Wiskunde 13/14

Jan van Hulzen / Liv Harkes

November 12th 2012 version 1.0

Markov chains

Markov ketens

Organisatie van de cursus

Week	50 min	100 min	100 min	
1	HC	PR	ZS	Opdracht 1
2	HC	PR	ZS	
3	HC	PR	ZS	Opdracht 2
4	HC	PR	ZS	
5		PR	ZS	Opdracht 3
6		PR	ZS	
7		PR	ZS	

Opdrachten

- Opdracht 1
  - Markov ketens, Analyse & strategie Monopoly
- Opdracht 2
  - Toepassing Markov ketens
- Opdracht 3
  - Wachtrijen

- De opdrachten worden nog steeds met een gehele groep gedaan
  - Meer individueel uitvoerbare onderdelen
  - Focus nog steeds op begrip, minder op mathematica code

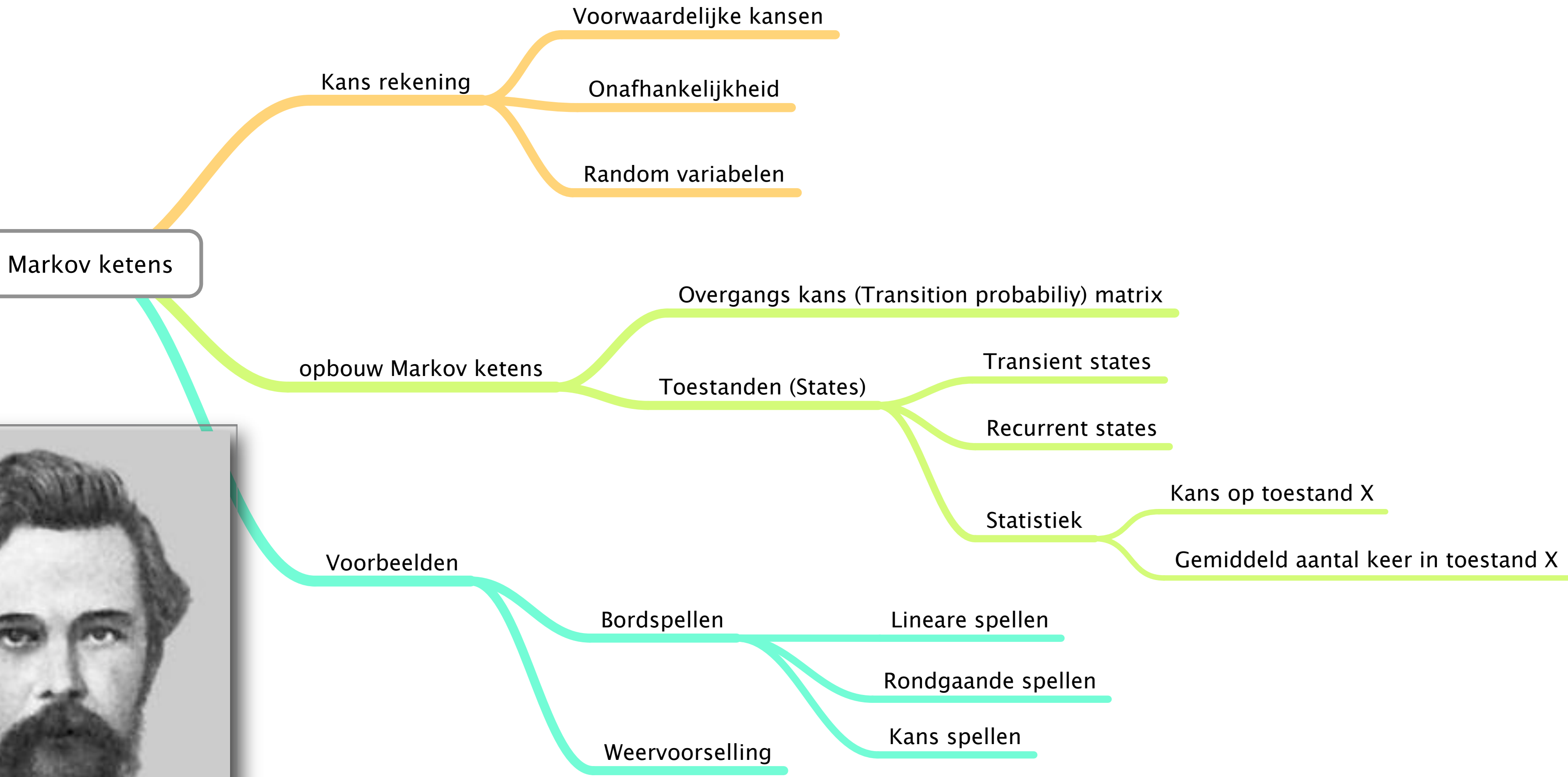
Beoordeling

- Het verslag wordt beoordeeld op :
  - De kwaliteit van het onderzoek,
  - De kwaliteit en formulering van de verslaglegging
    - Vaste elementen bevatten de juiste informatie (samenvatting, inleiding, methode omschrijving, resultaten, conclusie).
    - Redeneringen hebben de observatie-conclusie structuur
    - Nederlands is correct (met name de opbouw van de zinnen)
- Het cijfer wordt gemiddeld over alle verslagen

Leerdoelen

- De student is in staat om
  - Een kansproces in wiskundige termen te formuleren.
  - Het in wiskundige termen geformuleerde model te programmeren in een wiskundig pakket (mathematica).
  - De resultaten te analyseren.
  - Het in wiskundige termen geformuleerde antwoord te vertalen naar een in algemene termen geformuleerd advies en dit vast te leggen in een verslag.

Overzicht



Andrey Andreyevich
Markov
1856-1922

Afhankelijke kansen

- A en B zijn twee gebeurtenissen
- P(A|B) is de kans dat op gebeurtenis A als gegeven is dat B heeft plaatsgevonden
- P(A|B)= P(A en B) / P(B)

- Voorbeeld
  - Trek 5 kaarten uit de stapel
  - Wat is de kans dat de vijfde kaart een aas is als gegeven is dat de eerste vier kaarten allemaal een azen waren?
  - P(5e kaart is een aas|de eerste vier kaarten zijn een aas)=0

Onafhankelijkheid

- Als $P(A|B) = P(A)$, dan is de wetenschap dat B heeft plaatsgevonden niet van invloed als de afhankelijkheid op A wordt uitgerekend.

