isbn: 978-90-01-78886-5

16 De beginselen van financiële rekenkunde

In dit hoofdstuk geven we antwoord op de volgende vragen:

- Wat is de tijdswaarde van geld?
- Wat is het verschil tussen enkelvoudige en samengestelde renteberekeningen?
- Hoe wordt de effectieve rente bij oplopende uitkeringsfrequentie berekend?
- Wat is contante waarde en hoe wordt deze berekend?
- Wat zijn perpetuïteiten en annuïteiten?
- Hoe worden equivalente kosten berekend bij verschillende looptijden?

isbn: 978-90-01-78886-5

Het lenen en uitlenen van geld tegen een rentevergoeding is niet van gisteren en kent een lange geschiedenis. Eeuwenlang is er gebakkeleid over de ethische rechtvaardiging om rente te heffen over uitgeleend geld. De overweging dat een geldgever geld verdient zonder er zelf iets voor te doen behalve het geld ter beschikking te stellen aan derden, werd door velen als onaanvaardbaar beschouwd. In de middeleeuwen werd renteheffing in sommige kringen als moreel verwerpelijk gezien en tot op de dag van vandaag is volgens de principes van het islamitisch bankieren het vragen van rente niet geoorloofd. Via omwegen, zoals vergoeding vragen voor administratiekosten en risico, wordt er toch verdiend op deze islamitische leningen.
In de loop der eeuwen zijn er vele nieuwe leenvarianten ontwikkeld, waarvan de annuïteit een grote bekendheid geniet. De eerste vormen hiervan dateren van de Romeinse tijd. Romeinse burgers betaalden een eenmalig bedrag aan de keizer in ruil voor periodieke uitkeringen gedurende de rest van hun leven, de zogeheten annua. In de 17de eeuw gebruikten overheden de annuïteit als financieringsmiddel om hun geregelde oorlogen met hun buurlanden te bekostigen. De overheid vormde een tontine, waarbij de burgers gedurende een lange periode kregen uitbetaald, als zij een schuldbewijs kochten van de overheid (zie afbeelding).
Met de renteberekening en haar spiegelbeeld, de contante-waardeberekening, komt de tijdwaarde van geld in het vizier, die als een rode draad door financiële vraagstukken heen loopt.

16.1 Waardebepaling in samenhang met het tijdstip waarop geld vrijvalt

De veelgebruikte uitdrukking in de zakenwereld 'Tijd is geld' is niet uit de lucht komen vallen en speelt bij economische beslissingen en investeringsvraagstukken een sleutelrol. Centraal daarbij staan de tijdwaarde van geld en de zogeheten opportunitykosten. De tijdwaarde van geld, uitgaande van de euro als munteenheid, houdt het volgende in:

> Eén euro nú is meer waard dan één euro in de toekomst!!

Drie hoofdoorzaken van de waardedaling van geld in de tijd zijn:

1. Het feit dat met geld waarover men nú beschikt vanaf nú rente kan worden verdiend, en met geld dat men in de toekomst verwacht te ontvangen niet: er is dus sprake van rentederving tot aan het tijstip van de ontvangst van het geld.
2. Het feit dat de koopkracht van het geld als gevolg van voortschrijdende inflatie (geldontwaarding) daalt en men met toekomstig geld minder kan kopen dan met geld waarover men nú al de beschikking heeft.
3. Het feit dat bij een bedrag dat men in de toekomst verwacht te ontvangen – of is toegezegd – het altijd onzeker is of de schuldenaar in

isbn: 978-90-01-78886-5

gebreke blijft en men het toegezegde of verwachte geld geheel of gedeeltelijk niet ontvangt. Dit risico wordt het *debiteurenrisico* genoemd.

