Differentiaalvergelijkingen Thema 5

Particuliere oplossingen vinden met de methode van onbekende parameters

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica Opleiding Elektrotechniek

10 december 2024

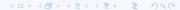




Inhoudsopgave



- Overzicht cursus
 - Vorige week
 - Deze week
- Particuliere oplossing
 - Particuliere oplossing voor gevallen waarin g(x) in de vorm e^{rx} staat
 - Particuliere oplossing voor gevallen waarin g(x) een polynoom is
 - Particuliere oplossing voor gevallen waarin g(x) een goniometrische functie is
 - Particuliere oplossing voor gevallen waarin g(x) een product van twee vormen is



Overzicht cursus



Overzicht cursus



Het vak differentiaalvergelijkingen bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd ALETVT2A Wo
- Deeltijd ALETDT2 Wo

Schriftelijk tentamen:

• huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen



Overzicht stof van vorige week



• Lineaire, Homogene differentiaalvergelijkingen van de tweede orde

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$

• Tweede orde differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten:

$$y'' + by' + cy = 0$$

Drie standaard oplossingen



Overzicht stof van vandaag



- Homogene oplossing $y_{hom} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$
- Particuliere oplossing met de methode van onbekende parameters.
 - $y_p(x) = Ae^{Bx}$
 - $y_p = Ax + B$
 - $y_p = A \sin Cx + B \cos Cx$
- Particuliere oplossing in het geval van dat de g(x) overeen komt met y_{hom}
 - $y_p(x) = Axe^{Bx}$
 - $y_p = Ax^2 + Bx + C$
 - $y_p = Ax \sin Cx + Bx \cos Cx$

Particuliere oplossing





Het bepalen van de algemene oplossing van een differentiaalvergelijking in de vorm

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

kan gedaan worden met behulp van de volgend stappen:

- Bepaal de homogene differentiaalvergelijking door g(x) gelijk aan 0 te stellen.
- Bepaal de homogene oplossing y_{hom} met behulp van $y_{hom} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.
- Bepaal de particuliere oplossing y_{part} door een geschikte vorm te vinden met behulp van de methode van onbekende parameters.
- De algemene oplossing kan nu gevonden worden met $y = y_{hom} + y_{part}$.





- Als g(x) in de vorm e^{rx} staat is een oplossing eenvoudig te vinden
- Los op: $y'' y' 2y = e^{3x}$
- Stap 1, Bepaal de homogene oplossing y_{hom} met behulp van y'' y' 2y = 0
- Met $r^2 r 2 = 0$ en (r+1)(r-2) = 0 volgt

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{2x} \Rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

• Bepaal daarna y_{part} met behulp van

$$y'' - y' - 2y = e^{3x} \Rightarrow \text{ probeer } y_p(x) = Ae^{3x}$$

- Met behulp van $y_p'(x)$ en $y_p''(x)$ volgt $9Ae^{3x} 3Ae^{3x} 2Ae^{3x} = e^{3x}$
- Wegdelen van e^{3x} levert $9A 3A 2A = 1 \Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = 1/4$
- Het volgt dat

$$y_p(x) = \frac{e^{3x}}{4}$$
 en dus met $y = y_h + y_p$ volgt $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{e^{3x}}{4}$





- Als g(x) een polynoom is kan de particuliere oplossing y_{part} worden gevonden door een polynoom van de zelfde orde.
- Voorbeeld: Los op $y'' = 9x^2 + 2x 1$, y(0) = 1, y'(0) = 3
- De homogene oplossing wordt gevonden met y''=0 en is $y'=c_1$ waarmee volgt

$$y_h = c_1 x + c_2$$

De particuliere oplossing kan dan de vorm hebben

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Combineer de homogene en particuliere oplossingen

$$y_h = c_1 x + c_2$$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y = y_h + y_p = Ax^2 + (c_1 + B)x + (c_2 + C)$$



• De constanten B en C in de vergelijking

$$y = Ax^2 + (c_1 + B)x + (c_2 + C)$$

voegen weinig toe.

• De oplossing is het vermenigvuldigen van y_p met x totdat er genoeg vrijheidsgraden ontstaan

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$
 of $y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

In het laatste geval volgt

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$
 invullen in $y'' = 9x^2 + 2x - 1$

Voor y_p volgt dan

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C = 9x^2 + 2x - 1$$





• Door y_p te vermenigvuldigen met x^2 en dan twee keer te differentieren volgt

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C = 9x^2 + 2x - 1$$

Waarna A, B en C kunnen worden bepaald

$$12A = 9$$
 $A = 3/4$
 $6B = 2$ $\Rightarrow B = 1/3$
 $2C = -1$ $C = -1/2$

En dus

$$y_p = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

Het volgt uiteindelijk dat

$$y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 + \frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2$$





