Lineaire Algebra Thema 4

Partial pivoting en rijschaling, Methode van Gauss

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

30 september 2024

Inhoudsopgave

Overzicht cursus

Overzicht cursus

Het vak Lineaire Algebra bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd ALETVT2A (ma 12:30 op ...)
- Deeltijd ALETDT2 (wo 14:00 op ...)

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

Overzicht cursus (onder voorbehoud)

- Thema 1, 3.1 Vectoren, 3.2 Matrices
- Thema 2, 3.3 Lineaire afbeeldingen, 3.4 Determinanten
- Thema 3, 3.5 Regel van Cramer 3.6 Methode van Gauss
- Thema 4, 3.7 Pivoting en Rijschaling 3.8 Inverse matrix
- Thema 5, 3.9 Gauss-Jordan eliminatie 3.10 LU decompositie
- Thema 6, 3.10 Eigenwaarden en Eigenvectoren.
- Thema 7, Tentamen voorbereiding

Overzicht stof van vandaag

- Paragraaf 3.7 Pivoting en Rijschaling
- Paragraaf 3.8 Inverse matrix

3.7 Partial Pivoting en rijschaling

Partial pivoting

- Bij de eliminatiemethode van Gauss kan het voorkomen dat er diagonaalelementen ontstaan die 0 zijn.
- Om door te kunnen gaan moeten rijen verwisseld worden.
- De coëfficiëntendeterminant wisselt dan wel van teken.

Voorbeeld 3.17

- Gegevenen de uitgebreide matrix en coëfficiëntendeterminant

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 4 & 3 & 23 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-2(2 \cdot 4 + 3 \cdot 0)) = 16$$

- Rij 2 heeft een 0 in de eerste twee kolommen, verwissel daarom rij 2 en rij 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 4 & 3 & 23 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

- We kunnen nu gemakkelijk de coëfficiëntendeterminant bepalen -(-16)=16

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 \cdot -2) = 16$$

Voorbeeld 3.17

- Gegeven de uitgebreide matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right)$$

- Verwissel rij2 met rij 3 of rij4
- Welke keuze het beste resultaat geeft hangt af van een aantal factoren

Partial pivoting

- Het nul worden van een diagonaalelement is niet het enige probleem bij het reduceren van matrices.
- Het kan voorkomen dat het werken met combinaties van grote en kleine getallen fouten optreden bij het gebruik van numerieke methoden om matrix problemen uit te werken.
- Het stelsel vergelijkingen is dan *slecht geconditioneerd*.
- Om problemen te voorkomen kiezen we het grootste element (in absolute waarde) in de kolom om nullen mee te maken in de rijen.
- De term *partial* in partial pivoting komt van het feit dat je alleen kijkt naar rijen onder het pivot element.

Voorbeeld 3.18

- Gegeven is het volgende stelsel vergelijkingen

$$\left[\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_4 &= -5 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 &= -10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -8 \\ 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 5 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -10 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Leftarrow \text{Rij } 2 \\ \Leftarrow \text{Rij } 1 \\ \\ \\ \end{array}$$

- Bewerk Rij 2 en Rij 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & -10 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \Leftarrow \text{Rij } 2 - \frac{1}{2} \cdot \text{Rij } 1 \\ \Leftarrow \text{Rij } 3 - \frac{1}{2} \cdot \text{Rij } 1 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

Voorbeeld 3.18

- Verwissel Rij 2 en Rij 4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \Leftarrow \text{Rij } 4 \\ \\ \Leftarrow \text{Rij } 2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

- Bewerk Rij 3 en Rij 4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \Leftarrow \text{Rij } 3 - \frac{1}{3}\text{Rij } 2 \\ \Leftarrow \text{Rij } 4 + \frac{1}{3}\text{Rij } 2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -4\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & 1\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Voorbeeld 3.18