Een direct gevolg van de tijdwaarde van geld is, dat bedragen die op verschillende tijdstippen beschikbaar komen, niet zonder meer bij elkaar kunnen worden opgeteld, van elkaar kunnen worden afgetrokken of zelfs niet met elkaar mogen worden vergeleken. Om bedragen – bijvoorbeeld voortvloeiend uit investeringsprojecten – met elkaar te kunnen vergelijken dienen ze gemeten te worden op hetzelfde tijdstip. Dit kan op twee manieren gebeuren:

1. Door het bedrag dat nú wordt ontvangen of betaald, door te rekenen naar een toekomstig tijdstip: de rente- of eindwaardeberekening.
2. Door het toekomstige bedrag terug te rekenen naar het heden: de methode van de contante- of huidige-waardeberekening.

Aangezien bij investeringen nú beslissingen worden genomen over toekomstige geldbedragen, is de contante-waardemethode de meest aangewezen methode voor de economische waardebepaling van investeringsprojecten.
Het louter constateren dat er verschil bestaat in de waarde tussen een bedrag nú en hetzelfde nominale bedrag in de toekomst is een magere constatering. Veel interessanter is de vraag, hoe groot dat waardeverschil precies is. We zoeken met andere woorden naar een kwantificering van dit waardeverschil en daarvoor zullen de drie eerdergenoemde oorzaken van de waardedaling van geld worden gekwantificeerd. Daarbij wordt gekeken naar de volgende drie factoren:

1. Welk tijdverschil ligt er tussen twee of meer ontvangsten/uitgaven?
2. Hoe groot is het verwachte inflatiepercentage gedurende deze periode?
3. Hoe kan debiteurenrisico worden gekwantificeerd?

De financiële rekenkunde houdt zich binnen het vakgebied der financiering bezig met de methoden die worden gebruikt om de tijdwaarde van het geld te berekenen.
De meeste van deze methoden kunnen worden teruggebracht tot renteberekeningen en contante-waardeberekeningen.

16.2 Enkelvoudige en samengestelde renteberekeningen

Hoewel bijna iedereen vertrouwd is met het rentepercentage op zijn spaarrekening, is niet altijd duidelijk voor iedereen of het rentebedrag op de spaarrekening wordt berekend als enkelvoudige of als samengestelde rente. We lichten dit toe met twee voorbeelden.

Voorbeeld 16.1 Enkelvoudige renteberekening
Roderik en zijn zus Natasha hebben als erfenis elk een bedrag van € 100.000 ontvangen per 1 januari 2008. Roderik zet dit bedrag gedurende

isbn: 978-90-01-78886-5

10 jaar op een spaarrekening bij de AA-bank uit, haalt de jaarlijkse spaarrente er aan het eind van ieder jaar van af door overschrijving op zijn betaalrekening, waarop geen rente wordt vergoed. De AA-bank vergoedt een spaarrente van 5% op jaarbasis. Op 31 december 2008 ontvangt hij op zijn spaarrekening een rentebedrag van 0,05 × € 100.000 = € 5.000. Dit bedrag laat hij van zijn spaarrekening overschrijven naar zijn betaalrekening, zodat hij per 1 januari 2009 weer begint met een spaartegoed van € 100.000. Indien hij deze gedragslijn jaar in jaar uit volhoudt en de spaarrente niet verandert, zal Roderik op 31 december jaarlijks kunnen beschikken over € 5.000. Op de vervaldatum van de spaarrekening op 31 december 2017 eindigt hij met een spaarsaldo van € 100.000. Zijn rente-inkomsten, die in de loop van 10 jaar op zijn betaalrekening zijn bijgeschreven, bedragen nominaal 10 × € 5.000 = € 50.000, hoewel de waarde van dit totale rentebedrag anders uitvalt, aangezien de € 50.000 op 10 verschillende tijdstippen is ontvangen. Totaal heeft hij op 31 december 2017 € 150.000.

