Lineaire Algebra Thema 2

Lineaire afbeeldingen

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

16 september 2024

Inhoudsopgave

1. Overzicht cursus
2. 3.3 Lineaire Afbeeldingen
3. Determinanten

Overzicht cursus

Overzicht cursus

Het vak Lineaire Algebra bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd ALETVT2A (ma 12:30 op ...)
- Deeltijd ALETDT2 (wo 14:00 op ...)

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

Overzicht cursus (onder voorbehoud)

- Thema 1, 3.1 Vectoren, 3.2 Matrices
- Thema 2, 3.3 Lineaire afbeeldingen, 3.4 Determinanten
- Thema 3, 3.5 Regel van Cramer 3.6 Methode van Gauss
- Thema 4, 3.7 Pivotting en Rijschaling 3.8 Inverse matrix
- Thema 5, 3.9 Gauss-Jordan eliminatie 3.10 LU decompositie
- Thema 6, 3.10 Eigenwaarden en Eigenvectoren.
- Thema 7, Tentamen voorbereiding

Overzicht stof van vandaag

- Paragraaf 3.3 Lineaire afbeeldingen
- Paragraaf 3.4 Determinanten

3.3 Lineaire Afbeeldingen

Lineaire Afbeeldingen

- Een **lineaire afbeelding** $\boldsymbol{A}$ van *vectorruimte* $\mathbb{R}^n$ naar *vectorruimte* $\mathbb{R}^m$ is een voorschrift dat aan de volgende twee voorwaarden voldoet

$$\mathbf{A}(x+y) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{A}(y)$$
$$\mathbf{A}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \mathbf{A}(\boldsymbol{x})$$

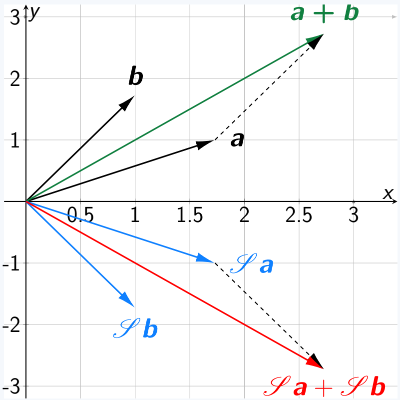
- Bij lineaire afbeeldingen maakt het dus niet uit welke bewerking je eerst uitvoert.
- Afbeelden en dan optellen is hetzelfde als optellen en dan afbeelden.
- Afbeelden en vermenigvuldigen met een scalar is hetzelfde als vermenigvuldigen en dan afbeelden.

Lineaire afbeeldingen: voorbeeld 3.4

- De spiegeling van een vector in de x-as is een *lineaire afbeelding* $\boldsymbol{S}$.
- Optellen van twee vectoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en spiegelen levert hetzelfde resultaat als het optellen van de gespiegelde vectoren $\mathscr{S}\boldsymbol{a}$ en $\mathscr{S}\boldsymbol{b}$.
- Dit is de eigenschap

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{b})$$

Spiegeling in x-as

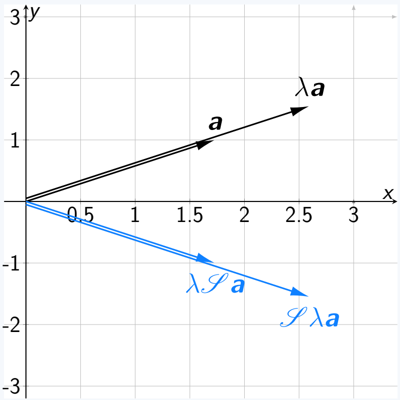


Lineaire afbeeldingen: voorbeeld 3.4

- De spiegeling van een vector in de x-as is een *lineaire afbeelding* $\boldsymbol{S}$.
- Vermenigvuldigen van een vector $\boldsymbol{a}$ met een scalar λ en spiegelen levert hetzelfde resultaat als het vermenigvuldigen van de gespiegelde vectoren $\mathscr{S}(\boldsymbol{a})$ met de scalar λ.
- Dit is de eigenschap

$$\lambda \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{S}(\lambda \boldsymbol{a})$$

