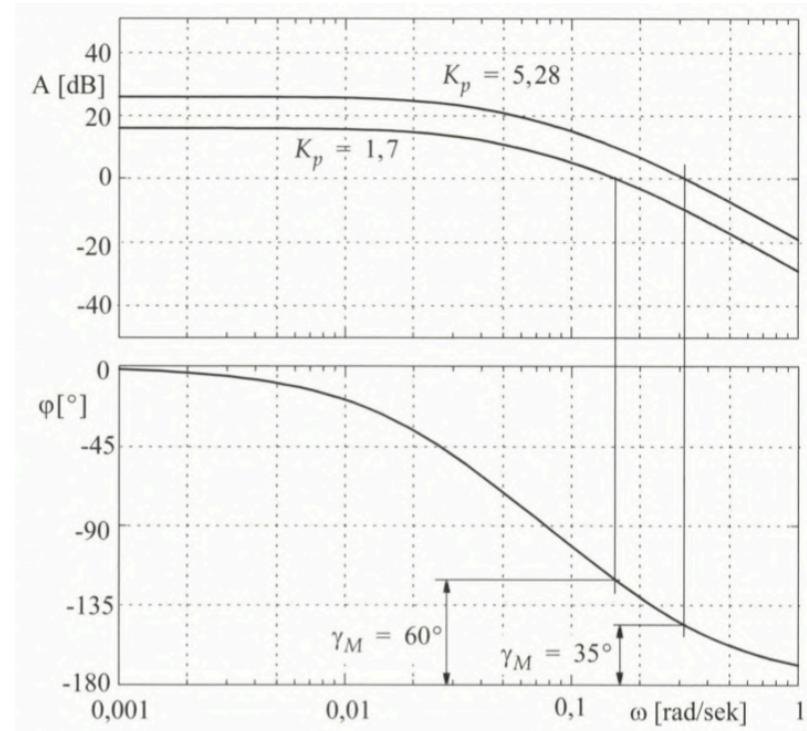
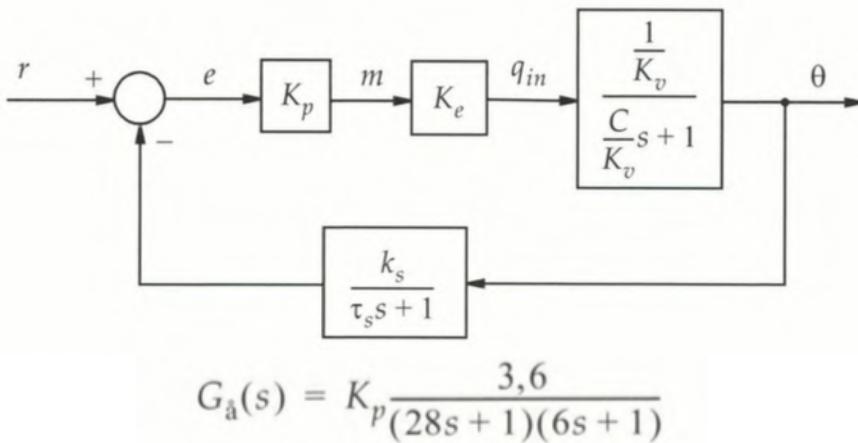
Relevante undersøgelser

- Krydsfrekvens, båndbredde, resonansamplitudeforhold
- Stabilitetsmarginer: Forstærknings- og fasemargin
- Reguleringshastighed:
 - Båndbredde (hvor højfrekvente signaler kan gå gennem systemet uden amplitudeforholdet ændres væsentligt)

EKSEMPEL TEMPERATURREG.

Eksempel (Jannerup & Sørensen)

- Temperaturregulering, type 0-system
- Krav om maks. 5% stationær fejl ift. trinhøjde
 - Øg proportionalforstærkning
 - -> MEN Lavere fasemargin



REGULERINGSNØJAGTIGHED

Systemets type:

- Antal rene integratorer i åben-sløjfe overføringsfunktionen, N
- Gælder kun for referenceinput

Eksempel:

- Skal system kunne følge trininput uden stationær fejl, så skal $N \geq 1$
- Dvs. mindst 1 ren integrator i åben-sløjfe-systemets overføringsfunktion.

