Wiskunde 13/14

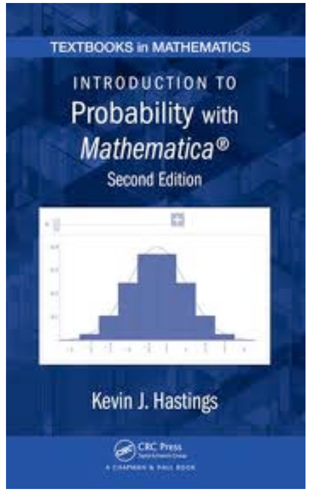
Jan van Hulzen / Liv Harkes

December 3rd 2012 version 1.0

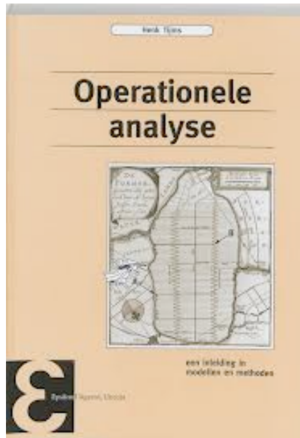
Markov chains

Aanbevolen literatuur

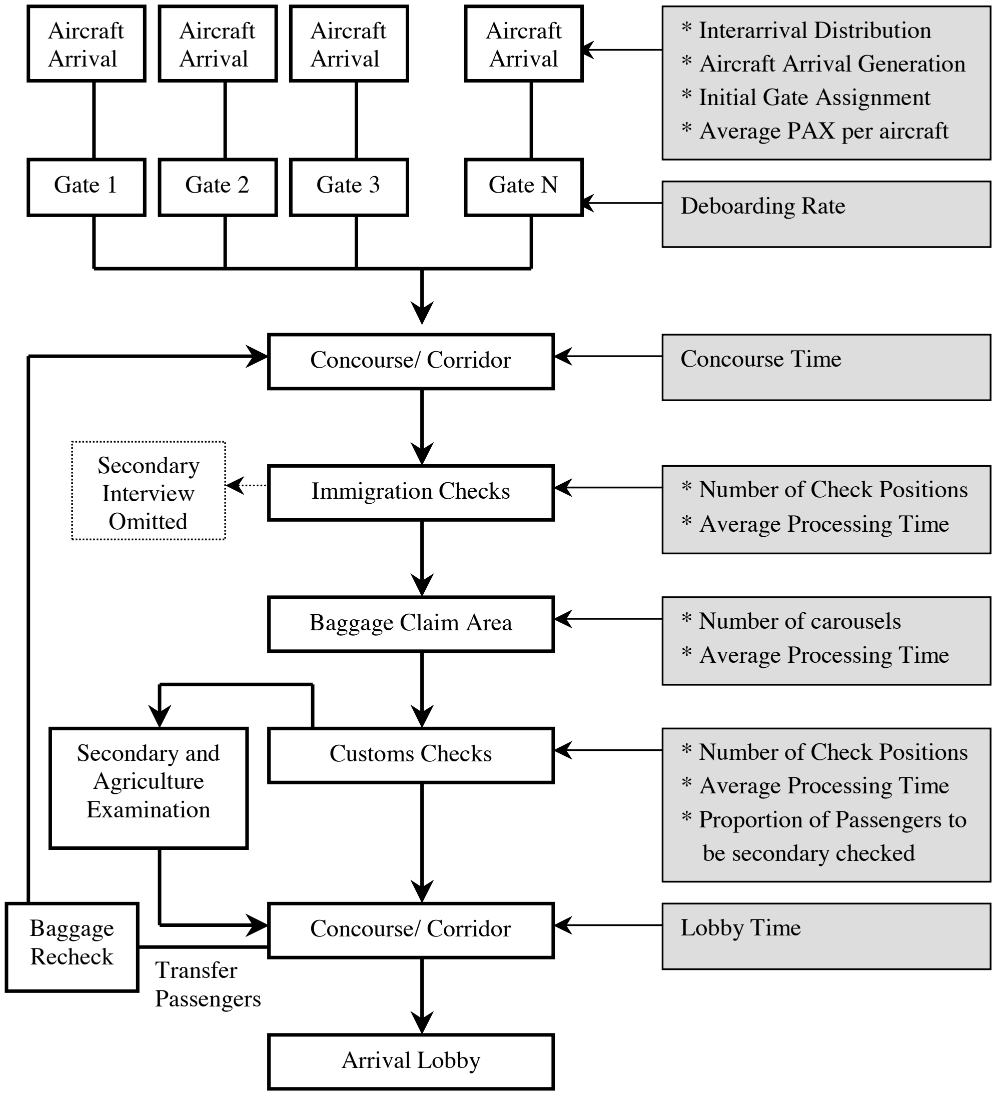
- Boeken gebruikt voor deze les :
  - Introduction to Probability with Mathematica, Second Edition Kevin J. Hastings, September 21, 2009 ISBN-13: 978-1420079388

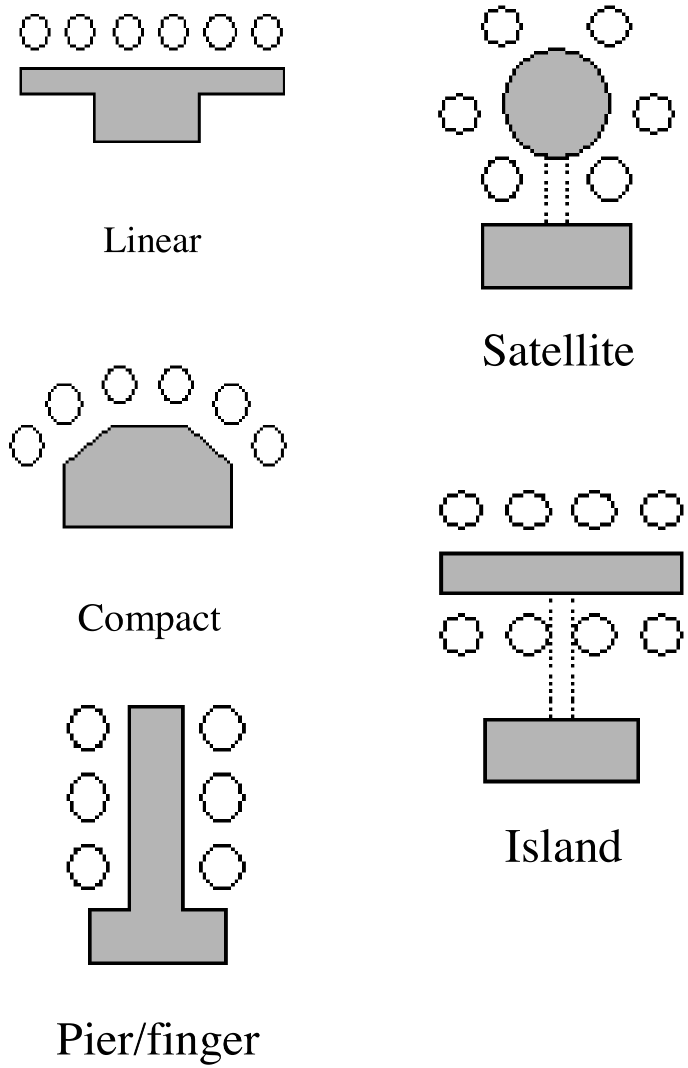


  - Operationele analyse, een inleidng in de modellen en methoden, H. Tijms ISBN-13: 978-9050410755



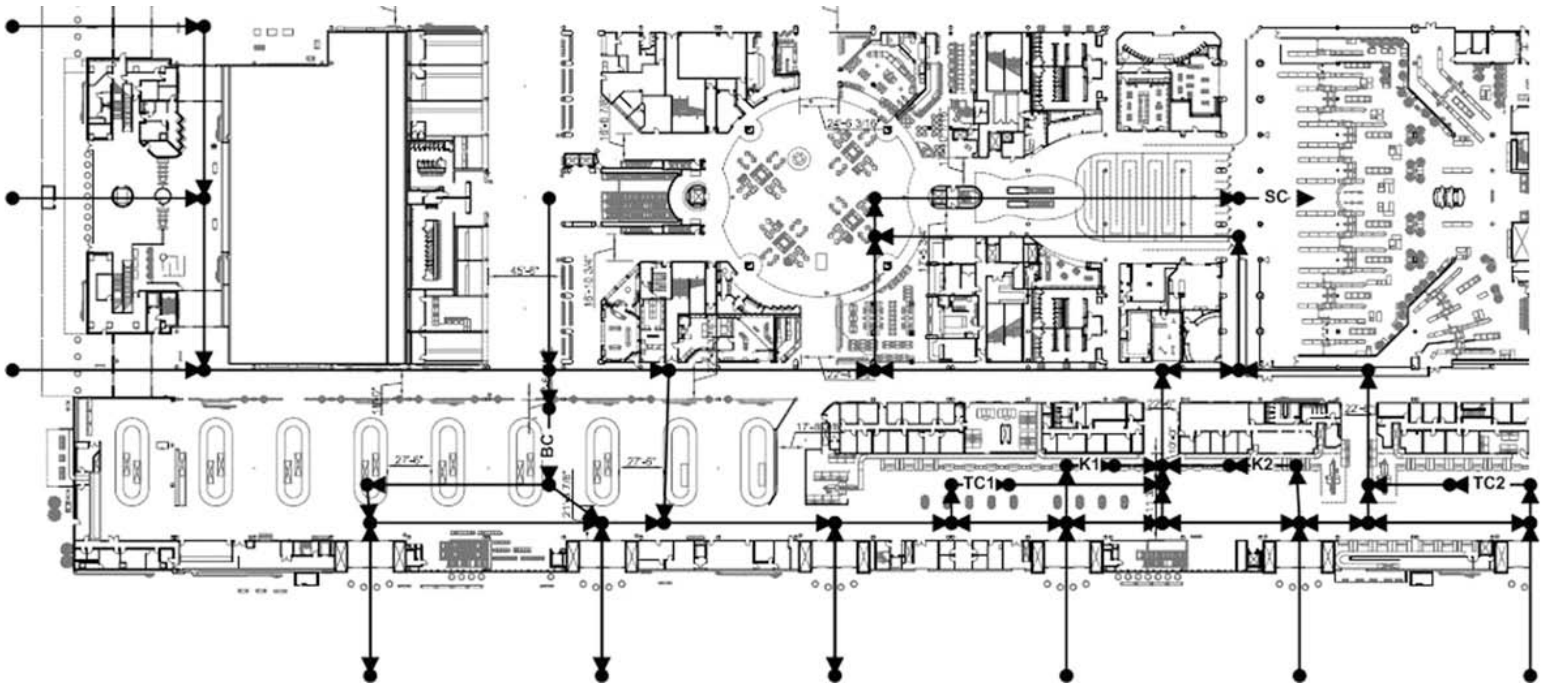
Wachtrij netwerken





Leerdoelen

- Aanvullend leerdoel voor deze les is het leren begrijpen van simpele wachtrijen en wachtrij netwerken zoals deze worden toegepast in het modelleren van complexe bedrijfsprocessen zoals vliegvelden.



