Wiskunde 13/14

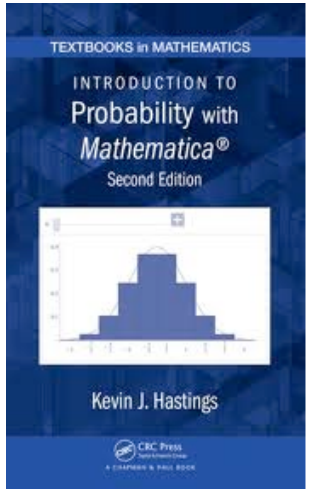
Jan van Hulzen / Liv Harkes
November 19th 2012 version 1.0

Markov chains

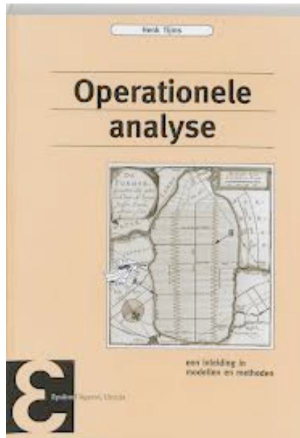
Aanbevolen literatuur

- Boeken gebruikt voor deze les :

  - Introduction to Probability with Mathematica, Second Edition Kevin J. Hastings, September 21, 2009 ISBN-13: 978-1420079388



  - Operationele analyse, een inleidng in de modellen en methoden, H. Tijms ISBN-13: 978-9050410755



Markov ketens

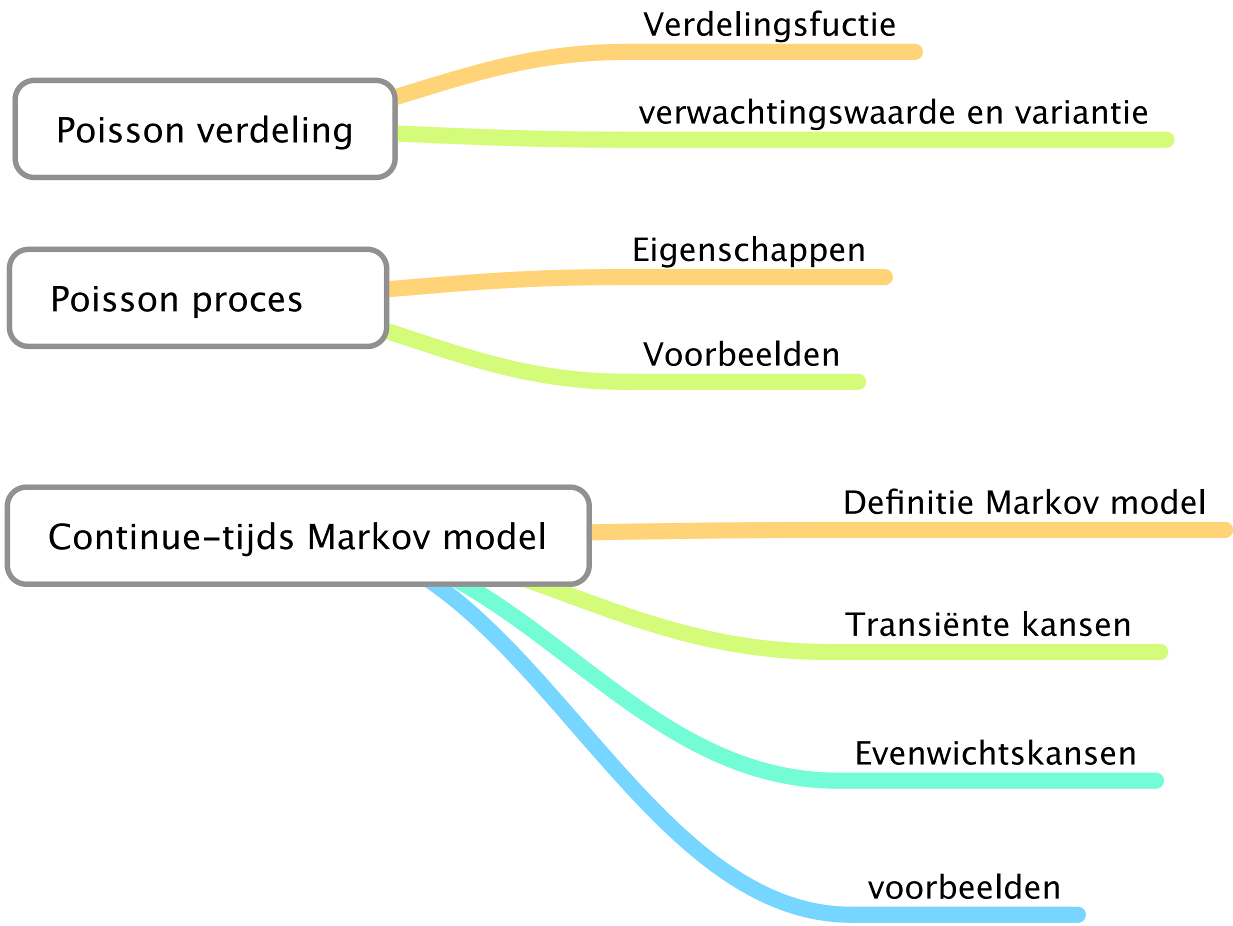
Leerdoelen

- Aanvullen leerdoel voor deze les is het leren begrijpen van continue Markov ketens zoals deze worden toegepast in het modelleren van wachtrijen

Organisatie van de cursus

Week	50 min	100 min	100 min	
1	HC	PR	ZS	Opdracht 1
2	HC	PR	ZS	
3	HC	PR	ZS	Opdracht 2
4	HC	PR	ZS	
5		PR	ZS	Opdracht 3
6		PR	ZS	
7		PR	ZS	

Overzicht



Poisson verdeling
Verdelingsfuctie
verwachtingswaarde en variantie
Poisson proces
Eigenschappen
Voorbeelden
Continue-tijds Markov model
Definitie Markov model
Transiënte kansen
Evenwichtskansen
voorbeelden