Input $\rightarrow r(t) = c \frac{t^k}{k!} \Rightarrow r(s) = \frac{c}{s^{k+1}}$ (3.63)

Åben-sløjfe ovf.fkt. $\rightarrow G_{\text{å}}(s) = \frac{K_0(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1)}{s^N(a_l s^l + a_{l-1} s^{l-1} + \dots + a_1 s + 1)}$ (3.65)

Stationær fejl $\rightarrow e_{r,ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c}{s^k \left(1 + \frac{K_0}{s^N}\right)}$ (3.67)

	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	
Trin $k = 0, c = h_0$	$\frac{h_0}{1 + K_0}$	0	0	Positionsfejl
Rampe $k = 1, c = v$	∞	$\frac{v}{K_0}$	0	Hastighedsfejl
Parabel $k = 2, c = a$	∞	∞	$\frac{a}{K_0}$	Accelerationsfejl

Tabel 3.1 Stationær fejl $e_{r,ss}$ for referenceinput

TIDS DOMÆNE SPECIFIKATIONER

Specifikationer:

- **Stigetid, t_r**

$$t_r = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\text{For } \zeta \approx 0,5 \text{ er } t_r \approx \frac{1,8}{\omega_n}$$

- **Indsvingningstid, t_s**

$$\text{For } 0 < \zeta < 0,9 \text{ er } t_{s,2\%} \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

- **Toptid, t_p**

$$\text{For } 0 < \zeta < 0,9 \text{ er } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

- **Oversving, M_p**

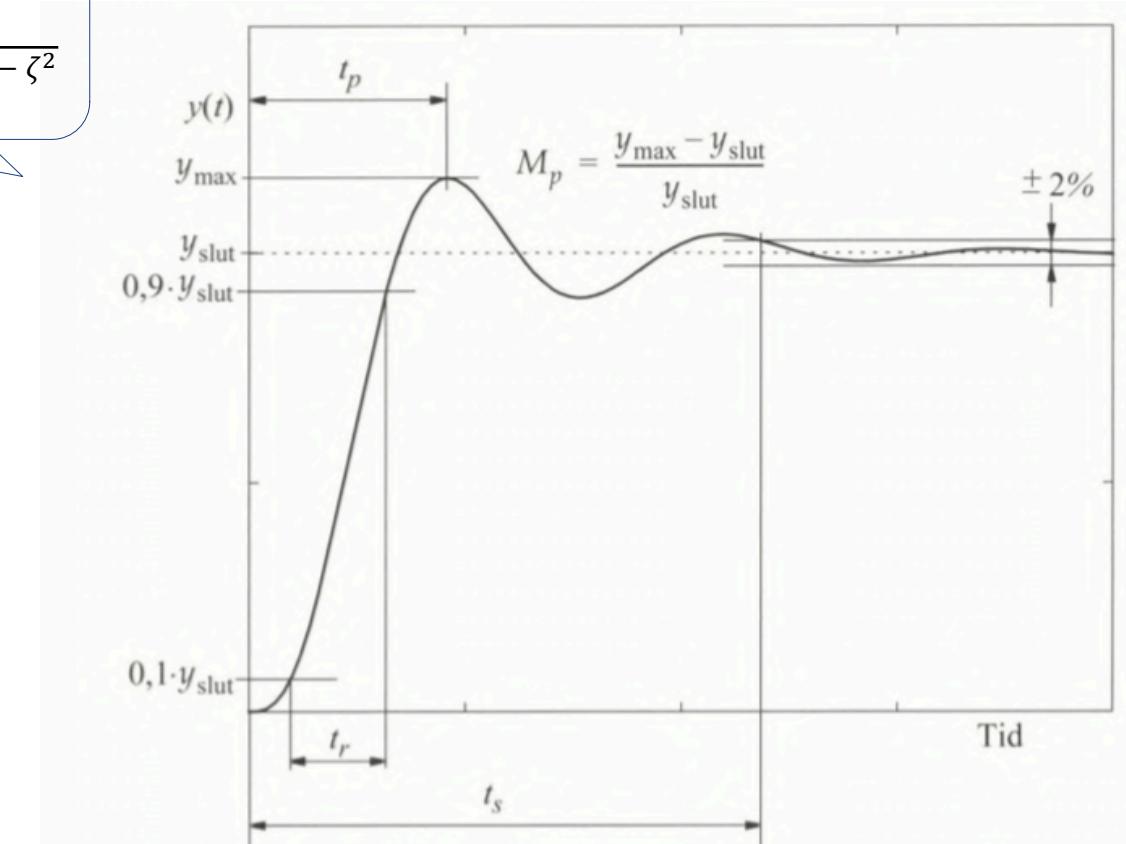
$$\text{For } 0 < \zeta < 1,0 \text{ er } M_p = e^{-\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Udæmpet egenfrekvens: ω_n

Dæmpningsforhold: ζ

Dæmpning: $\zeta \omega_n$

Dæmpet egenfrekvens: $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$



Figur 3.12 Tidsdomænespecifikationer.

