Lineaire Algebra Thema 1

Basis

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

2 september 2024

inholland hogeschool

Inhoudsopgave

Overzicht cursus

Overzicht cursus

Het vak Lineaire Algebra bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd ALETVT2A (Donderdag)
- Deeltijd ALETDT2 (Woensdag)

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

Overzicht cursus (onder voorbehoud)

- Thema 1, 3.1 Vectoren, 3.2 Matrices
- Thema 2, 3.3 Lineaire afbeeldingen, 3.4 Determinanten
- Thema 3, 3.5 Regel van Cramer 3.6 Methode van Gauss
- Thema 4, 3.7 Pivotting en Rijschaling 3.8 Inverse matrix
- Thema 5, 3.9 Gauss-Jordan eliminatie 3.10 LU decomposiie
- Thema 6, 3.1 Eigenwaarden en Eigenvectoren.
- Thema 7, Tentamen voorbereiding

Kalender Lessen 2024-2025

Voltijd.

Lesweek	weeknummer	Datum	Tijd	Lokaal
Week 1	36	05/09/2024	13:30	AL00-A1-36
Week 2	37	12/09/2024	10:30	AL00-A1-36
Week 3	38	19/09/2024	10:30	AL00-A1-19
Week 4	39	26/09/2024	10:30	AL00-A1-36
Week 5	40	03/10/2024	11:30	AL00-A1-19
Week 6	41	10/10/2024	10:30	AL00-A1-24
Week 7	42	17/10/2024	11:00	AL00-A1-16
Week 8	43	21/10/2024	10:00	AL00-A1-16

Kalender Lessen 2024-2025

Deeltijd.

Lesweek	weeknummer	Datum	Tijd	Lokaal
Week 1	36	04/09/2024	10:00	AL00-A1-36
Week 2	37	11/09/2024	14:30	AL00-A1-36
Week 3	38	18/09/2024	15:00	AL00-A1-36
Week 4	39	25/09/2024	14:30	AL00-A1-36
Week 5	40	02/10/2024	15:00	AL00-A1-36
Week 6	41	09/10/2024	14:00	AL00-A1-36
Week 7	42	16/10/2024	15:00	AL00-A1-36

Overzicht stof van vandaag

- Paragraaf 3.1 Vectoren
  - inproduct
  - uitproduct
  - Basis, onafhankelijke vectoren, afhankelijke vectoren
  - Opgaven 3.1
- Paragraaf 3.2 Matrices
  - Matrices
  - Rekenregels voor matrices, Falk schema
  - Opgaven 3.2

Lineaire Algebra

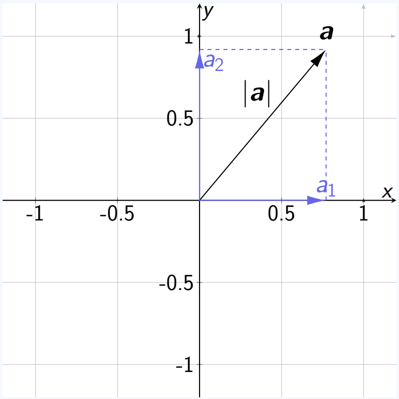
- Het doel van het college is kennismaken met Lineaire Algebra.
- Toepassingen van Lineaire Algebra zijn te vinden in regeltechniek, motion control en robotica
- Lineaire algebra zal nog terugkomen in andere vakken in het tweede jaar en in de minoren.
- Het vak is zelfstandig te volgen.

