Wiskunde 13/14

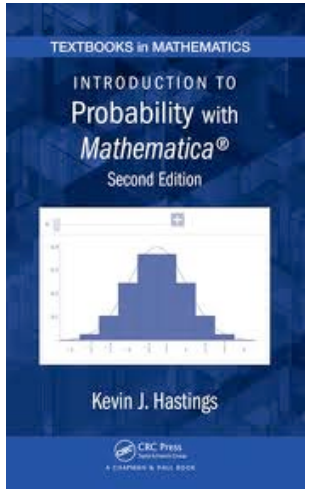
Jan van Hulzen / Liv Harkes
November 26th 2012 version 1.0

Markov chains

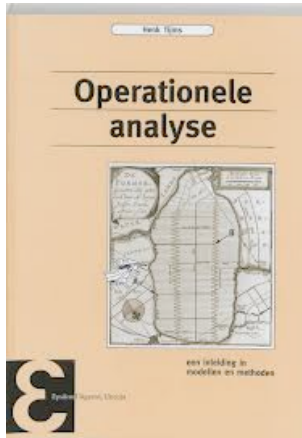
Aanbevolen literatuur

- Boeken gebruikt voor deze les :

  - Introduction to Probability with Mathematica, Second Edition Kevin J. Hastings, September 21, 2009 ISBN-13: 978-1420079388



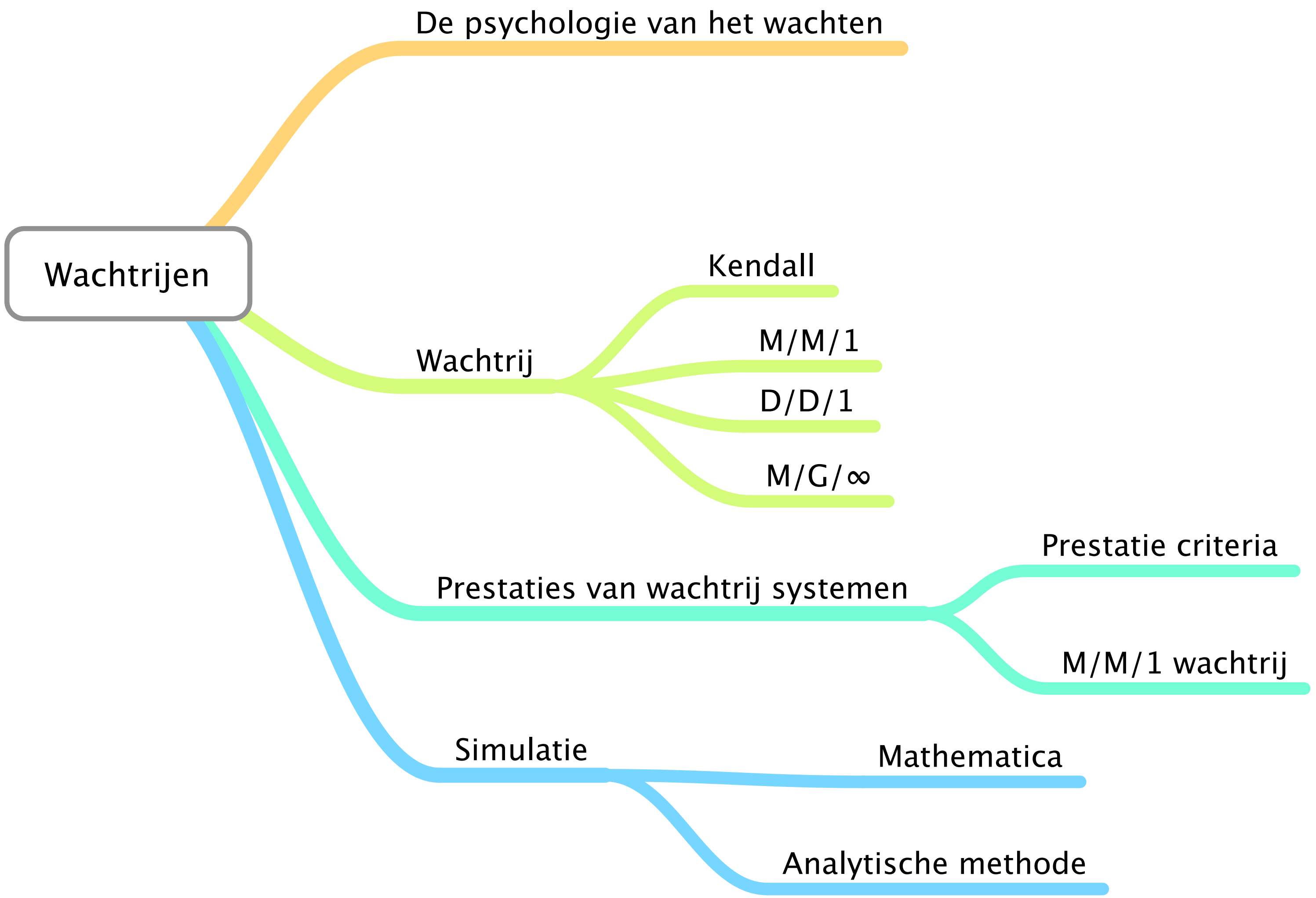
  - Operationele analyse, een inleidng in de modellen en methoden, H. Tijms ISBN-13: 978-9050410755



