Differentiaalvergelijkingen Thema 4

Het oplossen van tweede orde differentiaalvergelijkingen.

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

4 december 2024

Inhoudsopgave

Overzicht cursus

Overzicht cursus

Het vak differentiaalvergelijkingen bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd Woensdag (Maandag)
- Deeltijd Woensdag

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

Overzicht stof van vorige week

- Eerste orde differentiaalvergelijkingen die *lineair* zijn

$$\frac{dy}{dx} - y = \cos(x)$$

- Het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen met het superpositiebeginsel

$$y(x) = y_{hom} + y_{part}$$

- Eerste orde differentiaalvergelijkingen die *exact* zijn (Geen tentamenstof)

$$2x + y^2 + 2xy\frac{dx}{dy} = 0$$

- Het oplossen van exacte differentiaalvergelijkingen (Geen tentamenstof)

Overzicht stof van vandaag

- Lineaire, Homogene differentiaalvergelijkingen van de tweede orde

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$

- Tweede orde differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten:

$$y'' + by' + cy = 0$$

- Drie standaard oplossingen

Tweede orde differentiaalvergelijkingen

Tweede orde differentiaalvergelijkingen

- Een tweede orde differentiaalvergelijking ziet er uit als

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y) \text{ of eigenlijk } \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

- Beperken we ons tot *lineaire* differentiaalvergelijkingen dan volgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

- De begincondities zijn:

$$y'(x_0) = y_0' \text{ en } y(x_0) = y_0$$

Tweede orde differentiaalvergelijkingen

- Over het algemeen zijn de vergelijkingen gedefinieerd als

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$

- Oplossen van de vergelijking is makkelijker als deze eerst wordt omgeschreven tot

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

Waarin de functies $p(x)$,$q(x)$ en $g(x)$ gedefinieerd zijn als

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} \quad g(x) = \frac{G(x)}{P(x)}$$

- De begincondities zijn gegeven als

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad y'\left(x_0\right) = y_0'$$

Tweede orde DV's met constante coëfficiënten

- Een homogene, tweede orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten ziet er uit als $ay'' + by' + cy = 0$.
- Een voorbeeld van een dergelijke vergelijking is

$$y'' - y = 0$$

- Mogelijke oplossingen zijn $y = c_1 e^x$ of $y = c_2 e^{-x}$ omdat

$$c_1 e^x - c_1 e^x = 0 \text{ en } c_2 e^{-x} - c_2 e^{-x} = 0$$

- hieruit volgt dat ook moet gelden

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Tweede orde DV's met constante coëfficiënten

- Naast de differentievergelijking kunnen ook begincondities gelden zoals

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 9 \text{ en } y'(0) = -1$$

- Invullen van de begincondities in de algemene oplossing levert

$$y(0) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} = c_1 + c_2 = 9$$
$$y'(0) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} = c_1 - c_2 = -1$$

- waarmee volgt

$$c_1 + c_2 = 9$$
$$c_1 - c_2 = -1$$

- Waaruit onmiddellijk volgt $c_1 = 4$ en $c_2 = 5$ en dus

$$y = 4e^x + 5e^{-x}$$

Tweede orde DV's met constante coëfficiënten

- Een algebraïsche oplossing is ook mogelijk

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- Vul de standaard oplossing $y_{hom} = e^{rx}$ en afgeleiden $y'_{hom}(x)$ en $y''_{hom}(x)$ in

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

- Waarna door delen door e^{rx} volgt $ar^2 + br + c = 0$
- De standaard oplossing met twee vrijheidsgraden is

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

- waarna met $y\left(x_0\right) = y_0$ en $y'\left(x_0\right) = y'_0$ volgt

$$y_0 = c_1e^{r_1x_0} + c_2e^{r_2x_0}, \quad y'_0 = c_1r_1e^{r_1x_0} + c_2r_2e^{r_2x_0}$$

Tweede orde DV's met constante coëfficiënten

- De onbekende parameters c_1 en c_2 kunnen worden uitgedrukt in de standaard oplossing y_0, y_0'

$$c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 x_0}, \quad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 x_0}$$

Standaard oplossing $(r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad r_1 \neq r_2)$

De oplossing van lineaire, homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(x_0) = y_0 \text{ en } y'(x_0) = y_0' \text{ is } y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \ met$$

$$r_1, r_2 = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}, \quad c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 x_0}, \quad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 x_0}$$

