# Lineaire Algebra Thema 5

## Gauss-Jordaneliminatie en LU-decompositie

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

3 oktober 2024

# Inhoudsopgave

# Overzicht cursus

# Overzicht cursus

Het vak Lineaire Algebra bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd ALETVT2A (ma 12:30 op ...)
- Deeltijd ALETDT2 (wo 14:00 op ...)

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

# Overzicht cursus (onder voorbehoud)

- Thema 1, 3.1 Vectoren, 3.2 Matrices
- Thema 2, 3.3 Lineaire afbeeldingen, 3.4 Determinanten
- Thema 3, 3.5 Regel van Cramer 3.6 Methode van Gauss
- Thema 4, 3.7 Pivoting en Rijschaling 3.8 Inverse matrix
- Thema 5, 3.9 Gauss-Jordan eliminatie 3.10 LU decompositie
- Thema 6, 3.11 Eigenwaarden en Eigenvectoren.
- Thema 7, Tentamen voorbereiding

# Overzicht stof van vandaag

- Paragraaf 3.9 Gauss-Jordan eliminatie
- Paragraaf 3.10 LU decompositie

# 3.9 Gauss-Jordan eliminatie

# Gauss-Jordan eliminatie

inholland hogeschool

De inverse van een matrix berekenen vergt veel rekenwerk, het kan efficiënter met behulp van elementaire bewerkingen:

- Je kan rijen verwisselen (In het boek staat op blz 111 dat rijen verwisselen niet mag, dat moet zijn dat dit wel mag)
- je kan een rij vermenigvuldigen met een constante $c \neq 0$
- Je kan rijen en veelvouden daarvan bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken

Gauss-Jordan eliminatie werkt als volgt:

- Links schrijf je een niet-singuliere matrix A, rechts de eenheidsmatrix
- Bewerkingen links voer je ook rechts uit
- Het doel is om links een eenheidsmatrix te krijgen
- Rechts ontstaat dan de inverse van A

# Voorbeeld 3.23

- Begin met de matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- De bewerkingen zijn nu als volgt

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{rij1-4}\cdot\text{rij3} \\ \text{rij1-2}\cdot\text{rij2} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 7 & -13 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ -7 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Elimineer element rij1, kolom 1 met rij1 en rij2

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 7 & -13 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ -7 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{rij1+rij2} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -16 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ -7 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# Voorbeeld 3.23

- Deel rij1 door 16

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -16 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ -7 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{rij1}\div 16 \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -7 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Verplaats rij1 naar rij2 en zet 3 keer rij1+rij2 op rij1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -7 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 3\cdot\ \text{rij1}+\text{rij2} \\ \text{rij1 naar rij2} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{13}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Deel rij1 door 7

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{13}{8} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{rij1}\div\text{(-7)} \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{56} & \frac{13}{36} & -\frac{3}{28} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# Voorbeeld 3.23

- De laatste stap is het leeg maken van kolommen 1 en 2 van rij3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{56} & \frac{13}{36} & -\frac{3}{28} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ rij3+rij1-3}\cdot\text{rij2} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{56} & \frac{13}{56} & -\frac{3}{28} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

- het eindresultaat is

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{56} & \frac{13}{56} & -\frac{3}{28} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} -5 & 13 & -6 \\ -7 & 7 & 14 \\ 16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

- Let op dat in het boek de 14 een 19 is, dit klopt niet.