Wanneer we dit getallenvoorbeeld veralgemeniseren en het ingelegde spaargeld op H(oofdsom) euro stellen, de jaarlijkse rentevergoeding op r% en de looptijd op t jaar, ontstaat het volgende beeld: de jaarlijkse vrijvallende renteontvangsten bedragen r × H euro welke na t jaar zijn opgelopen tot t × r × H euro nominaal. De eindwaarde van het spaarsaldo op de vervaldatum is H euro.
Het totale ontvangen bedrag aan het einde van de looptijd bestaande uit rente en hoofdsom wordt weergegeven in formule 16.1:

$$H \times (1 + t \times r) \qquad [16.1]$$

Voorbeeld 16.2 Samengestelde renteberekening
Natasha hanteert een ander spaarbeleid met haar geërfde geld. Zij zet het geld op dezelfde spaarrekening bij de AA-bank tegen 5% op jaarbasis, maar laat echter de jaarlijkse rente op haar spaarrekening staan. Hierdoor is de hoofdsom waarmee ze op 1 januari 2008 begint in een jaar tot € 100.000 × 1,05 = € 105.000 aangegroeid. Op 31 december 2009 ontvangt ze de rente over het tweede jaar en groeit het spaarsaldo aan tot € 105.000 × 1,05 = € 110.250. Dit saldo kan ook worden berekend als € 100.000 × 1,05 × 1,05 = € 100.000 × $(1,05)^2$. Wanneer ze haar spaarzin 10 jaar volhoudt, kan zij op 31 december 2017 beschikken over een spaarsaldo van € 100.000 × $(1,05)^{10}$ = € 162.889,46.
Vergelijking met de situatie op 31 december 2017 van haar broer leert dat Natasha door haar 'rente-over-rente'-spaarbeleid € 162.889,46 – € 150.000 = € 12.889,46 meer heeft ontvangen dan haar broer met zijn enkelvoudig sparen.

Wanneer we het getallenvoorbeeld van Natasha veralgemeniseren en het ingelegde spaargeld op H(oofdsom) euro stellen, de jaarlijkse rentevergoeding op r% en de looptijd op t jaar, wordt de eindwaarde op de vervaldatum van de spaarrekening berekend volgens formule 16.2:

isbn: 978-90-01-78886-5

$$H \times (1+r)^2 \qquad [16.2]$$

Het verschil tussen de eindwaarde volgens de enkelvoudige en de samengestelde renteberekening neemt toe met een hoger rentepercentage r en een langere looptijd t.

16.2.1 Renteberekeningen met oplopende uitkeringsfrequentie

De vraagt rijst wat er gebeurt als de bank de frequentie waarmee de rente wordt bijgeschreven verhoogt, terwijl het rentepercentage op jaarbasis gelijk blijft. Er ontstaat een verschil tussen de nominale rente en de effectieve rente. De effectieve rente op jaarbasis wordt gedefinieerd als

$$\frac{(\text{Eindwaarde} - \text{Beginwaarde})}{\text{Beginwaarde}} \times 100\%$$

We lichten de berekening van de effectieve rente toe met voorbeeld 16.3.

Voorbeeld 16.3
De IG-bank biedt eenzelfde spaarrekening aan als de AA-bank met als enige verschil, dat de rente twee keer per jaar wordt uitgekeerd, en wel na 6 maanden en 12 maanden. Aangezien de spaarrekening 5% op jaarbasis vergoedt, komt dit overeen met een halfjaarrente van 5% / 2 = 2,5%. Na 6 maanden wordt bij een ingelegde hoofdsom van € 100.000 een rentebedrag bijgeschreven van € 2.500. Daarmee komt de uitstaande hoofdsom over het tweede halfjaar uit op € 102.500 (berekend als 100.000 × 1,025). Na 12 maanden wordt een rentebedrag bijgeschreven ter grootte van 0,025 × € 102.500 = € 2.562,50. Het spaarsaldo aan het einde van 1 jaar komt uit op € 100.000 × $(1{,}025)^2$ = € 105.062,50. Met dit bedrag kan de effectieve rente worden berekend. Invullen in de definitie geeft [105.062,50 – 100.000]/100.000 × 100% = 5,062%. De nominale rente op jaarbasis was 5%, dus wanneer de rente ieder half jaar wordt uitgekeerd, levert dit 0,062% meer op dan wanneer de rente één keer per jaar aan het einde wordt uitgekeerd. Wanneer de spaarrekening een looptijd heeft van 10 jaar met halfjaarlijkse rentebetaling – er wordt dan 20 keer 2,5% samengesteld rente berekend –, bedraagt het eindsaldo:
€ 100.000 × $(1{,}025)^{20}$ = € 163.861,64.
Dat is € 972,18 meer dan bij een samengestelde rente-uitkering van slechts 1 keer per jaar.

