Lineaire Algebra Thema 3

Regel van Cramer, Methode van Gauss

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

19 september 2024

inholland hogeschool

Inhoudsopgave

Overzicht cursus

Overzicht cursus

Het vak Lineaire Algebra bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd ALETVT2A (ma 12:30 op ...)
- Deeltijd ALETDT2 (wo 14:00 op ...)

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

Overzicht cursus (onder voorbehoud)

- Thema 1, 3.1 Vectoren, 3.2 Matrices
- Thema 2, 3.3 Lineaire afbeeldingen, 3.4 Determinanten
- Thema 3, 3.5 Regel van Cramer 3.6 Methode van Gauss
- Thema 4, 3.7 Pivotting en Rijschaling 3.8 Inverse matrix
- Thema 5, 3.9 Gauss-Jordan eliminatie 3.10 LU decompositie
- Thema 6, 3.10 Eigenwaarden en Eigenvectoren.
- Thema 7, Tentamen voorbereiding

Overzicht stof van vandaag

- Paragraaf 3.5 Regel van Cramer
- Paragraaf 3.6 Methode van Gauss

3.5 Regel van Cramer

Regel van Cramer

- Een stelsel van twee eerstegraads vergelijkingen kan je karakteriseren als

$$\left[\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_3x + b_2y = c_2 \end{array}\right]$$

- Het oplossen van die vergelijken kan gedaan worden door

$$\left|\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right|\begin{array}{l} \times b_2 \\ \times b_1 \end{array}\Bigg| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1 \\ a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2 \end{array}\right.$$

- Trekken we de vergelijkingen van elkaar af dan volgt

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$$

- En dus

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

Regel van Cramer

- De vergelijkingen

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

- kunnen worden geschreven als

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Regel van Cramer: voorbeeld 3.10

inholland hogeschool

- De vergelijkingen

$$\left[\begin{array}{r} 3x + 2y - z = -5 \\ x - 4y - 5z = 3 \\ -2x + 3y + z = -9 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

- De regel van Cramer resulteert in

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \\ -9 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}; y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & -9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}; z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

Regel van Cramer: voorbeeld 3.10

- De determinant in de noemer wordt

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\,(-4\cdot 1 + 5\cdot 3) - 1\,(2\cdot 1 + 1\cdot 3) - 2\,(2\cdot -5 - 1\cdot 4) = 56$$

- De eerste determinant in de teller wordt

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \\ -9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\,(-4\cdot 1 + 5\cdot 3) - 3\,(2\cdot 1 + 1\cdot 3) -9\,(2\cdot -5 - 1\cdot 4) = 56$$

- De waarde van x wordt dan $56/56 = 1$

Regel van Cramer: voorbeeld 3.10

- De tweede determinant in de teller is

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \\ -2 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 3(3\cdot 1 - 5\cdot 9) - 1(-5\cdot 1 - 1\cdot 9) - 2(5\cdot 5 + 1\cdot 3) = -168$$

- De waarde van y wordt dan -168/56=-3
- De derde determinant in de teller is

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 3(-4\cdot -9 - 3\cdot 3) - 1(2\cdot -9 + 5\cdot 3) -2(2\cdot 3 - 5\cdot 4) = 112$$

- De waarde van z wordt dan 122/56=2

Regel van Cramer: voorbeeld 3.11 (gecorrigeerd)

- Gegeven zijn basisvectoren $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en vector $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
- Druk de gegeven vector uit in de basisvectoren
- Het volgt dat

$$\left[\begin{aligned} -4\lambda + 3\mu + 2v &= -5 \\ 5\lambda + 7\mu - 2v &= -2 \\ -7\lambda - \mu + 3v &= -5 \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Let op dat de vector die uitgedrukt wordt in de basisvectoren in dit voorbeeld is aangepast. Het trechterlid van de vergelijking is dus anders dan in het boek.