Organisatie van de cursus

Week	50 min	100 min	100 min	
1	HC	PR	ZS	Uitloop W13
2	HC	PR	ZS	
3	HC	PR	ZS	Monopoly
4	HC	PR	ZS	
5		PR	ZS	Wachtrij Netwerk
6		PR	ZS	
7		PR	ZS	Uitloop W14

M/M/1 Wachtrij : Prestatie criteria 1/3

- Gemiddelde aankomst frequentie (λ)
- Gemiddelde aankomsttijd nieuwe klanten ($E[\tau]$)
- Gemiddelde service frequentie (μ)
- Doorgangs intensiteit (α)
- Server gebruik (ρ)
- Steady state kans dat er n klanten in de wachtrij zijn (π_n)
- De frequentie waarmee afgehandelde klanten vertrekken (γ)
- Gemiddeld aantal klanten in het systeem (L)
- Gemiddelde tijd dat een klant in het systeem zit (W)
- Gemiddelde aantal klanten in de wachtrij (L_q)
- Gemiddelde tijd dat een klant in de wachtrij is (W_q)
- Gemiddelde server tijd per server ($W_s = 1/\mu$)

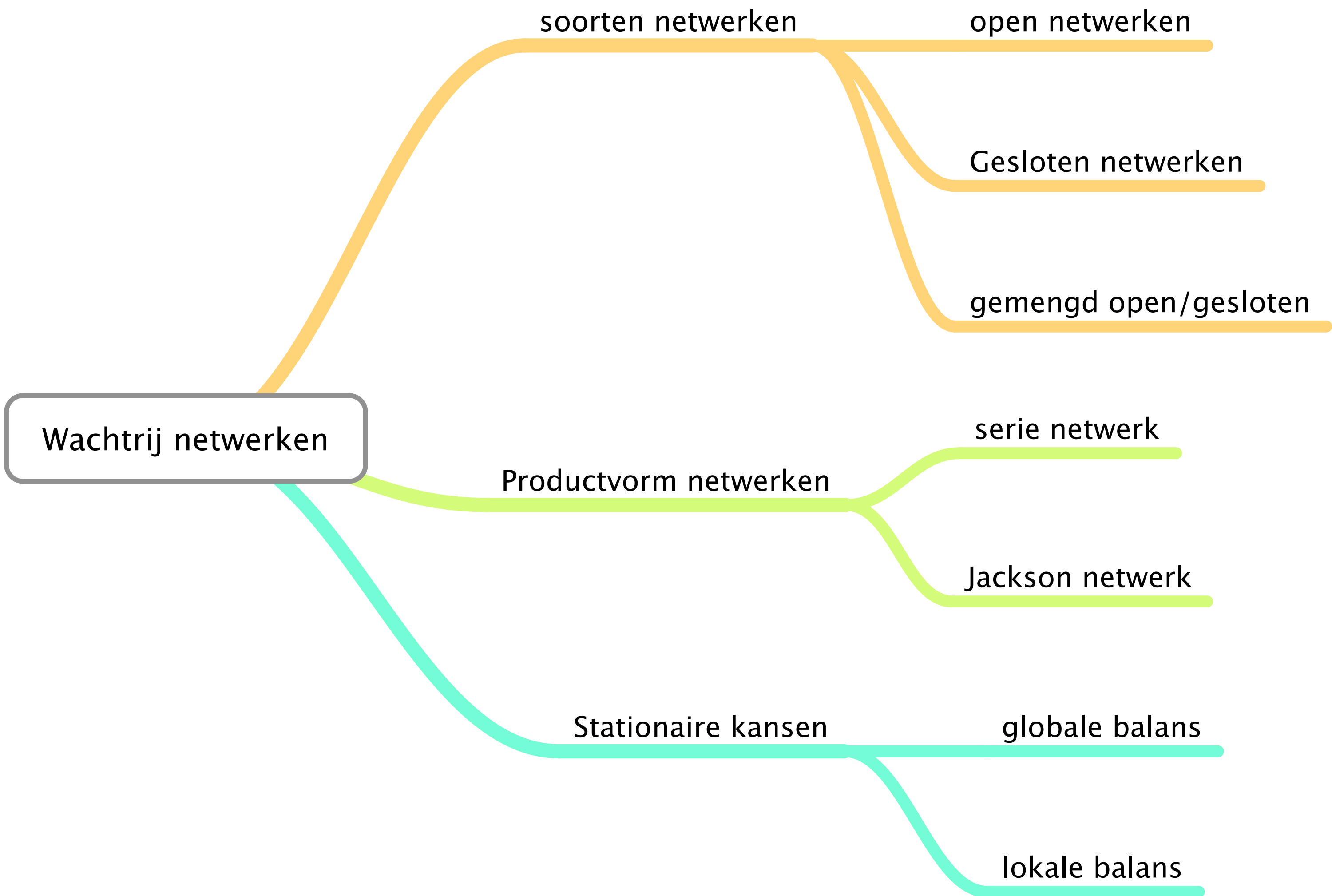
M/M/1 Wachtrij : Prestatie criteria 2/3

- $\alpha = \rho = \lambda / \mu$
- $\pi_0 = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho,\ \pi_n = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \rho^n (1 - \rho)$
- $$\begin{aligned} \gamma &= \mu P[> 0 \text{ jobs in the system}] \\ &= \mu(1 - P[0 \text{ jobs in the system}]) \\ &= \mu(1 - \pi_0) = \mu(1 - (1 - \rho)) = \mu\rho = \lambda \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} L &= \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = (1 - \rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n \\ &= (1 - \rho)\rho \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{(1 - \rho)\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned}$$
- $W = L / \lambda = \dfrac{\rho}{1 - \rho} / \lambda = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$

M/M/1 Wachtrij : Prestatie criteria 3/3

- $L_q = L - (1 * P[\text{Server is not empty}]$
  $= L - (1 - P[0 \text{ jobs in the system}])$
  $= L - (1 - \pi_0) = L - (1 - (1 - \rho))$
  $$= L - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$
- $W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho^2}{1-\rho}\frac{1}{\lambda}$ or $W_q = W - W_s = \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho}\frac{1}{\lambda}$

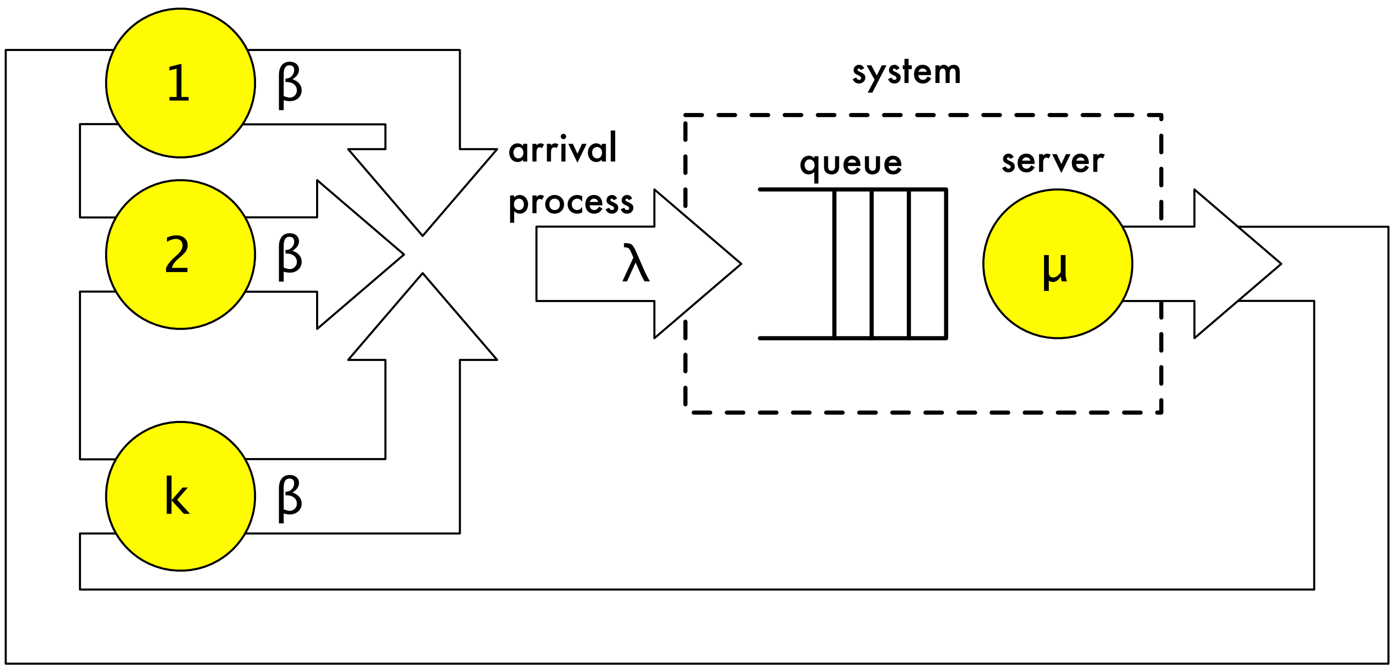
Overzicht



Wachtrij netwerken
soorten netwerken
open netwerken
Gesloten netwerken
gemengd open/gesloten
Productvorm netwerken
serie netwerk
Jackson netwerk
Stationaire kansen
globale balans
lokale balans