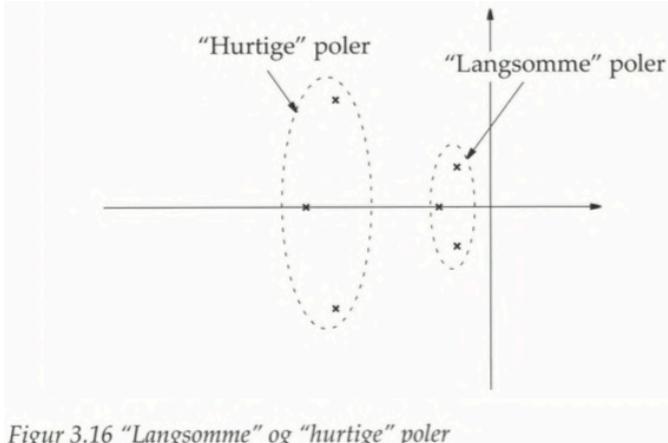
SYSTEMETS HASTIGHED AFGØRES AF POLPLACERING

Hurtigt system:

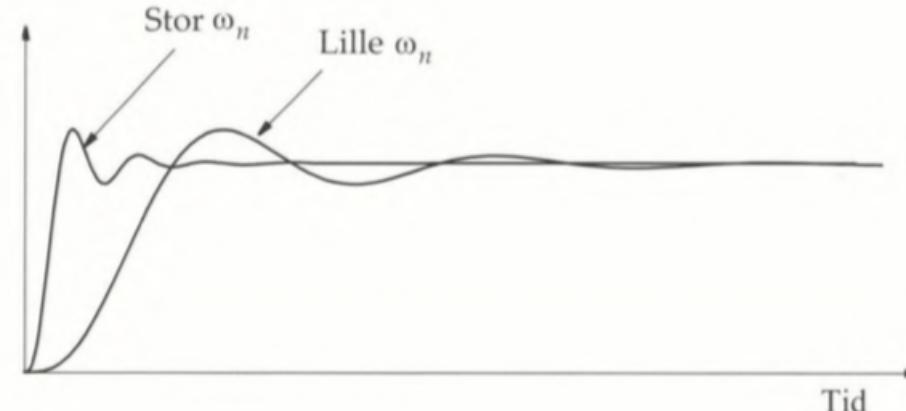
- Stor ω_n (2. orden)
- Lille τ (1. orden)

Generelt:

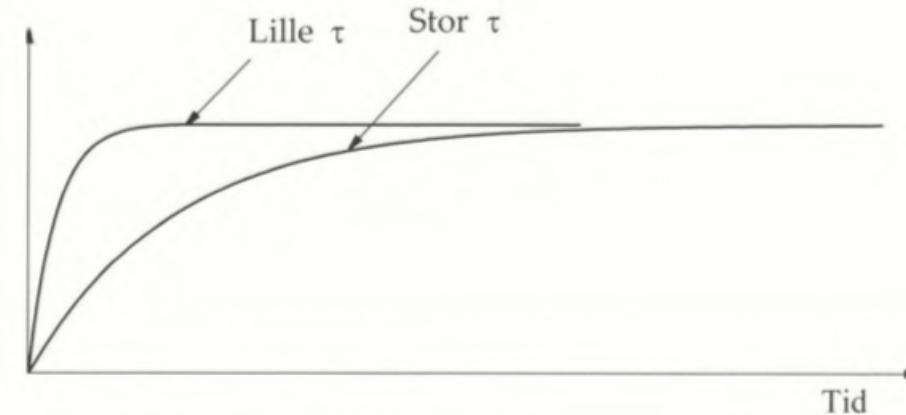
- Hurtigere system -> poler længere "til venstre" for origo:



Figur 3.16 "Langsomme" og "hurtige" poler



Figur 3.14 Langsamt og hurtigt 2.-ordenssystem.



