Differentiaalvergelijkingen Thema 3

Het oplossen van eerste orde differentiaalvergelijkingen met het superpositiebeginsel, exacte differentiaalvergelijkingen.

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

2 december 2024

inholland hogeschool

Inhoudsopgave

Overzicht cursus

Overzicht cursus

Het vak differentiaalvergelijkingen bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd ALETVT2A Woensdag (maandag)
- Deeltijd ALETDT2 Woensdag

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

Vorige week

Overzicht stof van vorige week

- Eerste orde differentiaalvergelijkingen zonder y-termen

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

- Eerste orde differentiaalvergelijkingen met y-termen

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = g(x)$$

- Scheiden van variabelen $dy = g(x)dx \Rightarrow \int dy = \int g(x)dx$
- Scheiden van variabelen met Integrerende factor $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

$$d(\mu(x) \cdot y) = (\mu(x)g(x))dx \Rightarrow \mu(x) \cdot y = \int \mu(x)g(x)dx + C$$

Vandaag

Overzicht stof van vandaag

- Eerste orde differentiaalvergelijkingen die *lineair* zijn

$$\frac{dy}{dx} - y = \cos(x)$$

- Het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen met het superpositiebeginsel

$$y(x) = y_{hom} + y_{part}$$

- Eerste orde differentiaalvergelijkingen die *exact* zijn

$$2x + y^2 + 2xy\frac{dx}{dy} = 0$$

- Het oplossen van exacte differentiaalvergelijkingen (Geen tentamenstof)

Lineaire differentiaalvergelijkingen

Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Een **eerste orde lineaire differentiaalvergelijking** kan worden uitgedrukt in de vorm

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

waarbij de uitdrukking voldoet aan de voorwaarden:

- De afhankelijke variabele (y) of de afgeleiden worden niet tot machten verheven,
- De coëfficiënten zijn functies van de *onafhankelijke* variabele (x) of zijn constant.
- De coëfficiënten zijn *geen* functies van de afhankelijke variabele (y).

Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Superpositie beginsel

De oplossing van een Lineaire differentiaalvergelijking kan worden geschreven als de som van een *homogeen* gedeelte y_{hom} en een *particulier* gedeelte y_{part} zodat

$$y = y_{hom} + y_{part}$$

Dit heet het *superpositie beginsel*.

De oplossingsmethode

- Los het homogene gedeelte op $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$ met $y_{hom} = ae^{bx}$
- Los het particuliere gedeelte op door gebruik te maken van een kandidaat functie y_{part} zoals bijvoorbeeld $y_{part} = c$ of $y_{part} = c\sin(x) + d\cos(x)$ afhankelijk van de vorm van $g(x)$

Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

inholland hogeschool

Voorbeeld 1: Los op

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1, \quad y(0) = 0$$

- Los het homogene gedeelte op $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$ met $y_{hom} = ae^{bt}$ waaruit volgt

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \Rightarrow abe^{bt} + ae^{bt} = 0 \Rightarrow a(b+1)e^{bt} = 0$$

  waaruit volgt dat $b = -1$ omdat $e^{bt} > 0 \quad \forall t, b \in \mathbb{R}$.
- Los het particuliere gedeelte met de kandidaat functie $y_{part} = c$

Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Voorbeeld 1 vervolg:

$$\frac{dy_{part}(t)}{dt} + y_{part}(t) = 1$$

- Vul in $y_{part}(t) = c$ dan volgt
$$0 + c = 1$$
dat $c = 1$.
- met $y(t) = y_{hom}(t) + y_{part}(t)$ en $y(0) = 0$ volgt $a = -1$.
- De oplossing is dus
$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Voorbeeld 2: Los op

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \cos(2t), \quad y(0) = 0$$

- Los het homogene gedeelte op $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$ met $y_{hom} = ae^{bt}$ waaruit volgt

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \Rightarrow abe^{bt} + ae^{bt} = 0 \Rightarrow a(b+1)e^{bt} = 0$$

  waaruit volgt dat $b = -1$ omdat $e^{bt} > 0 \quad \forall t, b \in \mathbb{R}$.

- Los het particuliere gedeelte met de kandidaat functie $y_{part} = c\cos(2t) + d\sin(2t)$

Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

Voorbeeld 2 vervolg:

$$\frac{dy_{part}(t)}{dt} + y_{part}(t) = \cos(2t)$$

- Vul in $y_{part} = c\cos(2t) + d\sin(2t)$ dan volgt voor $t \geq 0$

$$-2c\sin(2t) + 2d\cos(2t) + c\cos(2t) + d\sin(2t) = \cos(2t)$$
$$\Rightarrow (c+2d)\cos(2t) + (d-2c)\sin(2t) = \cos(2t)$$

  waarna volgt $c = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$.
- met $y(0) = 0$ volgt $y(t) = ae^{-t} + \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{2}{5}\sin(2t)$ en dus $a = -\frac{1}{5}$.
- De oplossing is dus

$$y(t) = y_{hom} + y_{part} = -\frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{2}{5}\sin(2t)$$