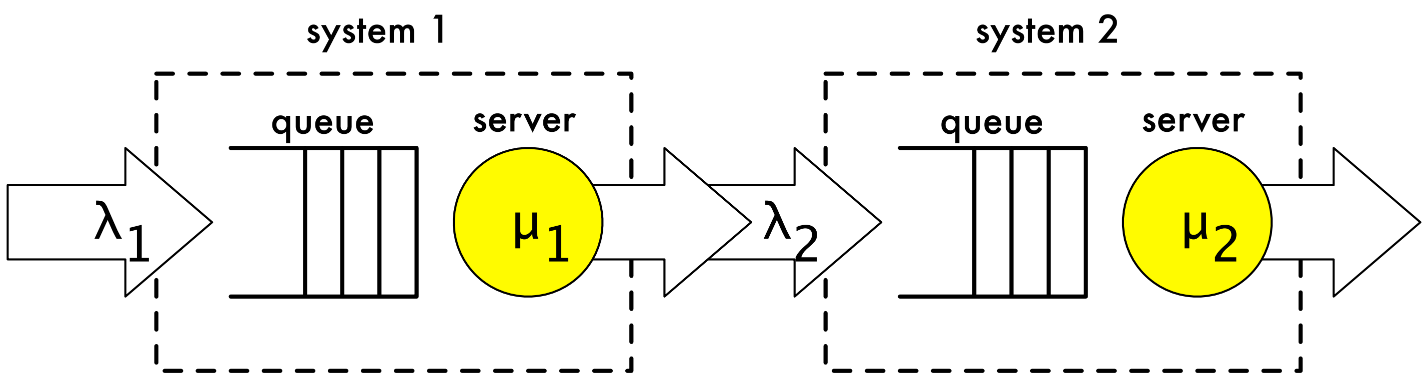
Netwerken van wachtrijen

- Een model waarbij klanten die vertrekkend van de ene wachtrij arriveren in een andere wachtrij is een wachtrij netwerk
    - M/M/1/K/K model is een wachtrij netwerk

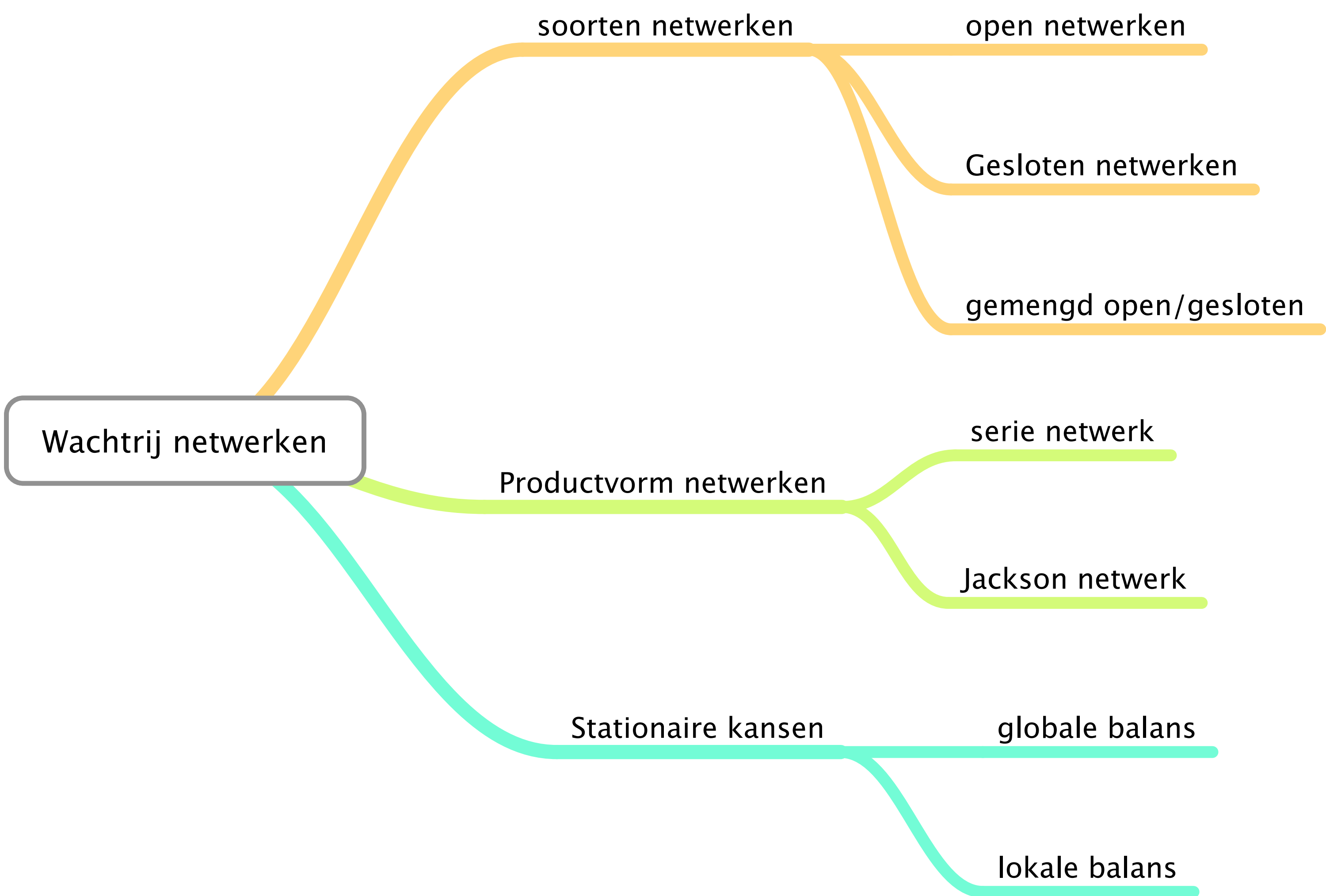


Netwerken van wachtrijen

- Een wachtrij netwerk kan bestaan uit een aantal simpele wachtrijen die onderling zijn verbonden door links

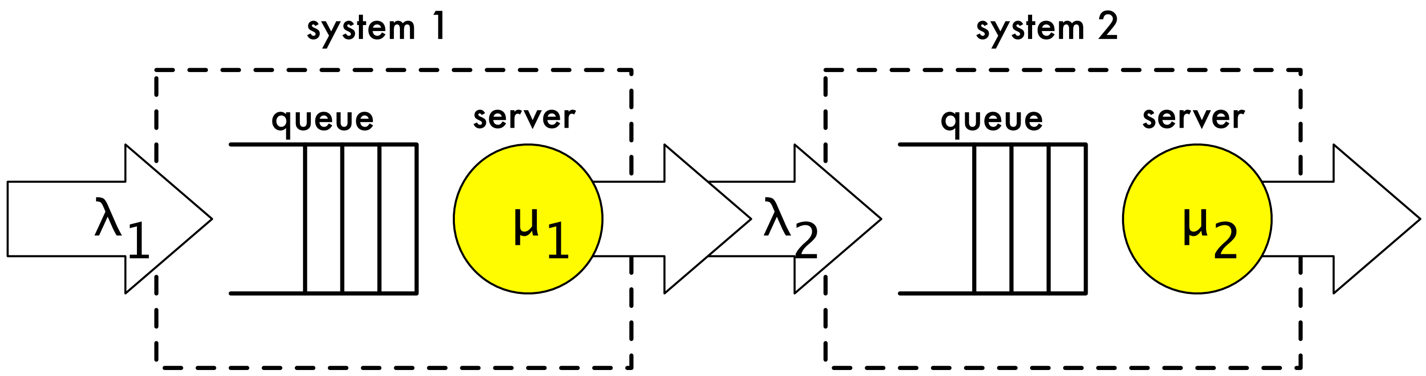


Overzicht : Soorten wachtrij netwerken



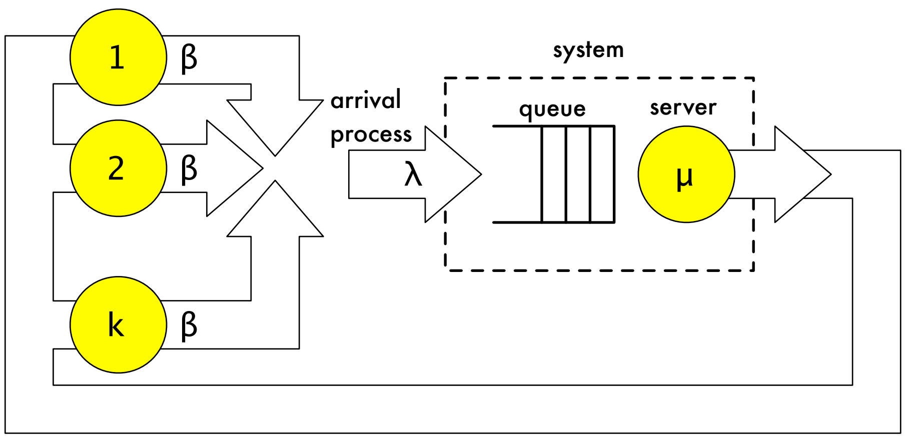
Netwerken van wachtrijen : Open netwerken

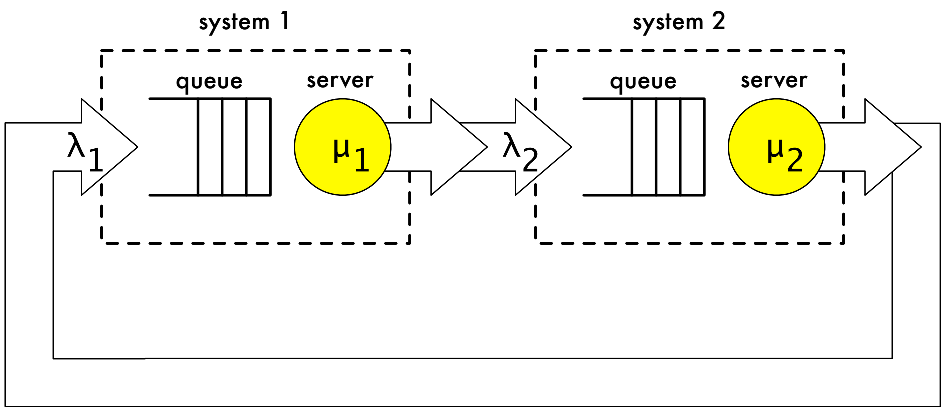
- Klanten komen van buiten het netwerk ontvangen service en vertrekken
- Het aantal klanten in het systeem varieert in de tijd
- Meestal is de throughput γ is bekend en gelijk aan de aankomst frequentie