Markov ketens & Wacht rijen



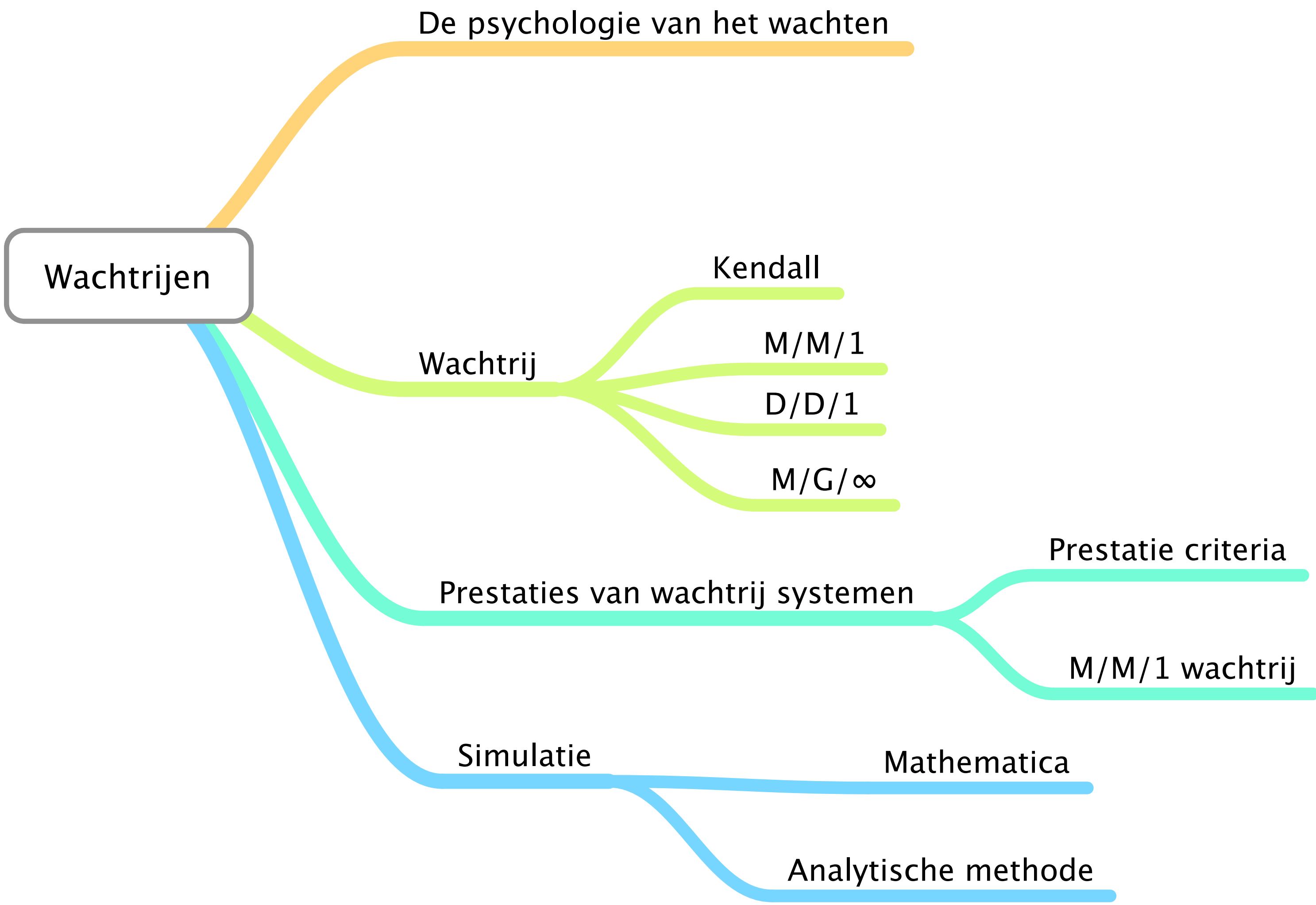

Overzicht


Wachtrijen
De psychologie van het wachten
Wachtrij
Kendall
M/M/1
D/D/1
M/G/∞
Prestaties van wachtrij systemen
Prestatie criteria
M/M/1 wachtrij
Simulatie
Mathematica
Analytische methode

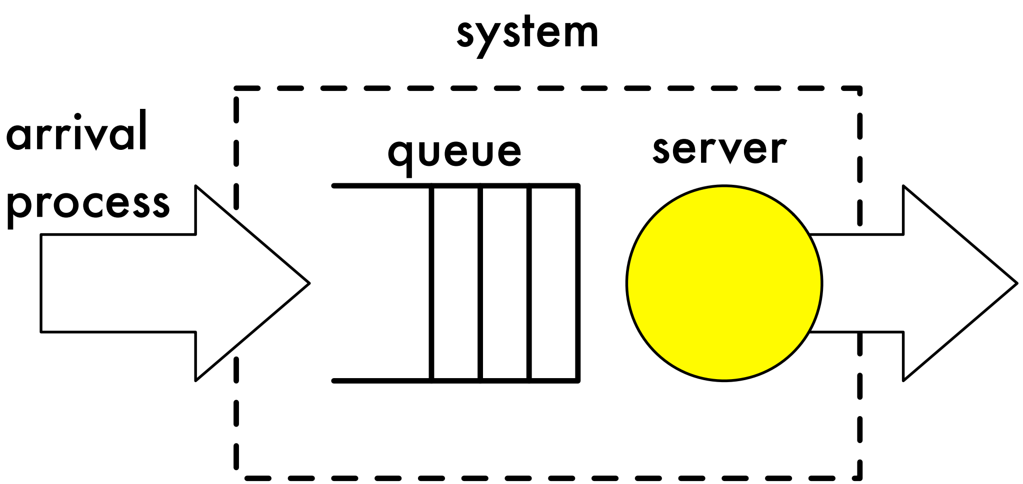
De psychologie van het wachten

- Wachten waarbij de klant afgeleid wordt duurt minder lang
- Wachten zonder informatie duurt langer dan met informatie
- Wachten waarbij klanten niet in volgorde van aankomst in bediening gaan duur langer dan wachten met een eerlijke bedieningstijd
- Wachten duurt langer als de bedienden niet met het afhandelen van klanten bezig zijn
- Vriendelijkheid van de bediende verzacht het leed van het wachten

Overzicht


Wachtrijen
De psychologie van het wachten
Wachtrij
Kendall
M/M/1
D/D/1
M/G/∞
Prestaties van wachtrij systemen
Prestatie criteria
M/M/1 wachtrij
Simulatie
Mathematica
Analytische methode

Wachtrij



- Klanten die aankomen in een lege wachtrij worden direct geholpen
- Klanten die aankomen als de server bezig is komen in de queue
- Aankomstproces is in de regel Poisson verdeeld met intensiteit (rate) λ
- Serviceproces is in de regel Poisson verdeeld met intensiteit (rate) μ

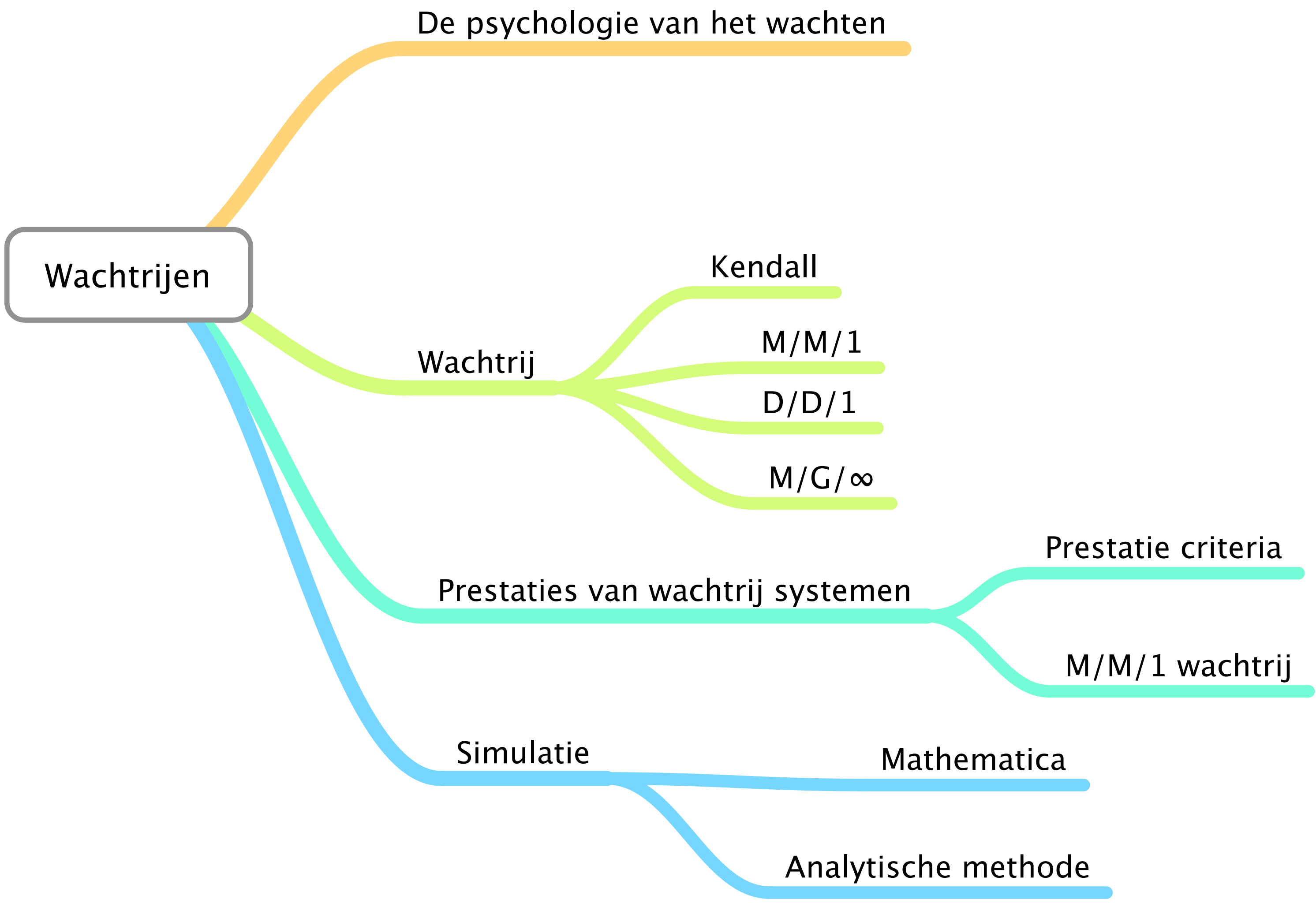
Kendall Notatie

- Wachtrij modellen worden aangeduid met behulp van Kendall's notatie:
  - **A**/**B**/**S**/**K**/**N**/**D**
  - Hier is:
    - **A** is de inter-aankomst tijd verdeling (hier meestal de M van Markov)
      - **A** kan bijvoorbeeld **M**, **D** of **G** zijn (**M** = Markov of Poisson, **D**=Deterministisch of constant, **G** = General, normaal uniform etc)
    - **B** is de service tijd verdeling
    - **S** is het aantal servers
    - **K** is de capaciteit van het systeem
    - **N** is de klanten populatie
    - **D** de aangenomen service
  - Vaak wordt deze notatie afgekort tot, **A**/**B**/**S** waarmee aangenomen wordt dat **K**/**N**/**D** = ∞/∞/**FIFO**.