- Bewerk Rij 4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -4\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & 1\frac{2}{3} \end{array}\right) \Leftarrow \text{Rij } 4 + \tfrac{5}{23}\text{Rij } 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -4\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{23} & \frac{15}{23} \end{array}\right)$$

- We kunnen nu aflezen dat $x_4 = -5$, tergsubstitutie levert dan $x_3 = 1$, $x_2 = -3$ en $x_1 = 2$
- De determinant van de coëfficiëntendeterminant is dan

$$2 \cdot 3 \cdot -3\frac{5}{6} \cdot -\frac{3}{23} = 3$$

Rijschaling

- Bij veel toepassingen speelt numerieke stabiliteit een belangrijke rol.
- Denk bijvoorbeeld aan algoritmen die in stappen matrix berekeningen moet oplossen zoals bijvoorbeeld het geval is bij optimalisatie problemen.
- In dit soort gevallen is een goede rijschaling belangrijk
- In voorbeeld 3.19 wordt een stelsel vergelijkingen gegeven

$$\left[\begin{array}{ll} x + 10000y & = 10000 \\ x + y & = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 10000 & 10000 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \Leftarrow \text{Rij } 2 - \text{Rij } 1 \end{array}$$

- Het volgt dat $y = \frac{9998}{9999}$ en $x = 1\frac{1}{9999}$
- Numeriek is dit een uitdaging, eerst wat meer over floating point berekeningen

Floating point berekeningen

Defenintie van het type **float**

Een getal in het type float is gedefinieerd als

$$x = m \cdot r^e$$

met daarin

- m, de mantisse, een getal tussen 1.0 en 2.0,
- e, de exponent,
- r, de radix of grondtal, hier 2.

- In de C variant gebruikt in de Arduino (IEEE standaard 754) bestaat de *float* uit 4 bytes met een tekenbit, een 8 bits exponent met bias 127 en een 23 bit mantisse.

Floating point berekeningen: de mantisse

- De mantisse is een getal tussen 1.0 en 2.0 en is afhankelijk van een geometrische reeksontwikkeling in de vorm

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots, a = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$$

- De som S van de reeks convergeert naar een waarde van

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

- Bij een eindige reeks van n getallen is de som S_n

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

- Als alle 23 bits van de mantissa 1 zijn dan volgt

$$1 + \left(1 - 2^{-23}\right) = 1.99999988079071044921875$$

Floating point berekeningen

Een getal als 6.75 wordt als volgt omgezet:

- Schrijf het als een binair getal 110.11_2 (dus $4+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$)
- Normaliseer het getal $110.11_2 \Rightarrow 1.1011_2 \times 2^2$
- Negeer de leading 1 zodat we de fractie 1011_2 overhouden.
- Het resultaat is

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{27}{16} \Rightarrow \frac{27}{16}\times 2^2=\frac{27}{4}=6\tfrac{3}{4}=6.75$$

- De binaire vorm is dus

$$|\ 0\ |\ 1000\ 0001\ |\ 1011\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 000|$$

- De exponent heeft een bias van $+127$ om eventuele negatieve exponenten mogelijk te maken.

Floating point berekeningen

In het voorbeeld hadden we

$$y = \frac{9998}{9999} \Rightarrow y = 0.999899989999000_{10}$$

- Het getal is positief, dus de *signbit* is 0.
- Het gehele getal van y is 0 dus moeten we het getal net zo lang met 2 vermenigvuldigen totdat dit een decimaal getal wordt tussen 1.0 en 2.0.
- Vermenigvuldig 999899989999 met 2 totdat dit getal tenminste gelijk is aan 10^{12}

$$999899989999 \cdot 2 = 1.999799979998000 \times 10^{12}$$

- De exponent is nu -1 zodat het resultaat is

$$0.999899989999 = 1.999799979998 \times 2^{-1}$$

Floating point berekeningen

- De exponent is nu -1 zodat het resultaat is

$$0.999899989999 = 1.999799979998 \times 2^{-1}$$

- We vermenigvuldigen dit getal nu met $2^{24} = 16777216$ zodat het gehele getal 25 bits groot wordt, het resultaat is