Netwerken van wachtrijen : Gesloten netwerken

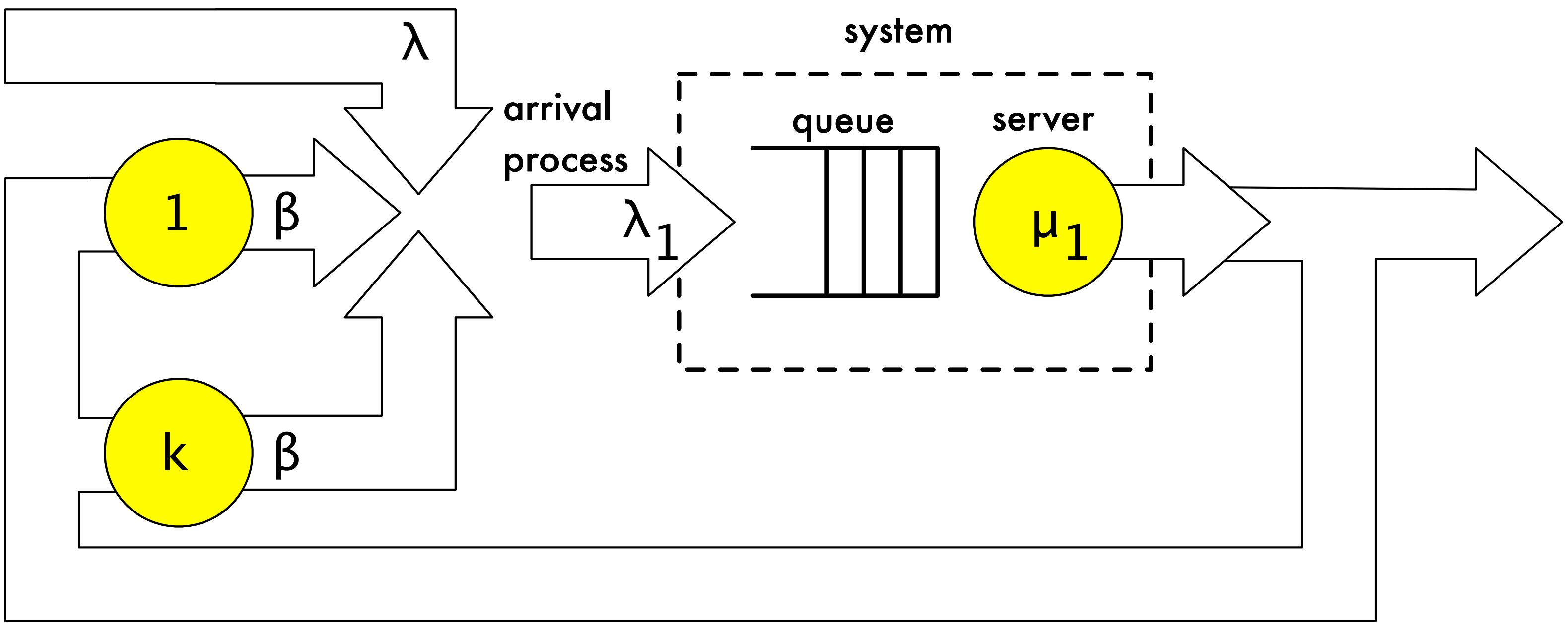
- Er komen geen klanten van buiten het netwerk en er vertrekken geen klanten uit het netwerk
- Het aantal klanten in het systeem is constant
- Vaak is het aantal klanten gegeven en is het doel om de doorstroming γ te berekenen



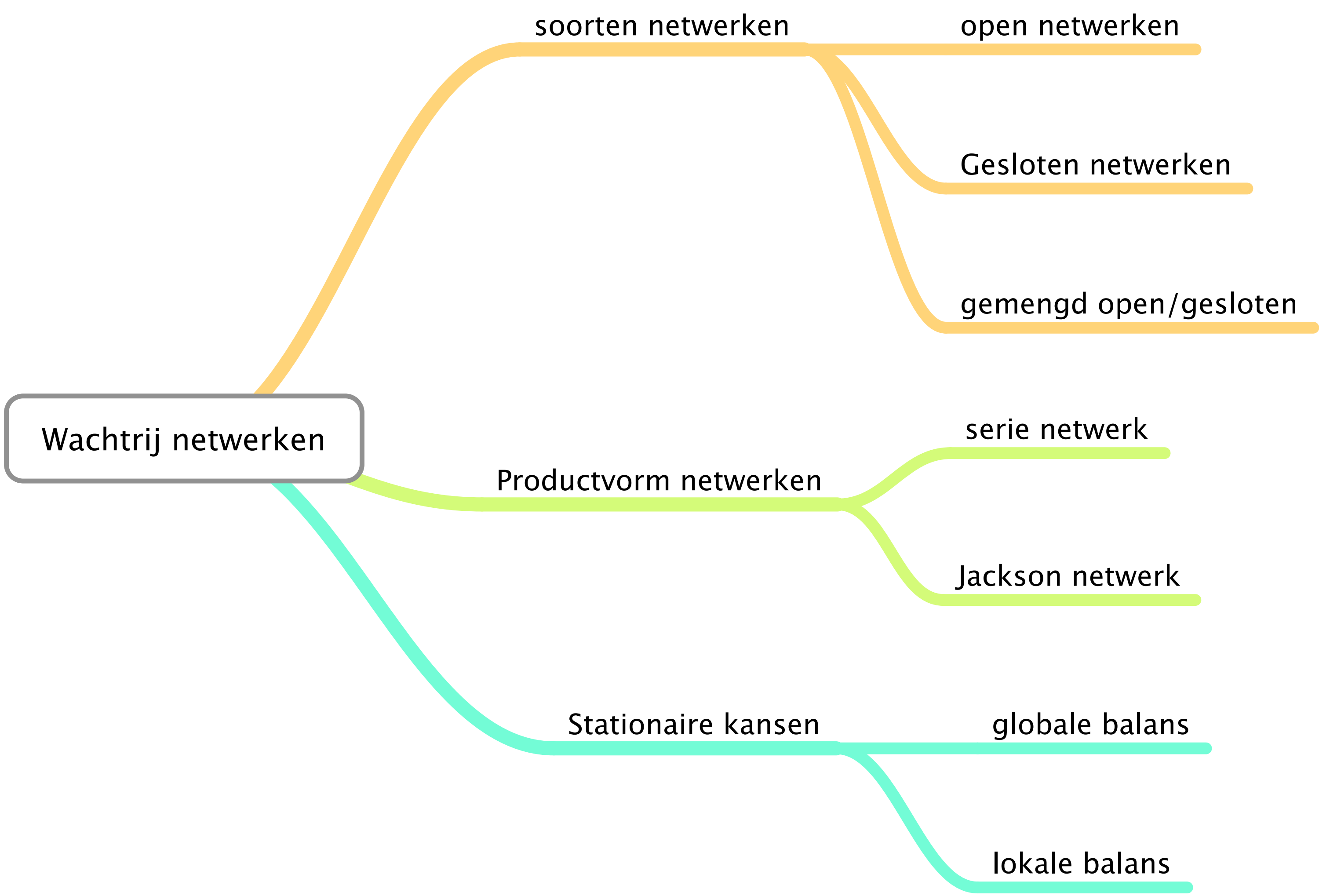


Netwerken van wachtrijen : gemengd

- Open voor sommige klanten, die van buiten komen en weer vertrekken
- Gesloten voor andere klanten die in het systeem blijven



Overzicht : Productvorm wachtrij netwerk



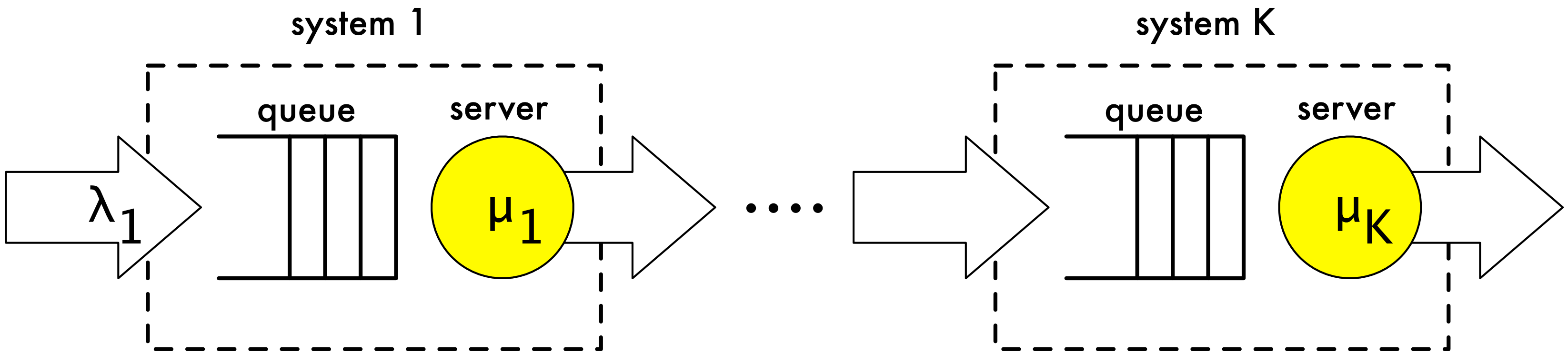
Productvorm wachtrij netwerk

- Een product vorm wachtrij netwerk is een wachtrij netwerk waarbij de uitdrukking voor de kans in een evenwicht situatie (steady state) gegeven wordt door een formule in de vorm

$$\pi(n_1, n_2, \ldots, n_K) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{K} f_i(n_i)$$

- hierin is
  - $\pi(n_1, n_2, \ldots, n_K)$: de kans op n_1 klanten in systeem 1, n_2 klanten in systeem 2,...,n_K klanten in systeem K,
  - K het aantal servers in het netwerk en N het aantal klanten in het systeem
  - n_i het aantal klanten in knooppunt i
  - $f_i(n_i)$ een functie van n_i
  - $G(N)$ een normaliserende constante

Productvorm wachtrij netwerk : voorbeeld 1



- Gegeven een wachtrij netwerk van K M/M/1 wachtrijen in serie
- Klanten die een wachtrij verlaten gaan onmiddellijk naar de volgende wachtrij
- analyse van elke individuele server
  - Aankomst frequentie λ, service rate van de i-de server μ_i
  - Bezettingsgraat van i-de server $\rho_i = \dfrac{\lambda}{\mu_i}$
  - de kans dat er n_i jobs in wachtrij i wachten $\pi_i(n_i) = (1-\rho_i)\rho_i^{n_i}$