Spiegeling in x-as



Lineaire Afbeeldingen

- Bij een lineaire afbeelding hoort een matrix.
- In het geval van spiegeling om de x-as is dit de matrix

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- In de eerste kolom staat het beeld van $\boldsymbol{e}_1$. Deze vector verandert niet bij spiegeling in de x-as.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- In de tweede kolom staat het beeld van $\boldsymbol{e}_2$ deze vector verandert in zijn tegengestelde omdat de y-coördinaat overgaat in zijn tegengestelde bij spiegeling.

Lineaire Afbeeldingen

- Met de lineairiteit van $\boldsymbol{S}$ volgt
- In het geval van spiegeling om de x-as is dit de matrix

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} &= \boldsymbol{S}\left(3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\right)\\ &= 3\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{e}_1\right) + 4\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{e}_2\right)\\ &= 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

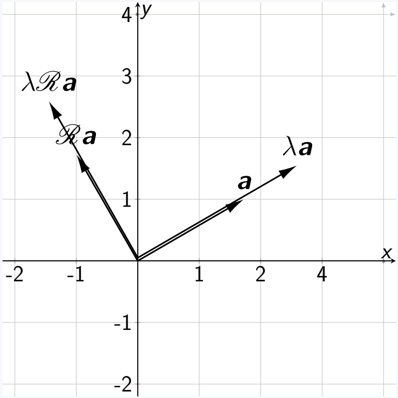
- Hetzelfde resultaat volgt bij een matrixvermenigvuldiging

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

Lineaire afbeeldingen: voorbeeld 3.5

- Een rotatie van een vector over de oorsprong O is een *lineaire afbeelding*.
- Eerst verminigvuldigen en dan draaien heeft het zelfde effect als eerst draaien en dan vermenigvuldigen.
- Dit is de eigenschap $\mathscr{R}(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \mathscr{R} \boldsymbol{a}$.

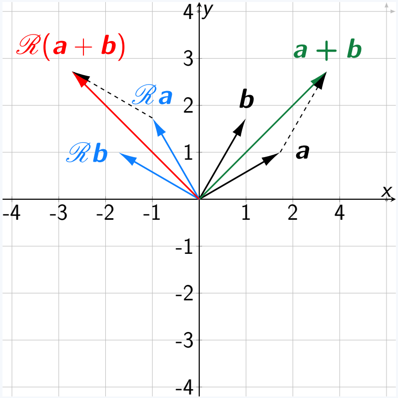
Rotatie om de oorsprong



Lineaire afbeeldingen: voorbeeld 3.5

- Een rotatie van een vector over de oorsprong O is een *lineaire afbeelding*.
- Optellen van twee vectoren $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ en daarna roteren is hetzelfde als eerst roteren en daarna $\mathscr{R}\boldsymbol{a}$ optellen $\mathscr{R}\boldsymbol{b}$.
- Dit is de eigenschap $\mathscr{R}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathscr{R}\boldsymbol{a} + \mathscr{R}\boldsymbol{b}$.

Rotatie om de oorsprong



Lineaire afbeeldingen: voorbeeld 3.5

- De matrix die bij een rotatie over hoek φ over de oorsprong hoort is

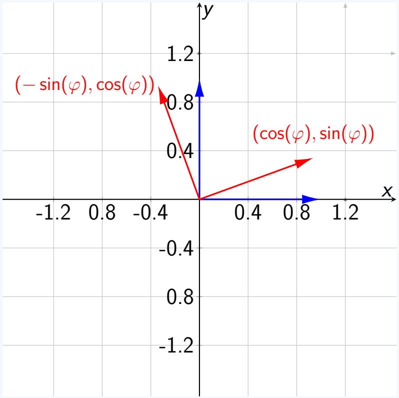
$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