# Voorbeeld 3.23

- Gebruiken we de rechtstreekse methode dan volgt $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- De minoren worden

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot 3 & -(5\cdot 1 + 2\cdot 1) & 5\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ -(-1\cdot 1 - 4\cdot 3) & 3\cdot 1 + 4\cdot 1 & -(3\cdot 3 - 1\cdot 1) \\ -1\cdot 2 - 4\cdot 1 & -(3\cdot 2 - 4\cdot 5) & 3\cdot 1 + 1\cdot 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -7 & 16 \\ 13 & 7 & -8 \\ -6 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

- De determinant volgt dan met $3\cdot(-5) + 5\cdot 13 - 1\cdot(-6) = 56$
- Het eindresultaat is $A^{-1} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} -5 & 13 & -6 \\ -7 & 7 & 14 \\ 16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

# Gauss-Jordan eliminatie

Een meer gestructureerde aanpak is ook mogelijk

- Maak alle elementen onder de hoofddiagonaal 0
- Maak de elementen op de hoofddiagonaal 1
- Werk van boven naar beneden
- Maak alle elementen boven de hoofddiagonaal 0
- Werk van onder naar boven.

# Voorbeeld 3.23

- Een meer gestructureerde aanpak

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ rij1}\div 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Veeg rij 2 en 3 van kolom 1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{rij2-5rij1} \\ \text{rij3+rij1} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# Voorbeeld 3.23

- Veeg kolom2, elimineer rij3, kolom2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \text{rij3-rij2} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- Elimineer rij1, kolom2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{14}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{rij2} \div \frac{8}{3} \\ \text{rij3} \div 7 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

# Voorbeeld 3.23

- Veeg kolom3, elimineer rij1 en rij 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{rij1-}\frac{4}{3}\text{rij3} \\ \text{rij2}+\frac{7}{4}\text{rij3} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{4}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

- Veeg kolom2, rij1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{4}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right) \text{rij1}+\frac{1}{3}\text{rij2} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{56} & \frac{13}{56} & -\frac{3}{28} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

# Voorbeeld 3.23

- Het eindresultaat is weer.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{56} & \frac{13}{56} & -\frac{3}{28} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{56} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 13 & -6 \\ -7 & 7 & 19 \\ 16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

- Het voordeel is dat de methode gestructureerd is
- Het nadeel is dat je veel met breuken moet werken
- Een alternatieve methode is LU-decompositie

# 3.10 LU-decompositie

# LU-decompositie

- Een matrix $A$ is vaak te schrijven als een product van $L$ en $U$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

- Als $A = LU$ dan is $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$ hetgeen volgt uit

$$A \cdot A^{-1} = LU \cdot U^{-1}L^{-1} = L \cdot I \cdot L^{-1} = L \cdot L^{-1} = I$$

- De inversen $L^{-1}$ en $U^{-1}$ zijn eenvoudig te bepalen, $|L| = 1$ en $|U| = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33}$.
- De determinanten zijn $|A| = |L| \cdot |U| = 1 \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33}$.

# LU-decompositie: Bepaal $L^{-1}$

- Bepaal $L^{-1}$, start met het bepalen van de onderdeterminanten

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & l_{21} \cdot l_{32} - l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Spiegel in de hoofddiagonaal en pas de tekens aan

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ l_{21} \cdot l_{32} - l_{31} & -l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

- Delen door de determinant is niet nodig, deze is gelijk aan 1.

# LU-decompositie: Bepaal $U^{-1}$

- Bepaal $U^{-1}$, start met het bepalen van de onderdeterminanten

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_{22} \cdot u_{33} & 0 & 0 \\ u_{12} \cdot u_{33} & u_{11} \cdot u_{33} & 0 \\ u_{12} \cdot u_{23} - u_{22} \cdot u_{13} & u_{11} \cdot u_{23} & u_{11} \cdot u_{22} \end{pmatrix}$$

- Spiegel in de hoofddiagonaal en pas de tekens aan

$$\begin{pmatrix} u_{22} \cdot u_{33} & -u_{12} \cdot u_{33} & u_{12} \cdot u_{23} - u_{22} \cdot u_{13} \\ 0 & u_{11} \cdot u_{33} & -u_{11} \cdot u_{23} \\ 0 & 0 & u_{11} \cdot u_{22} \end{pmatrix}$$

- Delen door de determinant, deze is gelijk aan $u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33}$.