Productvorm wachtrij netwerk : voorbeeld 1

- De gezamenlijke kans van K wachtrijen is dan

$$
\begin{aligned}
&\pi(n_1, n_2, \ldots, n_K) \\
&\quad = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1} \times (1-\rho_2)\rho_2^{n_2}(1-\rho_3)\rho_3^{n_3} \times \ldots \times (1-\rho_K)\rho_K^{n_K} \\
&\quad = \pi_1(n_1) \times \pi_2(n_2) \times \pi_3(n_3) \times \ldots \times \pi_K(n_K)
\end{aligned}
$$

- Hetgeen kan worden geschreven als

$$\pi(n_1, n_2, \ldots, n_K) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{K} f_i(n_i)$$

- We hebben dus te maken met een productvorm wachtrij netwerk

Productvorm wachtrij netwerk : voorbeeld 2

- Een voorbeeld van een productvorm netwerk is een **Jackson netwerk**
  - Een Jackson netwerk bevat K knooppunten
  - De knooppunten voldoen aan drie eigenschappen:
    - Elk knooppunt k bevat c_k identieke exponentiële servers met frequentie μ_k
    - Klanten komen aan op knooppunt k van buiten het systeem volgens een Poisson verdeling met gemiddelde frequente λ_k en kunnen ook arriveren van af andere knooppunten.
    - Als een klant is geholpen op knooppunt k gaat deze onmiddellijk door naar knooppunt j (j=1,...,k) met kans p_{kj} of verlaat het netwerk met kans

$$1 - \sum_{j=1}^{K} p_{ij}$$

Productvorm wachtrij netwerk : voorbeeld 2

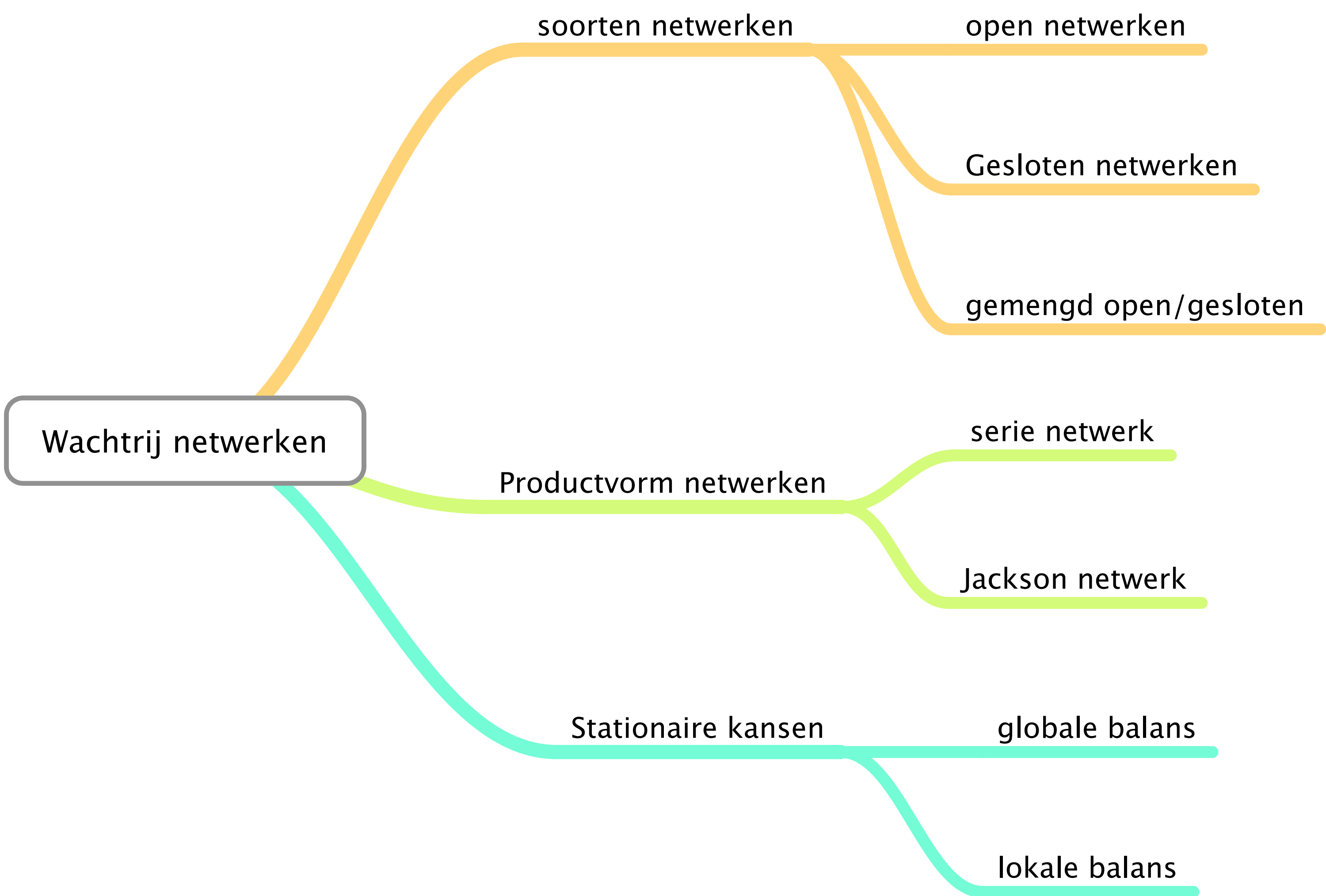
- Voor Jackson netwerken geld het **Jackson theorema**
  - De aankomst frequentie op elke node k is : $\Lambda_k = \lambda_k + \sum_{j=1}^{K} \Lambda_j p_{jk}$
  - Elke node k gedraagt zich als een onafhankelijk M/M/c_k wachtrij systeem met een gemiddelde aankomst frequentie Λ_k en gemiddelde service frequentie μ_k voor elk van de c_k servers
  - De steady-state kans dat er n_k klanten in knooppunt k zijn voor k=1,2,...,K :

$$\pi(n_1, n_2, \cdots, n_K) = \pi_1(n_1)\pi_2(n_2)\pi_3(n_3)\cdots\pi_K(n_K)$$

  - gegeven

$$\Lambda_k < c_k \mu_k$$

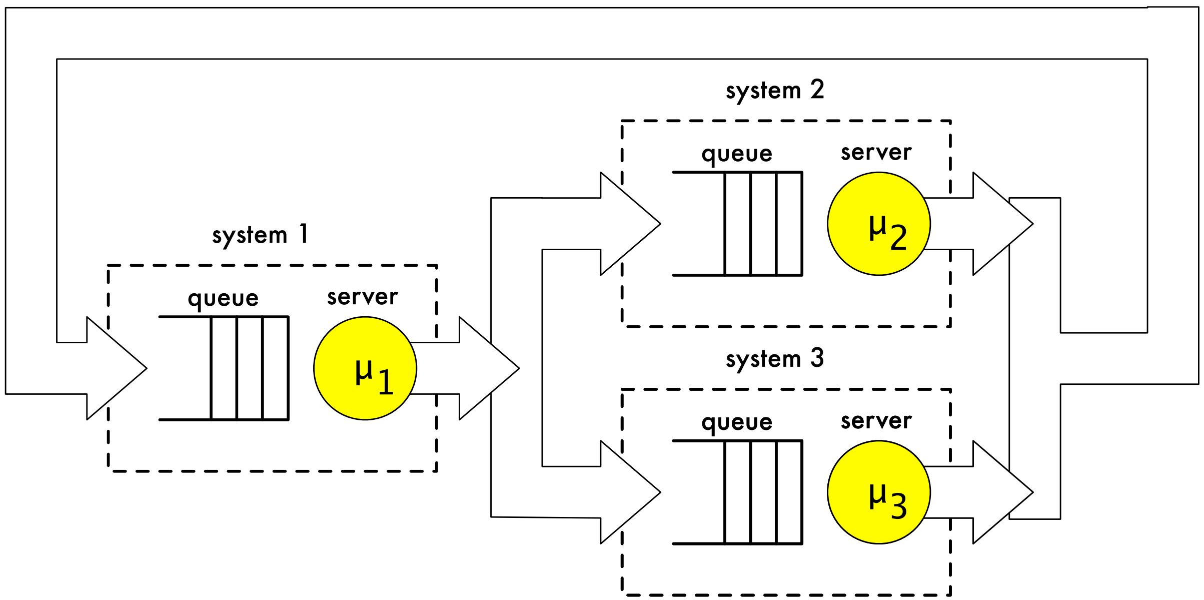
Overzicht : Stationaire kansen



Netwerken van wachtrijen : Globale/lokale balans

- **Globale balans** vs **lokale balans**
  - De **globale balans** vergelijkingen:
    - De vergelijkingen (Rate in = Rate uit) $\forall \in S: \sum_{j \in S} \pi_j q_{ji} = \pi_i \sum_{j \in S} q_{ij}$
    - met $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$
  - Voor product vorm wachtrij netwerken bestaat ook een **lokale balans**
    - De transition rate van uit een toestand van het wachtrij netwerk naar een andere toestand door het vertrek uit knooppunt i = transition rate naar de zelfde toestand door een aankomst in knooppunt i