- Voorbeeld :

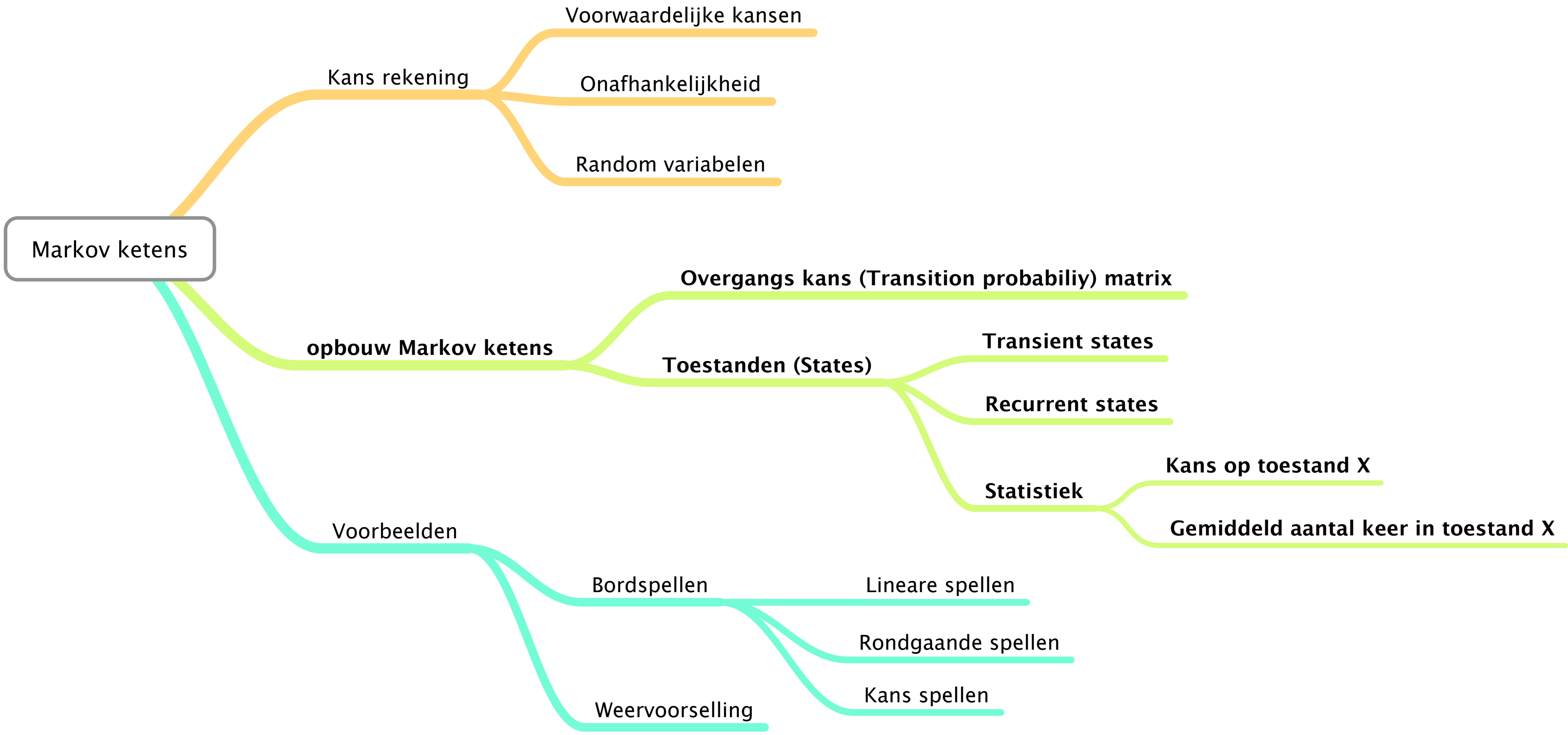
  - A is een worp met een dobbelsteen
  - B is het opgooien van een munt
  - $P(A|B)=P(A)$
  - $P(B|A)=P(B)$

- Conclusie $P(A \text{ en } B)=P(A)*P(B)$

Random variabelen

- Een **random variabele** is een random generator
- Bij voorbeeld:
  - Gooi twee dobbelstenen, X = aantal ogen
  - Gooi 10 munten op, X = aantal keer munt
- Omdat random variabelen **gebeurtenissen** beschrijven kunnen ze gebruikt worden in combinatie met voorwaardelijke kansen
- Een waargenomen uitkomst heet ook wel realisatie van de random variabele

Overzicht : opbouw Markov ketens



Markov ketens

- Een Markov keten is een rij met random variabelen $X_1, X_2, X_3, ...$ met de eigenschap dat:
    - $P(X_n|X_{n-1}, X_{n-2}, X_{n-3}, \ldots, X_1) = P(X_n|X_{n-1})$
- De variabele X_{n-1} is voldoende om X_n te bepalen, de variabelen $X_{n-2}, X_{n-3}, \ldots, X_1$ voegen hier niets aan toe.
- Dit is een voorbeeld van **voorwaardelijke** onafhankelijkheid
- De getallen $X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$ kunnen een reeks ontwikkeling in de tijd zijn maar dit is niet noodzakelijk.
- Een voorbeeld is het Monopoly spel

Monopoly en Markov ketens

- Nummer de vakjes 1,2,3,...,40 met 1=Start,2=Dorpsstraat etc

- De positie van af start is

$$X_1, X_2, X_3, X_4, \ldots$$

- De keten heeft de Markov eigenschap.....

$$P(X_n | X_{n-1}, \ldots, X_1) = P(X_n | X_{n-1})$$

- Om de kans dat een volgende positie wordt bereikt te bepalen is alleen de huidige positie nodig....

Lineaire bordspellen : voorbeeld 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Regels:
  - $P(1 \text{ naar } 2) = \frac{1}{2},\ P(1 \text{ naar } 3) = \frac{1}{2},\ P(1 \text{ naar elders}) = 0$
  - $P(2 \text{ naar } 3) = \frac{1}{2},\ P(2 \text{ naar } 4) = \frac{1}{2},\ P(2 \text{ naar elders}) = 0$
  - $P(3 \text{ naar } 4) = \frac{1}{2},\ P(3 \text{ naar } 5) = \frac{1}{2},\ P(3 \text{ naar elders}) = 0$
  - .....
  - $P(8 \text{ naar } 9) = \frac{1}{2},\ P(8 \text{ naar } 10) = \frac{1}{2},\ P(8 \text{ naar elders}) = 0$
  - Het eindspel:
    - $P(9 \text{ naar } 9) = \frac{1}{2},\ P(9 \text{ naar } 10) = \frac{1}{2}$
    - $P(9 \text{ naar } 10) = 1$
- Een betere manier om deze regels te presenteren is de Transitie waarschijnlijkheidsmatrix