Regel van Cramer: voorbeeld 3.11

- De regel van kramer wordt nu toegepast op

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- met de regel van kramer volgt nu

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & 7 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \\ -7 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix}}; z = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 5 & 7 & -2 \\ -7 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix}}$$

Regel van Cramer: voorbeeld 3.11

- De determinant in de noemer wordt

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4\,(7\cdot 3 - 2\cdot 1) - 5\,(3\cdot 3 - 2\cdot -1) - 7\,(3\cdot -2 - 2\cdot 7) = 9$$

- De eerste determinant in de teller wordt

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & 7 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5\,(7\cdot 3 - 2\cdot 1) + 2\,(3\cdot 3 - 2\cdot -1) -5\,(3\cdot -2 - 2\cdot 7) = 27$$

- De waarde van λ wordt dan $27/9 = 3$

Regel van Cramer: voorbeeld 3.11

- De tweede determinant in de teller is

$$\begin{vmatrix} -4 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \\ -7 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -4\,(-2\cdot 3 - 2\cdot 5) - 5\,(-5\cdot 3 + 2\cdot 5) - 7\,(5\cdot 2 + 2\cdot 2) = -9$$

- De waarde van μ wordt dan -9/9=-1
- De derde determinant in de teller is

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 5 & 7 & -2 \\ -7 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -4\,(7\cdot -5 + 2\cdot 1) - 5\,(3\cdot -5 + 5\cdot 1) -7\,(3\cdot -2 + 5\cdot 7) = 45$$

- De waarde van ν wordt dan 45/9=5

Eliminatiemethode van Gauss en RREF

Eliminatiemethode van Gauss

- De eliminatiemethode van Gauss is een methode om vergelijkingen te vereenvoudigen op een systematische manier.
- De methode is gebaseerd op de volgende bewerkingen
  - Rijen verwisselen
  - Een rij vermenigvuldigen met een constante $c \neq 0$
  - Rijen en veelvouden daarvan optellen bij andere rijen of daarvan aftrekken.
- Het doel is de matrix om te werken naar een bovendriehoeksmatrix

Eliminatiemethode van Gauss: voorbeeld 3.12

- Los het volgende stelsel vergelijkingen op: $\left[\begin{array}{c} 2x+3y+2z=4 \\ x-2y-z=3 \\ 3x-4y+z=-3 \end{array}\right.$
- De eerste stap bestaat uit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{rij1} \ - 2\times \ \text{rij2} \\ \text{rij3} \ - 3\times \ \text{rij2} \end{array}$$

- Stap twee

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -12 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{rij3} \ \div 2 \text{ naar rij2} \\ \text{rij2 naar rij3} \end{array}$$

Eliminatiemethode van Gauss: voorbeeld 3.12

- De stap drie

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & 4 & -2 \end{array}\right) \qquad \text{rij3-7*rij2}$$

- Het resultaat is de row echelon form (REF)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -10 & 40 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{rij1} \ \div 2 \\ \text{rij3} \ \div (-10) \end{array}$$

- Het volgt nu dat

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Uit rij3 volgt z=-4

Uit rij2 volgt y=-6+2$\cdot$ 4= 2

uit rij1 volgt x=2+4-$\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$

Eliminatiemethode van Gauss: voorbeeld 3.12

- We kunnen ook nog verder vegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \qquad \text{rij2} \; - 2 * \; \text{rij3}$$

- waarna volgt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \qquad \text{rij1} - \frac{3}{2} \cdot \; \text{rij2 - rij3}$$

- Het volgt nu dat

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Uit rij1 volgt x=3

Uit rij2 volgt y= 2

uit rij3 volgt z= -4

Eliminatiemethode van Gauss: voorbeeld 3.12

- We kunnen ook nog verder vegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \qquad \text{rij2} - 2 * \text{rij3}$$

- waarna volgt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \qquad \text{rij1} - \frac{3}{2} \cdot \text{rij2 - rij3}$$