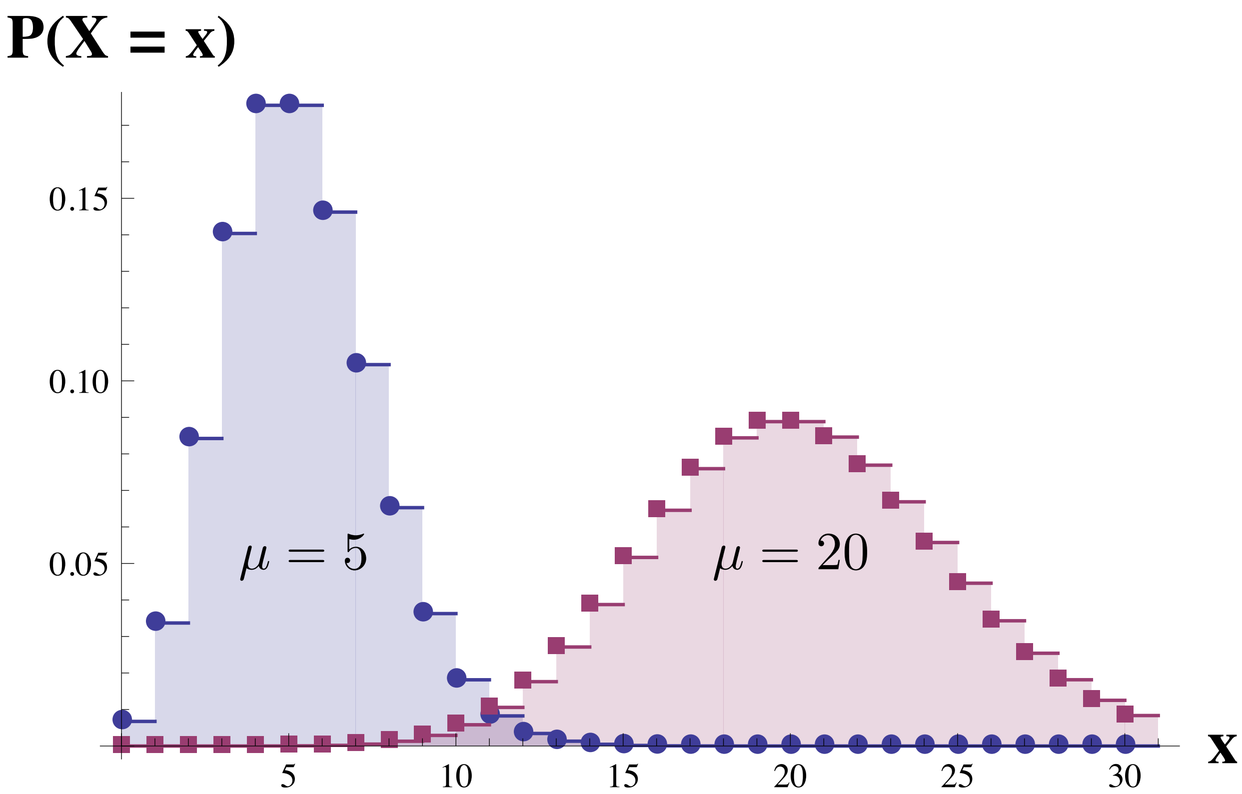
Inleiding : Poisson verdeling (Hastings 2.4)

- Een Poisson verdeling wordt gebruikt voor modellen waarin random variabelen worden gebruikt voor het tellen van het aantal keer dat een gebeurtenis optreedt.
  - Voorbeelden:
    - Aantal verkeersongelukken op een kruising
    - Aantal verloren paspoorten op een luchthaven
- De toestandsruimte I zijn niet-negatieve gehele getallen {0, 1, 2, 3, 4, ... }
- De *probability mass function f(x)* geeft de kans dat de random variabele *X* in de toestand *x* terecht komt, voor de Poisson verdeling is dit:

$$f(x) = P[X = x] = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, ...$$

- De verdeling hang af van een enkele parameter μ

Inleiding : Poisson verdeling (Hastings 2.4)



- De *probability mass function f(x)*
- Poisson verdeling voor $\mu = 5$ en $\mu = 20$

Inleiding : Poisson verdeling (Hastings 2.4)

- Als X een discrete random variabele is met de *probability mass function* f(x) dan is de *verwachtingswaarde* van X gegeven door

$$E[X] = \sum_{x \in I} x \cdot f(x)$$

- Voor de Poisson verdeling wordt dit dus

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \\ &= e^{-\mu} \cdot \mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\mu} \cdot \mu \cdot e^{\mu} \\ &= \mu \end{aligned}$$

- Voor functies van X geldt dat $E[g(X)] = \sum_{x \in I} g(x) \cdot f(x)$

Inleiding : Poisson verdeling (Hastings 2.4)