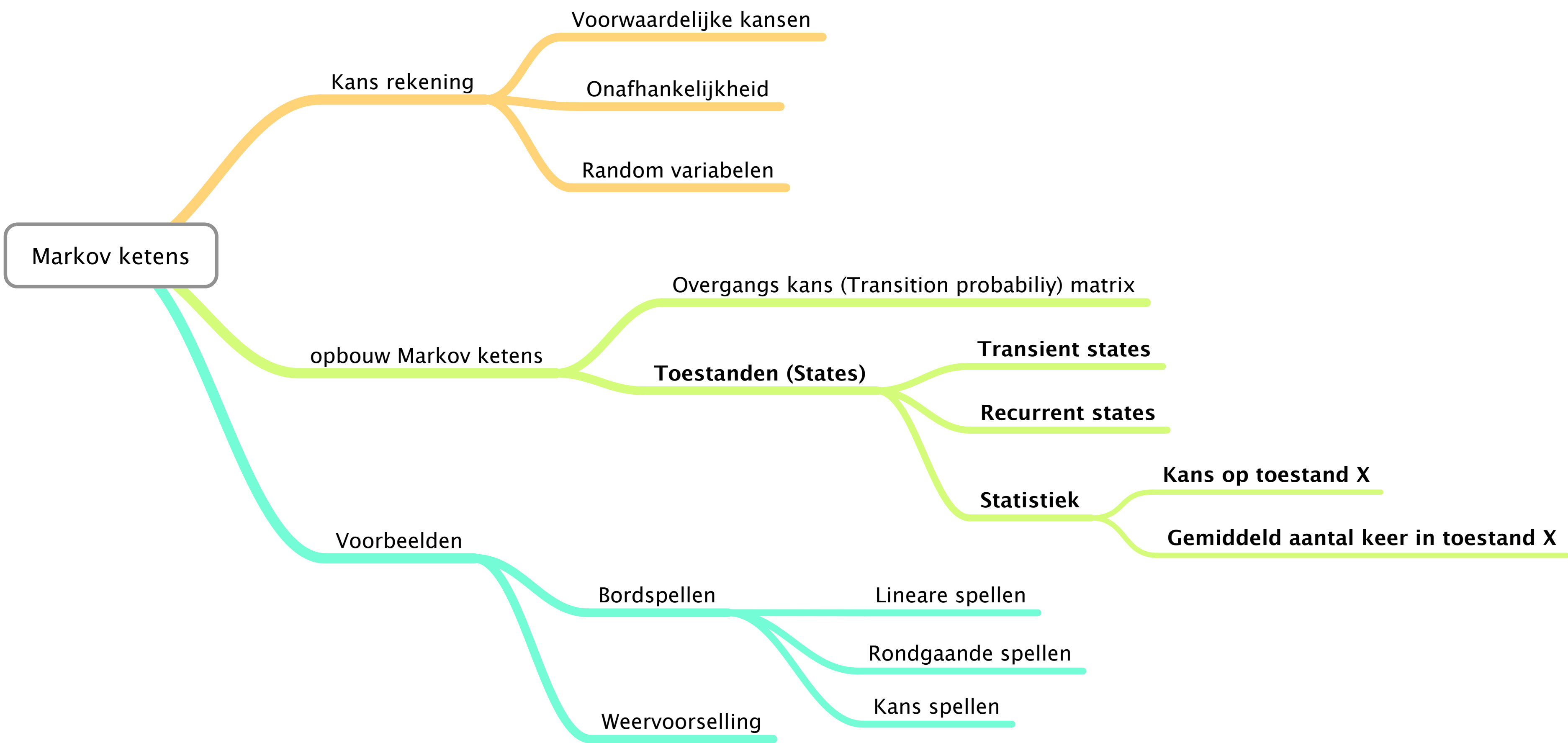
Transitie waarschijnlijkheidsmatrix

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} \text{Hokje 1} & \text{Hokje 2} & & & & & & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Hokje 1} \\ \text{Hokje 2} \\ \text{Hokje 3} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- Rijen stellen de huidige positie voor en kolommen de volgende positie
- De laatste rij laat zien dat een speler daar zal blijven staan
- Elementen van de matrix heten p_{ij} waarbij i de rij is en j de kolom is van P

- Toestanden die een eindig aantal keer bezocht worden heten **transient**
- Toestanden die een oneindig aantal keer bezocht worden heten **recurrent**
- Hier zijn vakje 1-9 transient states en is vakje 10 een recurrent state

Overzicht : Toestanden



Transient states en gemiddeld aantal bezoeken

- Een interessant gegeven bij recurrent toestanden is het gemiddeld aantal keren dat deze toestand optreed.
  - Deze vraag is te beantwoorden met behulp van Lineaire Algebra
    - P is de transitie waarschijnlijkheidsmatrix
    - P_T is de submatrix van P die alleen de transient states weergeeft

$$P = \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\quad
P_T = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Transient states en gemiddeld aantal bezoeken

- $S = (I - P_T)^{-1}$ geeft het gemiddelde aantal bezoeken vanaf elke begintoestand

$$\begin{pmatrix}
1 & 0.5 & 0.75 & 0.625 & 0.6875 & 0.65625 & 0.671875 & 0.664063 & 0.667969 \\
0 & 1 & 0.5 & 0.75 & 0.625 & 0.6875 & 0.65625 & 0.671875 & 0.664063 \\
0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.75 & 0.625 & 0.6875 & 0.65625 & 0.671875 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.75 & 0.625 & 0.6875 & 0.65625 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.75 & 0.625 & 0.6875 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.75 & 0.625 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.75 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

- Op de eerste rij staat het resultaat beginnend op vakje 1.
  - (1,1)=1 betekend dat vakje 1 eenmaal bezocht wordt.
  - (1,2)=0.5 betekend dat de kans dat vakje 2 bezocht wordt 50% is.
  - De gemiddelde voorgang is 1.5 hokjes, dus hoe verder de toestand verwijderd is van het startpunt hoe dichter de kans 1/1.5=2/3 nadert.

Transient states en gemiddeld aantal bezoeken

- $S = (I - P_T)^{-1}$ is gemakkelijk uit te rekenen met mathematica

Create P and Compute S

Wolfram *Mathematica* | FOR STUDENTS   Demonstrations | MathWorld | Student Forum | Help

```
In[475]:= tranMatrixLinear[n_, probs_] := Module[{p = {}, r, i},
    Do[AppendTo[p, {Table[0, {i, 1, r - 1}],
        probs[[1 ;; Min[n - r + 1, Length[probs]]]],
        {Table[0, {i, r + Length[probs], n}]}} // Flatten]
     , {r, 1, n}];
    Do[p[[r, n]] = 1 - Fold[Plus, 0, p[[r, 1 ;; n - 1]]]
     , {r, 1, n}];
    Return[p];
   ]
  n = 10;
  p = tranMatrixLinear[n, {0, 1, 1} / 2];
  pt = p[[1 ;; n - 1, 1 ;; n - 1]];
  s = Inverse[IdentityMatrix[n - 1] - pt];
  {p // MatrixForm // N,
   s // MatrixForm // N}
```

Out[480]=

$$\left\{\begin{pmatrix}
0. & 0.5 & 0.5 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0.5 & 0.5 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0.5 & 0.5 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0.5 & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0.5 & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0.5 & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0.5 & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0.5 \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1.
\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}
1. & 0.5 & 0.75 & 0.625 & 0.6875 & 0.65625 & 0.671875 & 0.664063 & 0.667969 \\
0. & 1. & 0.5 & 0.75 & 0.625 & 0.6875 & 0.65625 & 0.671875 & 0.664063 \\
0. & 0. & 1. & 0.5 & 0.75 & 0.625 & 0.6875 & 0.65625 & 0.671875 \\
0. & 0. & 0. & 1. & 0.5 & 0.75 & 0.625 & 0.6875 & 0.65625 \\
0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0.5 & 0.75 & 0.625 & 0.6875 \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0.5 & 0.75 & 0.625 \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0.5 & 0.75 \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0.5 \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1.
\end{pmatrix}\right\}$$

125%

Gambler’s ruin

0					5					10

- Start met €5,- en win of verlies €1,- per beurt, stop als €0 of €10,- bereikt is.
- Dit spel is equivalent met een bord spel waarbij winnen een vakje naar rechts en verliezen een vakje naar links schuiven betekend.
- Er zijn twee recurrent states, de vakjes €0 of €10,-.
    - Wat is de kans dat de vakjes €0 of €10,- bereikt worden?
    - Wat is het gemiddeld aantal bezoeken aan de andere vakjes?

