Lösning kapitel 6

Uppgift 6.1

Beräkna $\int_{-2}^{7} \Phi(x)dx$ av funktionen

$$\Phi(x) = \begin{cases} 3, & \text{då } -2 \leq x < 2 \\ 15, & \text{då } x = 2 \\ -5, & \text{då } 2 < x < 5 \\ -1, & \text{då } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Lösnning

$$\int_{-2}^{7} \Phi(x)dx = 3(2+2) + 0 - 5(5-2) - 1(7-5) = 12 - 15 - 2 = -5$$

Uppgift 6.2

Låt $f(x) = 3 - 2x, 0 \leq x \leq 1$

a)

Dela intervallet $[0, 1]$ i 5 lika långa delintervall. Låt därefter Φ_5 och Ψ_5 var lämpliga under respektive övertrappor som är konstanta på dessa delinterval. Beräkna $\int_0^1 \Phi(x)dx$ och $\int_0^1 \Psi(x)dx$

Lösning

En sådan indeling ger gränspunkter $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}$

$$\Phi_5(x) = \begin{cases} \frac{13}{5}, & \text{då } 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ \frac{11}{5}, & \text{då } \frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5}, & \text{då } \frac{2}{5} < x \leq \frac{3}{5} \\ \frac{7}{5}, & \text{då } \frac{3}{5} < x \leq \frac{4}{5} \\ \frac{5}{5}, & \text{då } \frac{4}{5} < x \leq \frac{5}{5} \end{cases}$$

$$\Psi_5(x) = \begin{cases} \frac{15}{5}, & \text{då } 0 \leq x < \frac{1}{5} \\ \frac{13}{5}, & \text{då } \frac{1}{5} \leq x < \frac{2}{5} \\ \frac{11}{5}, & \text{då } \frac{2}{5} \leq x < \frac{3}{5} \\ \frac{9}{5}, & \text{då } \frac{3}{5} \leq x < \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5}, & \text{då } \frac{4}{5} \leq x \leq \frac{5}{5} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \Phi_5(x)dx = \frac{13}{5}\left(\frac{1-0}{5}\right) + \frac{11}{5}\left(\frac{2-1}{5}\right) + \frac{9}{5}\left(\frac{3-2}{5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{4-3}{5}\right) + \frac{5}{5}\left(\frac{5-4}{5}\right) =$$
$$\frac{1}{5}\left(\frac{13+11+9+7+5}{5}\right) = \frac{9}{5}$$

$$\int_0^1 \Psi_5(x)dx = \frac{15}{5}\left(\frac{1-0}{5}\right) + \frac{13}{5}\left(\frac{2-1}{5}\right) + \frac{11}{5}\left(\frac{3-2}{5}\right) + \frac{9}{5}\left(\frac{4-3}{5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{5-4}{5}\right) =$$
$$\frac{1}{5}\left(\frac{15+13+11+9+7}{5}\right) = \frac{11}{5}$$

Notera att de båda ovan är aritmetiska summor och kan lösas med formeln för sådana.

b)

Samma som i uppgift a men dela in i 10 intervall Lösning

En sådan indeling ger gränspunkter $\frac{1}{10}, \frac{2}{10} \dots \frac{9}{10}, \frac{10}{10}$ och alltså följande trappfunktioner

$$\Phi_{10}(x) = \begin{cases} 3 - \left(\frac{2}{10}\right) & \text{då } 0 \le x \le \frac{1}{10} \\ 3 - \left(\frac{4}{10}\right) & \text{då } \frac{1}{10} < x \le \frac{2}{10} \\ \vdots & \\ 3 - \left(\frac{20}{10}\right) & \text{då } \frac{9}{10} < x \le \frac{10}{10} \end{cases}$$

$$\Psi_{10}(x) = \begin{cases} 3 - 0, & \text{då } 0 \le x < \frac{1}{10} \\ 3 - \left(\frac{2}{10}\right) & \text{då } \frac{2}{10} \le x < \frac{2}{10} \\ \vdots & \\ 3 - \left(\frac{18}{10}\right) & \text{då } \frac{9}{10} \le x \le \frac{10}{10} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \Phi_{10}(x)dx = \frac{1}{10}\left(\frac{28}{10}\right) + \ldots + \frac{1}{10}\left(\frac{10}{10}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{28+\ldots+10}{10}\right) =$$
$$/\text{aritmetisk summa}/ = 10\left(\frac{1}{10}\left(\frac{10+28}{2*10}\right)\right) = \frac{19}{10}$$

$$\int_0^1 \Psi_{10}(x)dx = \frac{1}{10}\left(\frac{30}{10}\right) + \ldots + \frac{1}{10}\left(\frac{12}{10}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{30+\ldots+12}{10}\right) =$$
$$/\text{aritmetisk summa}/ = 10\left(\frac{1}{10}\left(\frac{30+12}{2*10}\right)\right) = \frac{21}{10}$$

c)

Samma som i uppgift b men dela in i n intervall Lösning

En sådan indeling ger gränspunkter $\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$ och alltså följande trappfunktioner

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} 3 - \left(\frac{2}{n}\right) & \text{då } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 3 - \left(\frac{4}{n}\right) & \text{då } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ \vdots & \\ 3 - 2 * \left(\frac{n}{n}\right) & \text{då } \frac{n-1}{n} < x \leq \frac{n}{n} \end{cases}$$

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} 3 - 0, & \text{då } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 3 - \left(\frac{2}{n}\right) & \text{då } \frac{2}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ \vdots & \\ 3 - \left(\frac{n-8}{n}\right) & \text{då } \frac{n-1}{n} \leq x \leq \frac{n}{n} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_n(x)dx = \left(3 - \frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n} - 0\right) + \ldots + (3-2)\left(\frac{n}{n} - \frac{n-1}{n}\right) = \\ \left(3 - \frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(3 - \frac{2}{n} + \ldots + 1\right) = \\ /\text{Aritmetisk summa}/ = \frac{1}{n}\left(\frac{n\left(3 - \frac{2}{n} + 1\right)}{2}\right) = \\ \left(\frac{3n - 2 + n}{2n}\right) = \frac{4n-2}{2n} = 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi_n(x)dx = 3\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(3 - \frac{2(n-1)}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \\ \frac{1}{n}\left(3 + \ldots + \frac{3n - 2n + 2}{n}\right) = \ /\text{aritmetisk summa}/\ = \\ \frac{1}{n}\left(n\left(3 + \frac{n+2}{2n}\right)\right) = \frac{4n+2}{2n} = 2 + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

d)

Använd c) för att beräkna $\int_0^1 (3-2x)dx$

$$2 - \frac{1}{n} \leq \int_0^1 (3-2x)dx \leq 2 + \frac{1}{n}$$

Om vi låter $n \to \infty$ ser vi

$$2 - \frac{1}{\infty} \leq \int_0^1 (3-2x)dx \leq 2 + \frac{1}{\infty}$$

Vi drar slutsatsen

$$\int_0^1 (3-2x)dx = 2$$