Voor het algemene geval met een hoofdsom H, een rente op jaarbasis van r% met een halfjaarlijkse rentebetaling, bedraagt het effectief rendement op jaarbasis:

$$R_{eff} = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 \qquad [16.3]$$

isbn: 978-90-01-78886-5

Sommige spaarrekeningen schrijven maandelijks rente bij. Een inleg van € 100.000 op 1 januari tegen een rente van 5% op jaarbasis geeft dan een rekenrente van 5%/12 = 0,416% op maandbasis. Dit levert na één jaar een eindwaarde op van: € 100.000 × $(1{,}00416)^{12}$ = € 105.107,82.
De effectieve rente wordt 5,107% op jaarbasis en dat is meer dan de 5,062% bij de halfjaarlijkse rentebetaling.

16.2.2 Frequentere rente-uitkering verhoogt de effectieve rente

Toegepast op het algemene geval met een rente op jaarbasis van r% en een uitkeringsfrequentie van t keer per jaar wordt de effectieve rente op jaarbasis berekend met formule 16.4:

$$R_{eff} = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^t \qquad [16.4]$$

De frequentie waarmee rente wordt betaald is afhankelijk van het soort leningen. Bij consumentenleningen, zoals persoonlijke en hypothecaire leningen, is maandelijkse renteafrekening gebruikelijk. In het bedrijfsleven kunnen andere betalingstermijnen worden gehanteerd. Op de geldmarkt, waar banken en andere financiële instellingen grote bedragen aan elkaar lenen en uitlenen, heeft renteverrekening zelfs op dagbasis plaats.

16.3 De contante-waardeberekening

Contante-waardeberekeningen zijn het tegenovergestelde van renteberekeningen. In plaats van de waarde van geldbedragen uit het heden naar de toekomst door te rekenen, wordt bij de contante-waardemethode toekomstig geld teruggerekend naar de waarde in het heden (nú). Toekomstige geldbedragen kunnen uit de meest uiteenlopende bronnen komen, waarvan twee belangrijke zijn:

1 Contractuele betalingsverplichtingen
Hieronder vallen salarisbetalingen, rente- en premiebetalingen, periodieke uitkeringen, vaste huisvestingslasten, zoals huur- en energiebetalingen. Bij deze betalingsverplichtingen ligt in de regel zowel de hoogte van het bedrag als het tijdstip met redelijke zekerheid vast.

2 Geprognosticeerde betalingen
Deze zijn gemaakt op basis van schattingen. Dit zijn geldstromen waarbij zowel omvang als tijdstippen onzeker zijn. Hieronder vallen onder andere de inkomsten uit de verkoop van goederen en diensten. Soms zijn deze inkomsten redelijk in te schatten, wanneer het gevestigde producten betreft, maar bij nieuw op de markt te brengen producten zijn omzetten met grote onzekerheden omgeven.