Gambler's ruin

- De kans op winst of verlies is 50%

$$P_t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = (I - P_T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.8 & 1.6 & 1.4 & 1.2 & 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 1.6 & 3.2 & 2.8 & 2.4 & 2 & 1.6 & 1.2 & 0.8 & 0.4 \\ 1.4 & 2.8 & 4.2 & 3.6 & 3 & 2.4 & 1.8 & 1.2 & 0.6 \\ 1.2 & 2.4 & 3.6 & 4.8 & 4 & 3.2 & 2.4 & 1.6 & 0.8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0.8 & 1.6 & 2.4 & 3.2 & 4 & 4.8 & 3.6 & 2.4 & 1.2 \\ 0.6 & 1.2 & 1.8 & 2.4 & 3 & 3.6 & 4.2 & 2.8 & 1.4 \\ 0.4 & 0.8 & 1.2 & 1.6 & 2 & 2.4 & 2.8 & 3.2 & 1.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 & 1.2 & 1.4 & 1.6 & 1.8 \end{pmatrix}$$

Gambler's ruin

- R is de matrix met kansen om van transient naar recurrent states te gaan
- F is de matrix met de kans om een toestand recurrent state te bereiken
- F kan worden bepaald met
  - $F = SR = (I - P_T)^{-1}R$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

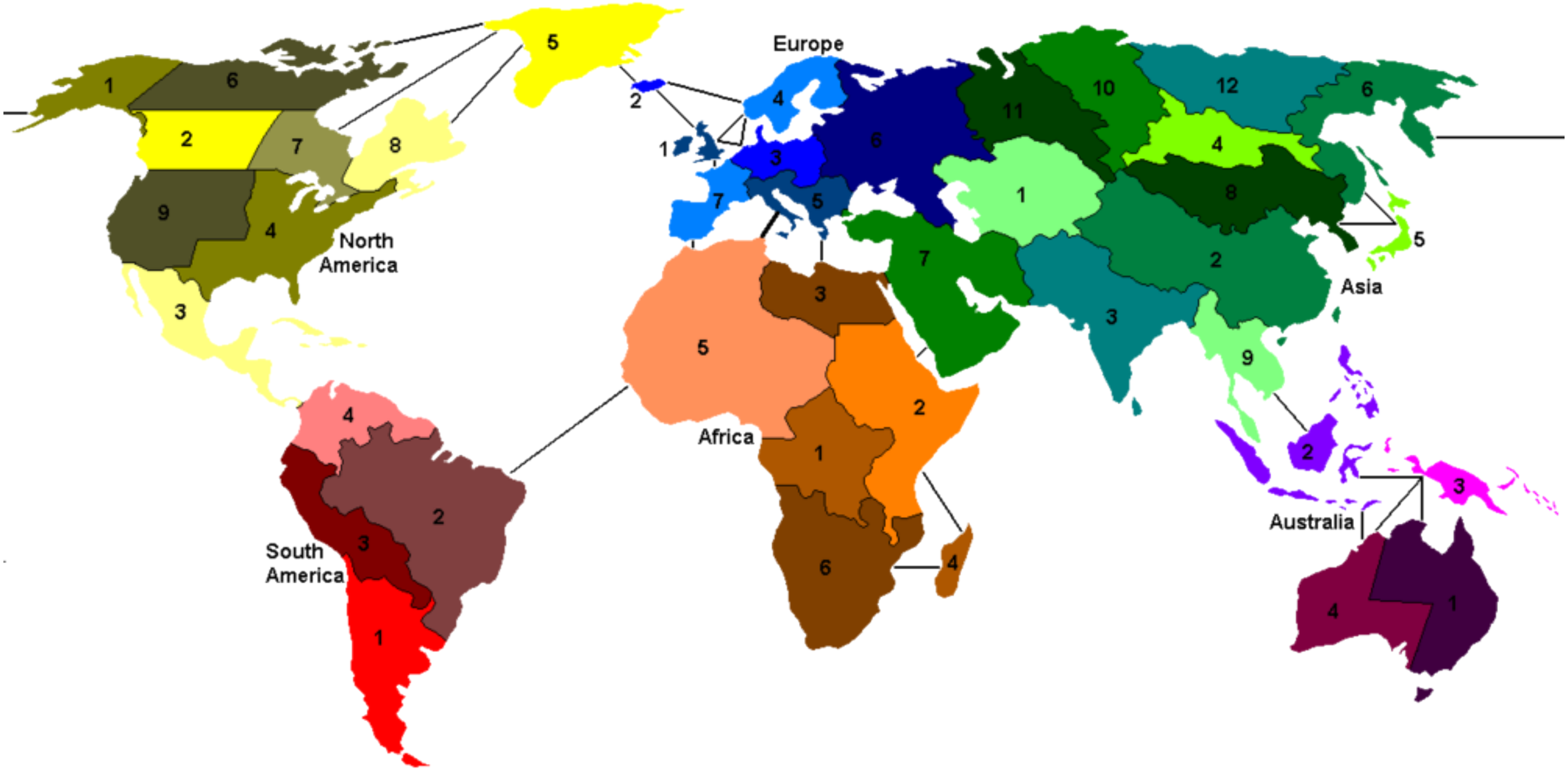
Gambler’s ruin voor Roulette

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{10}{19} & 0 & \frac{9}{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{19} & 0 & \frac{9}{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{19} & 0 & \frac{9}{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{19} & 0 & \frac{9}{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{19} & 0 & \frac{9}{19} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{19} & 0 & \frac{9}{19} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{19} & 0 & \frac{9}{19} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{19} & 0 & \frac{9}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{19} & 0 & \frac{9}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{10}{19} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{19} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0.94 & 0.06 \\ 0.87 & 0.13 \\ 0.8 & 0.2 \\ 0.72 & 0.28 \\ 0.63 & 0.37 \\ 0.53 & 0.47 \\ 0.42 & 0.58 \\ 0.29 & 0.71 \\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}$$

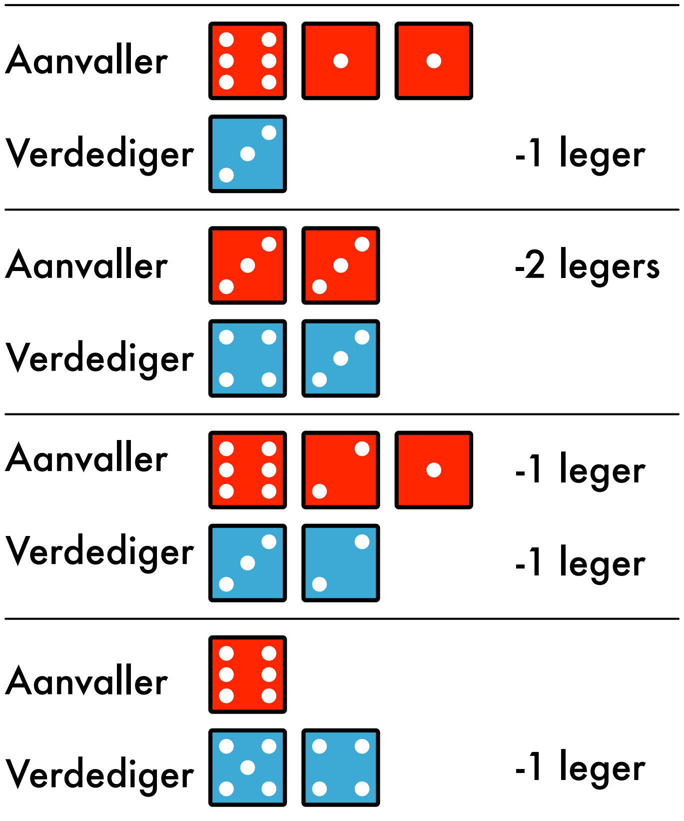
- Roulette is zo ontworpen dat het casino winst maakt
- Bij herhaald spelen is de kans dat men netto winst maakt steeds kleiner

