Differentiaalvergelijkingen Thema 6

Overdrachtsfuncties

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

16 december 2024

Inhoudsopgave

Overzicht cursus

Overzicht cursus

Het vak differentiaalvergelijkingen bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd ALETVT2A (ma 12:30 op 4-9,11-9,18-9,25-9,2-10,9-10,16-10)
- Deeltijd ALETDT2 (wo 14:00 op 6-9, 13-9,20-9,27-9, 11-10,18-10)

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

Overzicht stof van vorige week

Particuliere oplossing

- Particuliere oplossing voor gevallen waarin $g(x)$ in de vorm e^{rx} staat
- Particuliere oplossing voor gevallen waarin $g(x)$ een polynoom is
- Particuliere oplossing voor gevallen waarin $g(x)$ een goniometrische functie is
- Particuliere oplossing voor gevallen waarin $g(x)$ een product van twee vormen is

Overzicht stof van vandaag

- Overdrachtsfuncties
- Overdrachtsfunctie in grafische vorm
- Overdrachtsfuncties in blokschema's

Overdrachtsfuncties

Overdrachtsfuncties

- Een lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten in de vorm

$$ay'' + by' + cy = u(t)$$

- Voor functies in de $u(t)$ in de de vorm

$$u(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1), \quad A_1 > 0$$

- kan particuliere een particulier oplossing worden gevonden in de vorm

$$y = A_2 \cos(\omega t + \phi_2), \quad A_2 > 0$$

- A_1 en A_2 zijn de amplituden van de sinusvormige signalen en ϕ_1, ϕ_2 zijn constanten die gebruikt kunnen worden om de functie voor of achterwaarts te schuiven in de tijd.

Overdrachtsfuncties

- Het doel wordt nu om een formule te vinden waarmee de verandering in amplitude A_2/A_1 en verschuiving $\phi_2 - \phi_1$ bepaald kan worden als functie van ω.
- Het afleiden van deze formule gaat soepeler met behulp van een wat algemenere formule in de vorm

$$u(t) = A_1 e^{i(\omega t+\phi_1)} = A_1 e^{i\phi_1} e^{i\omega t} = \alpha_1 e^{i\omega t}$$
$$y(t) = A_2 e^{i(\omega t+\phi_2)} = A_2 e^{i\phi_2} e^{i\omega t} = \alpha_2 e^{i\omega t}.$$

- Hierin zijn α_1 en α_2 complexe constanten die onafhankelijk zijn van ω.
- bepaal de afgeleiden van y als

$$y(t) = \alpha_2 e^{i\omega t}$$
$$y'(t) = i\omega\alpha_2 e^{i\omega t}$$
$$y''(t) = (i\omega)^2 \alpha_2 e^{i\omega t}$$

Overdrachtsfuncties

- Invullen levert

$$a(\omega i)^2\alpha_2 e^{i\omega t} + bi\omega\alpha_2 e^{i\omega t} + c\alpha_2 e^{i\omega t} = \alpha_1 e^{i\omega t}$$

- wegdelen van $e^{i\omega t}$ levert

$$a(\omega i)^2\alpha_2 + b\omega i\alpha_2 + c\alpha_2 = \alpha_1$$

- waaruit volgt dat de particulier oplossing gevonden wordt uit

$$\alpha_2 = \frac{1}{a(i\omega)^2 + bi\omega + c}\alpha_1$$

- De particulier oplossing van de DV is dus

$$y(t) = \alpha_2 e^{i\omega t}$$

Overdrachtsfuncties

- De overdrachtsfunctie van een tweede orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten is nu

$$H(j\omega) = \frac{1}{a(i\omega)^2 + bi\omega + c}$$

- Bij het vergelijken van $u(t)$ en $y(t)$ gebruiken we de begrippen versterking en fase verschuiving. Deze kunnen gevonden worden met

$$\text{Versterking:}\quad |H(i\omega)| = \frac{1}{|a(i\omega)^2 + bi\omega + c|} = \frac{1}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

$$\text{Faseverschuiving:}\quad \arg\{H(i\omega)\} = \arctan\left(\frac{\Im\mathfrak{m}\{H(i\omega)\}}{\Re\mathfrak{e}\{H(j\omega)\}}\right) = -\arctan\left(\frac{b\omega}{c - a\omega^2}\right)$$

Overdrachtsfunctie $H(j\omega)$ Voorbeeld

- Onderzoek het gedrag van het filter als $U_{in} = \cos \omega t$.
- De stroom door de keten is $i(t)$ waaruit volgt

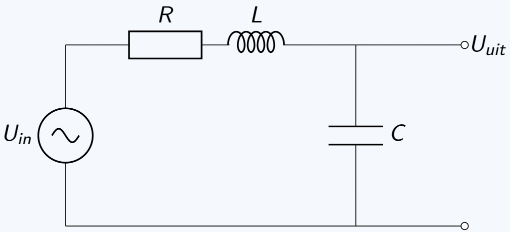
$$U_{uit}(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt$$

$$U_{in}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t)dt$$

- Het volgt dat $i(t) = CU'_{uit}(t)$ en dus dat

$$LCU''_{uit}(t) + RCU'_{uit}(t) + U_{uit}(t) = U_{in}(t)$$

- Bepaal U_{uit} als gegeven is dat $U_{in} = \cos \omega t$.