- De beelden van $\boldsymbol{e}_1$ en $\boldsymbol{e}_2$ zijn

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Rotatie om de oorsprong



Lineaire Afbeeldingen

- In het algemeen geldt dat bij een afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$ een matrix van $m \times n$ hoort.
- Als twee afbeeldingen na elkaar uitgevoerd worden dan is er sprake van een *samenstelling* van twee afbeeldingen.
- Bij een samenstelling van twee afbeeldingen hoort een product van twee matrices.
- In het geval van spiegeling om de x-as in combinatie met een rotatie om de oorsprong wordt dit

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

- Het resultaat is afhankelijk van de volgorde

$$SR = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}, RS = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

De kern van een lineaire afbeelding

De kern van een Lineaire afbeelding

De **kern** van een lineaire afbeelding bestaat uit de verzameling vectoren die afgebeeld wordt op de nulvector

- Om de kern van een matrix te vinden moeten we dus zoeken naar oplossingen $\boldsymbol{b}$ van de vergelijking $\boldsymbol{Ab} = \mathbf{0}$
- Voorbeeld, vind de oplossing (x, y, z) waarvoor geldt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} -y + 2z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ x - 2y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

De kern van een matrix: voorbeeld

- Voorbeeld, vind de oplossing (x, y, z) waarvoor geldt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} -y + 2z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ x - 2y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

- Deze drie vergelijkingen zijn vlakken in $\mathbb{R}^3$ en moeten tegelijkertijd waar zijn.
- Het is onmiddellijk duidelijk dat $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ een oplossing is.
- Vullen we $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$ in dan volgt dat dit eveneens een oplossing is.
- We zeggen dan dat de matrix de vector afbeeldt op de nulvector.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De kern van een matrix: het vinden van een oplossing

- Verwissel rij 1 en rij 3 zodat volgt

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Trek rij 1 af van rij 2 zodat $r_2 \to r_2 - r_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Deel rij door 2 en tel deze op bij rij 3 $r_3 \to r_3 - \frac{1}{2} r_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

De kern van een matrix

- Tel rij 2 op bij rij 1 $r_1 \to r_1 + r_2$ en deel rij 2 door 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Uiteindelijk houden we over $x + z = 0$ en $y - 2z = 0$ en $z = z$
- De vector voorstelling van deze twee vergelijkingen is

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Dit is een vergelijking van een lijn in $\mathbb{R}^3$.

De kern van een matrix

- Een andere manier om er tegenaan te kijken is het omwerken van de drie vergelijkingen naar een vector notatie
- We kunnen dit doen door te stellen dat $\lambda = x$, $\mu = y$ en vervolgens de vergelijking om te schrijven. Voor $x - 2y + 5z = 0$ volgt dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

- Dit is een vectorvergelijking van een vlak in $\mathbb{R}^3$ opgespannen door twee basisvectoren.