Voorbeelden

- Een veel gebruikt model is de **D/D/1** wachtrij
  - Binnenkomst interval constant
  - Service duur constant
  - Single-server FIFO que
  - Geen beperking op capaciteit
- Een ander veel gebruikt model is de **M/M/1** wachtrij
  - Binnenkomst volgens Poisson proces
  - Service duur exponentieel verdeeld
  - Single-server FIFO que
  - Geen beperking op capaciteit
- Een derde voorbeeld is de **M/G/∞** wachtrij
  - Binnenkomst volgens Poisson proces
  - Service duur normaal of uniform verdeeld
  - Oneindige-server FIFO que

Overzicht


Wachtrijen
De psychologie van het wachten
Wachtrij
Kendall
M/M/1
D/D/1
M/G/∞
Prestaties van wachtrij systemen
Prestatie criteria
M/M/1 wachtrij
Simulatie
Mathematica
Analytische methode

Prestaties van wachtrij systemen I

- Prestatie criteria
  - Het gemiddelde aantal klanten (jobs) in het systeem, L
  - De gemiddelde tijd dat een klant (job) in het systeem is W
  - Het gemiddelde aantal klanten dat in de wachtrij is Lq
  - Gemiddelde tijd dat een klant in een wachtrij doorbrengt Wq

- De formule van Little
  - De formule van Little is geldig voor alle wachtrij systemen

$$L = \lambda W$$
$$L_q = \lambda W_q$$

De formule van Little

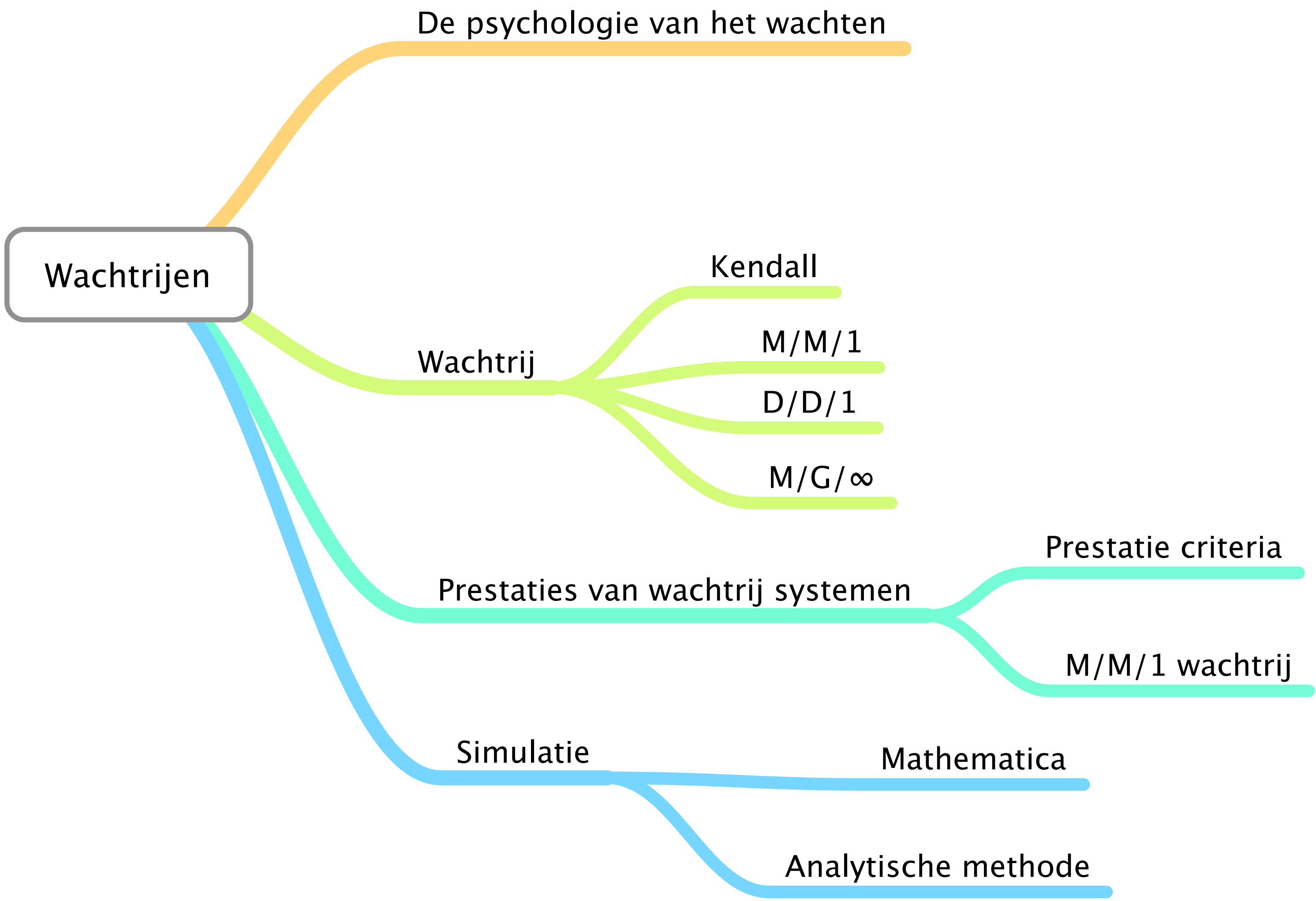
$$L = \lambda W$$
$$L_q = \lambda W_q$$

- Intuïtief is in te zien dat :
  - Gegeven een typische klant
  - Als de klant in de wachtrij aankomt zijn er gemiddeld L klanten in de wachtrij
  - Als de klant het systeem weer verlaat is de gemiddelde tijd in het systeem W
  - Er zijn dus in de tijd dat de klant in het systeem is λW klanten bijgekomen
  - In de stationaire toestand is het aantal klanten dat in het systeem achterblijft als er een klant vertrekt gelijk aan het aantal klanten dat aangetroffen wordt als een klant in het systeem aankomt, dus $L=\lambda W$

Prestaties van wachtrij systemen II

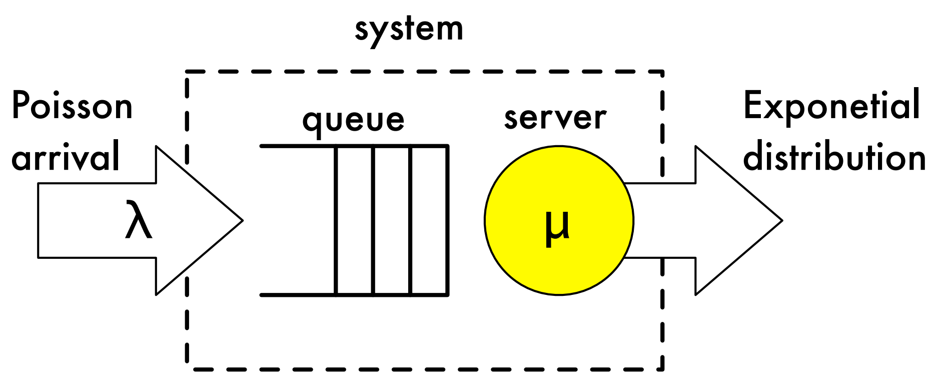
- Prestatie criteria
  - $p_n(t)$: de kans dat er n klanten in het systeem zijn op tijdstip t
  - π_n : de steady state kans dat er n klanten in de wachtrij zijn
  - Throughput γ : de snelheid waarmee de klanten het systeem verlaten
  - Blocking probability P_B : In het geval van een eindige aantal plaatsen in de wachtrij is dit de kans dat een klant wordt geweigerd omdat de wachtrij vol is