Figur 3.15 Langsamt og hurtigt 1.-ordensystem

POL-PLACERING, S-PLAN

Differentialligning

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = 0,$$

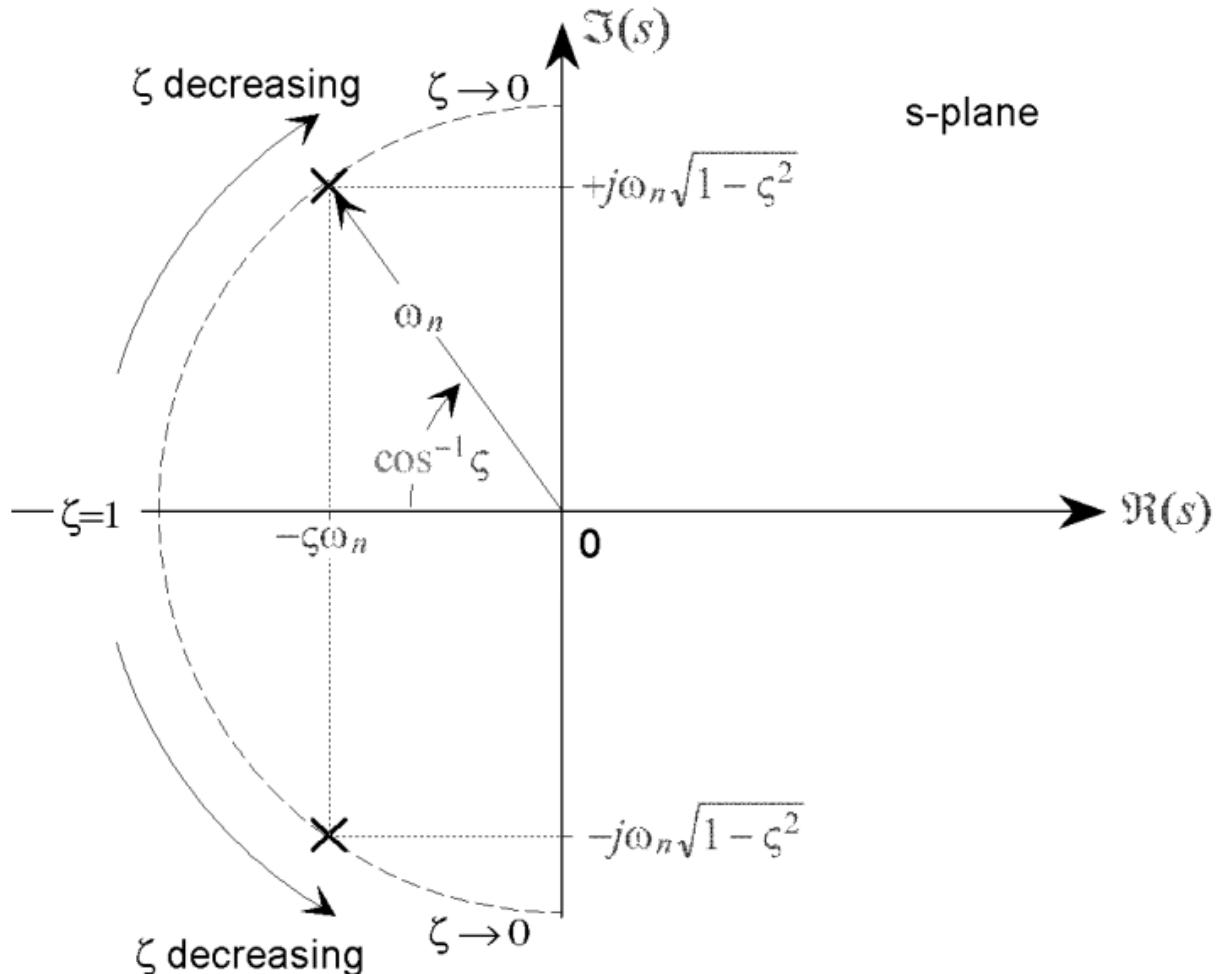
Poler

$$p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Underdæmpet $0 \leq \zeta < 1$

$$p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Udæmpet egenfrekvens: ω_n
Dæmpningsforhold: ζ
Dæmpning: $\zeta\omega_n$
Dæmpet egenfrekvens: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$



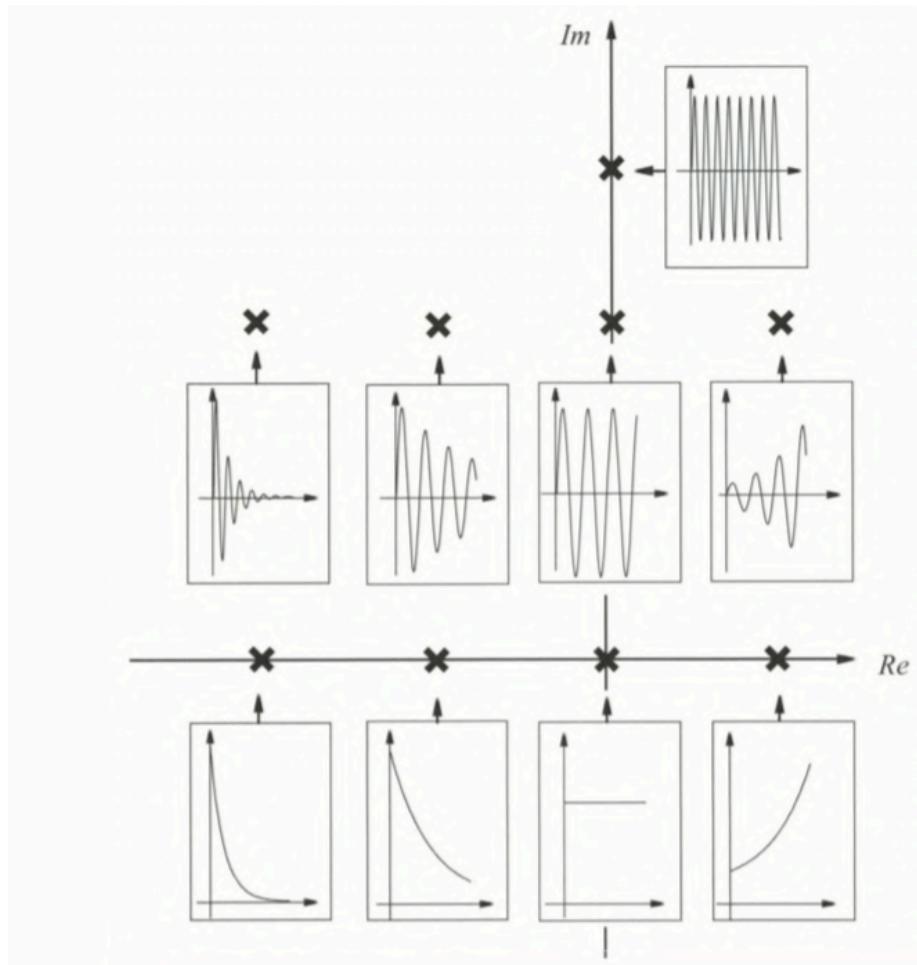
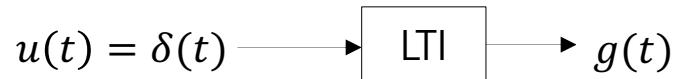
POL-PLACERING, IMPULSRESPONS