Tweede orde DV's met constante coëfficiënten

- Een voorbeeld: $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 16, \quad y'(0) = -38$
- vua $cr^2e^{rx} + 5cre^{rx} + 6ce^{rx} = 0$ volgt

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r+2)(r+3) = 0, \quad r_1 = -2, r_2 = -3$$

- Invullen levert $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$ met $y(0) = 16$ en $y'(0) = -38$ zodat

$$y(0) = c_1 + c_2 = 16, \quad y'(0) = -2c_1 - 3c_2 = -38$$

- Dit levert $c_1 = 10$ en $c_2 = 6$ waarmee

$$y = 10e^{-2x} + 6e^{-3x}$$

Oefeningen

- Los op $y'' + 7y' + 12y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$
- Los op $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
- Los op $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Tweede orde DV's met complexe wortels

- Een homogene, tweede orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten ziet er uit als $ay'' + by' + cy = 0$.
- Vul de standaard oplossing $y_{hom} = e^{rx}$ en afgeleiden $y'_{hom}(x)$ en $y''_{hom}(x)$ in

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

- Waarna door delen door e^{rx} volgt $ar^2 + br + c = 0$
- De standaard oplossing met twee vrijheidsgraden is

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

- waarna met $y(x_0) = y_0$ en $y'(x_0) = y'_0$ volgt

$$y_0 = c_1 e^{r_1 x_0} + c_2 e^{r_2 x_0}, \quad y'_0 = c_1 r_1 e^{r_1 x_0} + c_2 r_1 e^{r_2 x_0}$$

Tweede orde DV's met complexe wortels

- De contanten r_1 en r_2 kunnen bepaald worden met de ABC formule

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Als $b^2 - 4ac < 0$ dan worden de wortels complex

$$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$$

- Invullen in de standaard oplossing geeft

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\lambda + i\mu)x}, \quad y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\lambda - i\mu)x}$$

- Gebruiken we de formule van Euler dan volgt

$$e^{iax} = \cos ax + i \sin ax \text{ en } e^{-iax} = \cos ax - i \sin ax$$

Tweede orde DV's met complexe wortels

- Een complexe wortel heeft een reël deel als $b \neq 0$ zodat met Euler volgt

$$y_1 = e^{(\lambda+i\mu)x} = e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \sin \mu x), \quad y_2 = e^{(\lambda-i\mu)x} = e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \sin \mu x)$$

- De vergelijking $ay'' + by' + cy = 0$ heeft alleen reële coëfficiënten dus oplossingen in complexe vorm zijn ongewenst.
- Door gebruik te maken van het principe dat je oplossingen mag optellen kunnen de complexe gedeelten tegen elkaar wegvallen.
- De oplossing $y_n = ie^{\lambda x} \cos \mu x$ kunnen we schrijven als $y_{\mathrm{n}} = c_{\mathrm{n}} e^{\lambda x} \cos \mu x$.
- Definieer nu een hulpvariabelen $m(x)$ en $n(x)$ zodat

$$m(x) = y_1(x) + y_2(x), \quad n(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

Tweede orde DV's met complexe wortels

- het volgt dat het complexe gedeelte in $m(x)$ wegvalt

$$\begin{aligned} m(x) = y_1(x) + y_2(x) &= e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \sin \mu x) + e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \sin \mu x) \\ &= 2e^{\lambda x} \cos \mu x \end{aligned}$$

- Invullen van de resultaten in $n(x)$ levert

$$\begin{aligned} n(x) = y_1(x) - y_2(x) &= e^{\lambda x}(\cos \mu x + i \sin \mu x) - e^{\lambda x}(\cos \mu x - i \sin \mu x) \\ &= 2ie^{\lambda x} \sin \mu x \end{aligned}$$

- vervangen we de exponent 2 en $2i$ door c_1 en c_2 dan volgt

$$m(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x, \quad n(x) = c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x$$

- zodat uiteindelijk

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x$$

Tweede orde DV's met complexe wortels

- Voorbeeld: Los op $2y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
- Vul de standaard oplossing $y_{hom} = e^{rx}$ en afgeleiden $y'_{hom}(x)$ en $y''_{hom}(x)$ in

$$2r^2e^{rx} + 2re^{rx} + e^{rx} = 0$$

- Waarna door delen door e^{rx} volgt $2r^2 + 2r + 1 = 0$
- Invullen van de ABC formule levert

$$r_1, r_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{4} = r = -1/2 \pm (1/2)i$$