Overzicht


Wachtrijen
De psychologie van het wachten
Wachtrij
Kendall
M/M/1
D/D/1
M/G/∞
Prestaties van wachtrij systemen
Prestatie criteria
M/M/1 wachtrij
Simulatie
Mathematica
Analytische methode

M/M/1 Wachtrij

- Een **M**/**M**/**1** wachtrij heeft
  - Binnenkomst volgens Poisson proces met aankomstfrequentie λ
  - Service duur exponentieel verdeeld met gemiddelde $1/\mu$ en dus een gemiddelde service frequentie van μ
  - 1 server van het FIFO que
  - Geen beperking op capaciteit



- Een **M**/**M**/**1** wachtrij is een birth-death proces
  - Een birth is de aankomst van een klant
  - Een death is het vertrek van een klant na service

M/M/1 Wachtrij : Poisson aankomst proces

- Als N(t) het aantal aankomsten zijn in het interval $(0,t)$ dan is

$$P[\,N(t) = n\,] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

- Als τ de tijd is tussen twee Poisson aankomsten dan is

$$P[\,\tau \leq t\,] = 1 - e^{-\lambda t}$$

- De frequentie λ is het gemiddelde aantal aankomsten per tijdseenheid, en $1/\lambda$ is het gemiddelde inter-aankomst interval.

- Voor twee disjuncte intervallen (t_1,t_2) en (t_3,t_4) geld dat het aantal aankomsten in (t_1,t_2) onafhankelijk is van het aantal aankomsten in (t_3,t_4)

M/M/1 Wachtrij : Exponentiële service tijd verdeling

- Als X de service tijd is voor het afhandelen van een klant en als X exponentieel verdeeld is met een gemiddelde service tijd $1/\mu$ dan is
  - In een klein tijdsinterval Δt de kans dat de service tijd aan de klant afloopt proportioneel aan de grootte van het gekozen interval:

$$P[\,1 \text{ klant gereed in } \Delta t\,] = \mu\Delta t + o(\Delta t)$$

  - De kans dat in het tijdsinterval Δt twee maal een servicebeurt afloopt verwaarloosbaar

$$P[\,> 1 \text{ klant gereed in } \Delta t\,] = o(\Delta t)$$

  - Het gereed komen van service is onafhankelijk van andere service beurten en onafhankelijk van de tijd die verstreken is sinds de laatste klant gereed was (onafhankelijk en stationair)

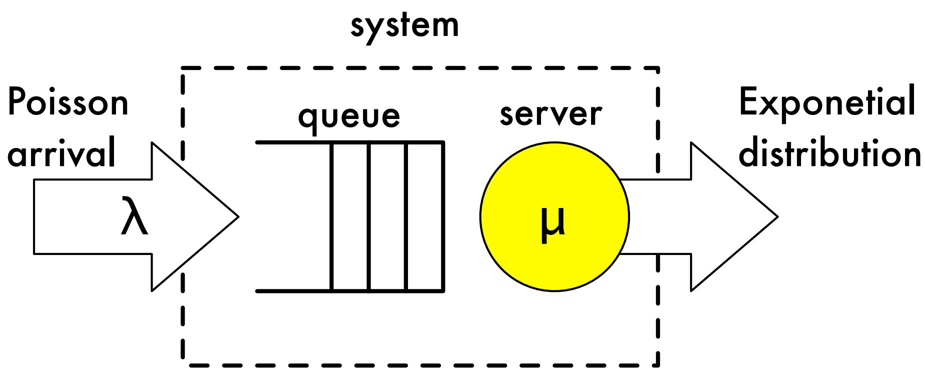
$$P[\,X \leq t\,] = 1 - e^{-\mu t}$$

M/M/1 Wachtrij : Prestatie criteria

- Gemiddelde aankomst frequentie (λ)
- Gemiddelde aankomsttijd nieuwe klanten ($E[\tau]$)
- Gemiddelde service frequentie (μ)
- Doorgangs intensiteit (α)
- Server gebruik (ρ)
- Steady state kans dat er n klanten in de wachtrij zijn (π_n)
- De frequentie waarmee afgehandelde klanten vertrekken (γ)
- Gemiddeld aantal klanten in het systeem (L)
- Gemiddelde tijd dat een klant in het systeem zit (W)
- Gemiddelde aantal klanten in de wachtrij (L_q)
- Gemiddelde tijd dat een klant in de wachtrij is (W_q)
- Gemiddelde server tijd per server ($W_s = 1/\mu$)

M/M/1 Wachtrij : Stationaire toestand 1

- Prestatie criteria M/M/1 wachtrij :
  - $p_n(t)$ is de kans dat het systeem n klanten heeft op tijd t
  - π_n is de stationaire kans dat er n klanten in de rij staan



- De toestand van de wachtrij kan nu beschreven worden door

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = -\left(\lambda + \mu\right)p_n(t) + \mu p_{n+1}(t)$$

$$\frac{d}{dt}p_o(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

- De stationaire toestand kan nu bepaald worden met

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = 0 \text{ en } \lim_{t\to\infty} p_n(t) = \pi_n \ \forall n$$

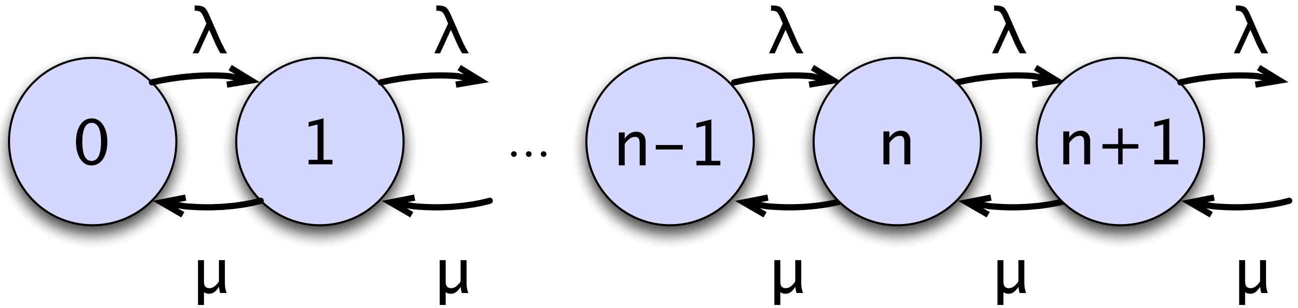
- zodat de vergelijkingen van de stationaire toestand worden

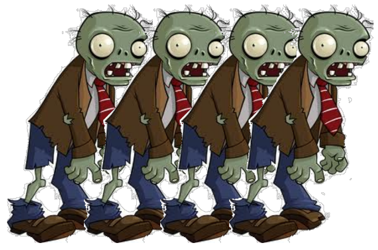
$$0 = -\left(\lambda + \mu\right)\pi_n + \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$$

$$0 = -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1$$

M/M/1 Wachtrij : Stationaire toestand 2

- De stationaire toestand wordt bepaald met het toestands transitie diagram





n=4

- In de stationaire toestand moet de gemiddelde frequentie waarmee een systeem in een bepaalde toestand komt gelijk zijn aan de gemiddelde frequentie waarmee het systeem de toestand verlaat
- De balans vergelijkingen zijn

$$
\begin{array}{r|c}
\text{Toestand} & \text{Frequentie uit} \;=\; \text{Frequentie in} \\
0 & \lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\
1 & (\lambda+\mu)\,\pi_1 = \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\
2 & (\lambda+\mu)\,\pi_2 = \lambda\pi_1 + \mu\pi_3 \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
n & (\lambda+\mu)\,\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}
\end{array}
$$