- Het volgt nu dat

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Uit rij1 volgt x=3

Uit rij2 volgt y= 2

uit rij3 volgt z= -4

Row Echelon Form (REF)

- Het resultaat van Gauss eliminatie is een matrix in bovendriehoeksvorm.
- Alle elementen van de matrix onder de diagonaal zijn dan gelijk aan 0.
- Alle eventueel voorkomende niet-nulrijen staan boven nulrijen.
- De kopcoëfficienten van een rij (pivot) staan rechts van de kopcoëfficient van de rij er boven.
- Voorbeeld 3.13 matrix in Row Echelon Form.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reduced Row Echelon Form (RREF)

- Een Reduced Row Echelon Form (RREF) is een matrix in REF vorm met als aanvullende eigenschap dat
  - alle kopcoëfficienten van een rij zijn 1 en
  - alle overige elementen van de kolom zijn 0.
- Een matrix in RREF vorm uniek, er zijn meerdere equivalente matrices mogelijk in REF vorm.
- Voorbeeld 3.13 matrix in REF form kan je omwerken naar RREF vorm.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De rang van een matrix

- Een Reduced Row Echelon Form (RREF) is een matrix in REF vorm met als aanvullende eigenschap dat
  - alle kopcoëfficienten van een rij zijn 1 en
  - alle overige elementen van de kolom zijn 0.
- Een matrix in RREF vorm uniek, er zijn meerdere equivalente matrices mogelijk in REF vorm.
- Voorbeeld 3.13 matrix in REF form kan je omwerken naar RREF vorm.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De rang van een matrix

- De rang van en matrix is het aantal niet-nul rijen van in de RREF vorm van een matrix.
- Als een vergelijking twee keer voorkomt in het zelfde stelsel dan is er sprake van een afhankelijke relatie en een reductie in de rang van de matrix.
- De rang van de matrix is te berekenen door de grootst mogelijke vierkante deelmatrix te bepalen met een determinant die ongelijk is aan 0.
- De rang van een $n \times m$ matrix van kan dus niet groter zijn dan het minimum van n en m.

Voorbeeld 3.15

1 Een vergelijking van een vlak in $\mathbb{R}^3$ is bijvoorbeeld

$$3x - 2y + 5z = 12$$

Er zijn oneindig veel oplossingen. De rang van de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 4 \end{array}\right)$$

is gelijk aan 1.

Voorbeeld 3.15

2 Een stelsel met twee vergelijkingen in $\mathbb{R}^3$ is bijvoorbeeld

$$\left[\begin{array}{l} 2x+3y-z=5 \\ x-2y+2z=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{22}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{array}\right)$$

Er zijn oneindig veel oplossingen, deze oplossingen liggen op de snijlijn tussen de twee vlakken. Omwerken van de vergelijkingen levert

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{5}{2} \\ y=\frac{5}{7}z-\frac{3}{7} \\ z=z \end{array}\right.$$

Kiezen we een z waarde dan volgen x en y. Het stelsel heeft één vrijheidsgraad.

Voorbeeld 3.15

2 Een stelsel met twee vergelijkingen in $\mathbb{R}^3$ is bijvoorbeeld

$$\left[\begin{array}{r} 2x - 3y - z = 4 \\ 4x - 6y - 2z = 3 \end{array}\right.$$

Er zijn geen oplossingen, de vlakken zijn evenwijdig en de rang van de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 4 & -6 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

is 0, er is een kopcoëfficient in de laatste kolom. Het stelsel is strijdig.

Voorbeeld 3.15

3 Een stelsel met twee vergelijkingen in $\mathbb{R}^3$ is bijvoorbeeld

$$\left[\begin{array}{r} 2x - 3y - z = 4 \\ 4x - 6y - 2z = 8 \end{array}\right.$$

Er zijn oneindig veel oplossingen, de vlakken vallen samen en de rang van de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 4 & -6 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

is 1, er zijn twee vrijheidsgraden en er is één kopcoëfficient in eerste rij.