Kvalitativt udseende for impulsresponser

- Dvs. respons fra differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = u(t)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



Figur 3.11 Polplaceringer og impulsrespons.

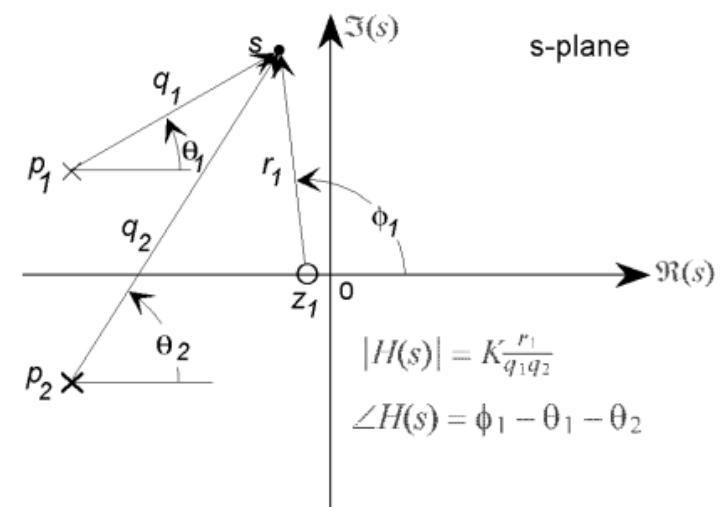
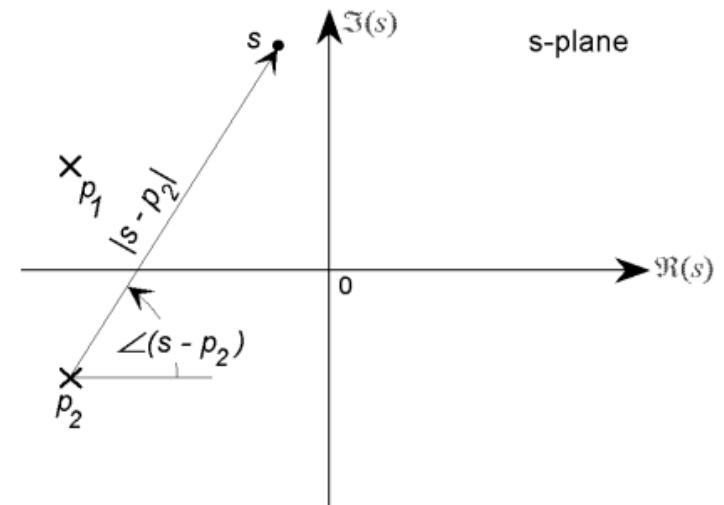
TILFØJELSE AF POLER OG NULPUNKTER

For minimum-fase-systemer gælder **Bode's sætning**

- Entydig sammenhæng mellem amplitudekarakteristik og fasekarakteristik
- Lavfrekvensasymptoter
 - N rene integratorer: $-20N$ dB/dek., $-90N^\circ$
- Højfrekvensasymptoter for system af n 'te orden med m nulpkt.
 - $-20(n - m)$ dB/dek., $-90(n - m)^\circ$

Desuden **tendens** til at:

- Tilføjelse af et nulpunkt:
 - Rykker rodkurver mod venstre
 - Giver lead-kompensering \rightarrow øger fasemargin
 - **Gunstigt:** Lukket-sløjfe poler bliver hurtigere, evt. bedre dæmpede
- Tilføjelse af pol (pol-par)
 - Rykker rodkurver mod højre
 - **Mindre gunstigt:** Stabilitetsproblemer, eller mindre muligt interval for K



$$|H(s)| = K \frac{r_1 \dots r_m}{q_1 \dots q_n}$$
$$\angle H(s) = (\phi_1 + \dots + \phi_m) - (\theta_1 + \dots + \theta_n)$$

INDFLYDELSE FRA NULPUNKTER

Reelle poler

- Nulpunkt ændrer vægtning af responssets elementarfunktioner
- "Tæt på" pol -> pol kan næsten "forkortes væk"

Komplekse poler

- Svarer til at addere den aflede, vægtet
- Ikke-minimumfase-systemer
 - Nulpunkter i højre halvplan: Fratrækker den aflede -> "Undersving"
 - Trinrespons starter med negative værdier (modsat retning af ønsket)
- Minimum-fase
 - Nulpunkter tæt på poler giver oversving

MODELLERING FIND LTI OVF.FKT.