# LU-decompositie: Bepaal $U^{-1}$

- Het resultaat is

$$U^{-1} = \frac{1}{u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33}} \cdot \begin{pmatrix} u_{22} \cdot u_{33} & -u_{12} \cdot u_{33} & u_{12} \cdot u_{23} - u_{22} \cdot u_{13} \\ 0 & u_{11} \cdot u_{33} & -u_{11} \cdot u_{23} \\ 0 & 0 & u_{11} \cdot u_{22} \end{pmatrix}$$

- Het eindresultaat is dat we $A^{-1}$ kunnen bepalen met $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

# LU-decompositie: Toepassing

- Een stelsel vergelijkingen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ kan je oplossen met $A = LU$ zonder dat je de inverse hoeft te berekenen.
$$A\boldsymbol{x} = LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
- Stel $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, los op $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ met *voorwaartse substitutie*.
- Los vervolgens $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ op met *terugwaartse substitutie*.
- Het oplossen van een groot aantal vergelijkingen met dezelfde coëfficiëntenmatrix is efficiënter met LU decompositie.

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

inholland hogeschool

- Bepaal de LU-decompositie van de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$
- Los met behulp van LA-decompositie de vergelijking $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ met $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ op.
- Bepaal de inverse van $A$.

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

- Matrices $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$ en $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$ vormen $LU = A$
- gebruik de eerste rij

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

- Hieruit weten we dat $u_{11} = 2, u_{12} = 1$ en $u_{13} = -3$.

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

- Het invullen van $u_{11} = 2, u_{12} = 1$ en $u_{13} = -3$ levert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

- Dit levert $2l_{21} = 6 \Rightarrow l_{21} = 3$ en $2l_{31} = -4 \Rightarrow l_{31} = -2$, vul in

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

- Vermenigvuldig nu rij2 met kolom 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

- Dit levert $3 + u_{22} = 1 \Rightarrow u_{22} = -2$, invullen levert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

- Vermenigvuldig nu rij3 met kolom 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

- Het volgt dat $-2 - 2l_{32} = -12 \Rightarrow l_{32} = 5$, invullen levert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

- Vermenigvuldig nu rij2 met kolom3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

- Het resultaat is $-9 + u_{23} = -7 \Rightarrow u_{23} = 2$, invullen geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

- Vermenigvuldig nu rij3 met kolom3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

- Het resultaat is $6 + 10 + u_{33} = 15 \Rightarrow u_{33} = -1$, invullen geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \\ -4 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

- Met dit resultaat kunnen we de vraag $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ oplossen door eerst $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ op te lossen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Het volgt direct dat $y_1 = 2, y_2 = 2, y_3 = 1$, los daarna $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ op

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- waarmee volgt $x_3 = -1, x_2 = -2$ en $x_1 = \frac{1}{2}$.

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

- Met dit resultaat kunnen we de vraag $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ oplossen door eerst $L^{-1}$ te bepalen met behulp van Gauss-Jordaneliminatie

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ rij2-3rij1 } \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Veeg rij3 met behulp van rij1 en rij2

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ rij3+2rij1-5rij2 } \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

- Bepaal nu $U^{-1}$ te bepalen met behulp van Gauss-Jordaneliminatie

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{-rij3} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- Trek 2 keer rij3 af van rij 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \text{rij2-2rij3} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24



- Deel rij2 door -2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) -\tfrac{1}{2}\cdot\text{rij2} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- Trek 2 keer rij2 en 3 keer rij3 af van rij1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \text{rij1-rij2+3rij3} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24

- Deel rijq door 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{2}\cdot\text{rij1} \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- Het eindresultaat is

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 17 & -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

# LU-decompositie: Voorbeeld 3.24



- De inverse van $A$ wordt nu

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 17 & -5 & 1 \end{pmatrix} == \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -69 & 21 & -4 \\ -62 & 18 & -4 \\ -68 & 20 & -4 \end{pmatrix}$$