$$33551076,221222125568_{10} \Rightarrow 1111111111111001011100100_2$$

- Het 25^{ste} bit is 0 en de $0,221222125568$ is minder dan de helft van 2^0 dus we ronden naar beneden af.
- de exponent met een bias van $+127$ wordt $-1+127 = 126$ of 01111110_2
- Het eindresultaat is dat

$$0 \mid 0111\ 1110 \mid 1111\ 1111\ 1111\ 0010\ 1110\ 010$$

Floating point berekeningen

inholland hogeschool

- Typische numerieke problemen ontstaan bij rationele ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$,...) of transcendente getallen zoals π, e^2,...
- Neem als voorbeeld de code

```c
#include <math.h>
#include <stdio.h>

int main(void)
{
  float foo = 2 * M_PI / 3;
  float bar = 8 * M_PI / 12;

  if (foo == bar) /* Doe dit niet! */
  {
    printf("De getallen zijn gelijk...\n");
  }
  return 0;
}
```

Floating point berekeningen

- Ook constructies met een lus zijn problematisch

```c
#include <math.h>
#include <stdio.h>

int main(void)
{
  float foo;
  float bar = 8 * M_PI / 12;

  for (foo = 0.0; foo != bar; foo += M_PI / 6) /* Doe dit niet! */
  {
    printf("En nog een keer...\n");
  }
  return 0;
}
```

Rijschaling

- Keren we terug naar het voorbeeld maar dan met het float data type

$$\left[\begin{array}{ll} x + 10000y & = 10000 \\ x + y & = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^4 & 1.00 \times 10^4 \\ 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^0 & 2.00 \times 10^0 \end{array}\right) \Leftarrow \mathrm{R2} - \mathrm{R1}$$

- Als we zouden afronden op twee cijfers achter de komma dan komen we op

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^4 & 1.00 \times 10^4 \\ 0.00 \times 10^0 & -1.00 \times 10^4 & -1.00 \times 10^4 \end{array}\right) \Rightarrow y = 1.00 \times 10^0, x = 0.00 \times 10^0$$

- Dit probleem kunnen we oplossen met een combinatie van partial pivoting en rijschaling (dit heet ook wel rijequilibratie).

Partial pivoting en rijschaling

- Deel Rij 1 door het grootste getal dat voorkomt 1.00×10^4. Rij 2 deel je door 1.00×10^0.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^4 & 1.00 \times 10^4 \\ 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^0 & 2.00 \times 10^0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1.00 \times 10^{-4} & 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^0 \\ 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^0 & 2.00 \times 10^0 \end{array}\right)$$

- Verwissel de rijen en gebruik de eliminatiemethode van Gaus (van Rij 2 trek je 10^{-4} keer Rij1 af)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^0 & 2.00 \times 10^0 \\ 1.00 \times 10^{-4} & 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^0 & 2.00 \times 10^0 \\ 0.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^0 & 1.00 \times 10^0 \end{array}\right)$$

- Het resultaat is $y = 1.00 \times 10^0$ en $x = 1.00 \times 10^0$.

3.8 Inverse van een matrix

Inverse van een matrix

- Een vierkante matrix heeft een hoofddiagonaal, als de elementen van de hoofddiagonaal gelijk zijn aan 1 zijn en de andere elementen zijn 0 dan heet de matrix een de eenheidsmatrix.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Voorvermenigvuldigen met een eenheidsmatrix laat een matrix ongewijzigd.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

- Een matrix kan ook een inverse hebben

$$A \cdot A^{-1} = I, \text{ en } A^{-1}A = I$$

Inverse van een matrix

- Bereken de inverse van een matrix

$$\text{Stel } A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ en } A^{-1} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$$