M/M/1 Wachtrij : Stationaire toestand 2

- Tel nu elke twee opeenvolgende vergelijkingen op

$$
\begin{aligned}
\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\
(\lambda+\mu)\,\pi_1 &= \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\
(\lambda+\mu)\,\pi_2 &= \lambda\pi_1 + \mu\pi_3 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
(\lambda+\mu)\,\pi_n &= \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 \\
\lambda\pi_1 &= \mu\pi_2 \\
\lambda\pi_2 &= \mu\pi_3 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\lambda\pi_n &= \mu\pi_{n+1}
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\
\pi_2 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\pi_{n+1} &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_n
\end{aligned}
$$

- En dus $\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0$

- En $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \;$ en dus : $\pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

M/M/1 Wachtrij : Server gebruik

- Doorgangs intensiteit α wordt gegeven door

$$\begin{aligned}\alpha &= W_s / E[\tau] \\ &= (1/\mu)/(1/\lambda) = \lambda/\mu\end{aligned}$$

- Het server gebruik ρ wordt gegeven door

$$\rho = \frac{\alpha}{S} = \frac{\lambda}{\mu}$$

- De steady state kans dat het systeem n kanten heeft π_n

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho$$

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0 = \rho^n \pi_0 = \rho^n (1 - \rho)$$

- Dit is een geometrische verdeling

M/M/1 Wachtrij : Gemiddeld aantal klanten

- Het gemiddelde aantal klanten in het systeem wordt gegeven door

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

$$= (1-\rho)\rho\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{(1-\rho)\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- De gemiddelde duur dat een klant in het systeem is wordt gegeven door

$$W = L/\lambda = \frac{\rho}{1-\rho}/\lambda = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

M/M/1 Wachtrij : Aantal klanten in de wachtrij

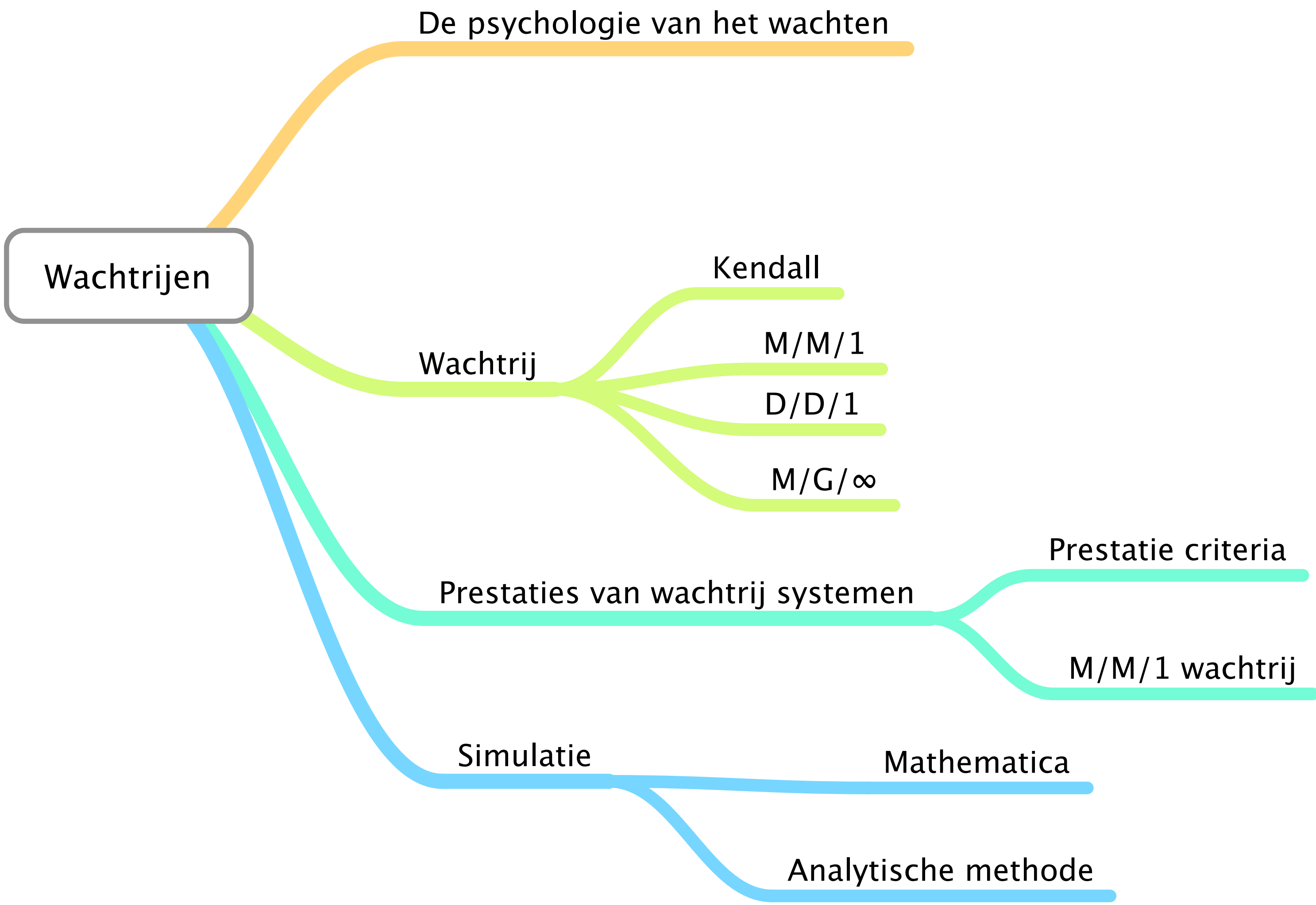
- Het gemiddelde aantal klanten in de wachtrij (L_q)

$$
\begin{aligned}
L_q &= L - (1 \times P\,[\text{Server is niet leeg}]) \\
&= L - (1 - P\,[\text{Geen klanten in de wachtrij}]) \\
&= L - (1 - \pi_0) = L(1 - (1 - \rho)) \\
&= L - \rho = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}
\end{aligned}
$$

- Gemiddelde tijd dat een klant in de wachtrij is (W_q)

$$W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \frac{1}{\lambda}$$

Overzicht



Wachtrijen
De psychologie van het wachten
Wachtrij
Kendall
M/M/1
D/D/1
M/G/∞
Prestaties van wachtrij systemen
Prestatie criteria
M/M/1 wachtrij
Simulatie
Mathematica
Analytische methode

M/M/1 Wachtrij : Mathematica simulatie

```
Module[{ctMarkovChainPath, ctMarkovChain, Q, λ, μ, ρ, L, W, Wq, Lq},
 (* define a function that calculates the path *)
 ctMarkovChainPath[x0_, Q_?MatrixQ, n_] :=
  Module[{R = Q, m = Length[Q], q, P, cumP, t = 0, r, x = x0, tt = {0}, xx = {x0}},
   Do[R[[i, i]] = 0, {i, m}];
   q = Total[#] & /@ R;
   P = Table[If[q[[i]] ≠ 0, R[[i]] / q[[i]], Table[If[j ≠ i, 0, 1], {j, m}]], {i, m}];
   cumP = Accumulate /@ P;
   Do[If[q[[x + 1]] ≠ 0, t = t + RandomReal[ExponentialDistribution[q[[x + 1]]]], Break[]];
    r = RandomReal[];
    x = Position[cumP[[x + 1]], z_ /; z ≥ r, {1}, 1][[1, 1]] - 1;
    tt = {tt, t}; xx = {xx, x}, {n}];
   {Flatten[tt], Flatten[xx]}];
```

