Differentiaalvergelijkingen Thema 5

Particuliere oplossingen vinden met de methode van onbekende parameters

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

10 december 2024

Inhoudsopgave

Overzicht cursus

Overzicht cursus

Het vak differentiaalvergelijkingen bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd ALETVT2A Wo
- Deeltijd ALETDT2 Wo

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

Overzicht stof van vorige week

- Lineaire, Homogene differentiaalvergelijkingen van de tweede orde

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$

- Tweede orde differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten:

$$y'' + by' + cy = 0$$

- Drie standaard oplossingen

Overzicht stof van vandaag

- Homogene oplossing $y_{hom} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$
- Particuliere oplossing met de methode van onbekende parameters.
  - $y_p(x) = Ae^{Bx}$
  - $y_p = Ax + B$
  - $y_p = A \sin Cx + B \cos Cx$
- Particuliere oplossing in het geval van dat de $g(x)$ overeen komt met y_{hom}
  - $y_p(x) = Axe^{Bx}$
  - $y_p = Ax^2 + Bx + C$
  - $y_p = Ax \sin Cx + Bx \cos Cx$

Particuliere oplossing

Methode van onbekende parameters

Het bepalen van de algemene oplossing van een differentiaalvergelijking in de vorm

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

kan gedaan worden met behulp van de volgend stappen:

- Bepaal de homogene differentiaalvergelijking door $g(x)$ gelijk aan 0 te stellen.
- Bepaal de homogene oplossing y_{hom} met behulp van $y_{hom} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.
- Bepaal de particuliere oplossing y_{part} door een geschikte vorm te vinden met behulp van de methode van onbekende parameters.
- De algemene oplossing kan nu gevonden worden met $y = y_{hom} + y_{part}$.

Methode van onbekende parameters

- Als $g(x)$ in de vorm e^{rx} staat is een oplossing eenvoudig te vinden
- Los op: $y'' - y' - 2y = e^{3x}$
- Stap 1, Bepaal de homogene oplossing y_{hom} met behulp van $y'' - y' - 2y = 0$
- Met $r^2 - r - 2 = 0$ en $(r+1)(r-2) = 0$ volgt

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{2x} \Rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

- Bepaal daarna y_{part} met behulp van

$$y'' - y' - 2y = e^{3x} \Rightarrow \text{ probeer } y_p(x) = Ae^{3x}$$

- Met behulp van $y_p'(x)$ en $y_p''(x)$ volgt $9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = e^{3x}$
- Wegdelen van e^{3x} levert $9A - 3A - 2A = 1 \Rightarrow 4A = 1 \Rightarrow A = 1/4$
- Het volgt dat

$$y_p(x) = \frac{e^{3x}}{4} \text{ en dus met } y = y_h + y_p \text{ volgt } y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{e^{3x}}{4}$$

Methode van onbekende parameters

- Als $g(x)$ een polynoom is kan de particuliere oplossing y_{part} worden gevonden door een polynoom van de zelfde orde.
- Voorbeeld: Los op $y'' = 9x^2 + 2x - 1, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$
- De homogene oplossing wordt gevonden met $y'' = 0$ en is $y' = c_1$ waarmee volgt

$$y_h = c_1 x + c_2$$

- De particuliere oplossing kan dan de vorm hebben

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

- Combineer de homogene en particuliere oplossingen

$$y_h = c_1 x + c_2$$
$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y = y_h + y_p = Ax^2 + (c_1 + B)\,x + (c_2 + C)$$

Methode van onbekende parameters

- De constanten B en C in de vergelijking

$$y = Ax^2 + (c_1 + B)\,x + (c_2 + C)$$

  voegen weinig toe.
- De oplossing is het vermenigvuldigen van y_p met x totdat er genoeg vrijheidsgraden ontstaan

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx \text{ of } y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

- In het laatste geval volgt

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \text{ invullen in } y'' = 9x^2 + 2x - 1$$

  Voor y_p volgt dan

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C = 9x^2 + 2x - 1$$

Methode van onbekende parameters

- Door y_p te vermenigvuldigen met x^2 en dan twee keer te differentieren volgt

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C = 9x^2 + 2x - 1$$

Waarna A, B en C kunnen worden bepaald

$$\begin{aligned} 12A &= 9 & & A = 3/4 \\ 6B &= 2 & \Rightarrow\ & B = 1/3 \\ 2C &= -1 & & C = -1/2 \end{aligned}$$

- En dus

$$y_p = \tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2$$

- Het volgt uiteindelijk dat

$$y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 + \tfrac{3}{4}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2$$

Methode van onbekende parameters

- De algemene oplossing $y = y_h + y_p$ is nu

$$y = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2$$

- Met begincondities $y(0) = 1, y'(0) = 3$ en afgeleide y' volgt

$$y(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2 \Rightarrow y(0) = C_2 = 1$$
$$y'(x) = 3x^3 + x^2 - x + c_1 \Rightarrow y(0) = C_1 = 3$$

- De specifieke oplossing wordt hiermee

$$y = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$$

Methode van onbekende parameters

- Differentiaalvergelijkingen in de vorm

$$y'' - y' - 2y = \sin 2x$$

- kunnen worden opgelost met behulp van een goniometrische vergelijking in de vorm