De kern van een matrix: voorbeeld

- Voor de vergelijking om te schrijven. Voor $-y+2z=0$ volgt dan

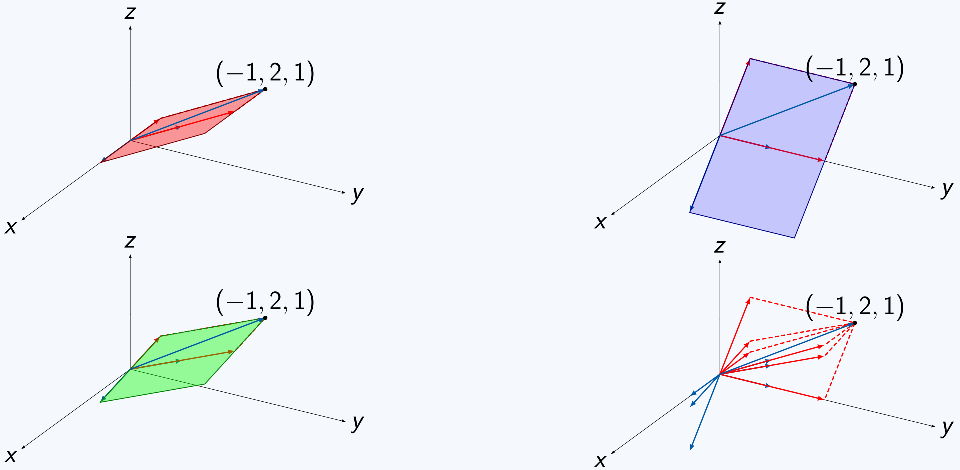
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Voor de vergelijking om te schrijven. Voor $x+z=0$ volgt dan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Vul $\lambda=-1$ en $\mu=2$ in en we vinden het punt (-1,2,1).

Voorbeeld Kern van de Matrix: voorbeeld



De kern van een matrix: voorbeeld

- Bereken de normaal vector van het vlak $x - 2y + 5z = 0$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \left(0 \cdot \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{5} \cdot 1\right)\mathbf{e}_x - \left(1 \cdot \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{5} \cdot 0\right)\mathbf{e}_y + \left(-1 \cdot 1 + \tfrac{1}{5} \cdot 0\right)\mathbf{e}_z$$

- Bereken de normaal vector van het vlak $-y + 2z = 0$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(0 \cdot \tfrac{1}{2} - 0 \cdot 1\right)\mathbf{e}_x - \left(1 \cdot \tfrac{1}{2} - 0 \cdot 0\right)\mathbf{e}_y + (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0)\,\mathbf{e}_z$$

- Bereken de normaal vector van het vlak $x + z = 0$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 \cdot 0 + 1 \cdot 1)\,\mathbf{e}_x - (1 \cdot 0 + 1 \cdot 1)\,\mathbf{e}_y + (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0)\,\mathbf{e}_z$$

De kern van een matrix: voorbeeld

- Het resultaat van de berekening is

$$n_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } n_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Het is makkelijk om dit te schrijven als

$$n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } n_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Deze vectoren zijn onafhankelijk dus de vlakken zijn niet evenwijdig of vallen samen.

De kern van een matrix: voorbeeld

- Bereken het uitproduct van de normaalvector n_1 en de vector (-1,2,1)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 + 5 \cdot 2)\,\mathbf{e}_x - (1 \cdot 1 + 5 \cdot -1)\,\mathbf{e}_y + (1 \cdot 2 + 2 \cdot -1)\,\mathbf{e}_z$$

- Bereken het uitproduct van de normaalvector n_2 en de vector (-1,2,1)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3 \cdot 1 - 2 \cdot 2)\,\mathbf{e}_x - (0 \cdot 1 - 2 \cdot -1)\,\mathbf{e}_y + (0 \cdot 2 + 3 \cdot -1)\,\mathbf{e}_z$$

- Bereken het uitproduct van de normaalvector n_3 en de vector (-1,2,1)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2)\,\mathbf{e}_x - (1 \cdot 1 - 1 \cdot -1)\,\mathbf{e}_y + (1 \cdot 2 + 1 \cdot -1)\,\mathbf{e}_z$$

De kern van een matrix: voorbeeld

- De drie vergelijkingen kunnen in vector vorm geschreven worden als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Het blijkt nu dat de drie vlakken een gezamenlijke basisvector hebben.
- Met de kern van de matrix wordt hier dus een lijn aangegeven die in alle drie vlakken ligt

De kern van een matrix: voorbeeld 3.6

- Bij een rotatie om de oorsprong bestaat de kern alleen uit de oorsprong

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

- Dit geldt ook voor spiegeling in de x-as

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Bij projectie van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^2$ worden de punten op de z-as op de nulvector geprojecteerd. Deze vormen dus de kern van de afbeelding.