- Mathematica kan met behulp van **RandomReal** en **ExponentialDistribution** een simulatiemodel opbouwen van de M/M/1 wachtrij

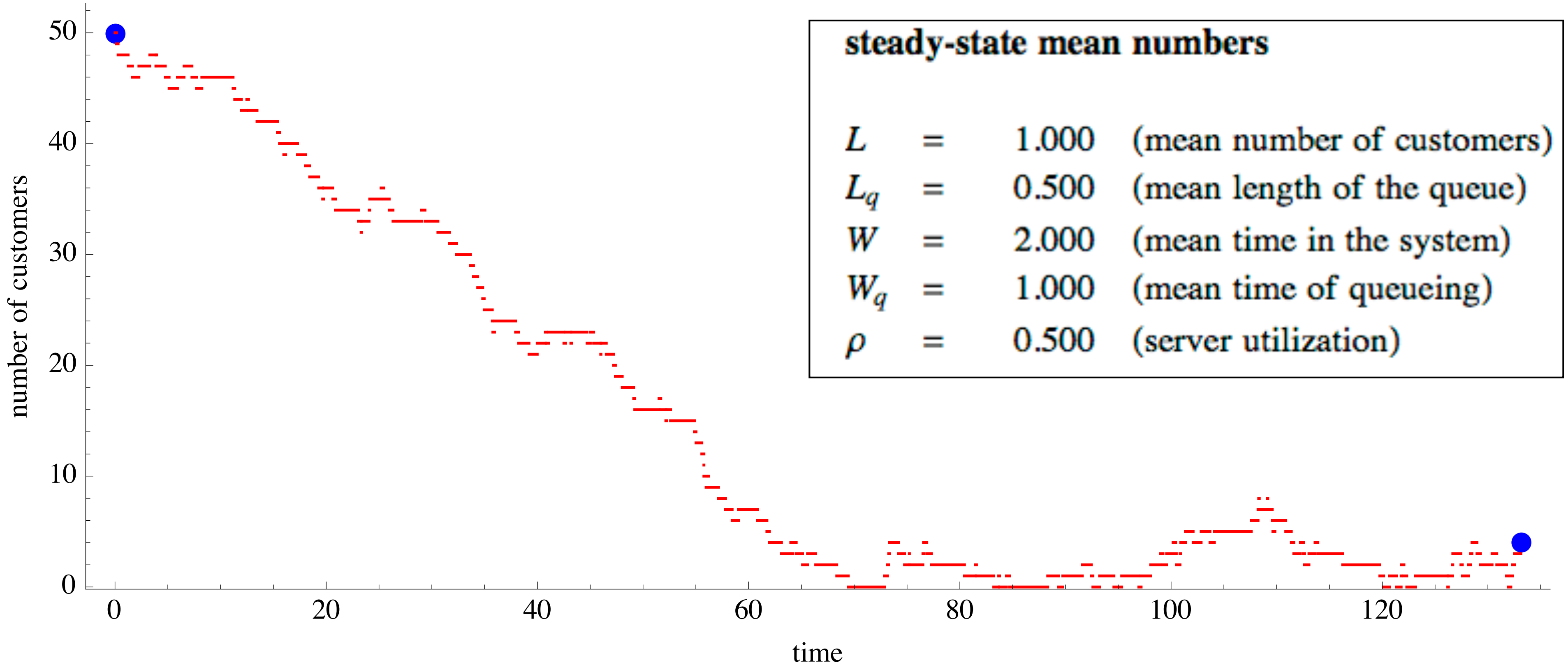
M/M/1 Wachtrij : Mathematica simulatie

```
(* define a function that shows the path *)
ctMarkovChain[x0_, Q_?MatrixQ, n_] := Module[{tt, xx},
  {tt, xx} = ctMarkovChainPath[x0, Q, n];
  Graphics[{Blue, PointSize[Large], Point[{0, x0}], Point[{Last[tt], Last[xx]}],
    Red, Thickness[Medium],
    Evaluate[Table[Line[{{tt⟦i⟧, xx⟦i⟧}, {tt⟦i + 1⟧, xx⟦i⟧}}], {i, Length[tt] - 1}]]},
   Frame → {True, True, False, False}, FrameLabel → {"time", "number of customers"},
   Axes → False, AspectRatio → 0.4, ImageSize → {600, 250}, PlotRange → {-0.2, All},
   ImagePadding → {{35, 10}, {35, 10}}]];

(* define a function for the generator of the Markov chain *)
Q[λ_, μ_, m_] := Table[Which[i == 0 && j == 0, -λ, j == i - 1, μ, j == i, -λ - μ, j == i + 1, λ, True, 0],
  {i, 0, m}, {j, 0, m}];
```

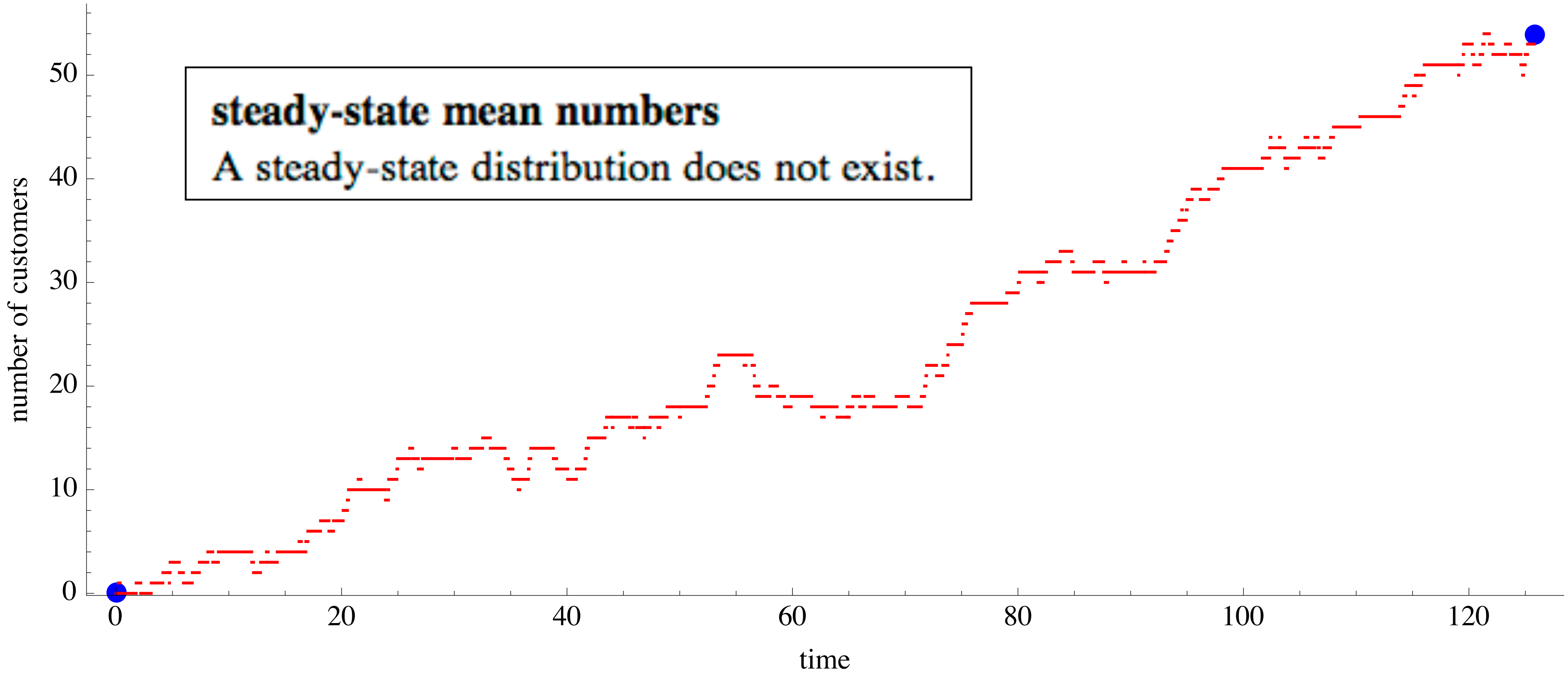
- Tweede gedeelte van de code (uitleg volgt)