3.1 Vectoren

Definitie vector

- Een **vector** in $\mathbb{R}^2$ is gedefinieerd als $\boldsymbol{a} = \binom{a_1}{a_2}$
- a_1 en a_2 zijn de *twee* kentallen van de vector.
- Een vector kan worden voorgesteld als een pijltje naar een coördinaat (a_1, a_2).
- een vector in $\mathbb{R}^n$ heeft n kentallen $a_1, \ldots, a_n$.
- Een vector heeft een lengte (**absolute waarde** of **norm**) van $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Vectoren in $\mathbb{R}^2$



Vectoren optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met een scalar

- Vectoren kunnen worden opgeteld of van elkaar afgetrokken door de kentallen bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

- Vectoren kan je vermenigvuldigen met een **scalar** (getal)

$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$$

Vectoren inwendig product

- Het inwendig product is gedefinieerd als

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

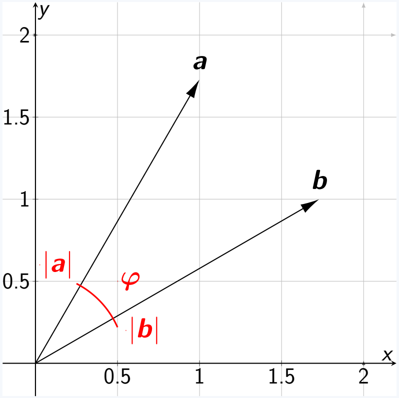
- De cos van de hoek tussen twee vectoren is dan

$$\cos(\varphi) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$$

- Voor het inwendig product geldt het volgende

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$$
$$(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

Inwendig product



Vectoren inwendig product

- Het inwendig product in $\mathbb{R}^2$ is gedefinieerd als

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

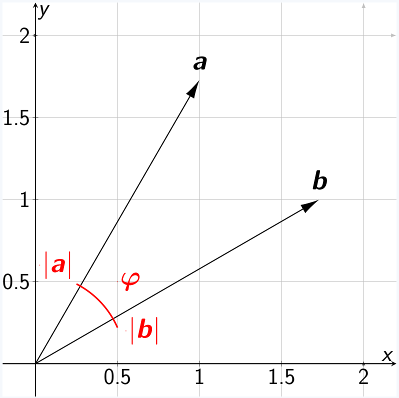
- Voorbeeld:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 1 = 2\sqrt{3}$$

$$|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 4$$

$$\varphi = \operatorname{acos}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 30^o$$

Inwendig product voorbeeld



Vectoren inwendig product en projectie

- De projectie van vector $\boldsymbol{a}$ op vector $\boldsymbol{b}$ is

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2} \cdot \boldsymbol{b}$$

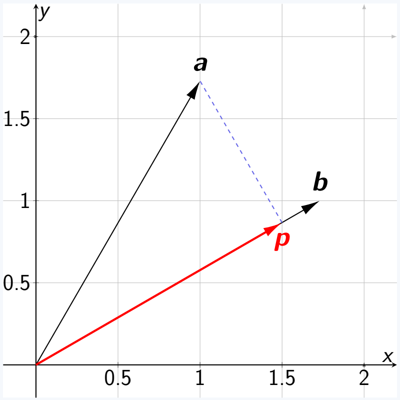
- Dit volgt uit

$$\boldsymbol{p} = \frac{|\boldsymbol{a}| \cdot \cos(\varphi)}{|\boldsymbol{b}|} \cdot \boldsymbol{b}$$

- Voorbeeld:

$$\boldsymbol{p} = \frac{2\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Inwendig product en projectie



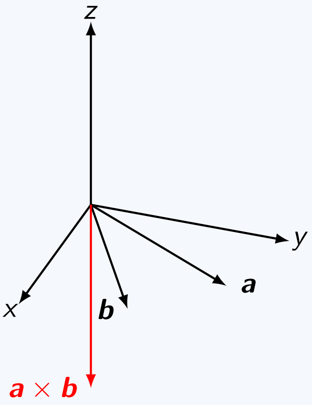
Vectoren uitwendig product

- Het uitwendig product of uitproduct is gedefinieerd in de driedimensionale ruimte als

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

- Voorbeeld:

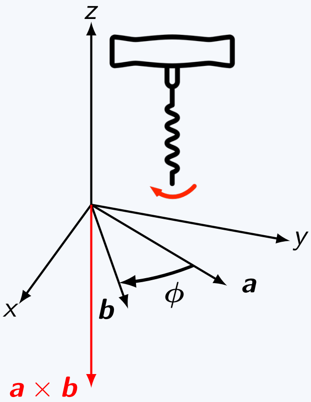
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Vectoren uitwendig product

Inholland hogeschool

- Het uitwendig product $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ is de driedimensionale vector die
  1. loodrecht staat op zowel $\boldsymbol{a}$ als $\boldsymbol{b}$;
  2. de richting heeft, zodanig dat $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ een rechts stelsel is;
  3. een lengte heeft gelijk aan $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin(\phi)$
- Een rechts stelsel houdt in dat een *rotatie* van $\boldsymbol{a}$ naar $\boldsymbol{b}$ een vector oplevert in de *richting* van de beweging die een *kurkentrekker* zou maken.



Vectoren uitwendig product

- De definitie van het uitproduct is te onthouden met een schema
  - In kleur hier de x-coördinaat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x, a_y, a_z) \times (b_x, b_y, b_z)$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z)\,\mathbf{e}_x - (a_x b_z - b_x a_z)\,\mathbf{e}_y + (a_x b_y - b_x a_y)\,\mathbf{e}_z$$

  - In kleur hier de y-coördinaat

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x, a_y, a_z) \times (b_x, b_y, b_z)$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z)\,\mathbf{e}_x - (a_x b_z - b_x a_z)\,\mathbf{e}_y + (a_x b_y - b_x a_y)\,\mathbf{e}_z$$

Een drietal begrippen, onafhankelijk, basis en opspannen

- Twee vectoren $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ in een tweedimensionaal vlak $\boldsymbol{V}$ (in $\mathbb{R}^2$) heten **onafhankelijk** als ze niet in elkaars verlengde liggen.
- De vectoren $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ zijn **onafhankelijk** als er geen λ bestaat zodat $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$.
- Twee **onafhankelijke** vectoren $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ vormen een **basis** voor het vlak $\boldsymbol{V}$.
- Elke vector $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{V}$ is te schrijven als $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}$.
- Het vlak $\boldsymbol{a}$ wordt **opgespannen** door de **basisvectoren** $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$.

- Voorbeeld: Gegeven $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$, $\boldsymbol{b} = \binom{-5}{1}$ en $\boldsymbol{x} = \binom{1}{-7}$. Bepaal de λ en μ waarvoor geldt dat $\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$.

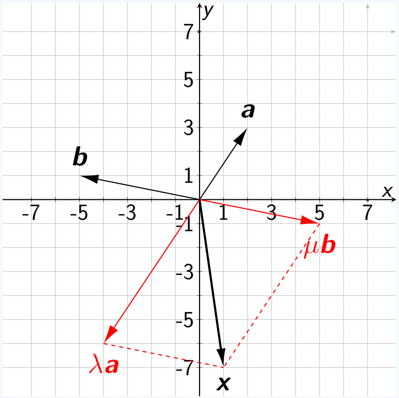
Voorbeeld 1

- Voorbeeld: Gegeven $\boldsymbol{a} = \binom{2}{3}$, $\boldsymbol{b} = \binom{-5}{1}$ en $\boldsymbol{x} = \binom{1}{-7}$. Bepaal de λ en μ waarvoor geldt $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$.
- Schrijf de vergelijking $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$ uit.
- Vermenigvuldig de tweede vergelijkingen met 5

$$\begin{cases} 2\lambda - 5\mu = 1 \\ 3\lambda + \mu = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda - 5\mu = 1 \\ {\color{red}5} \cdot 3\lambda + {\color{red}5}\mu = {\color{red}5} \cdot -7 \end{cases}$$

- Optellen levert $17\lambda = -34$ en dus $\lambda = 2$ waarna volgt dat $\mu = -1$.