- C $= 1\mu$F
- L $= 1$ mH
- R $= 1\Omega$

Overdrachtsfunctie $H(j\omega)$ Voorbeeld

- De overdrachtsfunctie is nu

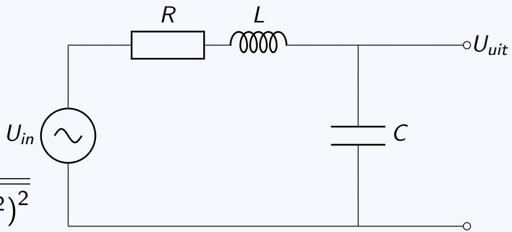
$$\frac{U_{uit}(j\omega)}{U_{in}(j\omega)} = \frac{1}{LC(j\omega)^2 + j\omega RC + 1}$$

- Bepaal de gain bij $\omega = 30$ krad/s ($\approx$ 5kHz)

$$\frac{1}{\sqrt{(10^{-6}\cdot 30\times 10^3)^2 + (1 - 10^{-9}\cdot(30\times 10^3)^2)^2}}$$
$$= 9.6$$

- Bepaal de fase bij $\omega = 30$ krad/s ($\approx$ 5kHz)

$$-\arctan\left(\frac{10^{-6}\cdot 30\times 10^3}{1 - 10^{-9}\cdot(30\times 10^3)^2}\right) = -16.7^\circ$$

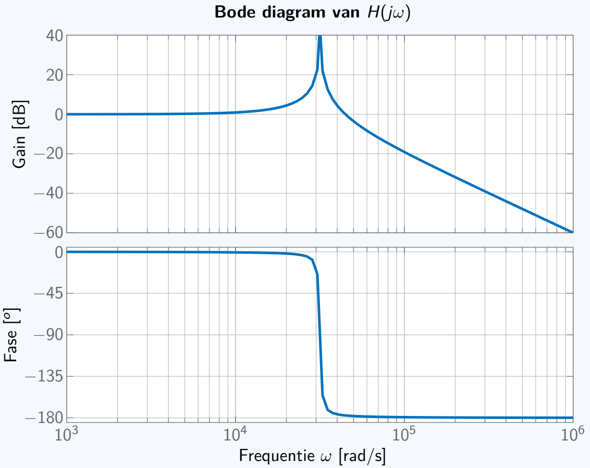


- C = 1μF
- L = 1 mH
- R = 1Ω

Overdrachtsfuncties in grafische vorm

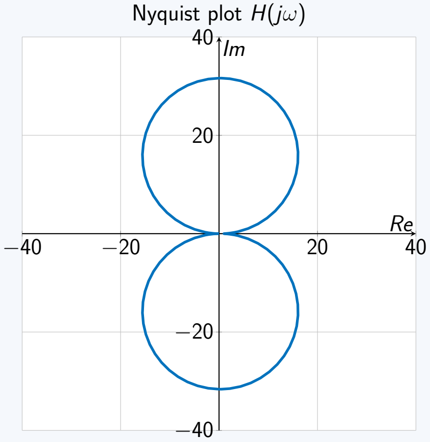
Overdrachtsfunctie $H(j\omega)$ Bode plot

- De gain en de fase kunnen worden geplot in een Bode diagram
- Het Bode diagram is gebaseerd op logaritmische schaal
- Op de horizontale is de frequentie ω in rad/s weergegeven
- Op de verticale as de gain in dB ($20\log(m)$) in het bovenste venster en de fase in graden in het onderste venster.
- Het bode diagram speelt een centrale rol in vakken als meet- en regeltechniek



Overdrachtsfunctie $H(j\omega)$ Nyquist plot

- Een Nyquist plot is een afbeelding van $H(j\omega)$ met op de horizontale as de reële waarde van $H(j\omega)$ en op de verticale as de imaginaire waarde van $H(j\omega)$.
- Er is in dit geval geen frequentie-as.
- Omdat complexe waarden van $H(j\omega)$ in paren voorkomen is het figuur gespiegeld in de horizontale as.
- Toepassingen zijn stabiliteitsonderzoek bij vakken als meet- en regeltechniek
- In dit voorbeeld start het figuur op het punt (-1,0) en eindigt op (0,0)