RISK



RISK : Transitie kansen

- Het spel RISK kent 14 mogelijke toestandstransities voor elke veldslag
- De Markov keten zal altijd in een absorberende toestand eindigen.



i	j	Event	Symbol	Probability
1	1	Defender loses 1	π_{111}	$15/36 = 0.417$
1	1	Attacker loses 1	π_{110}	$21/36 = 0.583$
1	2	Defender loses 1	π_{121}	$55/216 = 0.255$
1	2	Attacker loses 1	π_{120}	$161/216 = 0.745$
2	1	Defender loses 1	π_{211}	$125/216 = 0.579$
2	1	Attacker loses 1	π_{210}	$91/216 = 0.421$
2	2	Defender loses 2	π_{222}	$295/1296 = 0.228$
2	2	Each lose 1	π_{221}	$420/1296 = 0.324$
2	2	Attacker loses 2	π_{220}	$581/1296 = 0.448$
3	1	Defender loses 1	π_{311}	$855/1296 = 0.660$
3	1	Attacker loses 1	π_{310}	$441/1296 = 0.340$
3	2	Defender loses 2	π_{322}	$2890/7776 = 0.372$
3	2	Each lose 1	π_{321}	$2611/7776 = 0.336$
3	2	Attacker loses 2	π_{320}	$2275/7776 = 0.293$

RISK : Transitie kansen

- Bereken de kansen uit de tabel met behulp van een simulatie

Risk v1.2

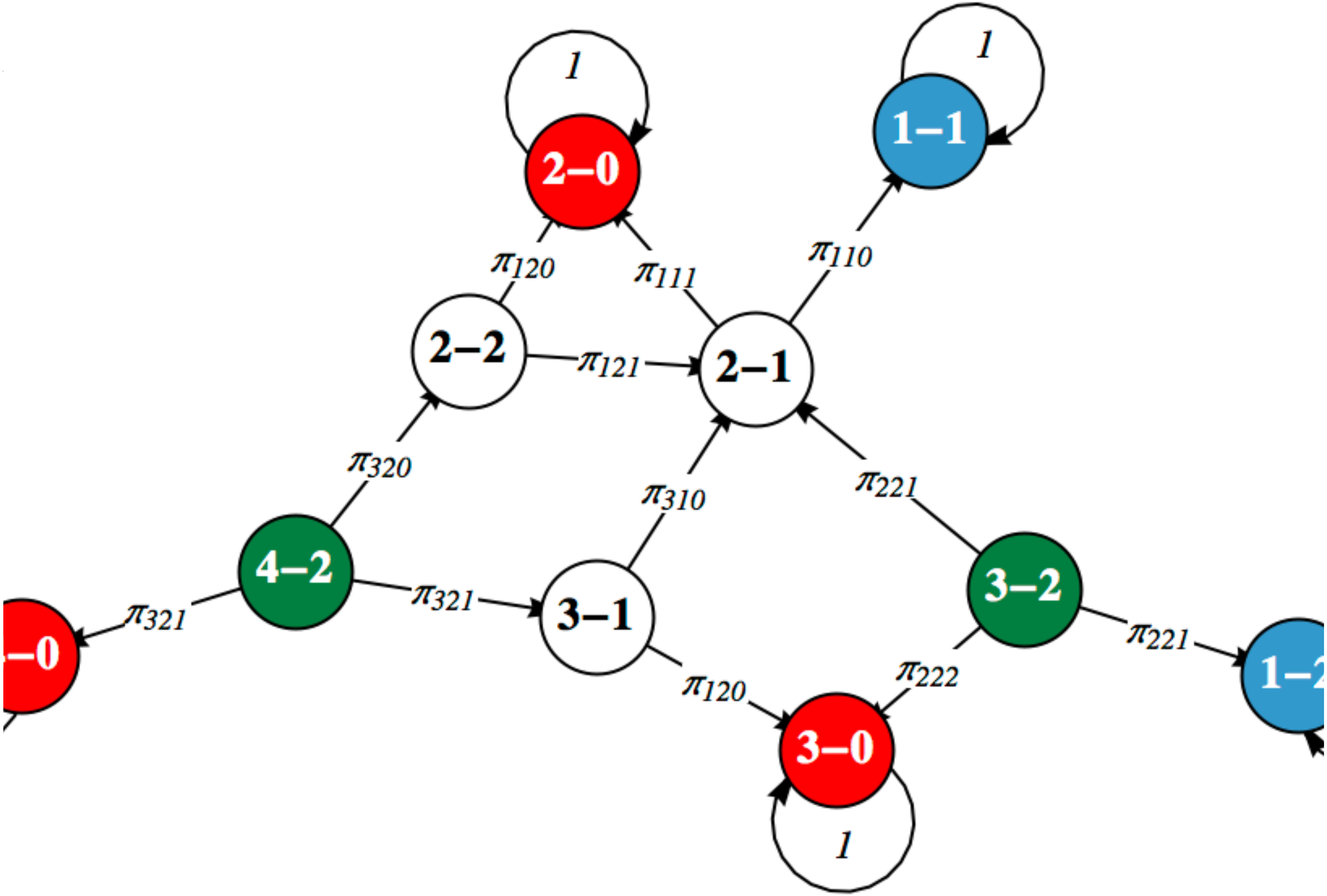
Wolfram Mathematica | FOR STUDENTS   Demonstrations | MathWorld | Student Forum | Help

```
f[numberofdiceattacker0_, numberofdicedefender0_] :=
 Module[{lossattacker = 0, rollsattacker, numberofdiceattacker = numberofdiceattacker0,
   lossdefender = 0, rollsdefender, numberofdicedefender = numberofdicedefender0},
  rollsattacker = Sort[Table[RandomInteger[{1, 6}], {1}, {numberofdiceattacker}][[1, All]], Greater];
  rollsdefender = Sort[Table[RandomInteger[{1, 6}], {1}, {numberofdicedefender}][[1, All]], Greater];
  Do[
   If[rollsattacker[[i]] <= rollsdefender[[i]], lossattacker = lossattacker + 1, 0];
   If[rollsattacker[[i]] > rollsdefender[[i]], lossdefender = lossdefender + 1, 0];
   , {i, 1, Min[{numberofdiceattacker, numberofdicedefender}]}];
  Return[{lossattacker, lossdefender}]
 ]

numberoftrials = 100000;
q = Table[f[1, 1], {i, 1, numberoftrials}];
pi111 = Count[q, {0, 1}] / numberoftrials // N;
pi110 = Count[q, {1, 0}] / numberoftrials // N;
Print["1  1 Defender loses 1 π111 ", pi111]
Print["1  1 Attacker loses 1 π110 ", pi110]

q = Table[f[1, 2], {i, 1, numberoftrials}];
pi121 = Count[q, {0, 1}] / numberoftrials // N;
pi120 = Count[q, {1, 0}] / numberoftrials // N;
Print["1  2 Defender loses 1 π121 ", pi121]
Print["1  2 Attacker loses 1 π120 ", pi120]
```

125%


1
2–0
1
1–1
π120
π111
π110
2–2
π121
2–1
π320
π310
π221
4–2
3–2
π321
π321
3–1
π221
π120
π222
3–0
1