$\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}$

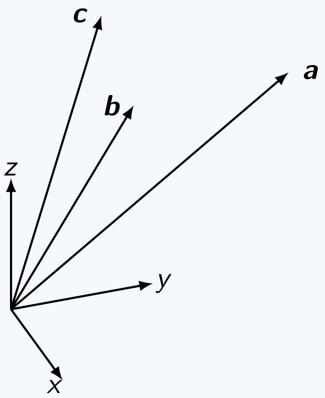


Voorbeeld 2

inholland hogeschool

- Gegeven de vectoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{c}$, toon aan dat deze vectoren een **basis** vormen.
- $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$
- Laat zien dat $\boldsymbol{c}$ niet in het vlak $\boldsymbol{V}$ opgespannen door $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ ligt. Als dit wel zo is dan bestaat er een combinatie van λ en μ zodat volgt $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$.
- Uitschrijven levert

$$\begin{cases} -3\lambda + 2\mu = -2 \\ 5\lambda + \mu = 2 \\ \lambda - 4\mu = 3 \end{cases}$$



Voorbeeld 2

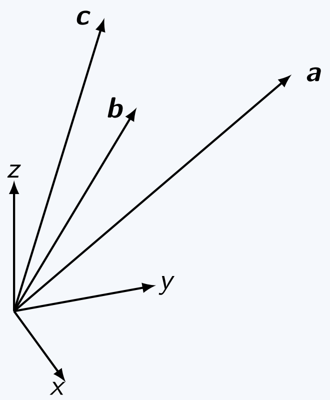
- Lossen we het stelsel van de eerste en de tweede vergelijking op dan volgt

$$\begin{cases} -3\lambda + 2\mu = -2 \\ 5\lambda + \mu = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 2\mu = -2 \\ -2 \cdot 5\lambda + -2\mu = -2 \cdot 2 \end{cases}$$

- Waaruit volgt dat $\lambda = \frac{6}{13}$ en $\mu = -\frac{4}{13}$.
- Invullen in de derde vergelijking levert

$$\frac{6}{13} - 4 \cdot -\frac{4}{13} \neq 3$$

- Het stelsel is overbepaald en heeft geen oplossing, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{c}$ zijn onafhankelijk en vormen een basis.

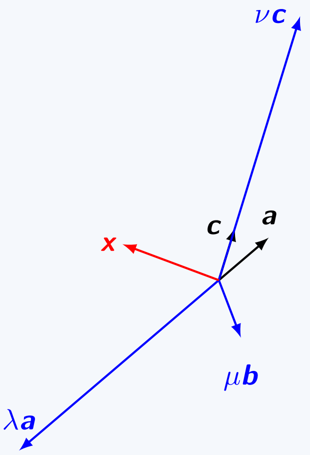


Voorbeeld 2

- Stel $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$, bestaan er dan een λ, μ en ν zodanig dat $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}$.
- Lossen we het stelsel van de eerste en de tweede vergelijking op dan volgt

$$\begin{cases} -3\lambda + 2\mu - 2\nu = 4 \\ 5\lambda + \mu + 2\nu = -9 \\ \lambda - 4\mu + 3\nu = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 2\mu - 2\nu = 4 \\ 5\lambda + \mu + 2\nu = -9 \\ \hline 2\lambda + 3\mu \qquad = -5 \end{cases}$$

- Dit levert de vergelijking $2\lambda + 3\mu = -5$ op



Voorbeeld 2

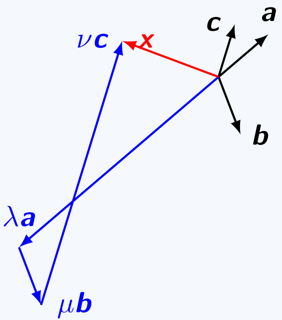
- Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 3 en de derde vergelijking met 2 zodat volgt

$$\begin{cases} -9\lambda + 6\mu - 6\nu = 12 \\ 2\lambda - 8\mu + 6\nu = 14 \\ \hline -7\lambda - 2\mu \qquad = 26 \end{cases}$$