Dekpunt

Een dekpunt van een Lineaire afbeelding

Een **dekpunt** van een lineaire afbeelding bestaat is een punt dat afgebeeld wordt op zichzelf.

- in $\mathbb{R}^2$ zijn bij een spiegeling in de x-as alle punten op de x-as dekpunten.
- Bij rotatie over een veelvoud van 360^o zijn alle punten dekpunten
- Bij loodrechte projectie van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^2$ worden alle punten in het $x-y$ vlak met $z=0$ dekpunten

Determinanten

Determinanten

- Stelsels vergelijkingen hebben vaak maar een enkele oplossing.
- Soms doen zich problemen voor en is er meer dan één oplossing of is er geen enkele oplossing
- Denk aan twee lijnen die evenwijdig lopen of juist samenvallen.
- Neem als voorbeeld een stelsel met evenwijdige lijnen

$$\left[\begin{array}{r} 3x+y=4 \\ 6x+2y=8 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- in dit soort gevallen kan met behulp van de **determinant** van een matrix de problemen onderkend worden

Determinanten

De determinant van een 2×2 matrix

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- in het voorgaande geval wordt dit

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 0$$

- Bij een determinant van 0 heb je twee rijen die **afhankelijk** van elkaar zijn.
- Een matrix met een determinant van 0 heet **singulier**.
- Een matrix met een determinant die ongelijk is aan 0 het **regulier**, er is dan maar één oplossing.

Determinanten, 3×3 matrices

- De determinant van een 3×3 matrix bereken je met

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 15 - 5 \cdot 18 - 1 \cdot -14 = -46$$

- De berekening loopt via **onderdeterminanten** of **minoren** Let op dat je rekening moet houden met tekenwisselingen

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Determinanten, 3×3 matrices

- Je mag ook de volgorde veranderen

$$\begin{vmatrix} \color{red}{2} & \color{blue}{4} & \color{green}{2} \\ 5 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \color{red}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - \color{blue}{4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \color{green}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \color{red}{2} \cdot 15 - \color{blue}{4} \cdot 27 + \color{green}{2} \cdot 16 = -46$$

- Meetkundig heeft uitkomst van de determinant van een 2×2 matrix de interpretatie van het oppervlak van het parallellogram opgespannen door de twee kolomvectoren
- Meetkundig heeft uitkomst van de determinant van een 3×3 matrix de interpretatie van het inhoud van het parallellepipedum opgespannen door de twee kolomvectoren

Determinanten: Eigenschappen

1. Bij het verwisselen van twee rijen of twee kolommen, wisselt $|A|$ van teken.
2. Als je een rij of kolom met λ vermenigvuldigt, wordt de determinant ook met λ vermenigvuldigd.
3. Als een rij of kolom alleen nullen bevat of twee rijen of kolommen zijn evenredig, dan is de determinant gelijk aan nul.
4. Als een veelvoud van een rij (kolom) bij een andere rij (kolom) opgeteld wordt, verandert een determinant niet van waarde.
5. Als cen determinant twee gelljke rijen of kolommen heeft, dan is $|A| = 0$.
6. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
7. De determinant van een drichoeksmatrix is gelijk aan het product van de diagonaalelementen.

Determinanten: Eigenschappen

- De **hoofddiagonaal** van een vierkante matrix loopt van linksboven naar rechtsonder

$$\begin{vmatrix} \color{red}{2} & 4 & 2 \\ 5 & \color{red}{1} & -3 \\ -1 & 3 & \color{red}{6} \end{vmatrix}$$

- Een **driehoeksmatrix** heeft onder of boven de hoofddiagonaal uitsluitend nullen

$$\begin{vmatrix} \color{red}{2} & \color{red}{4} & \color{red}{2} \\ 5 & \color{red}{1} & \color{red}{-3} \\ -1 & 3 & \color{red}{6} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$