Eksperimentel undersøgelse af systemer:
Væsentlige karakteristika for LTI er uafh. af (1)
begyndelsesbetingelser, (2) inputfunktion
-> vælg input med simpel Laplace-transformeret

Whitebox
Åbent system

Virkemidler

Fysikkens love

- Model ud fra fysik
- Ideelt set er målinger ikke nødvendige

Blackbox
Lukket system

Kun målinger er kendt. Mål sammenhænge mellem input og output:

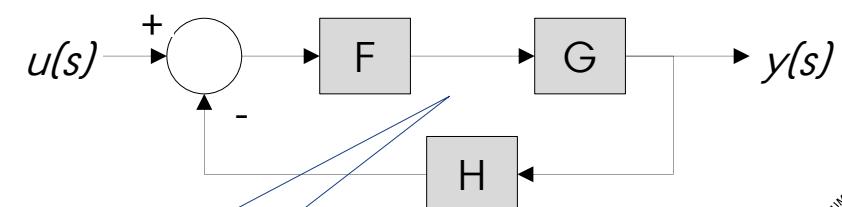
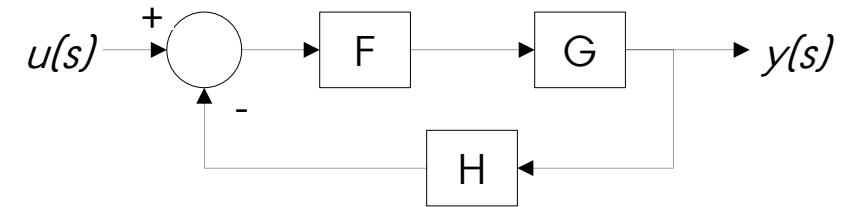
- Transientrespons (steprespons, impulsrespons)
- Frekvenskarakteristik
- Least-squares (fitting)
- Evt. filtreret hvidstøj (ARMA-modeller)

Gray box
Delvis kendt system

Noget fysik er kendt

- Resten er målinger

Illustration



SYSTEMIDENTIFIKATION

TRANSIENTRESPONS

Førsteordenssystemer, dæmpede systemer,
træghed/transporttid

Brug evt. frekvensrespons til at afsløre systemets orden

Start med langsommeste pol.

- Der kan tilføjes respons fra flere poler.
- Der kan være "død" tid - delay eller træghed

Metode:

- "Grundigere" metode i bogens Web Appendix W3.7

Simpel metode:

- Beregn DC-gain
- Beregn tidskonstant ved 63,2% af slutværdi
- FOPDT (time delay, el. højere orden):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

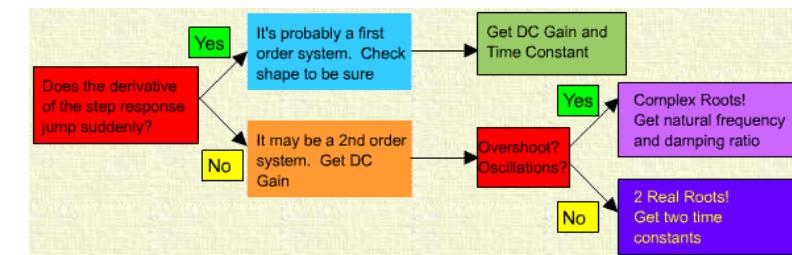
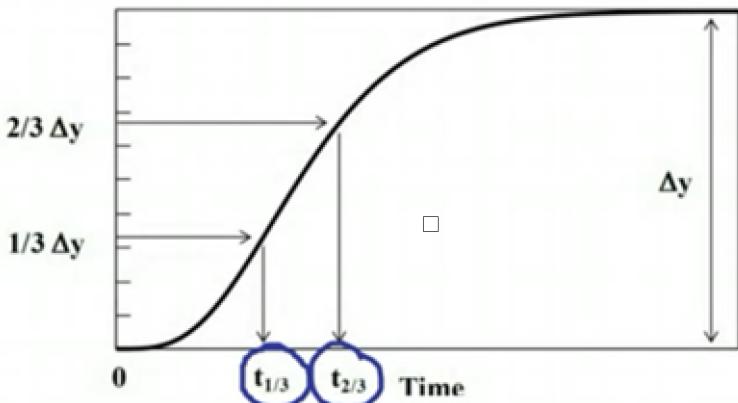
$$\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku(t - \theta)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}$$

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$e^{\frac{t_{2/3}-t_{1/3}}{\tau}} = 2 \rightarrow \tau = \frac{1}{0.7}(t_{2/3} - t_{1/3})$$

$$1 - e^{-\frac{0.4\tau}{\tau}} = 1 - 0.67 = 0.33 \rightarrow \theta = t_{1/3} - 0.4\tau$$