RISK : Transitiematrix voor 4-2 overwicht aanvaller

S			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		A	2	2	3	3	4	1	1	2	3	4
	A	D	1	2	2	2	1	1	2	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	π_{110}	0	π_{111}	0	0
2	2	2	π_{121}	0	0	0	0	0	0	π_{120}	0	0
3	3	1	π_{310}	0	0	0	0	0	0	0	π_{311}	0
4	3	2	π_{221}	0	0	0	0	0	π_{221}	0	π_{222}	0
5	4	2	0	π_{320}	π_{321}	0	0	0	0	0	0	π_{322}
6	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

RISK : Kans van slagen aanval

$$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{310} \times \pi_{121} \times \pi_{110} = 0.044$$

$$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{321} \times \pi_{310} \times \pi_{110} = 0.067$$

$$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{310} \times \pi_{121} \times \pi_{110} = 0.031$$

$$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{321} \times \pi_{310} \times \pi_{111} = 0.048$$

$$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{310} \times \pi_{121} \times \pi_{110} = 0.218$$

$$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{321} \times \pi_{331} = 0.221$$

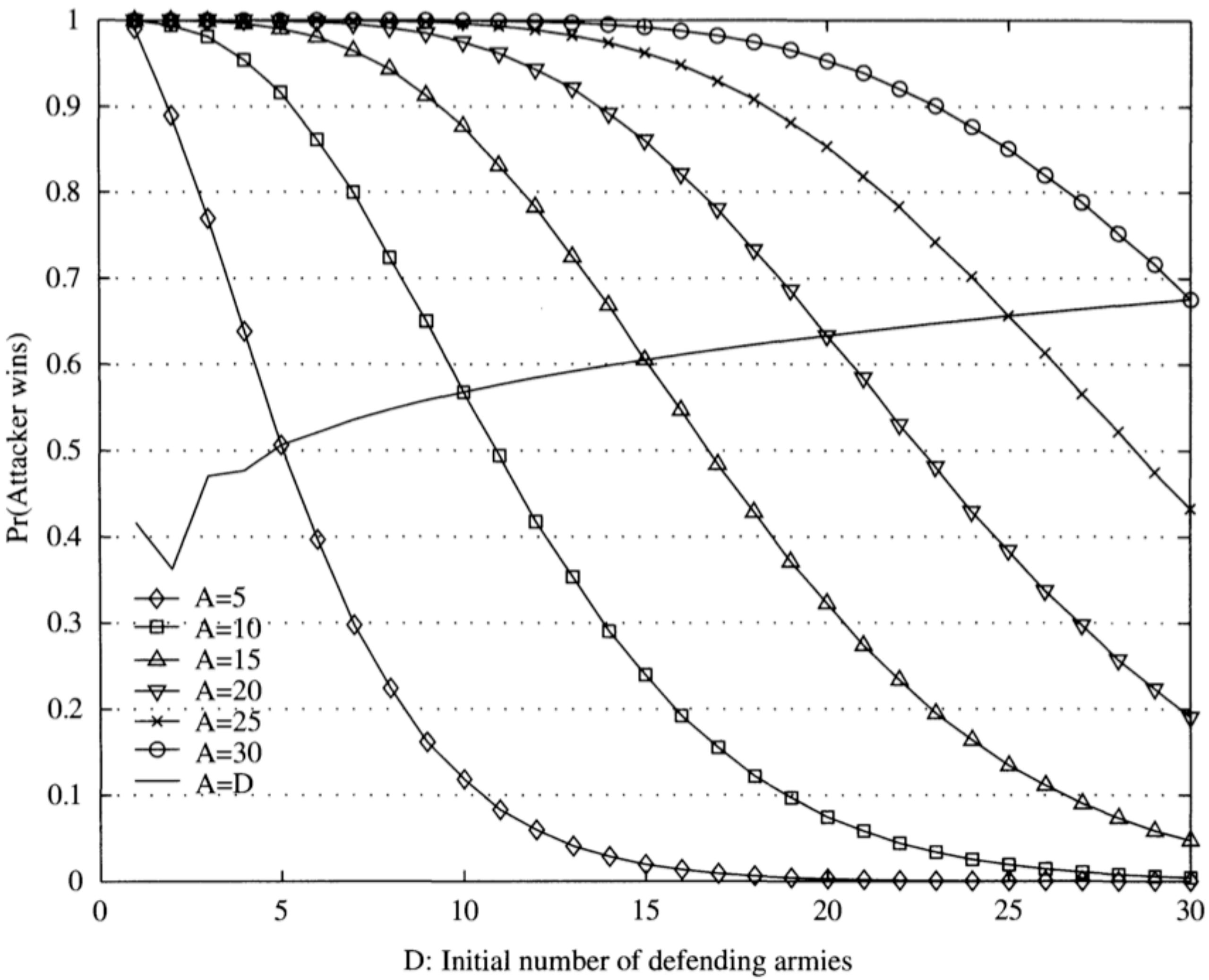
$$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \pi_{322} \times \pi_{331} = 0.372$$