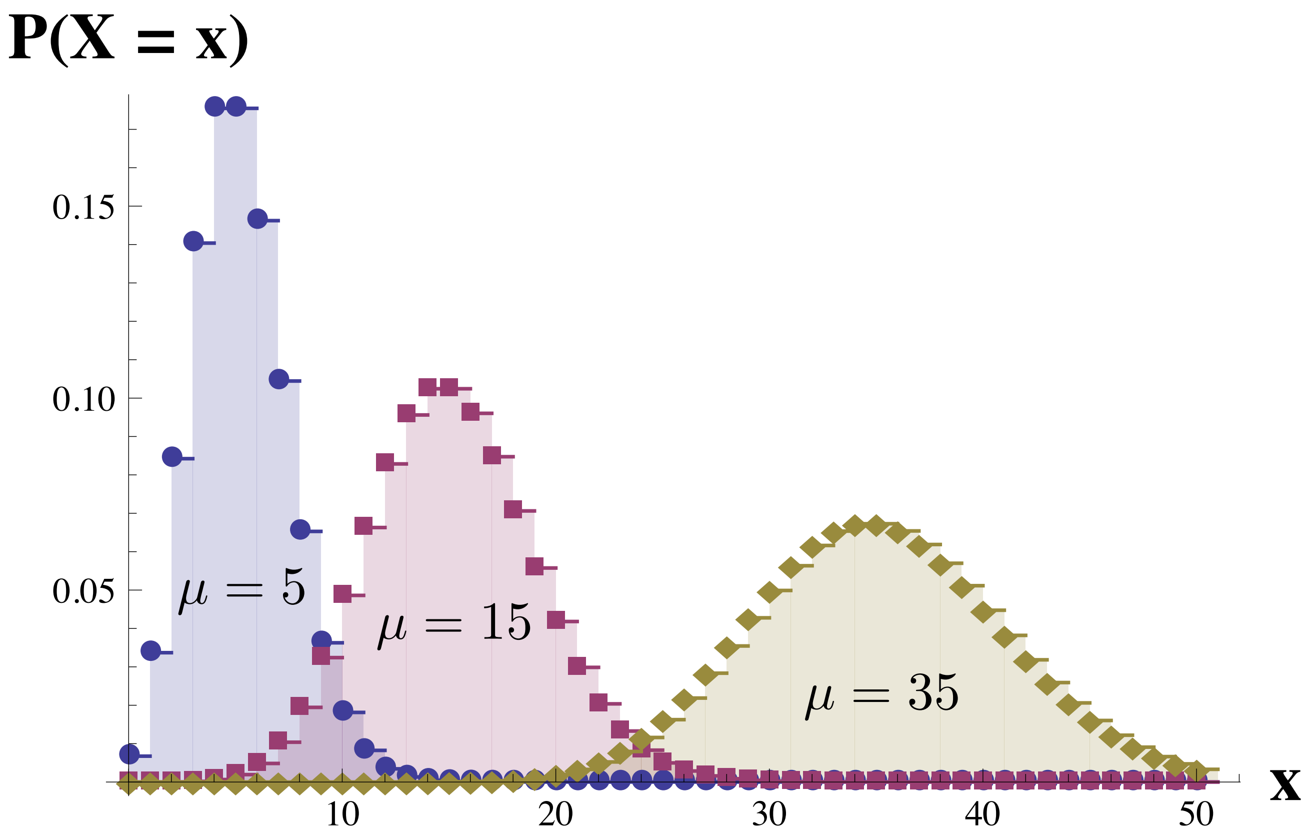
- Als X een discrete random variabele is met de *probability mass function* f(x) dan is de *variantie* van X gegeven door

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

- Hierbij wordt de verwachtingswaarde aangegeven met μ
- Voor de Poisson verdeling is de variantie gelijk aan μ
- Bewijs : (zie boek Hastings)

Inleiding : Poisson verdeling (Hastings 2.4)

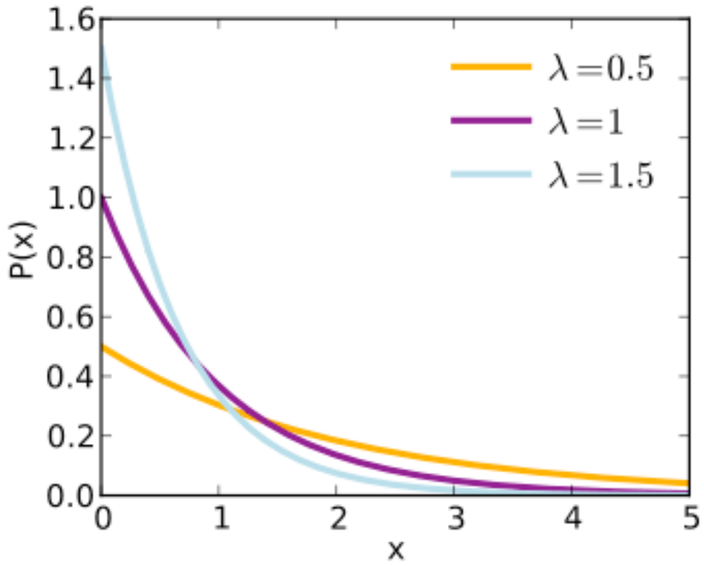
- Omdat zowel de verwachtingswaarde als de variantie gelijk zijn aan μ zal de probability mass function naar rechts schuiven en uitspreiden voor toenemende waarden van μ

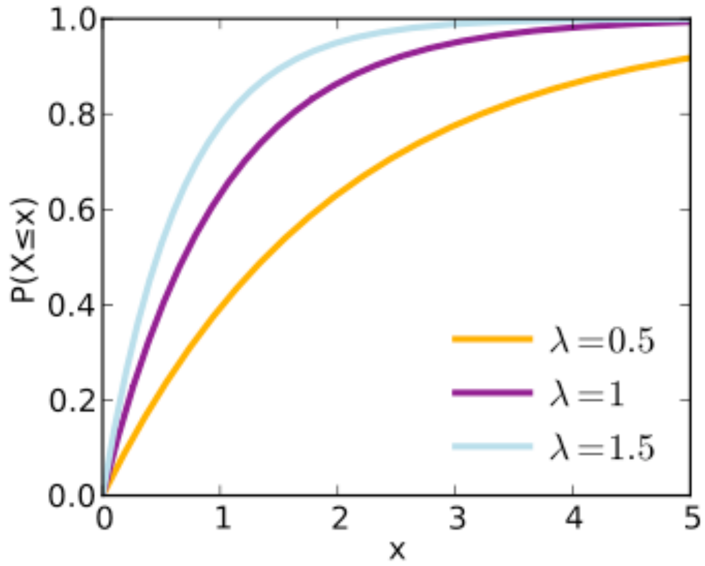


Exponentiële verdeling

- Een random variabele heeft de exponentiële verdeling als de kansverdeling dichtheidsfunctie wordt gegeven door

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$





Overzicht

- Poisson verdeling
  - Verdelingsfuctie
  - verwachtingswaarde en variantie
- Poisson proces
  - Eigenschappen
  - Voorbeelden
- Continue-tijds Markov model
  - Definitie Markov model
  - Transiënte kansen
  - Evenwichtskansen
  - voorbeelden

Poisson proces : definitie

- Een Poisson proces is een telproces dat het aantal optredens van een gebeurtenis telt over de loop van de tijd.
  - Aankomst van klanten bij een pomp station.
  - Storingen in een centrale.

