# Lineaire Algebra Thema 6

## Eigenwaarden en eigenvectoren

Jan van Hulzen

Domein Techniek, Ontwerpen en Informatica
Opleiding Elektrotechniek

10 oktober 2024

hogeschool

# Inhoudsopgave

# Overzicht cursus

# Overzicht cursus

Het vak Lineaire Algebra bestaat uit

- 7 hoorcolleges + huiswerk opgaven
- Voltijd ALETVT2A (ma 12:30 op ...)
- Deeltijd ALETDT2 (wo 14:00 op ...)

Schriftelijk tentamen:

- huiswerk opgaven zijn een goede voorbereiding op het tentamen

# Overzicht cursus (onder voorbehoud)

- Thema 1, 3.1 Vectoren, 3.2 Matrices
- Thema 2, 3.3 Lineaire afbeeldingen, 3.4 Determinanten
- Thema 3, 3.5 Regel van Cramer 3.6 Methode van Gauss
- Thema 4, 3.7 Pivoting en Rijschaling 3.8 Inverse matrix
- Thema 5, 3.9 Gauss-Jordan eliminatie 3.10 LU decompositie
- Thema 6, 3.11 Eigenwaarden en Eigenvectoren.
- Thema 7, Tentamen voorbereiding

# Overzicht stof van vandaag

- Thema 6, 3.11 Eigenwaarden en Eigenvectoren.

# 3.11 Eigenwaarden en eigenvectoren

# Eigenwaarden en eigenvectoren

- Een **eigenvector** van een lineaire afbeelding $\boldsymbol{A}$ is een vector $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ waarvoor een constante $\lambda$ bestaat met de eigenschap

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$$

- De waarde $\lambda$ heet een eigenwaarde van de afbeelding $\boldsymbol{A}$.
- De waarde $\boldsymbol{x}$ heet een eigenvector van $\boldsymbol{A}$.

# Voorbeeld 3.25

- Zoek de eigenwaarden en eigenvectoren van $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
- Omdat moet gelden dat $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ volgt $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) - \lambda \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ en dus volgt

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) - \lambda \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- We kunnen dit schrijven als

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Voorbeeld 3.25

- Met de regel van Cramer volgt $x = y = 0$ en dus

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}} = 0, y = \frac{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}} = 0$$

- Als wordt voldaan aan de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

- De voorwaarde was $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ dus deze oplossing voldoet niet.

# Voorbeeld 3.25

- Met de regel van Cramer volgt $x = y = 0$ en dus

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}} = 0, y = \frac{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}} = 0$$

- Als wordt voldaan aan de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

- De voorwaarde was $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ dus deze oplossing voldoet niet.

# Voorbeeld 3.25

- We zoeken dus een oplossing waarvoor

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- Het volgt dat

$$(3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-5) = 0$$

- En dus $\lambda = -1$ of $\lambda = 5$ , deze waarden zijn de **eigenwaarden** van $\boldsymbol{A}$
- Met deze eigenwaarden kunnen we de bijbehorende **eigenvectoren** zoeken.

# Voorbeeld 3.25

- Invullen van $\lambda = -1$ geeft

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x + 2y = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Invullen van $\lambda = 5$ geeft

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x + 2y = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- De eigenvectoren hebben een grafische interpretatie

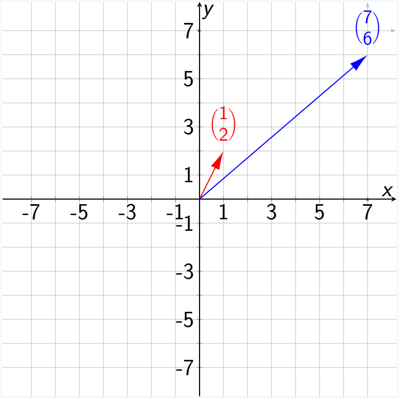
# Voorbeeld 3.25

- De afbeelding van $\boldsymbol{A}$ zal een vector $\boldsymbol{x}$ roteren over een hoek en verlengen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- De vector is nu $\sqrt{7^2+6^2}/\sqrt{7^2+6^2} = 4.12$ keer zo lang.
- De eigenwaarden en eigenvectoren zijn complex

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$



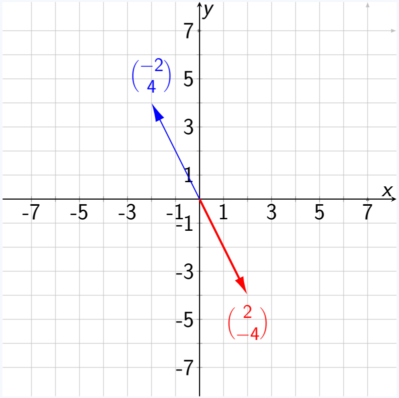
# Voorbeeld 3.25

- Beelden we een eigenvector uit met $\boldsymbol{A}$ dan volgt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- De vector is nu even lang maar tegengesteld.
- De bijbehorende eigenwaarden $\lambda = -1$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$



# Voorbeeld 3.25

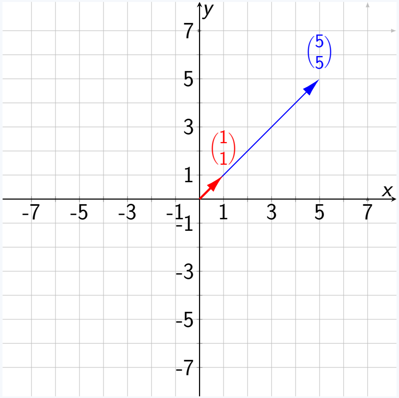


- Beelden we een eigenvector uit met $\boldsymbol{A}$ dan volgt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- De vector is nu even lang maar tegengesteld.
- De bijbehorende eigenwaarden $\lambda = 5$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