• De algemene oplossing $y = y_h + y_p$ is nu

$$y = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

• Met begincondities y(0) = 1, y'(0) = 3 en afgeleide y' volgt

$$y(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2 \Rightarrow y(0) = C_2 = 1$$

$$y'(x) = 3x^3 + x^2 - x + c_1 \Rightarrow y(0) = C_1 = 3$$

De specifieke oplossing wordt hiermee

$$y = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$$





Differentiaalvergelijkingen in de vorm

$$y'' - y' - 2y = \sin 2x$$

 kunnen worden opgelost met behulp van een goniometrische vergelijking in de vorm

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$$

in dit voorbeeld volgt

$$y'_p = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$

$$y''_p = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

Invullen levert

$$(-6A + 2B)\sin 2x + (-6B - 2A)\cos 2x = \sin 2x$$





• Uit de vergelijking $(-6A + 2B) \sin 2x + (-6B - 2A) \cos 2x = \sin 2x$ volgt

$$\begin{vmatrix}
-6A + 2B & = 1 \\
-2A - 6B & = 0
\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}
-6A + 2B & = 1 \\
6A + 18B & = 0 \\
\hline
20B & = 1
\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}
B = \frac{1}{20} \\
A = -\frac{3}{20}
\end{vmatrix}$$

De particuliere oplossing is

$$y_p = \frac{-3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$$



- Voorbeeld : Los op $y'' + 16y = 4\cos 4x$
- De particuliere oplossing is weer $y_p = A \cos 4x + B \sin 4x$ in dit voorbeeld volgt

$$y_p' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$$

$$y_p'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$$

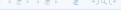
Invullen levert

$$(16A - 16A)\cos 4x + (16B - 16B)\sin 4x = 4\cos 4x$$

- Het blijkt dat er geen oplossing is.
- Om te zien hoe dit kan moeten we de homogene oplossing bekijken

$$y'' + 16y = 0 \Rightarrow y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$$

• De homogene oplossing is dus identiek aan de particuliere oplossing





ullet Een oplossing voor dit probleem is het introduceren van een x in de vergelijking

$$y_p = Ax \cos 4x + Bx \sin 4x$$

in dit voorbeeld volgt dan via de productregel

$$y'_{p} = A\cos 4x - 4Ax\sin 4x + B\sin 4x + 4Bx\cos 4x$$

$$y''_{p} = -4A\sin 4x - 4A\sin 4x - 16Ax\cos 4x + 4B\cos 4x + 4B\cos 4x - 16Bx\sin 4x$$

invullen van de vergelijking levert dan

$$-4A \sin 4x - 4A \sin 4x - 16Ax \cos 4x + 4B \cos 4x + 4B \cos 4x$$
$$-16Bx \sin 4x + 16Ax \cos 4x + 16Bx \sin 4x = 4 \cos 4x$$

• Door de productregel ontstaan termen die wegvallen tegen elkaar xodat overblijft

$$-8A\sin 4x + 8B\cos 4x = 4\cos 4x \Rightarrow A = 0, \quad B = \frac{1}{2}$$





• De uiteindelijke particuliere oplossing wordt dan

$$y_p = \frac{1}{2}x\sin 4x$$

 Combineren we dit resultaat met de homogene oplossing dan volgt de algemene oplossing

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x + \frac{x}{2} \sin 4x$$



• Als g(x) een product is van twee verschillende vormen zoals in het voorbeeld

$$4y'' + y = 5e^x \cos 2x$$

• Zal de particuliere oplossing een soortgelijke mengvorm hebben

$$y_p = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x$$

In dit geval volgt

$$y'_{p} = Ae^{x} \cos 2x - 2Ae^{x} \sin 2x + Be^{x} \sin 2x + 2Be^{x} \cos 2x$$

$$y''_{p} = Ae^{x} \cos 2x - 2Ae^{x} \sin 2x - 2Ae^{x} \sin 2x - 4Ae^{x} \cos 2x + Be^{x} \sin 2x + 2Be^{x}$$

$$\cos 2x + 2Be^{x} \cos 2x - 4Be^{x} \sin 2x$$

• in de tweede vergelijking kunnen termen gecombineerd worden tot

$$y_p'' = -3Ae^x \cos 2x - 4Ae^x \sin 2x - 3Be^x \sin 2x + 4Be^x \cos 2x$$
$$= e^x \cos 2x (-3A + 4B) + e^x \sin 2x (-4A - 3B)$$



Invullen levert

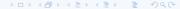
$$4(-3Ae^{x}\cos 2x - 4Ae^{x}\sin 2x - 3Be^{x}\sin 2x + 4Be^{x}\cos 2x) + (Ae^{x}\cos 2x + Be^{x}\sin 2x) = 5e^{x}\cos 2x$$

Het bij elkaar zetten van de gonio termen levert

$$-12Ae^{x}\cos 2x - 16Ae^{x}\sin 2x - 12Be^{x}\sin 2x + 16Be^{x}\cos 2x + Ae^{x}\cos 2x + Be^{x}\sin 2x = 5e^{x}\cos 2x$$

uiteindelijk volgt

$$(-11A + 16B)e^x \cos 2x + (-16A - 11B)e^x \sin 2x = 5e^x \cos 2x$$





Invullen levert

$$-11A + 16B = 5
-16A - 11B = 0$$

• Hieruit volgt dat A = -11B/16 en volgt dat

De uiteindelijke particulier oplossing wordt

$$y_p = \frac{-11}{27} e^x \cos 2x + \frac{16}{27} e^x \sin 2x$$