- Eigenschappen Poisson proces:

  a. De ‘klanten’ komen één voor één aan.

  b. De aantallen aankomsten in disjuncte tijdsintervallen zijn onafhankelijk.

  c. De kansverdeling van het aantal klanten dat aankomt in een gegeven tijdsinterval heeft een Poisson verdeling waarvan de verwachtingswaarde evenredig is met de lengte van het tijdsinterval.

  - $P(k \text{ aankomsten in een tijdsinterval van lengte } t)$
  $$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \text{ voor } k = 0, 1, ...$$
  - Het getal λ heet de *aankomstintensiteit* avn het Poisson proces

Poisson proces : voorbeeld 1

- Bij een station staan groepstaxi's
  - De taxi vertrekt zodra vier passagiers zijn ingestapt.
  - De taxi vertrek 10 minuten nadat de eerste passagier is ingestapt.
  - Passagiers arriveren volgens een Poisson proces met een gemiddelde van één passagier per drie minuten.

- Vragen:
  a. Je stapt als eerste in, wat is de kans dat je 10 minuten moet wachten?
  b. Je bent als eerste ingestapt en zit al vijf minuten te wachten. In deze tijd zijn twee passagiers ingestapt. Wat is de kans dat je nog vijf minuten moet wachten?

Poisson proces : voorbeeld 1

- Vragen:

  a. Je stapt als eerste in, wat is de kans dat je 10 minuten moet wachten?

- Antwoord:

  - Je moet alleen 10 minuten wachten als er in de 10 minuten nadat je bent ingestapt minder dat 3 passagiers instappen.

    - Kies een minuut als tijdseenheid

    - Poisson verdeling met de verwachtingswaarde van 10λ met $\lambda = \dfrac{1}{3}$

    - $P(\text{je moet 10 minuten wachten})$

$$= P(\text{de komende 10 minuten stappen 0, 1 of 2 passagiers in})$$

$$= e^{-10\lambda} + e^{-10\lambda}\frac{10\lambda}{1!} + e^{-10\lambda}\frac{(10\lambda)^2}{2!} = 0.3528$$

Poisson proces : voorbeeld 1

- Vragen:
  b. Je bent als eerste ingestapt en zit al vijf minuten te wachten. In deze tijd zijn twee passagiers ingestapt. Wat is de kans dat je nog vijf minuten moet wachten?

- Het antwoord op b is te bepalen met behulp van de geheugenloosheid van het proces:
  - De wachttijd tot de aankomst van de eerstkomende passagier is exponentieel verdeeld met een verwachtingswaarde van 3 minuten
    - Ongeacht hoe lang geleden de eerste passagier instapte.
  - De kans dat je nog 5 minuten moet wachten is dus

$$P(\text{je moet nog 5 minuten wachten})$$
$$= e^{-5\lambda} = 0.1889$$

Poisson proces : voorbeeld 2

- Je komt op een random moment tussen 5 uur en 5:15 bij de bushalte aan om de eerstvolgende bus naar huis te nemen. Je kunt buslijnen 1 en 3 nemen:
  - Buslijn 1 vertrekt precies op het hele uur en elke 15 minuten daarna.
  - Buslijn 3 vertrekt gemiddeld één keer per 15 minuten waarbij de vertrekmomenten Poisson verdeeld zijn.
- Wat is de kans dat je met buslijn 1 naar huis gaat?
  - Het duurt nog x minuten voordat bus 1 volgens schema aankomt
  - $P(\text{je gaat met bus 1 naar huis})$

    $= P(\text{er komt in de komende } x \text{ minuten geen bus 3})$

    $= e^{-\lambda x}$
  - met $\lambda = \dfrac{1}{15}$ volgt dat middelen over een uniform verdeelde tijd levert:
- $P(\text{je gaat met bus 1 naar huis})$

  $$= \frac{1}{15}\int_0^{15} e^{-\lambda x} dx = 1 - \frac{1}{e} \; (> \tfrac{1}{2})$$

Poisson proces : alternatieve definitie

- Bij een Poisson aankomstproces heeft *het aantal aankomsten* in een gegeven tijdsinterval een *discrete* (Poisson) verdeling