M/M/1 Wachtrij : Mathematica simulatie



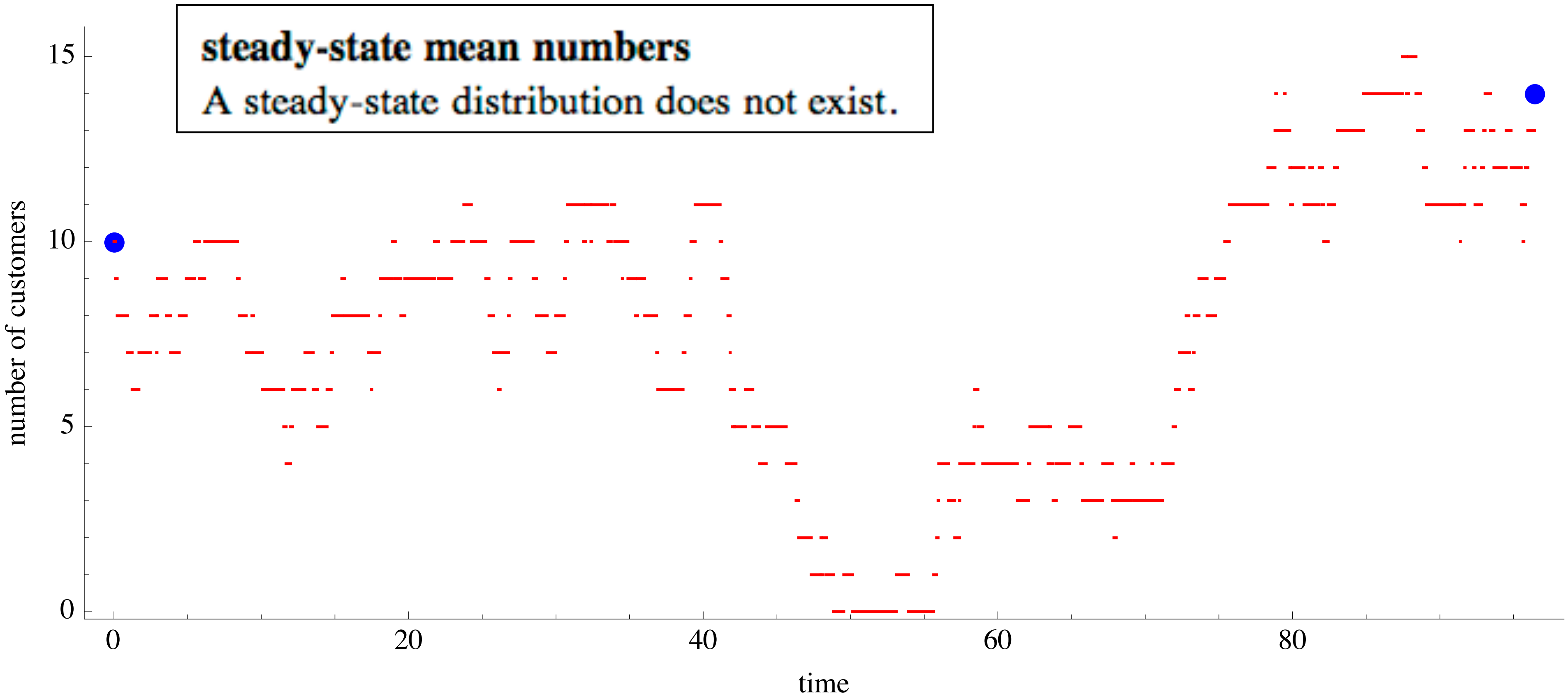
- Aantal klanten op $t = 0$ is $n_0 = 50$
- Gemiddelde tijd tussen aankomsten $1/\lambda = 2$
- Gemiddelde service tijd $1/\mu = 1$

M/M/1 Wachtrij : Mathematica simulatie



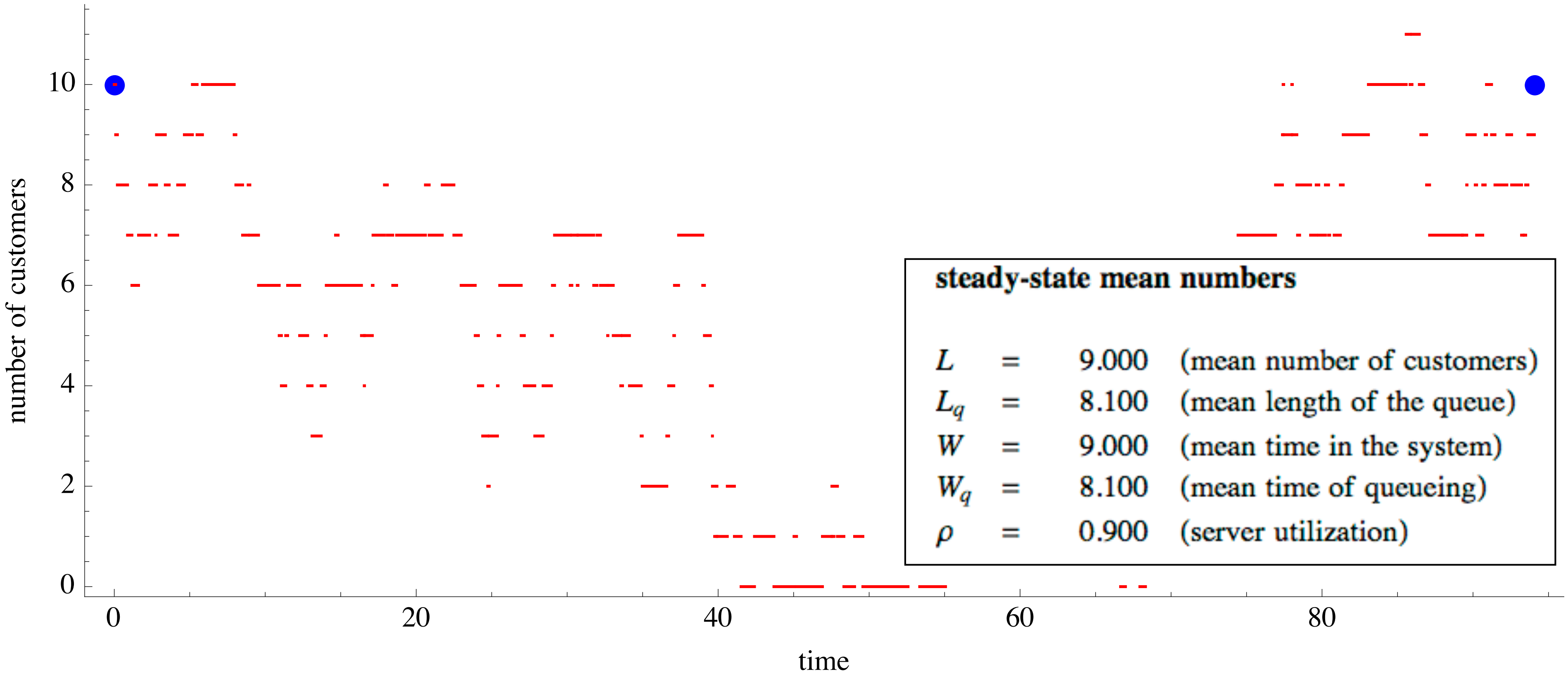
- Aantal klanten op $t = 0$ is $n_0 = 0$
- Gemiddelde tijd tussen aankomsten $1/\lambda = 1$
- Gemiddelde service tijd $1 / \mu = 2$