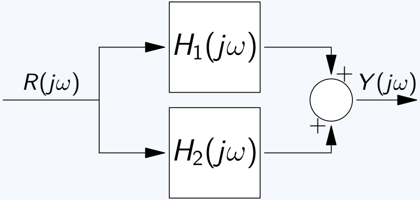
Overdrachtsfuncties in de vorm van blokschema's

Blok schema, Parallel

- Een overdrachtsfunctie $H(j\omega)$ bepaald een uitgangssignaal $Y(j\omega)$ op basis van een ingangssignaal.
- Het is mogelijk om met behulp van meerdere blokken een schema op te bouwen.
- Signalen vloeien door het schema in de richting van de pijlen.
- Signalen kunnen worden opgeteld zodat een schakeling ontstaat zoals in dit geval een parallelschakeling

$$Y(j\omega) = (H_1(j\omega) + H_2(j\omega))\, R(j\omega)$$

Overdrachtsfunctie $Y(j\omega) = H(j\omega))R(j\omega)$



Parallel $Y(j\omega) = (H_1(j\omega) + H_2(j\omega))\, R(j\omega)$

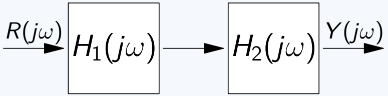
Blok schema, serie en Feedback

- Bij een serieschakeling worden blokken achter elkaar doorlopen waarbij de blokken met elkaar vermenigvuldigd worden:

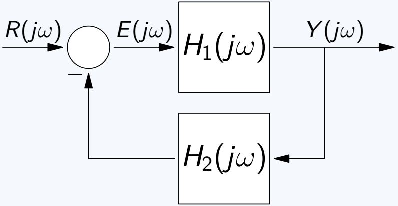
$$Y(j\omega) = \left(H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)\right) R(j\omega)$$

- Het is ook mogelijk om een feedback structuur te maken waarbij signalen worden teruggevoerd:

$$E(j\omega) = R(j\omega) - H_2(j\omega)Y(j\omega)$$
$$Y(j\omega) = H_1(j\omega)E(j\omega)$$
$$Y(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)} R(j\omega)$$



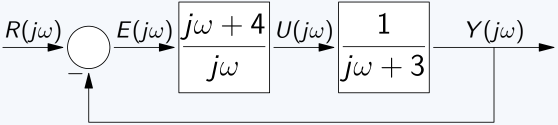
Serie $Y(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)R(j\omega)$



Feedback $Y(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{1+H_1(j\omega)H_2(j\omega)} R(j\omega)$

Blok schema, Oefening

- Bepaal de overdrachtsfunctie van het PI geregelde eerste orde systeem
- Schets het Bode diagram van $H_1(j\omega)H_2(j\omega)$
- Schets het Nyquist diagram van $H_1(j\omega)H_2(j\omega)$
- Schets het Bode diagram van het geslotenlus systeem $H_c(j\omega) = Y(j\omega)/R(j\omega)$



- Systeem $y'(t) + 3y(t) = u(t)$
- PI regelsysteem

$$u(t) = e(t) + 4\int e(t)dt$$

Blok schema, Oefening

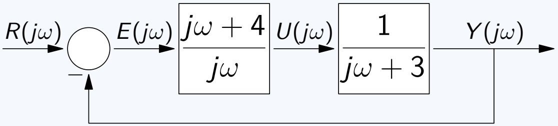
- Hier is $H_1(j\omega)$ gelijk aan

$$H_1(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{j\omega} \frac{1}{j\omega + 3}$$

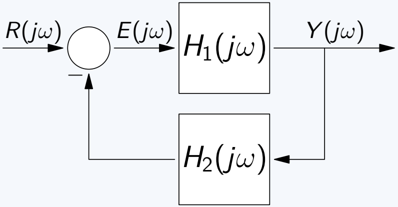
- Met $H_2(j\omega) = 1$ volgt dan dat

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{j\omega + 4}{j\omega} \frac{1}{j\omega + 3}}{1 + \frac{j\omega + 4}{j\omega} \frac{1}{j\omega + 3}} R(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 4} R(j\omega)$$