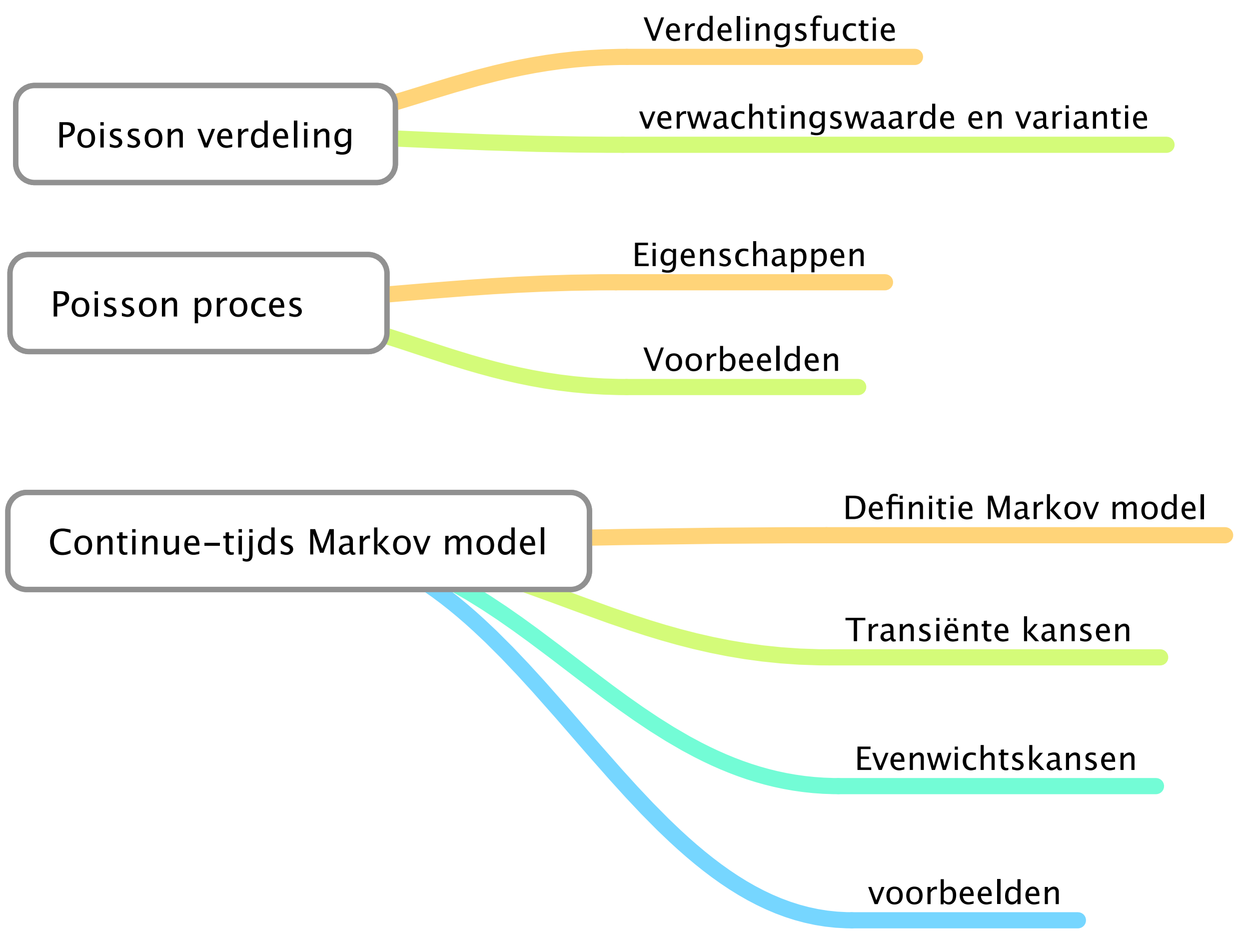
- De tijd tussen twee opeenvolgende aankomsten heeft een *continue (exponentiële)* verdeling

- Dit is in te zien met behulp van de stelling:

$$\begin{aligned} & P(\text{tijd tussen twee opeenvolgende aankomsten is groter dan } y) \\ & \quad = P(\text{in een interval met lengte } y \text{ vindt geen aankomst plaats}) \\ & \quad = e^{-\lambda y} \; \forall \; y > 0 \end{aligned}$$

- Bij een Poisson aankomst proces met aankomst intensiteit λ is de stochastische tijd T tussen twe opeenvolgend aankomsten continu verdeeld met verdelingsfunctie $P(T \leq y) = 1 - e^{-\lambda y} \text{ voor } y \geq 0$

Overzicht


Poisson verdeling
Verdelingsfuctie
verwachtingswaarde en variantie
Poisson proces
Eigenschappen
Voorbeelden
Continue-tijds Markov model
Definitie Markov model
Transiënte kansen
Evenwichtskansen
voorbeelden

Het continue-tijds Markov model

- Beschouw een stochastisch, dynamisch systeem met een discrete toestandsruimte I .
- Het systeem springt van toestand naar toestand volgens de regels:
    1. de verblijftijd in elke toestand i is exponentieel verdeeld met verwachtingswaarde $1/\nu_i$
    2. na afloop van de verblijftijd in toestand i springt het systeem naar een andere toestand j met gegeven kans p_{ij}
- Als toestand i wordt verlaten dan wordt deze ook echt verlaten, dus $p_{ii} = 0$
- Voor de overgangslansen geldt:

$$\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1 \text{ voor alle } i \in I$$

Het continue-tijds Markov model

- Voorbeeld :
  - In het magazijn van een IKEA vestiging zijn kasten van het type BILLY opgeslagen.
  - Klanten die een BILLY willen kopen komen binnen volgens een Poisson proces met intensiteit λ .
  - De voorraad BILLY kasten kan worden aangevuld uit de voorraad in de hoofdvestiging volgens een Poisson proces met intensiteit μ en is onafhankelijk van het vraag proces.
  - De voorraad wordt alleen aangevuld als alle BILLY kasten verkocht zijn.
  - De voorraad wordt dan aangevuld tot Q kasten.
- Vragen :
  - Wat is de gemiddelde voorraad uit het magazijn?
  - Hoe lang zit de vestiging zonder voorraad?

Infinitesimale transitie-intensiteit

- Afgezien van de verblijftijd in een toestand kan men ook kijken naar de kans dat het systeem naar een andere toestand springt.

