Differentiaalvergelijkingen Thema 2

Het oplossen van eerste orde differentiaalvergelijkingen met- en zonder y-termen

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

20 november 2024

Inhoudsopgave

Overzicht cursus

Overzicht cursus

Het vak differentiaalvergelijkingen bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

Vandaag

Overzicht stof van vandaag

- Eerste orde differentiaalvergelijkingen zonder y-termen

$$\frac{dy}{dx} = q(x)$$

- Eerste orde differentiaalvergelijkingen met y-termen

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x)$$

- Scheiden van variabelen $dy = q(x)dx \Rightarrow \int dy = \int q(x)dx$
- Integrerende factor

Eerste orde differentiaalvergelijkingen zonder y-termen

Eerste orde differentiaalvergelijkingen zonder y-temen

- Eerste orde differentiaalvergelijkingen met een constante zijn op te lossen met

$$\frac{dy}{dt} = a \Rightarrow \int_{y_0}^{y} dy = \int_{t_0}^{t} adt \Rightarrow y - y_0 = at - at_0$$

- Combineer de termen zodat $c = y_0 - at_0$ om een algemene oplossing te vinden

$$y = at + c$$

- De waarde van c is altijd te bepalen uit de begincondities $y(0)$.

Eerste orde differentiaalvergelijkingen zonder y-temen

- Eerste orde differentiaalvergelijkingen van de eerste graad in de vorm:

$$\frac{dy}{dx} = q(x)$$

- Deze zijn op te lossen door linker- en rechterlid te vermenigvuldigen met dx

$$dy = q(x)dx$$

- De oplossing volgt uit het integreren (*primitiveren*) van het linker- en rechterlid

$$\int dy = \int q(x)dx \Rightarrow y = \int q(x)dx$$

Eerste orde differentiaalvergelijkingen zonder y-temen

Voorbeeld 1:

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - 3x^2 + x, \quad y(0) = 3$$

linkerlid en rechterlid vermenigvuldigen met dx levert

$$dy = x^3 dx - 3x^2 dx + x dx \Rightarrow \int dy = \int x^3 dx - 3\int x^2 dx + \int x dx$$

Los de integralen op

$$\int dy = \int x^3 \left(\frac{dx^4}{dx^4}\right) dx - 3\int x^2 \left(\frac{dx^3}{dx^3}\right) dx \int x \left(\frac{dx^2}{dx^2}\right) dx \Rightarrow y = \tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + C$$

waarna met $y(0) = 3$ volgt dat $C = 3$ en dus

$$y = \tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 3$$

Eerste orde differentiaalvergelijkingen zonder y-temen

Voorbeeld 2:

$$\frac{dy}{dx} = cos^2(x), \quad y(0) = 1$$

linkerlid en rechterlid vermenigvuldigen met dx levert

$$dy = cos^2(x)dx \Rightarrow \int dy = \int \cos^2(x)dx$$

Los de integralen op door gebruik te maken van

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \Rightarrow \cos^2(x) = \cos(2x) + \sin^2(x)$$

en

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1 \Rightarrow sin^2(x) = 1 - cos^2(x)$$

zodat

$$\cos^2(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

Eerste orde differentiaalvergelijkingen zonder y-temen

Integreren wordt nu makkelijk met

$$\int dy = \int \cos^2(x)dx = \int \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)dx$$

waar uit volgt

$$\int dy = \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{2}\int \cos(2x)\frac{d\sin(2x)}{d\sin(2x)}dx = \tfrac{1}{2}\int dx + \tfrac{1}{4}\int d\sin(2x)$$

zodat uiteindelijk

$$y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin(2x) + C$$

met $y(0) = 1$ volgt

$$y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin(2x) + 1$$

Trucje

Goniometrische formules zijn soms lastig te onthouden:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Je kan ze echter gemakkelijk afleiden met Euler $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ waarmee volgt

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \tag{1}$$

$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \tag{2}$$

Het rechterlid van (2) uitwerken levert

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)i\sin(\beta) + i\sin(\alpha)\cos(\beta) + i\sin(\alpha)i\sin(\beta)$$

waarna met het reële deel van het rechterlid van (1) en (2) volgt

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Afsluitend

- Differentiaalvergelijkingen in de vorm

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

  zijn eenvoudig op te lossen als $g(x)$ makkelijk te integreren is.
- Controleer de uitkomst eventueel door de vergelijking $y(x)$ weer te differentiëren en te vergelijken met $g(x)$.
- Controleer de begin- of randvoorwaarden door deze in te vullen in de vergelijking.

Eerste orde differentiaalvergelijkingen met y-termen

Eerste orde differentiaalvergelijkingen met y-termen

- Een differentiaalvergelijking met de vorm

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = g(x)$$

- heeft een extra y-term in combinatie met een coëfficiënt $p(x)$ waarbij $p(x)$ onafhankelijk is van de *afhankelijke* variabele y.
- Veel differentiaalvergelijkingen in deze vorm kunnen worden opgelost door gebruik te maken van de *productregel* eventueel in combinatie met de *kettingregel*.
- Deze oplossingsmethode maakt gebruik van een *Integrerende factor*.