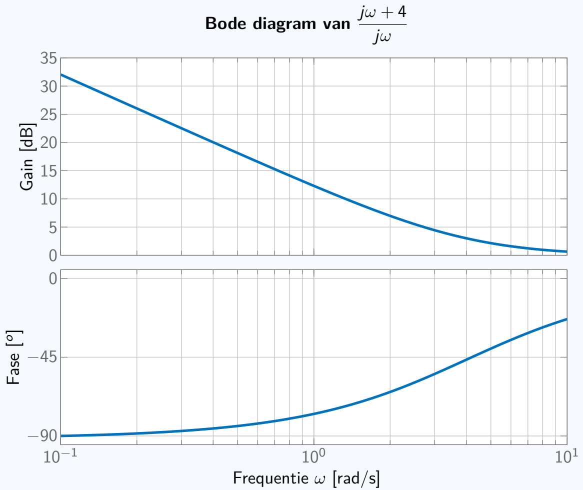


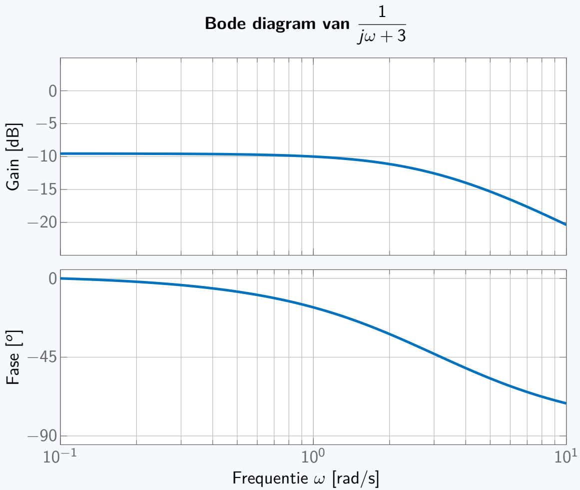
PI geregeld eerste orde systeem



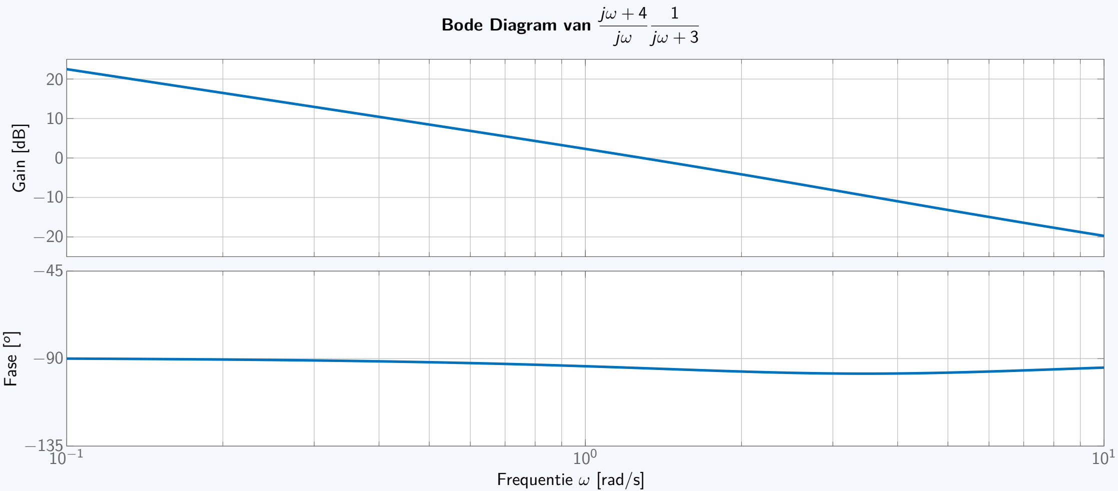
Feedback $Y(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega) H_2(j\omega)} R(j\omega)$

Overdrachtsfunctie $H_1(j\omega)$ Bode plot





Bode plot van combinatie $H_1(j\omega)H_2(j\omega)$



Overdrachtsfunctie Nyquist plot $H_1(j\omega)H_2(j\omega)$

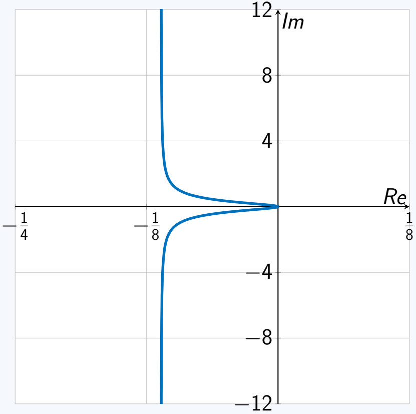
- Bij het tekenen van een Nyquistplot is het belangrijk om het verloop van versterking en fasehoek goed in de gaten te houden.
- In dit geval is de overdachtsfunctie makkelijk te scheiden.
- Versterking:

$$|H_1(j\omega)| = \sqrt{\omega^2+4^2} - \sqrt{\omega^2+3^2} - \sqrt{\omega^2}$$

- Fase:

$$\arg\{H_1(j\omega)\} = -90^\circ + \arctan\left(\frac{\omega}{4}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

Nyquist plot $\dfrac{j\omega+4}{j\omega}\dfrac{1}{j\omega+3}$



Bode plot gesloten lus systeem