  - Stel dat op tijdstip t het proces in een gegeven toestand i is
  - De resterende verblijftijd in toestand i heeft een exponentiële kansverdeling met verwachtingswaarde $1/\nu_i$
  - De kans dat in het interval $(t, t + \Delta t)$ het proces de toestand i verlaat is $\nu_i \Delta t$ voor een kleine Δt
  - Als het proces de toestand i verlaat dan springt het met de kans p_{ij} naar toestand j
  - De kans dat in het interval $(t, t + \Delta t)$ het proces naar de toestand j springt is dan $(\nu_i \Delta t) p_{ij}$
  - De kans dat in het interval $(t, t + \Delta t)$ het proces naar de toestand i blijft is dan $1 - \nu_i \Delta t$

Infinitesimale transitie-intensiteit

- Samenvattend:

$$P\Big(X(t+\Delta t) = j | X(t) = i\Big) = (\nu_i p_{ij})\Delta t \ \ \forall j \neq i$$

$$P\Big(X(t+\Delta t) = i | X(t) = i\Big) = 1 - \nu_i \Delta t \ \ \forall j \neq i$$

- De *infinitesimale transitie-intensiteit* is nu gedefinieerd als

$$q_{ij} = \nu_i p_{ij} \text{ voor } i, j \in I \text{ met } i \neq i$$

- De q_{ij} hebben de volgende interpretatie :

$$\begin{aligned} &P(\text{het proces springt in het tijdsinterval } \Delta t \text{ naar een nieuwe toestand } j \\ &\quad \text{als het in toestand } i \text{ is}) \\ &\quad = q_{ij}\Delta t \end{aligned}$$

Het continue-tijds Markov model

- Voorbeeld :
  - In het magazijn van een IKEA vestiging zijn kasten van het type BILLY opgeslagen.
  - Klanten die een BILLY willen kopen komen binnen volgens een Poisson proces met intensiteit λ .
  - De voorraad BILLY kasten kan worden aangevuld uit de voorraad in de hoofdvestiging volgens een Poisson proces met intensiteit μ en is onafhankelijk van het vraag proces.
  - De voorraad wordt alleen aangevuld als alle BILLY kasten verkocht zijn.
  - De voorraad wordt dan aangevuld tot Q kasten.
- Vragen :
  - Wat is de gemiddelde voorraad uit het magazijn?
  - Hoe lang zit de vestiging zonder voorraad?

Het continue-tijds Markov model

- Definieer nu voor elke $t \geq 0$ de stochastische variabele $X(t)$ als

$$X(t) = \text{ de voorraad van het systeem op tijdstip t}$$

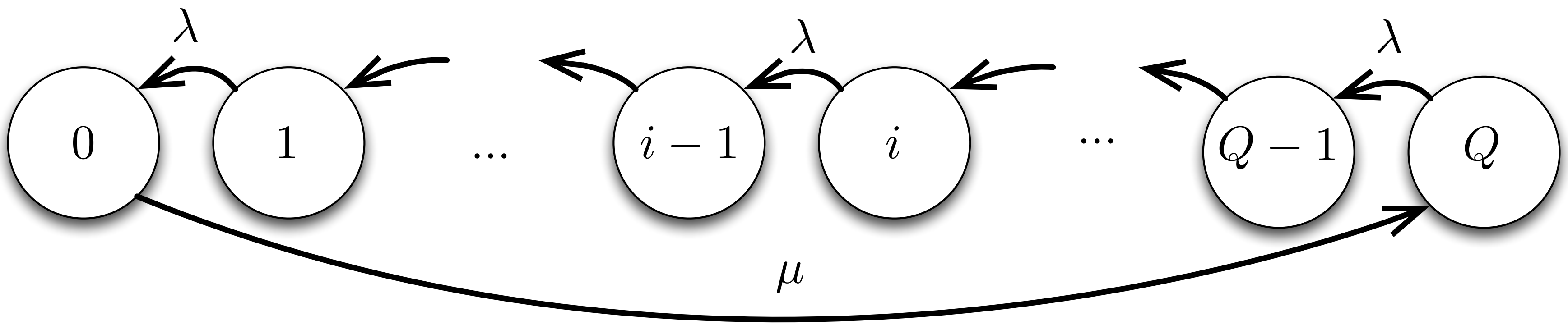
  - Hierbij wordt op het sprongtijdstip de toestand *direct na* de sprong genomen
  - De toestandsruimte van het stochastische proces is $I = \{0, 1, \ldots, Q\}$
  - De verblijftijd in toestand i is exponentieel verdeeld met

$$\nu_i = \begin{cases} \lambda \text{ voor } i = 1, 2, \ldots, Q \\ \mu \text{ voor } i = 0 \end{cases}$$