$$\text{sum} = 1$$

D Wint

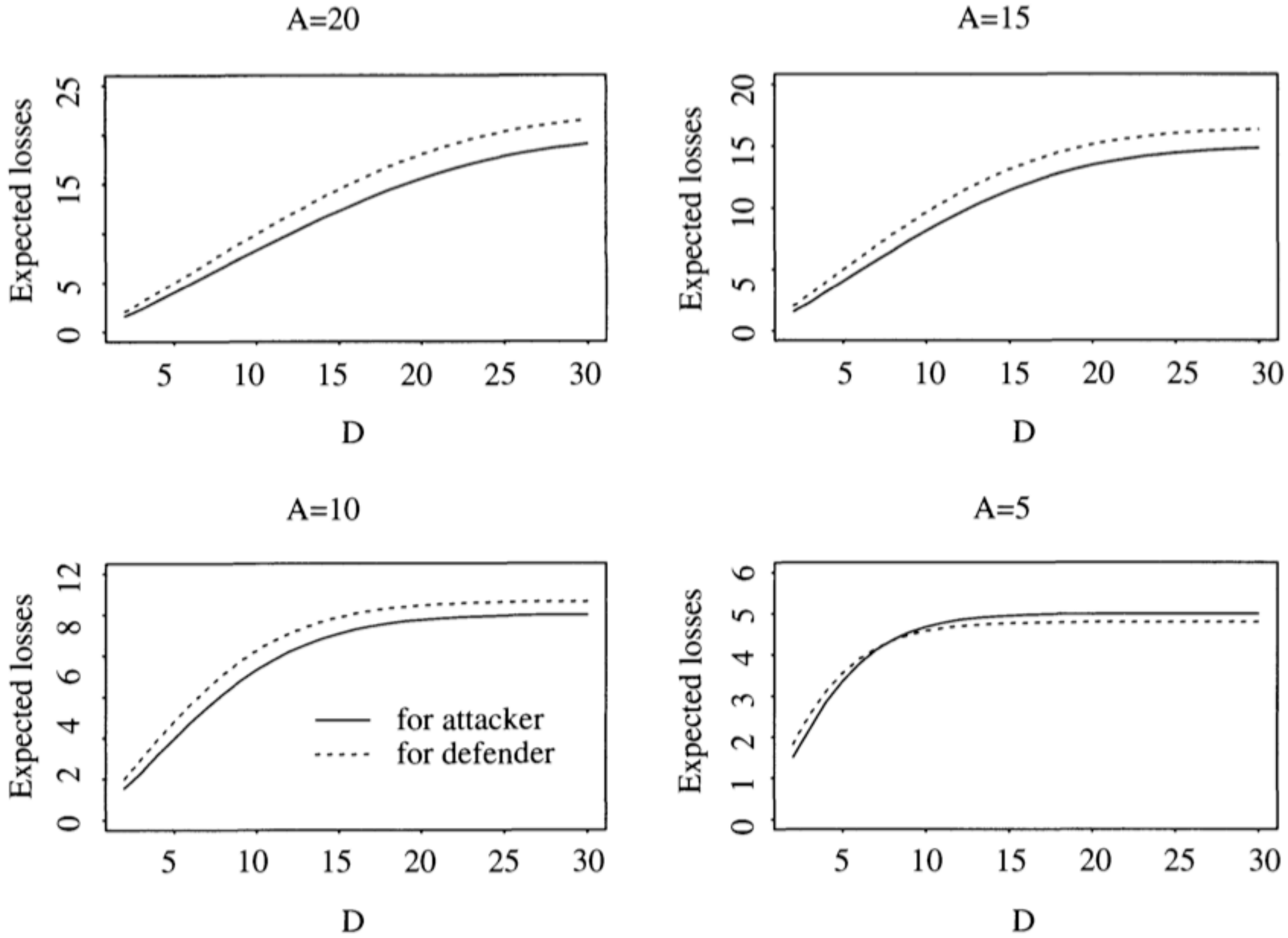
A Wint

RISK : Kans van slagen aanval



Jason A. Osborne , Markov Chains for the RISK Board Game Revisited,
Mathematics Magazine, Vol. 76, No. 2 (Apr., 2003), pp. 129-135

RISK : Verwachtte verliezen

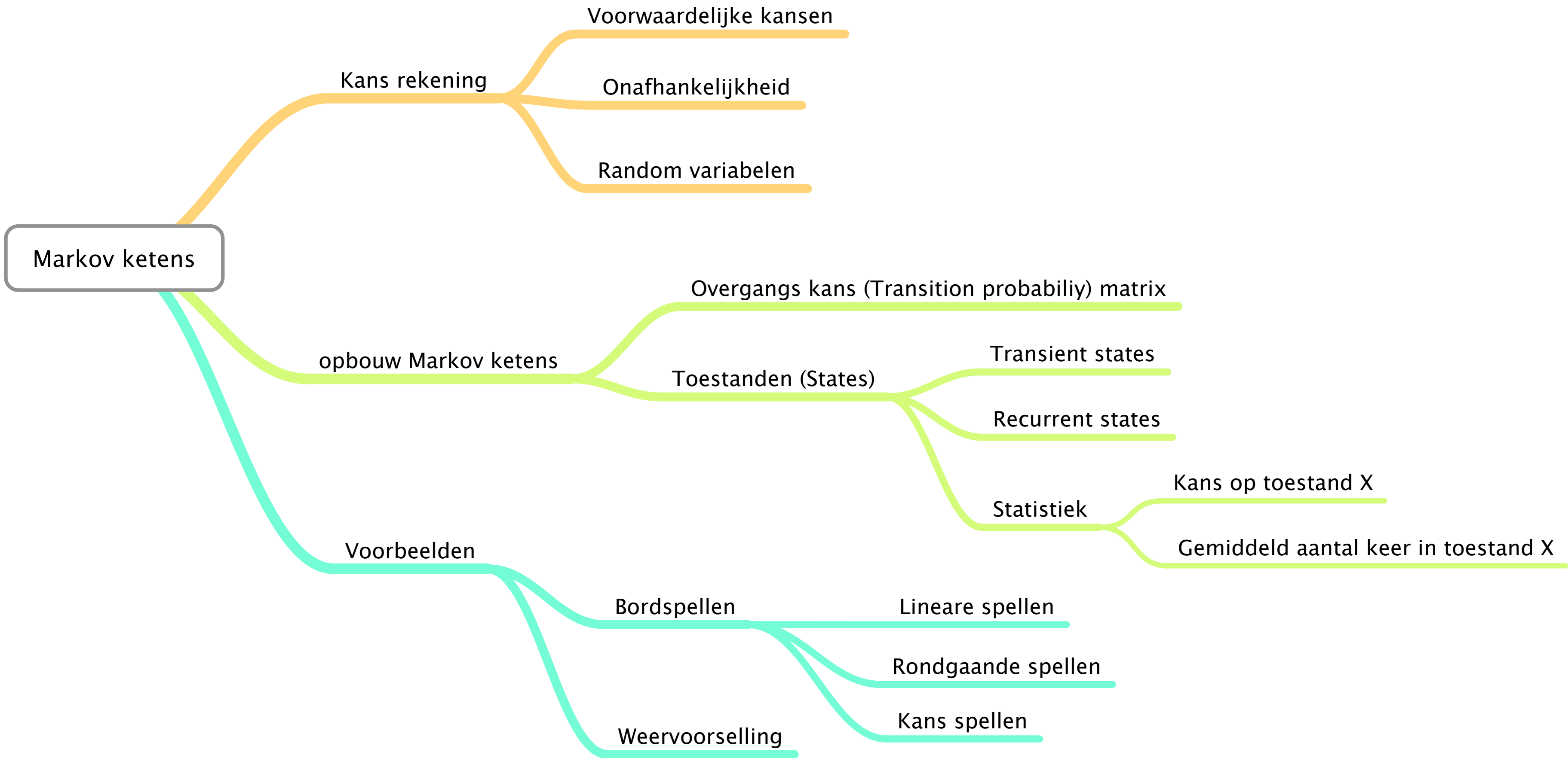


Jason A. Osborne , Markov Chains for the RISK Board Game Revisited,
Mathematics Magazine, Vol. 76, No. 2 (Apr., 2003), pp. 129-135

RISK : Conclusie

- Conclusie
  - Een agressieve speelstijl heeft veel kans van slagen bij
    - een overwicht van 1 of meer legers
    - een toenemend aantal legers aan beide zijden
  - Bij een groot aantal legers aan beide zijden zal het voordeel van drie dobbelstenen van de aanvaller groter wegen dan het voordeel van de verdediger dat deze genoeg heeft aan een even hoog aantal ogen.

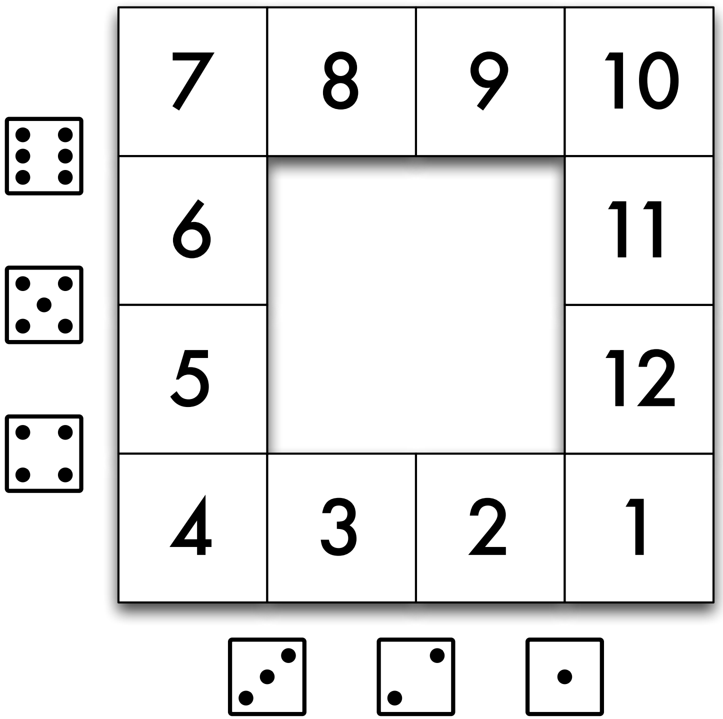
Overzicht


Markov ketens
Kans rekening
Voorwaardelijke kansen
Onafhankelijkheid
Random variabelen
opbouw Markov ketens
Overgangs kans (Transition probabiliy) matrix
Toestanden (States)
Transient states
Recurrent states
Statistiek
Kans op toestand X
Gemiddeld aantal keer in toestand X
Voorbeelden
Bordspellen
Lineare spellen
Rondgaande spellen
Kans spellen
Weervoorselling

Bordspellen met een gesloten baan

- Bij bordspellen zoals Monopoly waarbij de spelers over een gesloten baan bewegen zijn er geen absorberende toestanden.