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$$

in dit voorbeeld volgt

$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$$
$$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

- Invullen levert

$$(-6A + 2B)\sin 2x + (-6B - 2A)\cos 2x = \sin 2x$$

Methode van onbekende parameters

- Uit de vergelijking $(-6A+2B)\sin 2x + (-6B-2A)\cos 2x = \sin 2x$ volgt

$$\left.\begin{array}{rl} -6A+2B & =1 \\ -2A-6B & =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} -6A+2B & =1 \\ 6A+18B & =0 \\ \hline 20B & =1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=\frac{1}{20} \\ A=-\frac{3}{20} \end{array}\right\}$$

- De particuliere oplossing is

$$y_p = \frac{-3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x$$

Methode van onbekende parameters

- Voorbeeld : Los op $y'' + 16y = 4\cos 4x$
- De particuliere oplossing is weer $y_p = A\cos 4x + B\sin 4x$ in dit voorbeeld volgt

$$y_p' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$$
$$y_p'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$$

- Invullen levert

$$(16A - 16A)\cos 4x + (16B - 16B)\sin 4x = 4\cos 4x$$

- Het blijkt dat er geen oplossing is.
- Om te zien hoe dit kan moeten we de homogene oplossing bekijken

$$y'' + 16y = 0 \Rightarrow y = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x$$

- De homogene oplossing is dus identiek aan de particuliere oplossing

Methode van onbekende parameters

- Een oplossing voor dit probleem is het introduceren van een x in de vergelijking

$$y_p = Ax\cos 4x + Bx\sin 4x$$

- in dit voorbeeld volgt dan via de productregel

$$y_p' = A\cos 4x - 4Ax\sin 4x + B\sin 4x + 4Bx\cos 4x$$
$$y_p'' = -4A\sin 4x - 4A\sin 4x - 16Ax\cos 4x + 4B\cos 4x + 4B\cos 4x - 16Bx\sin 4x$$

- invullen van de vergelijking levert dan

$$-4A\sin 4x - 4A\sin 4x - 16Ax\cos 4x + 4B\cos 4x + 4B\cos 4x$$
$$- 16Bx\sin 4x + 16Ax\cos 4x + 16Bx\sin 4x = 4\cos 4x$$

- Door de productregel ontstaan termen die wegvallen tegen elkaar xodat overblijft

$$-8A\sin 4x + 8B\cos 4x = 4\cos 4x \Rightarrow A = 0, \quad B = \frac{1}{2}$$

Methode van onbekende parameters

- De uiteindelijke particuliere oplossing wordt dan

$$y_p = \tfrac{1}{2} x \sin 4x$$

- Combineren we dit resultaat met de homogene oplossing dan volgt de algemene oplossing

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x + \frac{x}{2} \sin 4x$$

Methode van onbekende parameters

- Als g(x) een product is van twee verschillende vormen zoals in het voorbeeld

$$4y'' + y = 5e^x \cos 2x$$

- Zal de particuliere oplossing een soortgelijke mengvorm hebben

$$y_p = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x$$

- In dit geval volgt

$$y_p' = Ae^x \cos 2x - 2Ae^x \sin 2x + Be^x \sin 2x + 2Be^x \cos 2x$$
$$y_p'' = Ae^x \cos 2x - 2Ae^x \sin 2x - 2Ae^x \sin 2x - 4Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x + 2Be^x \cos 2x + 2Be^x \cos 2x - 4Be^x \sin 2x$$

- in de tweede vergelijking kunnen termen gecombineerd worden tot

$$\begin{aligned} y_p'' &= -3Ae^x \cos 2x - 4Ae^x \sin 2x - 3Be^x \sin 2x + 4Be^x \cos 2x \\ &= e^x \cos 2x(-3A + 4B) + e^x \sin 2x(-4A - 3B) \end{aligned}$$

Methode van onbekende parameters

- Invullen levert

$$4\left(-3Ae^x\cos 2x - 4Ae^x\sin 2x - 3Be^x\sin 2x + 4Be^x\cos 2x\right) + \left(Ae^x\cos 2x + Be^x\sin 2x\right) = 5e^x\cos 2x$$

- Het bij elkaar zetten van de gonio termen levert

$$-12Ae^x\cos 2x - 16Ae^x\sin 2x - 12Be^x\sin 2x + 16Be^x\cos 2x + Ae^x\cos 2x + Be^x\sin 2x = 5e^x\cos 2x$$

- uiteindelijk volgt

$$(-11A + 16B)e^x\cos 2x + (-16A - 11B)e^x\sin 2x = 5e^x\cos 2x$$

Methode van onbekende parameters

- Invullen levert

$$\left.\begin{aligned} -11A + 16B &= 5 \\ -16A - 11B &= 0 \end{aligned}\right\}$$

- Hieruit volgt dat $A = -11B/16$ en volgt dat

$$\left.\begin{aligned} -121B + 256B &= 80 \\ -16A - 176/27 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} B &= \tfrac{16}{27} \\ A &= -\tfrac{11}{27} \end{aligned}\right\}$$

- De uiteindelijke particulier oplossing wordt

$$y_p = \frac{-11}{27} e^x \cos 2x + \frac{16}{27} e^x \sin 2x$$