  - De overgangskansen hebben een simpele vorm

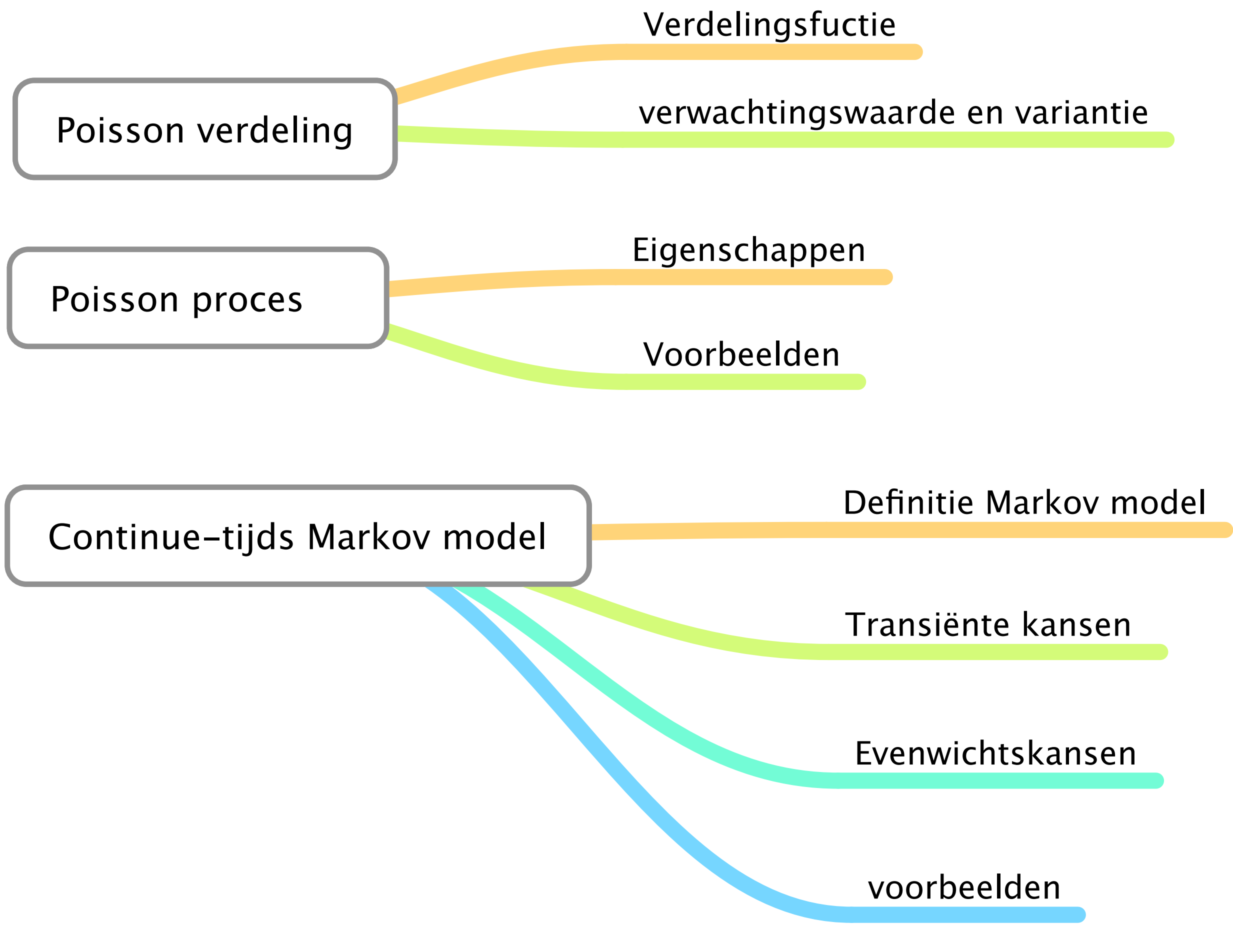
$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= 1 \text{ voor } i = 1, 2, \ldots, Q \\ p_{0,Q} &= 1 \text{ en overige } p_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Het continue-tijds Markov model



- Grafische weergave van het IKEA model (toestandsdiagram)

Overzicht


Poisson verdeling
Verdelingsfuctie
verwachtingswaarde en variantie
Poisson proces
Eigenschappen
Voorbeelden
Continue-tijds Markov model
Definitie Markov model
Transiënte kansen
Evenwichtskansen
voorbeelden

Voorbeeld : storing kopieermachine

	Storing		Reparatie	
Gemiddeld :	$1/\gamma_1$	$1/\gamma_2$	$1/\beta_1$	$1/\beta_2$
Frequentie :	γ_1	γ_2	β_1	β_2

Exponentiële verdeling

- Twee kopieermachines worden onderhouden door één servicemonteur.
- Formuleer het continue tijds Markov proces dat dit systeem beschrijft.
    - Markov eigenschap voor continue tijd:

$$P(X(t_3) = j | X(t_2) = i, X(t_1), 0 \leq t_1 \leq t_2) = P(X(t_3) = j | X(t_2)) \;\; \forall\ 0 \leq t_2 < t_3$$

Voorbeeld : storing kopieermachine

- Toestanden Markov model

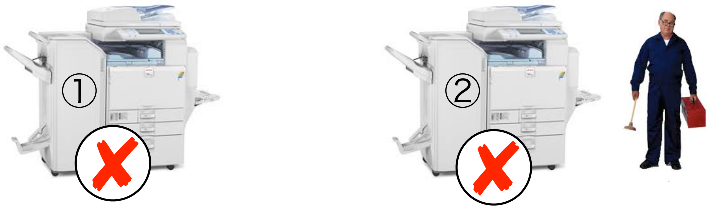
  1) Kopieermachine 1 en 2 werken

  2) Kopieermachine 1 gaat in storing terwijl kopieermachine 2 werkt

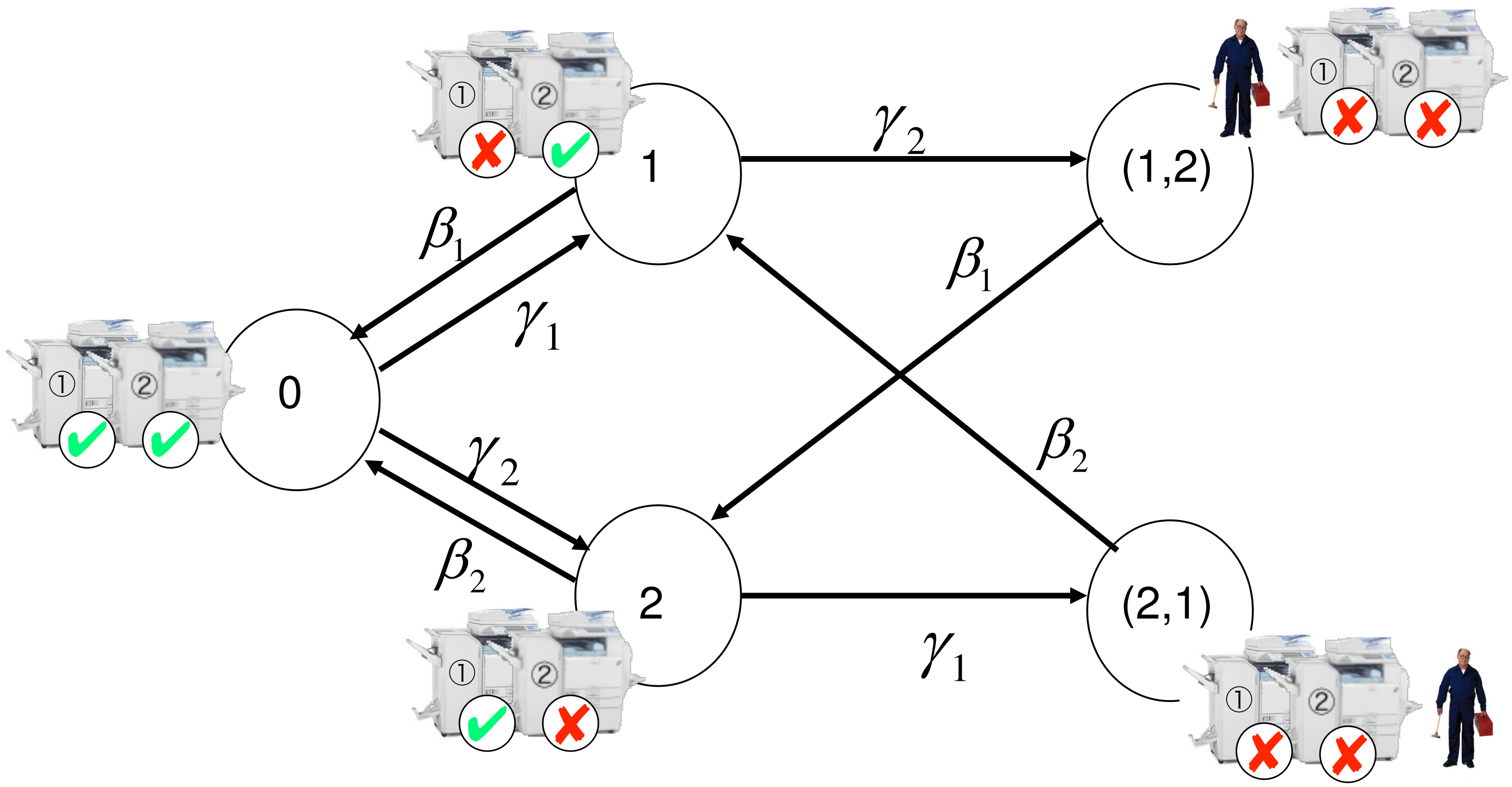
  3) Kopieermachine 2 gaat in storing terwijl kopieermachine 1 werkt