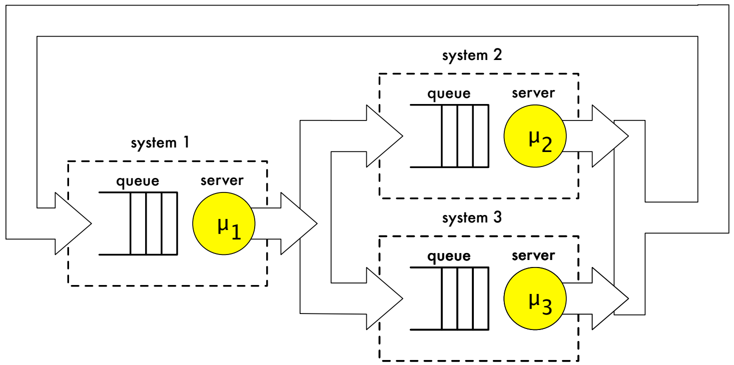
Netwerken van wachtrijen : Voorbeeld

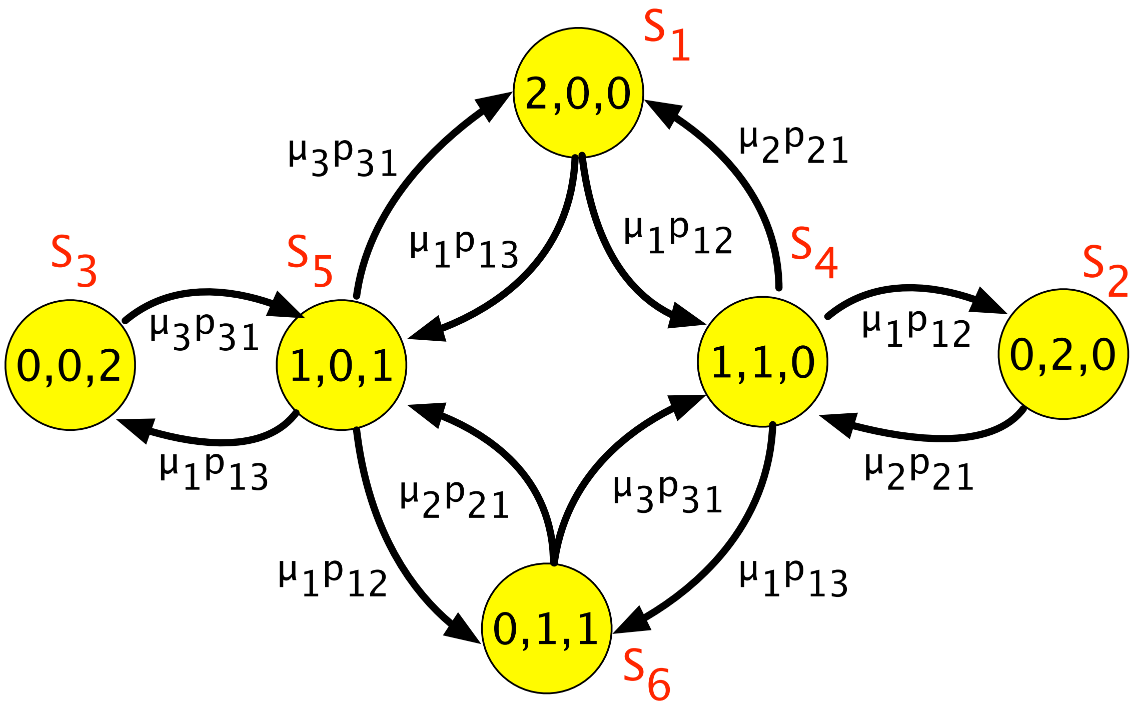


- Gegeven een wachtrij netwerk met drie knooppunten
  - Het aantal klanten m=2 en de wachtrijen zijn van het FIFO type
  - De service tijd is exponentieel verdeeld met $\mu_1 = 4/s$, $\mu_2 = 1/s$ en $\mu_3 = 2/s$
  - De overgangskansen zijn $p_{12} = 0.4$, $p_{13} = 0.6$ en $p_{21} = p_{31} = 1$
- Vraag: Bereken de stationaire kans $\pi(n_1, n_2 ,n_3)$

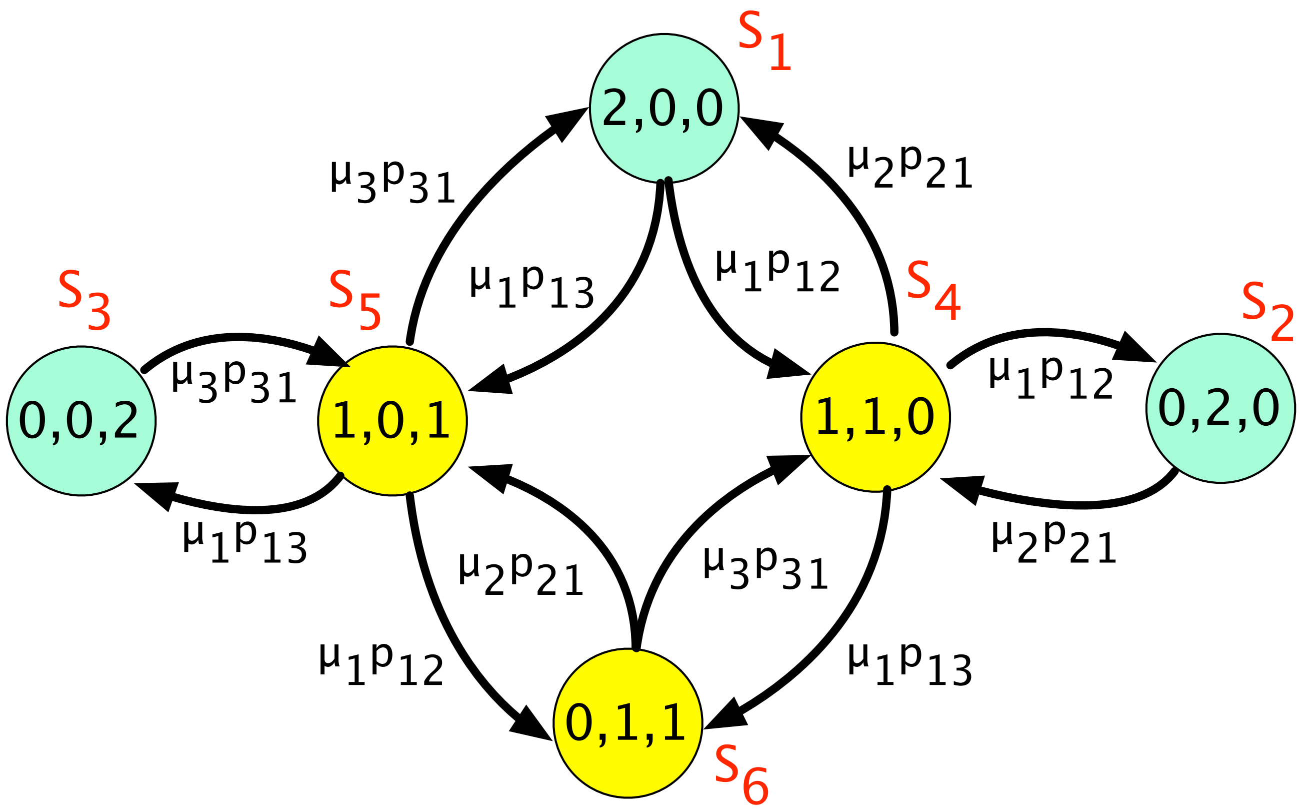
Netwerken van wachtrijen : Voorbeeld

- Formuleer een Markov keten met toestanden
  - $S=(n_1, n_2, n_3)$ zijn n_1, n_2, n_3 zijn jobs in knooppunt 1, 2 en 3
  - $S=\{(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$





Netwerken van wachtrijen : Voorbeeld



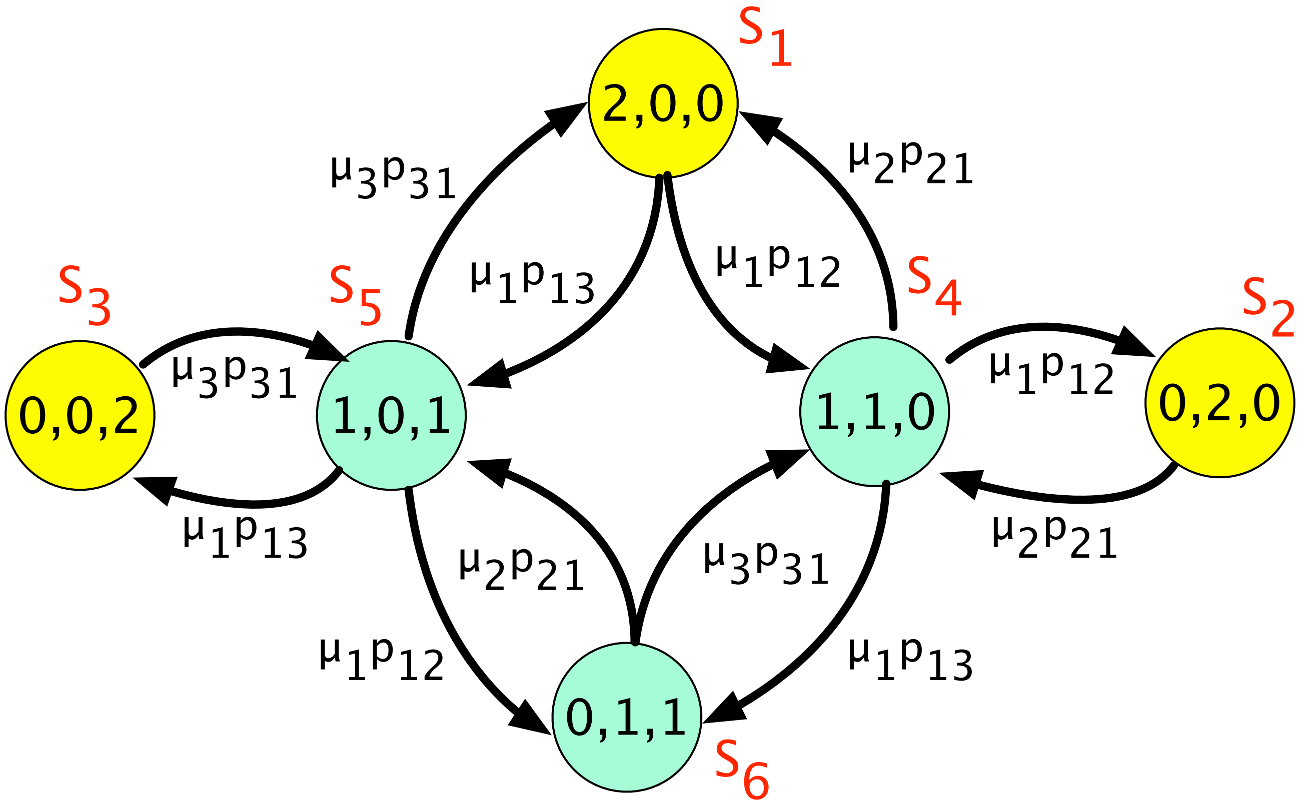
$$\text{Rate uit} = \text{Rate in}$$

$$\pi(2,0,0)(\mu_1 p_{21} + \mu_1 p_{13}) = \pi(1,0,1)\mu_3 p_{31} + \pi(1,1,0)\mu_2 p_{21}$$

$$\pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} = \pi(1,1,0)\mu_1 p_{12}$$

$$\pi(0,0,2)\mu_3 p_{31} = \pi(1,0,1)\mu_1 p_{13}$$

Netwerken van wachtrijen : Voorbeeld



$$\text{Rate uit} = \text{Rate in}$$

$$\pi(1,1,0)\,(\mu_2 p_{21} + \mu_1(p_{13} + p_{12})) = \pi(2,0,0)\mu_1 p_{12} + \pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} + \pi(0,1,1)\mu_3 p_{31}$$