Lineaire differentiaalvergelijkingen

Opgaven

- Los op

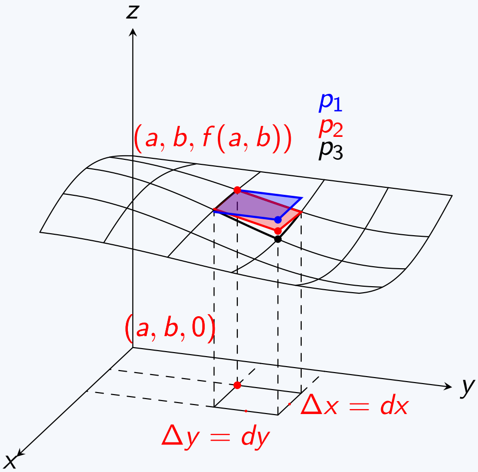
$$\frac{dy}{dt} + 3y = t$$

- Los op

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 3x^2 + 5x - 2$$

Exacte differentiaalvergelijkingen (Geen tentamenstof)

De totale differentiaal



- $p_1 = (a + \Delta x, b + \Delta y, f(a, b))$
- Bepaal een raakvlak (rood) en bereken dz

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

- $p_2 = (a, b, f(a, b) + dz)$
- $p_3 = (a + \Delta x, b + \Delta y, f(a + \Delta x, b + \Delta y))$
- Als $dx = \Delta x - a$ en $dy = \Delta y - b$ dan

$$dz = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(\Delta x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(\Delta y - b)$$

- Als $\Delta x \longrightarrow 0$ en$\Delta y \longrightarrow 0$ dan

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

Exacte differentiaalvergelijkingen

inholland hogeschool

- Neem aan dat we een differentiaalvergelijkingen hebben in de vorm

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

- met daarin de functie $M(x,y)$ en $N(x,y)$ gedefinieerd als

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

- Dan volgt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

  waarna gesteld kan worden dat

$$\frac{df(x,y)}{dx} = 0$$

- Integreren levert dan $f(x,y) = c$.

Exacte differentiaalvergelijkingen

Voorbeeld 1:

- Neem aan dat we een differentiaalvergelijkingen hebben in de vorm

$$4x + 2y^2 + 4xy\frac{dy}{dx} = 0$$

- gaan we nu uit van $f(x, y) = 2x^2 + 2xy^2$ dan volgt

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x + 2y^2, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4xy$$

- We kunnen nu de vergelijking schrijven als

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \Rightarrow \frac{df(x,y)}{dx} = 0$$

- Integreren levert dan $f(x, y) = 2x^2 + 2xy^2 = c$ of $y = \sqrt{\frac{c-x^2}{x}}$

Test of een differentiaalvergelijking exact is

Exact

Als $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\partial M(x,y)/\partial y$ en $\partial N(x,y)/\partial x$ continue zijn in een vierkant R is

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

een exacte differentiaalvergelijking als

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

op elk punt in het vierkant R

Exacte differentiaalvergelijkingen

Voorbeeld 1:

- De differentiaalvergelijking uit voorbeeld 1 is

$$4x + 2y^2 + 4xy\frac{dy}{dx} = 0$$

het blijkt dat

$$M(x,y) = 4x + 2y^2, \quad N(x,y) = 4xy$$

- Pas de test toe waaruit volgt

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4y$$

zodat de conclusie is dat de differentiaalvergelijking inderdaad exact is.

Exacte differentiaalvergelijkingen

Voorbeeld 2, een toepassing:

- Neem aan dat we een differentiaalvergelijkingen hebben in de vorm

$$2xy + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

- $M(x, y)$ en $N(x, y)$ hebben de vorm

$$M(x, y) = 2xy, \quad N(x, y) = (1 + x^2)$$

- Uit de test blijkt dat de vergelijking exact is

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x$$

Exacte differentiaalvergelijkingen

Voorbeeld 2, vervolg:

- Het doel is nu om te zoeken naar een functie $f(x,y)$ zodat

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

- Integreren we de functie

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \Rightarrow f(x,y) = x^2y + g(y)$$

waarbij $g(y)$ een onbekende functie is die alleen afhangt van y

Exacte differentiaalvergelijkingen

Voorbeeld 2, vervolg:

- De functie $g(y)$ is nu te bepalen uit $N(x,y)$ omdat

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y), \quad N(x,y) = (1+x^2)$$

zodat met $f(x,y) = x^2y + g(y)$ volgt

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g(y)}{\partial y} = x^2 + 1$$

en dus

$$\frac{\partial g(y)}{\partial y} = 1 \Rightarrow g(y) = y + d$$

en uiteindelijk

$$f(x,y) = x^2y + y + d$$

Exacte differentiaalvergelijkingen

Voorbeeld 2, vervolg:

- Het staat nu vast dat
$$f(x,y) = x^2y + y + d$$
- We kunnen nu de vergelijking schrijven als
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \Rightarrow \frac{df(x,y)}{dx} = 0$$
- Integreren leverde dan $f(x,y) = 2x^2 + 2xy^2 = c$ waarmee uiteindelijk volgt
$$f(x,y) = x^2y + y = c \Rightarrow y = \frac{c}{1+x^2}$$

waarbij d in c is opgenomen.

Exact

Opgaven

- Los op

$$(2x + y^2) + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

- Los op

$$(y\cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y + 3y^2 - 5)dy = 0$$