Integrerende factor

Schrijf de differentiaalvergelijking (DV) in standaard vorm:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = g(x), y\left(x_0\right) = y_0$$

zodat de eerste term $\frac{dy}{dx}$, met een coëfficiënt 1 en de tweede term in de vorm $p(x) \cdot y$.

- Construeer de *integrerende factor*: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ waarna volgt

$$\frac{d\mu(x)}{dx} \xrightarrow{\text{kettingregel}} \frac{de^{\int p(x)dx}}{dx} = \frac{de^{\int p(x)dx}}{d\int p(x)dx} \cdot \frac{d\int p(x)dx}{dx} = \mu(x) \cdot p(x)$$

- Vermenigvuldig beide zijden van de DV met de integrerende factor $\mu(x)$.

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x) \cdot p(x) \cdot y = \mu(x) \cdot g(x) \Rightarrow \mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx} \cdot y = \mu(x) \cdot g(x)$$

Integrerende factor

inholland hogeschool

Met dit resultaat volgt dus

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)\cdot p(x)\cdot y = \mu(x)\cdot g(x) \xrightarrow[\textit{productregel}]{\text{ketting- en}} \frac{d(\mu(x)\cdot y)}{dx} = \mu(x)\cdot g(x)$$

- Breng het resultaat nu naar de vorm

$$\frac{d(\mu(x)\cdot y)}{dx} = \mu(x)\cdot g(x) \Rightarrow d(\mu(x)\cdot y) = \mu(x)\cdot g(x)dx$$

- Integreer beide zijden en deel door $\mu(x)$:

$$\mu(x)\cdot y = \int \mu(x)\cdot g(x)dx + C \Rightarrow y = \frac{\int g(x)\cdot\mu(x)dx + C}{\mu(x)}$$

Voorbeeld 1

Los op:

$$dy + 3ydx = 9dx, \quad y(0) = 7$$

schrijf in de standaard vorm

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 9 \qquad p(x) = 3, \quad g(x) = 9$$

Introduceer de integrerende factor

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)3y = \mu(x)9$$

Het linkerlid lijkt op de productregel als

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 3\mu(x)$$

Voorbeeld 1

Het volgt dat

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 3\mu(x) \Rightarrow \frac{\frac{d\mu(x)}{dx}}{\mu(x)} = 3 \Rightarrow \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = 3dx \Rightarrow \int \frac{1}{\mu(x)} d\mu(x) = \int 3dx$$

Waarmee de integrende factor wordt

$$\ln|\mu(x)| = 3x + C \Rightarrow \mu(x) = Ce^{3x}$$

invullen

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)3y = \mu(x)9 \Rightarrow Ce^{3x}\frac{dy}{dx} + Ce^{3x}3y = Ce^{3x}9$$

Kies C=1 en gebruik de productregel

$$\frac{de^{3x}y}{dx} = 9e^{3x}$$

Voorbeeld 1

Het is nu makkelijk om de vergelijking te integreren

$$\frac{de^{3x}y}{dx} = 9e^{3x} \Rightarrow \int d(e^{3x}y) = \int 9e^{3x}dx \Rightarrow e^{3x}y = 3e^{3x} + C$$

Het volgt nu dat

$$y = 3 + Ce^{-3x}$$

waarna met $y(0) = 7$ volgt dat $C = 4$

$$y = 3 + 4e^{-3x}$$

Voorbeeld 2

Los op:

$$3yx^2dx + x^3dy = e^x dx$$

schrijf in de standaard vorm en bepaal de integrerende factor

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^3} \qquad p(x) = \frac{3}{x}, \quad g(x) = \frac{e^x}{x^3} \Rightarrow \mu(x) = e^{3\int \frac{1}{x}dx}$$

Waarmee volgt

$$\mu(x) = e^{3\int \frac{1}{x}dx} = e^{3\ln(x)+C_1} = \left(e^{\ln(x)+C_1}\right)^3 = C_1x^3$$

en dus

$$y = \frac{C_1 \int \frac{e^x}{x^3}x^3dx + C_2}{C_1x^3} = \frac{e^x}{x^3} + C_2$$

Voorbeeld 2

Controle: $y = \frac{e^x}{x^3} + C_2, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 \cdot e^x - e^x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{e^x}{x^3} - \frac{3e^x}{x^4}$

invullen levert:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^3} \Rightarrow \frac{e^x}{x^3} - \frac{3e^x}{x^4} + \frac{3e^x}{x^4} + \frac{3C_2}{x} = \frac{e^x}{x^3}$$

waaruit blijkt dat $C_2 = 0$ en dus dat:

$$y = \frac{e^x}{x^3}$$

Oefeningen

Oefeningen

- Los op:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = e^t$$

- Los op:

$$\frac{dy}{dt} = 4y - 20, \quad y(0) = 16$$

- Los op:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x+1} = (x+1)^4$$

- Los op:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{\sin x}{x^2}$$