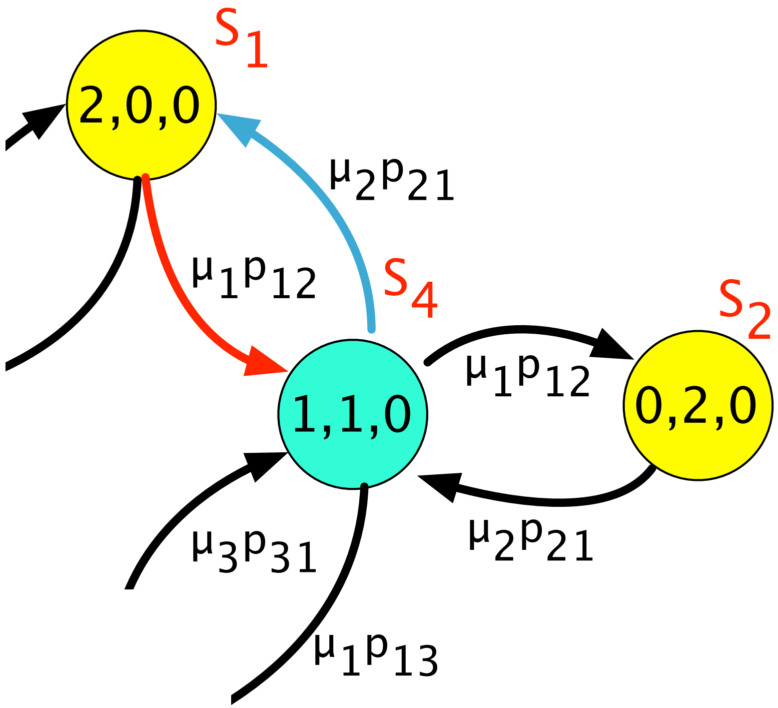
$$\pi(1,0,1)\,(\mu_2 p_{21} + \mu_1(p_{12} + p_{13})) = \pi(0,1,1)\mu_2 p_{21} + \pi(0,0,2)\mu_3 p_{31} + \pi(2,0,0)\mu_1 p_{13}$$

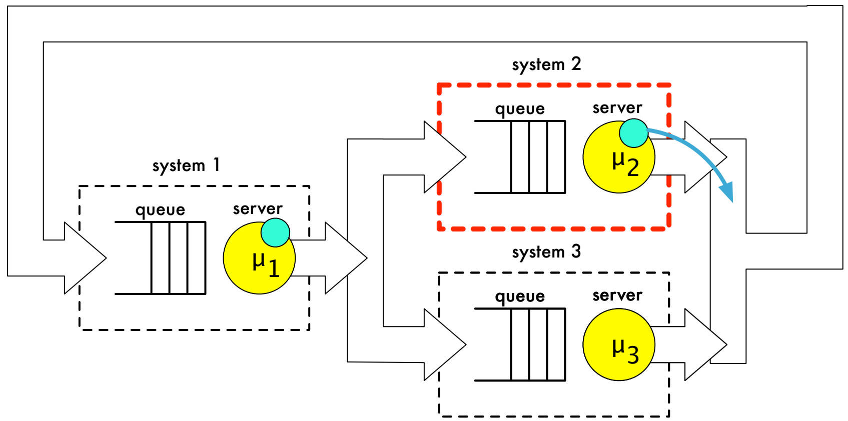
$$\pi(0,1,1)\,(\mu_2 p_{21} + \mu_3 p_{12}) = \pi(1,0,1)\mu_1 p_{12} + \pi(1,1,0)\mu_1 p_{13}$$

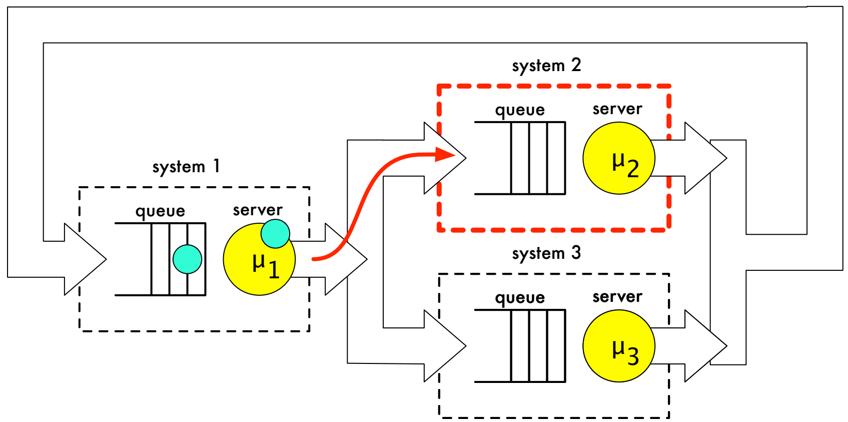
Lokale balans vergelijkingen : Knooppunt 2

- Transition rate uit toestand **(1,1,0)** door vertrek uit server 2 = Transition rate naar deze toestand door aankomst in server 2

$$\pi(1,1,0)\mu_2 p_{21} = \pi(2,0,0)\mu_1 p_{12}$$



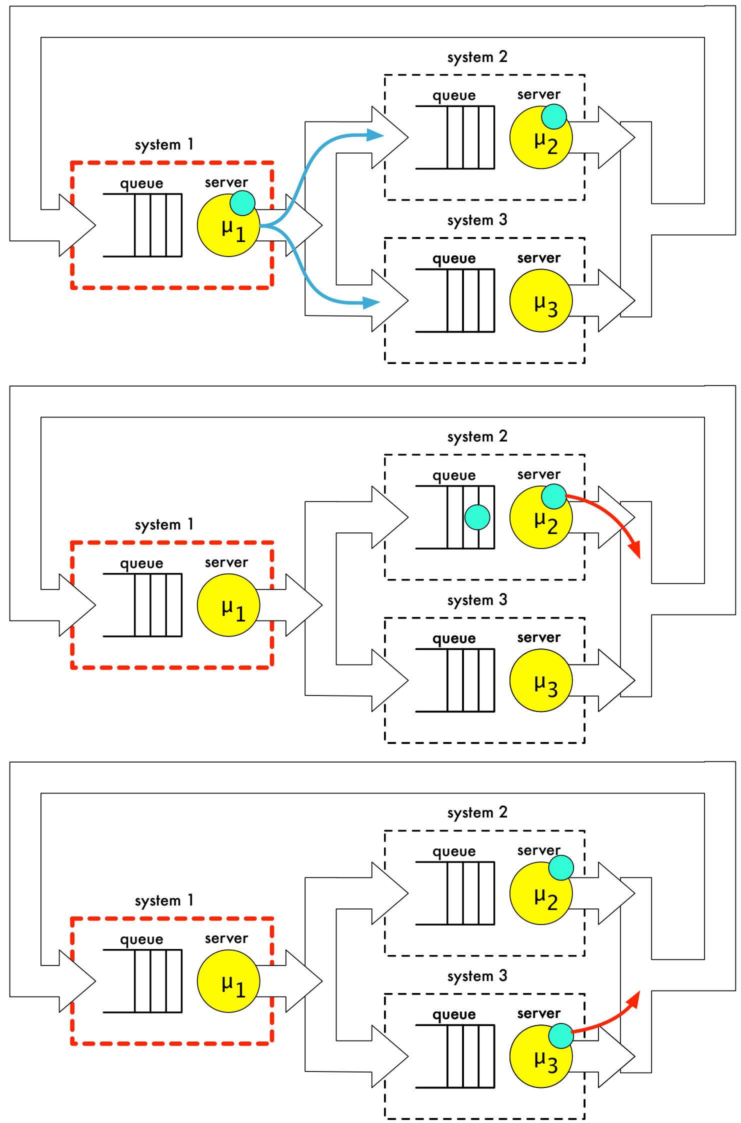


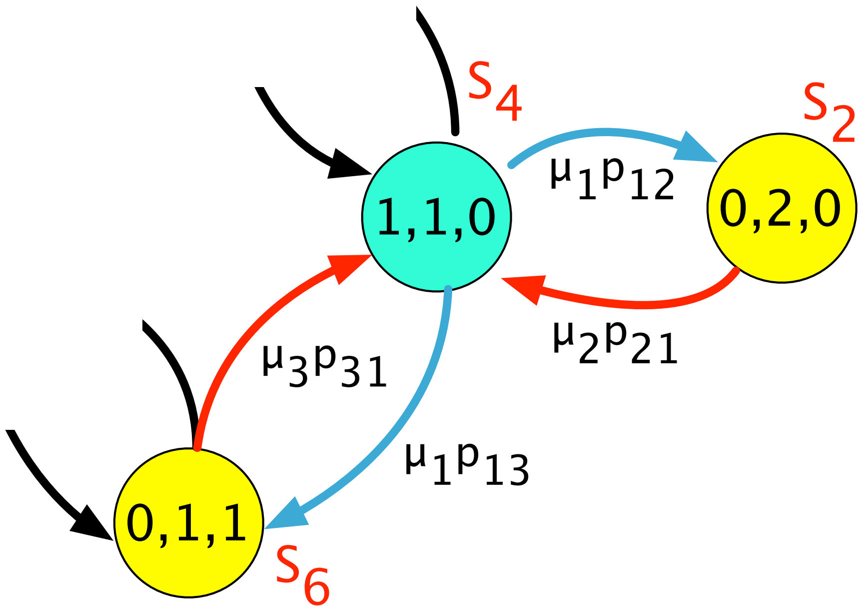


Lokale balans vergelijkingen : Knooppunt 1

- Transition rate uit toestand **(1,1,0)** door vertrek uit server 1 = Transition rate naar deze toestand door aankomst in server 1

$$\pi(1,1,0)\mu_1(p_{13}+p_{12}) = \pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} + \pi(0,1,1)\mu_3 p_{31}$$