- Volgens de definitie moet dan gelden $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Schrijf het als stelsel vergelijkingen

$$\begin{bmatrix} 5p + 4q = 1 \\ p + 2q = 0 \end{bmatrix} (1) \quad \begin{bmatrix} 5r + 4s = 0 \\ r + 2s = 1 \end{bmatrix} (2)$$

Inverse van een matrix

inholland hogeschool

- Bereken de inverse van een matrix

$$\left[\begin{array}{c} 5p + 4q = 1 \\ p + 2q = 0 \end{array}\right] \text{ geeft } p = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3} \text{ en } q = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{6}$$

$$\left[\begin{array}{c} 5r + 4s = 0 \\ r + 2s = 1 \end{array}\right] \text{ geeft } r = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{3} \text{ en } s = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5}{6}$$

Inverse van een matrix

- Het resultaat is

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Vergelijk A met A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Het valt op dat 5 en 2 zijn gewisseld en dat 1 en 4 van teken wisselen en dat het geheel wordt gedeeld door de determinant.

Inverse van een matrix

- Zetten we de analyse helemaal algebraïsch

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & 5 \end{pmatrix} \text{ en } A \cdot A^{-1} = I$$

- Uitwerken levert

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (1) \left[\begin{array}{l} ap + cq = 1 \\ bp + dq = 0 \end{array} \right. \quad (2) \left[\begin{array}{l} ar + cs = 0 \\ br + ds = 1 \end{array} \right.$$

- Dit kunnen we oplossen met de regel van Cramer

Inverse van een matrix

- Met de regel van Cramer volgt

$$p = \frac{\begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = \frac{d}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \quad q = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = \frac{-b}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}$$

$$r = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = \frac{-c}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \quad s = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = \frac{a}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}$$

- Uiteindelijk volgt dus $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ en $A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

Inverse van een matrix

- Uiteindelijk volgt dus $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ en $A^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$
- De procedure voor het bepalen van de inverse is:

1. Bepaal $\det(A)$; als $\det(A) = 0$, bestaat de inverse niet.
2. Bepaal alle onderdeterminanten en vul die in op de bijbehorende plaats.
3. Spiegel alle elementen in de hoofddiagonaal.
4. Pas het teken aan volgens het schema voor de berekening van een determinant.
5. Deet de nieuwe matrix (en dus alle elementen) door de determinant.

Voorbeeld 3.21

- We bepalen de inverse van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

- Stap 1 bepaal alle 2x2 minoren en zet ze op hun plaats ($-4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = -19$).

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -4 & -3 \\ -4 & -5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} -19 & -10 & -26 \\ 8 & 6 & 2 \\ -5 & -8 & -14 \end{pmatrix}$$

- Stap 2 bepaal de determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot -19 - 2 \cdot 8 - 4 \cdot -5 = -34$$

Voorbeeld 3.21

- Stap 3 Spiegel de hoofddiagonaal

$$\begin{pmatrix} -19 & -10 & -26 \\ 8 & 6 & 2 \\ -5 & -8 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -19 & 8 & -5 \\ -10 & 6 & -8 \\ -26 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

- Stap 4 pas de tekens aan volgens schema en deel door $\det(A)$

$$\begin{pmatrix} -19 & 8 & -5 \\ -10 & 6 & -8 \\ -26 & 2 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -19 & -8 & -5 \\ 10 & 6 & 8 \\ -26 & -2 & -14 \end{pmatrix} \text{ dus } A^{-1} = -\frac{1}{34} \cdot \begin{pmatrix} -19 & -8 & -5 \\ 10 & 6 & 8 \\ -26 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

- Ga door uitschrijven na dat $A \cdot A^{-1} = I$

Toepassing

- Een stelsel vergelijkingen met evenveel vergelijkingen als onbekenden is met vierkante matrix A en vectoren $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{b}$.
- Het volgt dat $A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ en dus omdat $A^{-1}A = I$ volgt $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.
- Het berekenen van de inverse is veel rekenwerk voor grotere matrices.
- Een alternatief is LU-decompositie of de Gauss eliminatiemethode.