- Hier zijn de lange termijn waarschijnlijkheden van belang



$$P = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Lange termijn waarschijnlijkheid gesloten baan

monoployopdracht voorbeeld

Wolfram *Mathematica* | FOR STUDENTS   Demonstrations | MathWorld | Student Forum | Help

Deel 1

De functie tranMatrixLoop1 maakt een transitie matrix aan met afmeting n gevuld met de kansen probs. volgens het schema

```
tranMatrixLoop1[n_, probs_] :=
 Module[{c, r, p = {}, row},
  row = {probs, {Table[0, {i, Length[probs] + 1, n}]}} // Flatten;
  Do[row = RotateRight[row];
   AppendTo[p, row], {i, 1, n}];
  Return[p]
 ]
```

Deel 2

Het volgende gedeelte geeft aan hoe de functie tranMatrixLoop1 gebruikt kan worden om de transitiematix op te stellen. Let op dat nog niet alle spelregels er in verwerkt zijn !

```
n = 40;
limit = n / 4 + 1;
p = tranMatrixLoop1[n, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1} / 36];
p[[All, 11]] += p[[All, 31]]; (* go to jail *)
p[[All, 31]] = Table[0, {40}];
```

Deel3

Met behulp van de code uit deel 3 kunnen de stationaire toestand berekende worden. Als er tijd is zal dit gedeelte van de code nog worden besproken tijdens het college

```
out = Eigensystem[p // Transpose // N];
pi = out[[2, 1]] / Fold[Plus, 0, out[[2, 1]]];
result = Round[pi, 0.0001];
```

100%

Overzicht


Markov ketens
Kans rekening
Voorwaardelijke kansen
Onafhankelijkheid
Random variabelen
opbouw Markov ketens
Overgangs kans (Transition probabiliy) matrix
Toestanden (States)
Transient states
Recurrent states
Statistiek
Kans op toestand X
Gemiddeld aantal keer in toestand X
Voorbeelden
Bordspellen
Lineare spellen
Rondgaande spellen
Kans spellen
Weervoorselling

Zinnen met 2-ngram

- Markov ketens kunnen ook gebruikt worden voor de analyse van tekst.
- De kans dat een woord volgt op een ander woord kan worden bepaald door teksten te analyseren en de volgorde vast te leggen in n-grams

w2ngram — Locked

38	boris	Berezovsky
33	boris	godunov
45	boris	karloff
75	boris	n
29	boris	nemtsov
26	boris	pugo
1885	boris	yeltsin
85	bork	and
41	bork	said
46	bork	was
29	borland	international
540	born	a
35	born	about
31	born	abroad
31	born	addicted
255	born	after
406	born	again
44	born	alive
47	born	an
1894	born	and
28	born	april
48	born	around
154	born	as
425	born	at
43	born	aug
39	born	because
121	born	before
166	born	between
47	born	blind
68	born	by

w3ngram — Locked

89	boris	yeltsin	is
42	boris	yeltsin	to
46	boris	yeltsin	was
27	born	a	few
42	born	a	slave
34	born	a	year
27	born	addicted	to
65	born	after	the
168	born	and	bred
37	born	and	grew
876	born	and	raised
45	born	and	reared
44	born	and	the
32	born	and	where
49	born	as	a
129	born	at	the
35	born	before	the
76	born	during	the
37	born	each	year
33	born	every	minute
28	born	for	the
37	born	from	a
71	born	from	the
28	born	here	and
44	born	here	in
381	born	in	a
83	born	in	america
28	born	in	an
29	born	in	bethlehem
35	born	in	boston

w4ngram — Locked

born | Done | Replace

15	bore	pilot	holes	for
81	bore	the	brunt	of
16	bore	the	burden	of
20	bore	the	marks	of
18	bore	the	name	of
17	bore	witness	to	the
23	bored	out	of	my
15	bored	with	each	other
29	borger	of	us	news
17	boris	yeltsin	and	his
20	boris	yeltsin	and	the
13	boris	yeltsin	is	the
14	born	a	year	later
54	born	and	bred	in
20	born	and	brought	up
16	born	and	educated	in
35	born	and	grew	up
57	born	and	raised	here
593	born	and	raised	in
36	born	and	raised	on
17	born	and	raised	there
30	born	and	reared	in
13	born	at	the	same
13	born	free	and	equal
14	born	in	a	log
13	born	in	a	manger
31	born	in	a	small
15	born	in	another	country

Zinnen met 2 ngram

- "for determining the study by the program with autism who"
- "well to where he murmured to bring you can you felt no way to"
- "a crime of fans out their long-term relationship over"
- "big pile of their people whose role in charge of operations is a barrier to"
- "bodies such an unconditional and i chose to christmas tree"
- "part of things might as the first woman was pointed out back in a train our"
- "in the minimum investment in horror stories from sleep better"
- "the cores of his vision of the tracks on the soviet people who swarmed"
- "unwillingness of mutual engagement policy has"
- "or missile guidance from california legislature is completely abandoned by dolce vita"
- "jordan has been the occupation of sweet smell the result in"

Zinnen met 2-ngram

```
(* Initialisatie *)
Clear[story, sentence, word]; story = "";
lengthofsentence = 7;
Do[
 (* Kies een willekeurig woord als eerste woord van de zin. *)
 word = list[[RandomChoice[list[[All, 1]] → Range[Length[list]]], 2]];
 sentence = word;
 Do[
  (* Maak een korte lijst met woorden die volgen op het laatste woord van de zin *)
  shortlist = list[[Flatten[Position[list[[All, 2]], word]], All]];
  (* Kies een willekeurig woord uit de korte lijst de kas dat een woord gekozen
   wordt hangt af van het aantal gevallen (frequentie) waarin de combinatie is
   aangetroffen: RandomChoice[{kans1,kans2,....}→{woord1,woord2,....}] *)
  If[Length[list[[Flatten[Position[list[[All, 2]], word]], 1]]] > 0,
   word =
    shortlist[[RandomChoice[list[[Flatten[Position[list[[All, 2]], word]], 1]] →
       Range[Length[list[[Flatten[Position[list[[All, 2]], word]], 3]]]]], 3]];
   sentence = StringJoin[sentence, " ", word]];
  , {i, 1, lengthofsentence}];
 Print[sentence];
 story = StringJoin[story, " ", sentence];
   , {j, 1, 10}]
```

Vragen?

- Jan van Hulzen : j.r.van.hulzen@hva.nl
- Liv Harkes : l.harkes@hva.nl