- Het volgt dat

$$r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu \text{ met } \lambda = -\tfrac{1}{2}, \mu = \tfrac{1}{2}$$

- zodat de oplossing wordt

$$y(x) = c_1e^{-x/2}\cos\tfrac{1}{2}x + c_2e^{-x/2}\sin\tfrac{1}{2}x, \quad y(0) = c_1 = 1, y'(0) = \tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 = 1, c_2 = 1$$

Oefeningen

- Los op: $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y'(0) = -1\ y(0) = 1$
- Los op: $y'' + 4y = 0,\ y'(0) = 1\ y(0) = 1$
- Los op: $y'' + 2y' + 10y = 0,\ y'(0) = 1\ y(0) = -\frac{1}{2}$

Tweede orde DV's met identieke wortels

- Een algebraïsche oplossing is ook mogelijk

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- Vul de standaard oplossing $y_{hom} = e^{rx}$ en afgeleiden $y'_{hom}(x)$ en $y''_{hom}(x)$ in

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

- Waarna door delen door e^{rx} volgt $ar^2 + br + c = 0$
- Volgt nu dat $b^2 - 4ac = 0$ en dus zijn er twee identieke wortels

$$r_1 = r_2 = -b/2a$$

- De oplossing is nu $y_1 = c_1e^{r_1x} \quad y_2 = c_2e^{r_2x}$ maar omdat $r_1 = r_2$ is het niet mogelijk om twee oplossingen te vinden

Tweede orde DV's met identieke wortels

- De oplossing kan nu gevonden worden door het uitbreiden van de onbekende parameter naar een parameter afhankelijk van x

$$y(x) = m(x)e^{rx}, r = -b/2a$$

De afgeleiden van y worden dan

$$y'(x) = m'(x)e^{-bx/2a} - \frac{b}{2a}m(x)e^{-bx/2a}$$
$$y''(x) = m''(x)e^{-bx/2a} - \frac{b}{2a}m'(x)e^{-bx/2a} + \frac{b^2}{4a^2}m(x)e^{-bx/2a}$$

- Invullen in $ay'' + by' + cy = 0$ levert

$$am''(x) + (b - b)m'(x) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) m(x) = 0$$

Tweede orde DV's met identieke wortels

- Omdat $b - b = 0$ volgt

$$am''(x) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) m(x) = 0$$

  Waarin de term $c - b^2/4a$ gelijk is aan 0 omdat $b^2 - 4ac = 0$ het volgt dan dat

$$am''(x) = 0 \Rightarrow m''(x) = 0$$

  Een functie die voldoet is

$$m(x) = d_1 x + d_2$$

- Combineren levert de tweede oplossing

$$y_2(x) = m(x)e^{rx} = d_1 x e^{rx} + d_2 e^{rx}$$

- De uiteindelijke oplossing is dus

$$y(x) = c_1 x e^{-bx/2a} + c_2 e^{-bx/2a}$$

Tweede orde DV's met identieke wortels

- Voorbeeld: Los op $y'' + 2y' + y = 0$ met $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
- het volgt dat

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)(r+1) = 0$$

- met $r_1 = r_2 = -1$

$$y(x) = c_1 x e^{-bx/2a} + c_2 e^{-bx/2a}$$

- Hieruit volgt

$$y(0) = c_2 = 1$$

- De tweede afgeleide is dan

$$y'(x) = c_1 e^{-bx/2a} - \frac{bc_1}{2a} x e^{-bx/2a} - \frac{b}{2a} e^{-bx/2a}$$

- zodat $y'(0) = c_1 - 1 = 1$
- De uiteindelijke oplossing wordt dan

$$y(x) = 2xe^{-x} + e^{-x}$$

Oefeningen

- Los op: $y'' + 10y' + 25y = 0,\ y'(0) = 2\ y(0) = 1$
- Los op: $y'' + 8y' + 16y = 0,\ y'(0) = 4\ y(0) = 2$
- Los op: $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y'(0) = 0\ y(0) = 1$

Samenvatting

Homogene oplossing tweede orde differentiaalvergelijking

inholland hogeschool

$$ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Geval	Wortels	Basis	Algemene oplossing
I	Verschillend r_1, r_2	$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
II	Herhaald $r = r_1 = r_2$	e^{rx}, xe^{rx}	$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{rx}$
III	Complex $r_1 = \lambda + i\mu,$ $r_2 = \lambda - i\mu$	$e^{\lambda x} \cos \mu x$	$y = e^{\lambda x}(c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x)$