M/M/1 Wachtrij : Mathematica simulatie



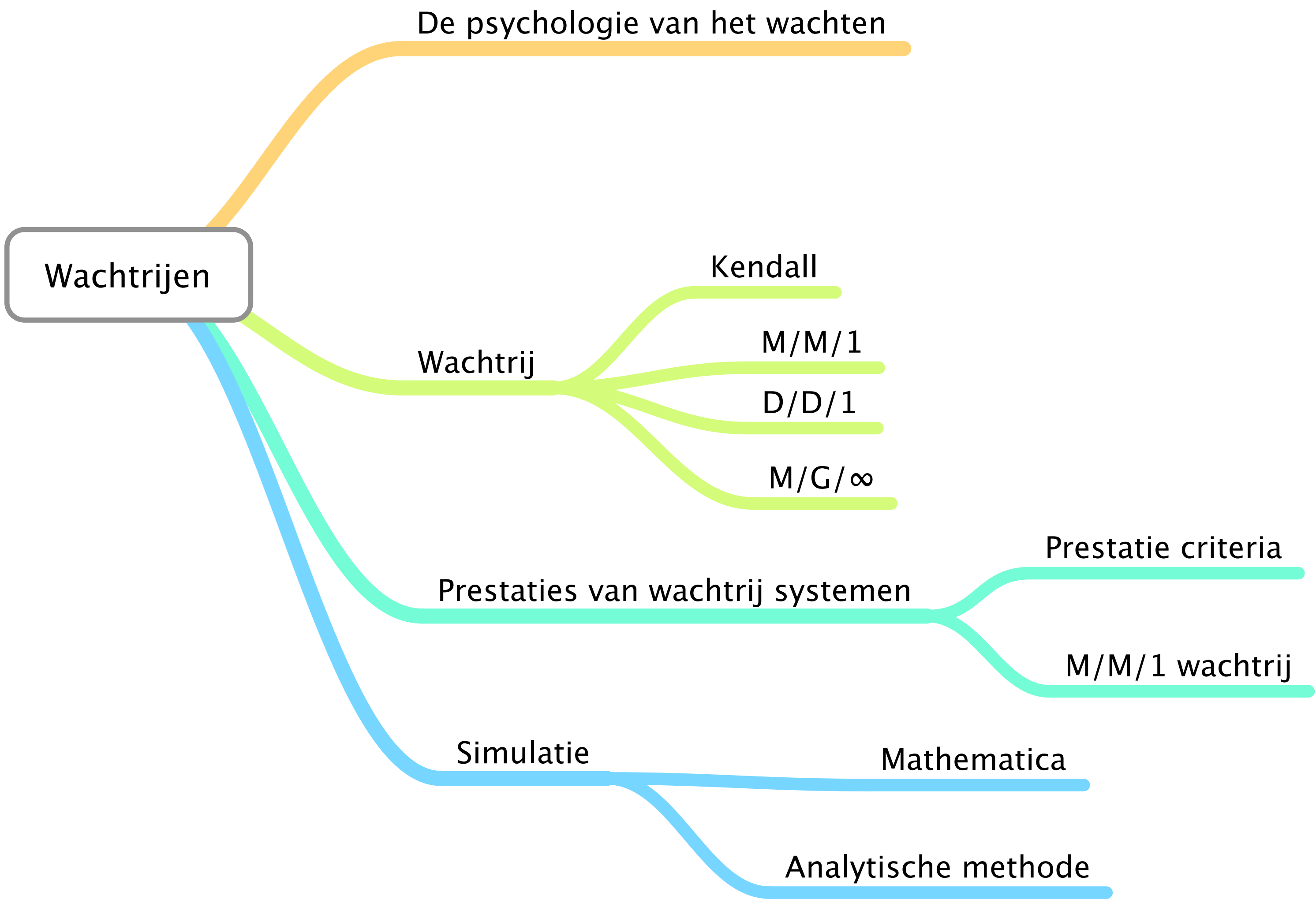
- Aantal klanten op $t = 0$ is $n_0 = 0$
- Gemiddelde tijd tussen aankomsten $1/\lambda = 1$
- Gemiddelde service tijd $1/\mu = 1$

M/M/1 Wachtrij : Mathematica simulatie



- Aantal klanten op $t=0$ is $n_0=0$
- Gemiddelde tijd tussen aankomsten $1/\lambda=1$
- Gemiddelde service tijd $1/\mu=0.9$

Overzicht


Wachtrijen
De psychologie van het wachten
Wachtrij
Kendall
M/M/1
D/D/1
M/G/∞
Prestaties van wachtrij systemen
Prestatie criteria
M/M/1 wachtrij
Simulatie
Mathematica
Analytische methode

M/M/1 Wachtrij : Voorbeeld

- Op een festival wachten klanten in een rij om munten te kopen waarmee drankjes kunnen worden betaald.
  - Aan het eind van de rij zit een verkoper die gemiddeld 15 s per klant nodig heeft om de munten te verkopen en €5,- per uur kost.
  - Klanten komen aan volgens een Poisson verdeling van 3 per minuut en de kosten verbonden aan het niet servicen van klanten is €0,20 per minuut
  - De verkoper kan worden vervangen door een machine die €2000,- kost en ongeveer €0,20 per uur kost aan energie en onderhoud.

- Vragen
  - Bepaal de verdeling en gemiddelde waarde van het aantal klanten dat staat te wachten
  - Kan het uit om de verkoper te vervangen door de machine?

M/M/1 Wachtrij : Voorbeeld

- De tijd tussen aankomsten van klanten is exponentieel verdeeld met $\lambda=3/min$
- De service rate is de reciproque waarde van de gemiddelde tijdsduur voor het servicen van een klant (15 s) en is dus $\mu=4/min$
- De wachtrij is een M/M/1 wachtrij als we aannemen dat:
  - De benodigde tijd voor elke service onafhankelijke random variabelen zijn die afhangen van een exponentiële verdeling en onafhankelijk zijn van het aantal klanten in de wachtrij.

- Antwoorden
  - Het server gebruik (queue traffic intensity) is $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$
  - De stationaire kans op n klanten in de rij is $\pi_n = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
  - Het gemiddelde aantal klanten in de rij is $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3/4}{1/4} = 3$

M/M/1 Wachtrij : Voorbeeld

- Om te bepalen of de machine goedkoper is dan de bediende definiëren we
  - De gemiddelde kosten per minuut voor de bediende C_h en de machine C_m
- Voor de bediende worden de kosten per minuut

$$C_h = (1/12)/\mathrm{min} + (3 \text{ klanten}) \times (0.20/\mathrm{klant})/\mathrm{min} = 0.683/\mathrm{min}$$

- Voor de machine geldt:
  - De gemiddelde service tijd is 12 seconden en dus $\mu = 5/min$
  - Het server gebruik (queue traffic intensity) is $\rho = \lambda/\mu = 3/5$
  - Het gemiddeld aantal klanten in de rij is $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3/5}{2/5} = \frac{3}{2}$
- Dus de kosten voor het gebruik van de machine zijn

$$C_m = (1/120)/\mathrm{min} + (3/2 \text{ klanten}) \times (0.20/\mathrm{klant})/\mathrm{min} = 0.308/\mathrm{min}$$

M/M/1 Wachtrij : Voorbeeld

- Om uit te rekenen hoe lang het systeem in gebruik moet zijn voordat de aanschaf van de machine lonend is gebruiken we

$$C_h = C_m + 2000 \;\Rightarrow\; 0.683x = 0.308x + 2000 \;\Rightarrow\; 0.375x = 2000$$

- Hetgeen oplever dat de machine goedkoper is naar een gebruiksduur van

$$x = 5333 \text{ min } = 89 \text{ uur}$$

- Merk op dat de grote reductie hier voor rekening komt van de kosten die gemaakt worden voor het in de rij staan van de klanten (€0,20 per minuut) en niet in het verschil tussen loon en operationele kosten.

Vragen?

- Jan van Hulzen : j.r.van.hulzen@hva.nl
- Liv Harkes : l.harkes@hva.nl