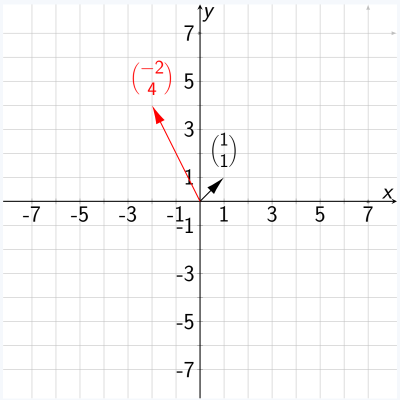


# Voorbeeld 3.25



- Het valt op dat de matrix $\boldsymbol{A}$ vectoren roteert en verlengt
- Vermenigvuldig je een matrix met een eigenvector dan zal deze niet van richting veranderen als de eigenwaarde positief is maar wel langer worden.
- Negatieve eigenwaarden zorgen voor een tegengesteld teken (rotatie over 180°).

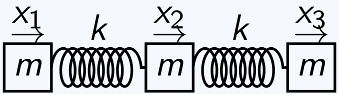
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$



# Voorbeeld: trillingen in massa-veer systeem

- Voor het modelleren van slingers hanteren we $F = m \cdot a$ voor massa's en $F = k \cdot x$ voor veren

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k\left(x_1 - x_2\right) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k\left(x_2 - x_1\right) - k\left(x_2 - x_3\right) \\ m\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = -k\left(x_3 - x_2\right) \end{cases}$$



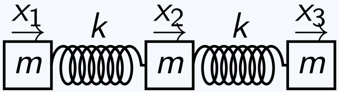

- Hierin wordt de versnelling gevonden door de positie twee keer te differentiëren.
- De oplossong van deze vergelijking is

$$x_i = x_{i0}e^{j\omega t} = x_{i0}\cos\omega t + jx_{i0}\sin\omega t$$

# Voorbeeld: trillingen in massa-veer systeem

- Twee keer differentiëren van $x_i$ naar $t$ levert

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i0}\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right) \\ \frac{dx_i}{dt} &= x_{i0}\left(-\omega\sin\omega t + j\omega\cos\omega t\right) \\ \frac{d^2x_i}{dt^2} &= x_{i0}\left(-\omega^2\cos\omega t - j\omega^2\sin\omega t\right) = -\omega^2 x_i \end{aligned}$$




- In matrixvorm volgt

$$\omega^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k/m & -k/m & 0 \\ -k/m & 2k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & k/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

# Voorbeeld: trillingen in massa-veer systeem

inholland hogeschool

- We zoeken weer naar een oplossing in de vorm

$$\begin{vmatrix} k/m-\omega^2 & -k/m & 0 \\ -k/m & 2k/m-\omega^2 & -k/m \\ 0 & -k/m & k/m-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

- De determinant kan worden berekend met

$$\left(k/m-\omega^2\right)\left(\left(2k/m-\omega^2\right)\left(k/m-\omega^2\right)-k^2/m^2\right)+k/m\left(-k/m\left(k/m-\omega^2\right)\right)$$

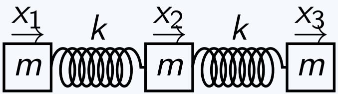
- uitwerken levert $\omega^2(\omega^2-k/m)(\omega^2-3k/m)$ met als oplossingen

$$\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=k/m \text{ en } \omega_3^2=3k/m$$

# Voorbeeld: trillingen in massa-veer systeem

- Met de oplossingen $\omega_1^2 = 0$ volgt

$$\begin{pmatrix} k/m & -k/m & 0 \\ -k/m & 2k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & k/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

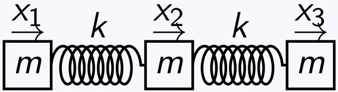


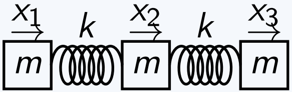

- De drie massa's bewegen de zelfde kant op of staan stil en er is geen trilling.

# Voorbeeld: trillingen in massa-veer systeem

- Met de oplossing $\omega_2^2 = k/m$ volgt

$$\begin{pmatrix} 0 & -k/m & 0 \\ -k/m & k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



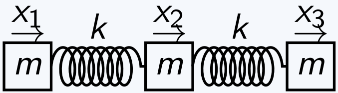



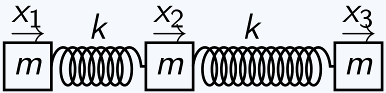

- De buitenste massa's bewegen tegengesteld en de middelste staat stil
- De de frequentie waarmee het systeem trilt is $\sqrt{k/m}$ rad/s,

# Voorbeeld: trillingen in massa-veer systeem

- Met de oplossing $\omega_2^2 = 3k/m$ volgt

$$\begin{pmatrix} -2k/m & -k/m & 0 \\ -k/m & -k/m & -k/m \\ 0 & -k/m & -2k/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$




- De middelste massa beweegt naar links en de buitenste massa's bewegen naar rechts
- De de frequentie waarmee het systeem trilt is $\sqrt{3k/m}$ rad/s,

# Voorbeeld: trillingen in massa-veer systeem

- De drie trillingsmodi zijn trillingen waarin alle massa's met dezelfde (eigen)frequentie trillen
- De beweging die de massa's maken zijn periodiek met een vast patroon (mode shape) ten opzichte van elkaar
- Net als bij het vectorvoorbeeld kan je dit voorstellen als onderdeel van een basis
- Laat je het systeem los in een willekeurige stand zal je een combinatie van de drie mogelijke trillingen overhouden
- Merk op dat het ontbreken van demping er voor zorgt dat er geen verlies aan energie is en dat daarom de beweging zuiver periodiek is