Lokale balans vergelijkingen

- Lokale balans vergelijkingen voor toestand **(1,1,0)** worden opgeteld

$$
\begin{aligned}
\pi(1,1,0)\mu_2 p_{21} &= \pi(2,0,0)\mu_1 p_{12} \\
\pi(1,1,0)\mu_1(p_{13}+p_{12}) &= \pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} + \pi(0,1,1)\mu_3 p_{31} \\
\pi(1,1,0)\left(\mu_2 p_{21} + \mu_1(p_{13}+p_{12})\right) &= \pi(2,0,0)\mu_1 p_{12} + \pi(0,2,0)\mu_2 p_{21} + \pi(0,1,1)\mu_3 p_{31}
\end{aligned}
$$

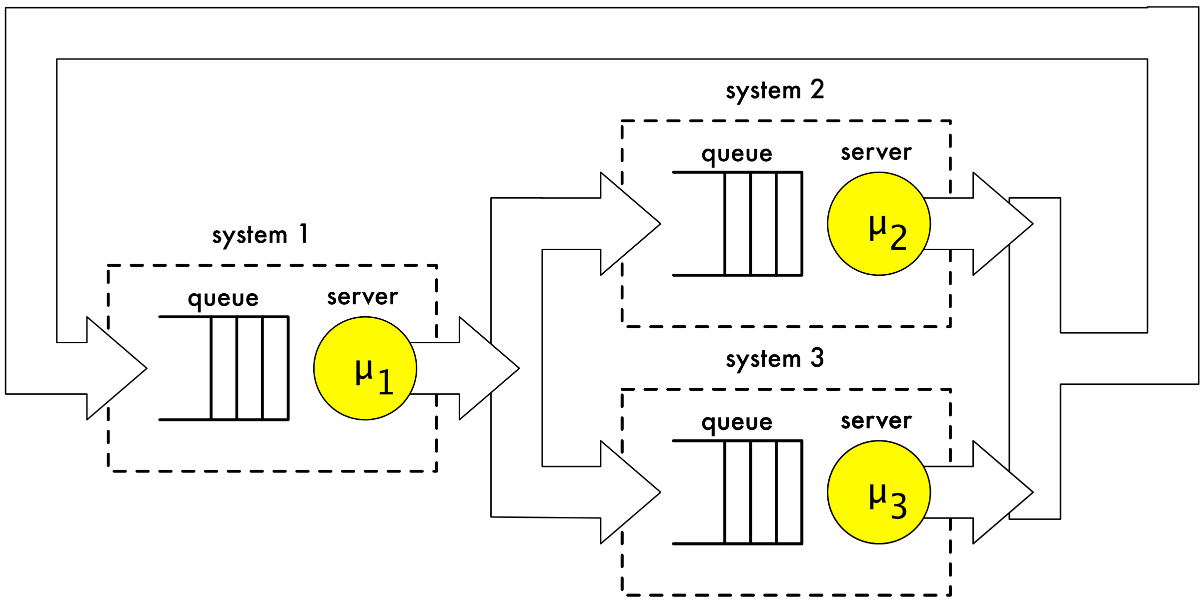
- Lokale balans vergelijkingen voor toestand **(1,0,1)** worden opgeteld door de knooppunten 1 en 3 te bekijken

$$
\begin{aligned}
\pi(1,0,1)\mu_1(p_{12}+p_{13}) &= \pi(0,1,1)\mu_2 p_{21} + \pi(0,0,2)\mu_3 p_{31} \\
\pi(1,0,1)\mu_2 p_{21} &= \pi(2,0,0)\mu_1 p_{13} \\
\pi(1,0,1)\left(\mu_2 p_{21} + \mu_1(p_{12}+p_{13})\right) &= \pi(0,1,1)\mu_2 p_{21} + \pi(0,0,2)\mu_3 p_{31} + \pi(2,0,0)\mu_1 p_{13}
\end{aligned}
$$

- Lokale balans vergelijkingen voor toestand **(0,1,1)** worden opgeteld door de knooppunten 2 en 3 te bekijken

$$
\begin{aligned}
\pi(0,1,1)\mu_2 p_{21} &= \pi(1,0,1)\mu_1 p_{12} \\
\pi(0,1,1)\mu_3 p_{31} &= \pi(1,1,0)\mu_1 p_{13} \\
\pi(0,1,1)\left(\mu_2 p_{21} + \mu_3 p_{12}\right) &= \pi(1,0,1)\mu_1 p_{12} + \pi(1,1,0)\mu_1 p_{13}
\end{aligned}
$$

Netwerken van wachtrijen : Voorbeeld / oplossing



- Gegeven een wachtrij netwerk met drie knooppunten
  - Het aantal klanten m=2 en de wachtrijen zijn van het FIFO type
  - De service tijd is exponentieel verdeeld met $\mu_1 = 4/s$, $\mu_2 = 1/s$ en $\mu_3 = 2/s$
  - De overgangskansen zijn $p_{12} = 0.4$, $p_{13} = 0.6$ en $p_{21} = p_{31} = 1$
- Vraag: Bereken de stationaire kans $\pi(n_1, n_2 ,n_3)$

Netwerken van wachtrijen : Voorbeeld / oplossing

- De stationaire kansen

$$\pi(1,0,1) = \pi(2,0,0)\frac{\mu_1}{\mu_3}p_{13}, \qquad \pi(1,1,0) = \pi(2,0,0)\frac{\mu_1}{\mu_2}p_{12}$$

$$\pi(0,0,2) = \pi(2,0,0)\left(\frac{\mu_1}{\mu_3}p_{13}\right)^2, \quad \pi(0,2,0) = \pi(2,0,0)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}p_{12}\right)^2$$

$$\pi(0,1,1) = \pi(2,0,0)\frac{\mu_1^2}{\mu_2\mu_3}p_{12}p_{13}$$

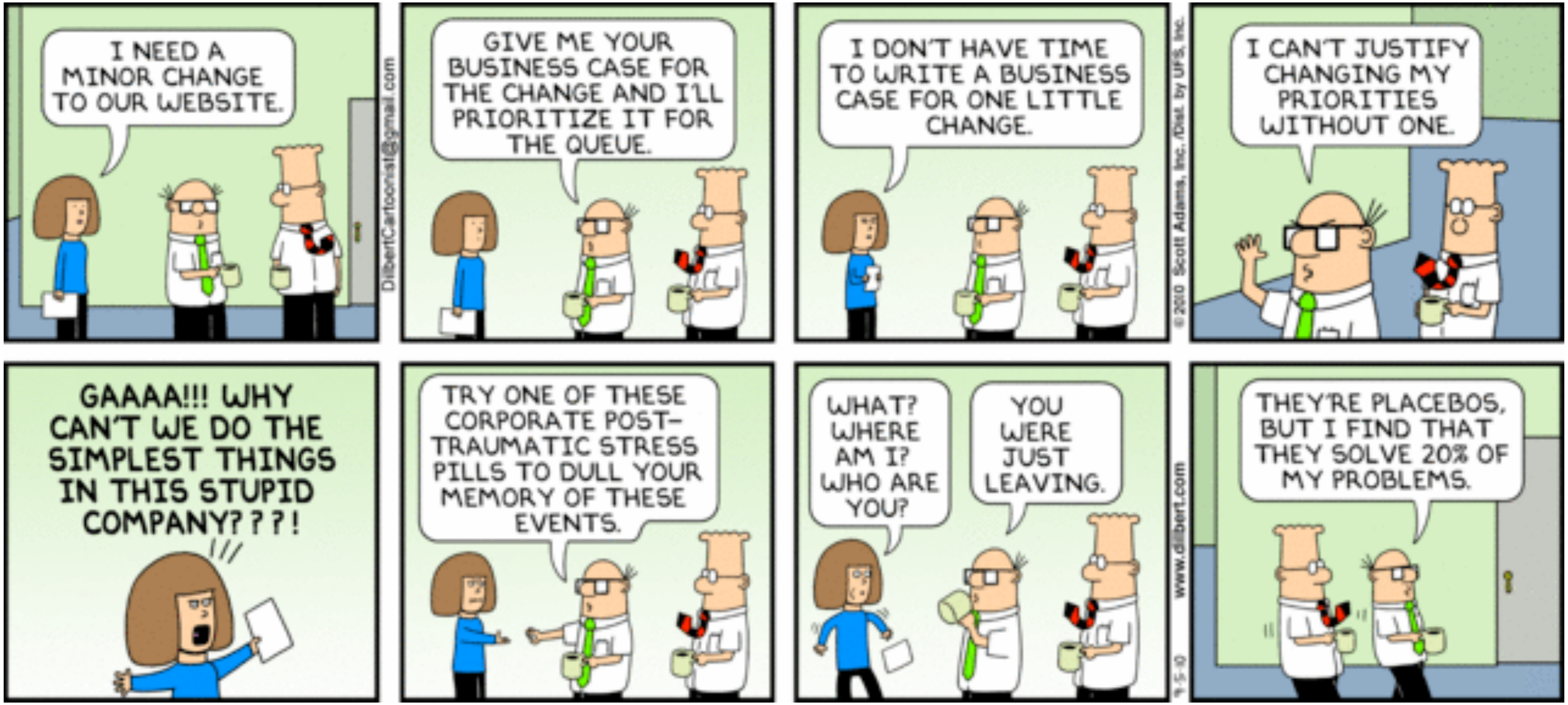
- Waarmee volgt

$$\pi(2,0,0) = \left[1 + \mu_1\left(\frac{p_{13}}{\mu_3} + \frac{p_{12}}{\mu_2} + \frac{\mu_1 p_{13}^2}{\mu_3^2} + \frac{\mu_1 p_{12}^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_1 p_{12} p_{13}}{\mu_2\mu_3}\right)\right]^{-1}$$

- Zodat

$$\pi(2,0,0) = 0.103, \quad \pi(0,0,2) = 0.148, \quad \pi(1,0,1) = 0.123,$$
$$\pi(0,2,0) = 0.263, \quad \pi(1,1,0) = 0.165, \quad \pi(0,1,1) = 0.198.$$

Vragen?



- Jan van Hulzen : j.r.van.hulzen@hva.nl
- Liv Harkes : l.harkes@hva.nl