- los vervolgens het stelsel in λ en μ op

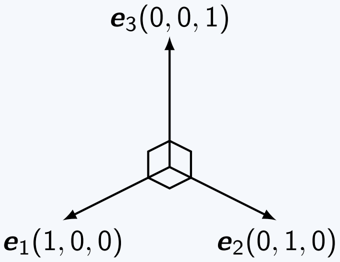
$$\begin{cases} 2\lambda + 3\mu = -5 \\ -7\lambda - 2\mu = 26 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2\lambda + 2 \cdot 3\mu = 2 \cdot -5 \\ 3 \cdot -7\lambda + 3 \cdot -2\mu = 3 \cdot 26 \end{cases}$$

- Het volgt dat $\lambda = 68/-17 = -4$, $\mu = 1$ en $\nu = 5$



Orthogonale en orthonormale basis

- Een basis heet **orthogonaal** als de vectoren die de basis vormen loodrecht op elkaar staan
$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
- Bij een orthogonale basis geldt dus dat $|\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2| = 0$, $|\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3| = 0$ en $|\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3| = 0$.
- Als daarnaast ook geldt dat $|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 1$ en $|\boldsymbol{e}_3| = 1$ dan heet is de basis **orthonormaal**.



3.2 Matrices

Matrices

- Een **matrix** is een rechthoekig getallenschema met **rijen** en **kolommen**.
- Een matrix $\boldsymbol{A}$ heeft elementen a_{ij} waarmee i de rij aangeeft en j de kolom.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

- Matrices kunnen worden gebruikt om stelsels vergelijkingen te beschrijven

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x + 2y - z = -5 \\ x - 4y - 5z = 3 \\ -2x + 3y + z = -9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matrices

- Matrices kunnen worden gebruikt om stelsels vergelijkingen te beschrijven

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

- Het schema is

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = -5 \\ x - 4y - 5z = 3 \\ -2x + 3y + z = -9 \end{cases}$$

Matrices, rekenregels

- Matrices kunnen bij elkaar worden opgeteld

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 12 \\ 6 & 15 & 3 \\ 7 & 13 & 13 \end{pmatrix}$$

- Matrices kunnen van elkaar worden afgetrokken

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 7 \\ 9 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Matrices kunnen met elkaar worden vermenigvuldigd met een getal

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 & 3 \\ 18 & 21 & 3 \\ 15 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrices, rekenregels

- Matrices kunnen bij elkaar worden opgeteld

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 12 \\ 6 & 15 & 3 \\ 7 & 13 & 13 \end{pmatrix}$$

- Matrices kunnen van elkaar worden afgetrokken

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 7 \\ 9 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Matrices kunnen met elkaar worden vermenigvuldigd, hier $3 \cdot 8 + 7 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 51$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 8 & 4 & 9 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 34 & 24 \\ 130 & 51 & 60 \\ 138 & 57 & 62 \end{pmatrix}$$

Matrices, rekenregels

- Vermenigvuldigen van een $m \times n$ matrix met een $m \times p$ matrix levert een $m \times p$ matrix op.

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 14 & -28 \\ 17 & 8 & -21 \end{pmatrix}$$

- als hulpmiddel voor het berekenen van een matrixvermenigvuldiging kunnen we een **Falk schema** gebruiken:

		-2	1	0
		5	3	-7
2	4	**16**	**14**	**−28**
-1	3	**17**	**8**	**−21**

Matrices, opgaven

- Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

  bereken **a** AB **b** BA **c** AC **d** CA **e** BC **f** CB **g** $AB + C$ **h** $2A$

- Schrijf het volgende stelsel vergelijkingen als een matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{cases} -x + 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 7 \\ -2x + y + 3z = 10 \end{cases}$$