  4) Kopieermachine 2 gaat in storing terwijl kopieermachine 1 wordt gerepareerd

  5) Kopieermachine 1 gaat in storing terwijl kopieermachine 2 wordt gerepareerd



Voorbeeld : storing kopieermachine



	Storing		Reparatie	
Gemiddeld :	$1/\gamma_1$	$1/\gamma_2$	$1/\beta_1$	$1/\beta_2$
Frequentie :	γ_1	γ_2	β_1	β_2

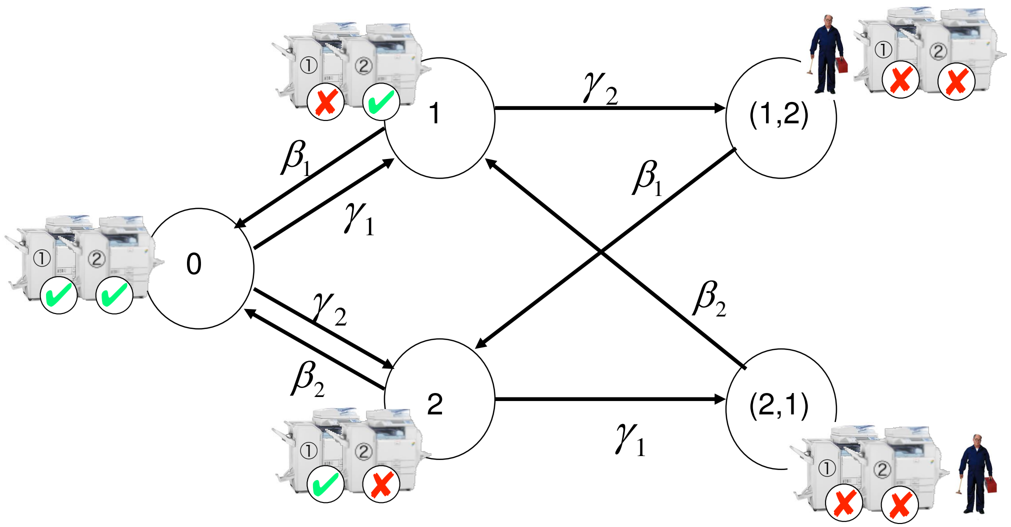
Exponentiële verdeling

Voorbeeld : storing kopieermachine

- Op basis van de *infinitesimale transitie-intensiteit* kan het proces worden beschreven met matrix Q

- Merk op dat de kans dat het proces in de zelfde toestand blijft gegeven wordt door:

$$Q_{i,i} = -\sum_{j,j\neq i} Q_{i,j} \quad \text{for all} \quad i$$



$$Q = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ (1,2) \\ (2,1) \end{array} \begin{pmatrix} -(\gamma_1+\gamma_2) & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ \beta_1 & -(\gamma_2+\beta_1) & 0 & \gamma_2 & 0 \\ \beta_2 & 0 & -(\gamma_1+\beta_2) & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \beta_1 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld : storing kopieermachine

- Stel dat gegeven is dat $\gamma_1 = 1,\ \beta_1 = 2,\ \gamma_2 = 3$ en $\beta_2 = 4.$

- Invullen levert :

$$Q = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ (1,2) \\ (2,1) \end{array} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- Oplossen $\alpha Q = 0$ met $\alpha \mathbf{e} = 1$ levert

$$\alpha \equiv (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{(1,2)}, \alpha_{(2,1)}) = \left(\frac{44}{129}, \frac{16}{129}, \frac{36}{129}, \frac{24}{129}, \frac{9}{129}\right)$$

- Lange termijn kans dat kopieermachine 1 werkt is $\alpha_0 + \alpha_2 = 80/129 \approx 0.62,$
- Lange termijn kans dat kopieermachine 2 werkt is $\alpha_0 + \alpha_1 = 60/129 \approx 0.47.$

Vragen?

- Jan van Hulzen : j.r.van.hulzen@hva.nl

- Liv Harkes : l.harkes@hva.nl