Andenordenssystemer, eller højere orden

Approximer højere orden vha. 2.-orden

- Hvis dæmpet, så prøv som førsteorden

Metode:

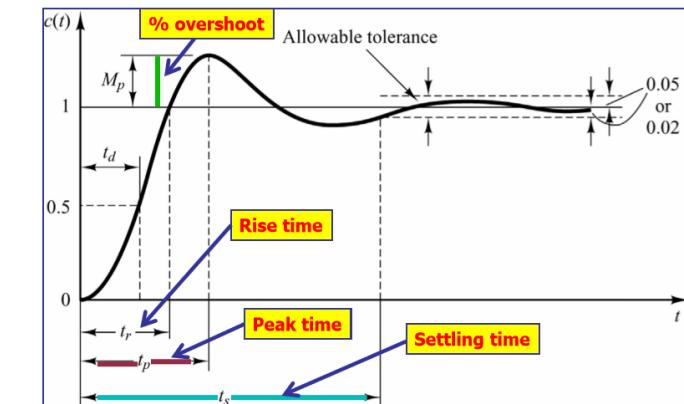
- Beregn DC-gain
- Oversving er drevet af dæmpningsforhold - udled fra

$$M_p(s) = e^{-\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$
- Bestem dæmpet egenfrekvens empirisk

$$\omega_d = \frac{2\pi}{\text{Periodetid for oscillation}}$$
- Bestem udæmpet egenfrekvens

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$
- Overføringsfunktion:

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



GM OG PM

Forstærkningsmargin og fasemargin
(gain margin and phase margin)

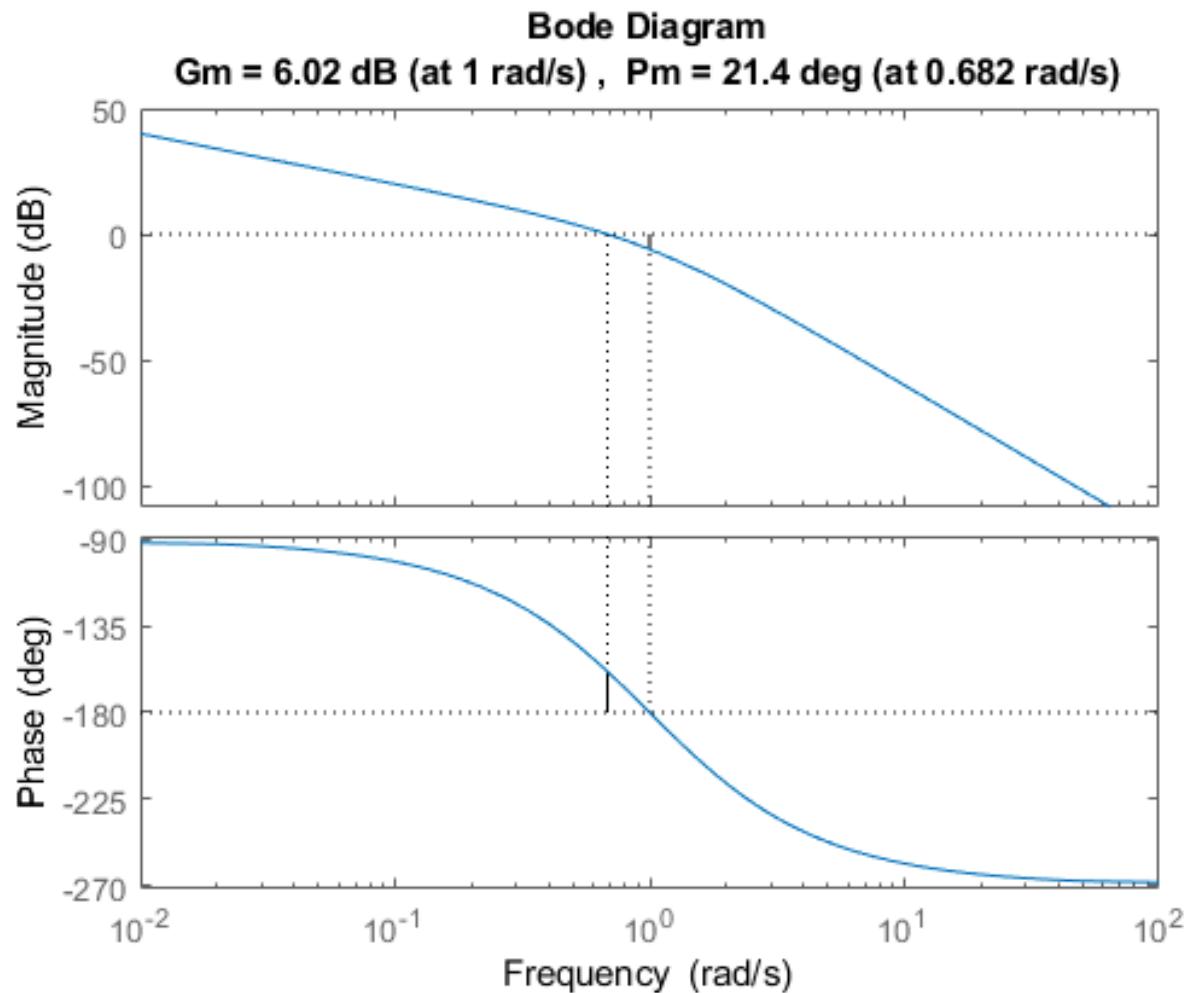
- Sikkerhedsmarginer

GM:

- Margin op til 0 dB der hvor fase er -180°

PM:

- Mål margin til -180° fase der hvor gain er 0 dB



LEAD OG LAG-KOMPENSERING

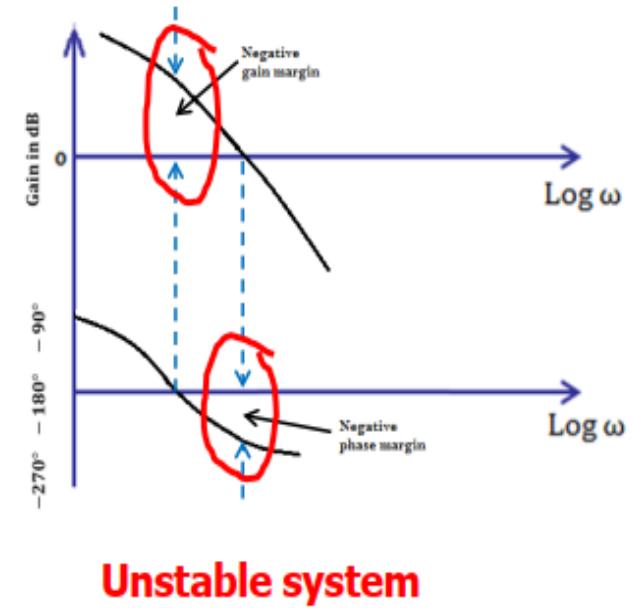
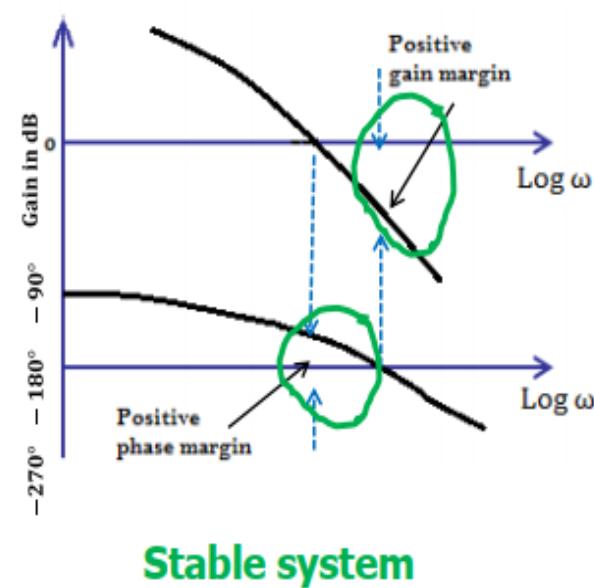
Idé:

- Benytter kompensatorer til at opnå bedre stabilitet
- Lead/Lag kompensering ændrer fase-respons
 - Lead "skubber" fasen op i frekvens -> højere PM
 - Lag "skubber" fasen ned i frekvens
- Placér pol og nulpunkt, så der er kompensering mellem de to punkter

$$C(s) = k \frac{s + a}{s + b}$$

Lead: $a < b$ (nulpunkt tættest på origo)

Lag: $a > b$ (pol tættest på origo)



Lead compensator

Lead compensator is also called PD controller. The transfer function of a lead compensator is a simple first order system with one pole and one zero. Since zero comes first and the pole comes afterwards, the frequency response of a lead compensator looks like a high pass filter. In control system design, lead compensator is used to add positive phase in the loop and thus improves stability of the closed loop system. One lead compensator can provide a maximum of 90 degrees of phase lead. Typically, more than one compensator are used if a phase lead of more than 70 degrees is required.

Lead compensator improves stability, damping and speed of response. Main application area is unstable systems. It can also be used in systems with high inertia.

Lag compensator

Lag compensator, similar to lead compensator, is made of one zero and pole. When speed of response is not a strict requirement, lag compensator is preferred over lead compensator and more common than lead compensator. In lag compensator pole is placed closer to the origin compared to the zero, which gives low pass characteristics in frequency domain. Therefore, the overall bandwidth of the closed loop system is reduced. Pole and zero of lag compensator are placed so that they don't effect the phase margin properties at the crossover frequency.

There is no hard and fast rule where to place pole and zero. The only (kind of) requirement is that zero of the lag compensator is placed far away, towards the origin, from the crossover frequency so that the designed compensator do not effect the phase margin.

REALISERING?



AARHUS
UNIVERSITET