isbn: 978-90-01-78886-5

16.3.1 De waarde van toekomstige bedragen in het heden

Evenals iemand die gedurende een jaar € 2.000 opzijzet over de hoofdsom rente ontvangt, zo loopt iemand die een bedrag pas over één jaar ontvangt rente mis. Wanneer iemand een toezegging heeft, dat hij over één jaar € 2.000 zal ontvangen, maar dit geld nú nodig heeft, kan hij vooruitlopend op zijn toekomstige ontvangst een lening aangaan. Het maximale bedrag dat hij kan lenen is zo groot dat hij met de € 2.000 die hij over één jaar gaat ontvangen zowel de geleende hoofdsom kan terugbetalen als de verschuldigde rente. Indien de leenrente 8% op jaarbasis is, kan maximaal € 2.000/1,08 = € 1.851,85 bij de bank worden geleend. Want na één jaar moet hij de hoofdsom plus 8% rente, ofwel [1 (hoofdsom) + 0,08 (rente)] × € 1.851,85 = € 2.000 terugbetalen en dat bedrag is gelijk aan het toegezegde bedrag dat hij over één jaar ontvangt. € 1.851,85 is de contante waarde van € 2.000 die over één jaar wordt ontvangen. 8% is de discontovoet of rekenrente. De factor 1/1,08 = 0,9259 is de discontofactor die aangeeft hoeveel het geld na één jaar aan waarde heeft verloren.

Voorbeeld 16.4
Stel dat de hierboven genoemde persoon te horen heeft gekregen dat de € 2.000 hem niet na 1 jaar wordt overgemaakt, maar pas na 2 jaar. Aangezien hij het geld nog steeds nú al nodig heeft, leent hij een bedrag met een looptijd van 2 jaar, waarover hij met de toegezegde € 2000 na 2 jaar de geleende hoofdsom en rente kan aflossen. Dus hij kan maximaal € 2.000 / $1{,}08^2$ = € 1.714,67 lenen. Want na 2 jaar betaalt hij de over die 2 jaar samengestelde rente over de hoofdsom en dat is € 1.714,67 × 1,08 × 1,08 = € 2.000. € 1.714,67 is de contante waarde van € 2.000 die over 2 jaar wordt ontvangen. 8% is nog steeds de discontovoet. De discontofactor bedraagt nu $1/(1{,}08)^2 = 0{,}8573$ en geeft aan hoeveel het geld in 2 jaar tijd aan waarde verliest.
Weer een tegenvaller: het verschuldigde bedrag van € 2.000 wordt pas na 3 jaar overgemaakt, zodat de toekomstige ontvanger nu geld moet lenen met een looptijd van 3 jaar. Het maximale bedrag dat hij nu kan lenen is € 2.000/$1{,}08^3$ = € 1.587,66, want na 3 jaar betaalt hij 3 jaar samengestelde rente over de hoofdsom: € 1587,66 × $1{,}08^3$ = € 2.000. € 1.587,66 is de contante waarde van € 2.000 over 3 jaar. 8% blijft de discontovoet met een discontofactor van $1/1{,}08^3 = 0{,}7938$. De discontofactor geeft het waardeverlies over 3 jaar.

Wat opvalt is dat de contante waarde van eenzelfde nominale bedrag daalt, naarmate het geld later in de tijd wordt ontvangen. Dit stelt ons in staat de algemene formule 16.5 te geven voor de contante waarde van een geldsom of kasstroom van omvang K met een discontovoet van r% per periode die zal worden ontvangen na t perioden:

$$CW(K) = \frac{K}{(1+r)^t} \qquad [16.5]$$

isbn: 978-90-01-78886-5

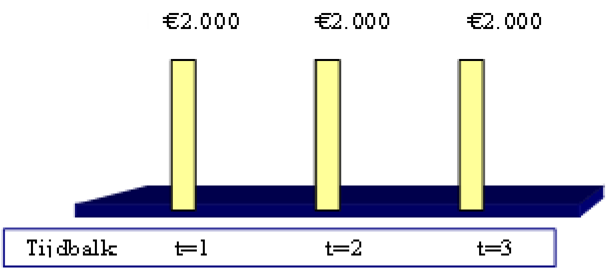
16.3.2 Optellen en vergelijken van kasstromen op uiteenlopende tijdstippen

In veel situaties ontvangt iemand niet een eenmalig bedrag maar een reeks van bedragen. Dit doet zich voor bij pensioenuitkeringen, maandelijkse salarisontvangsten, maandelijkse contributiegelden en vele andere. We willen bekijken hoe de contante waarde van een reeks kasstromen wordt berekend.

Voorbeeld 16.5
Stel dat iemand een arbeidsongeschiktheidsuitkering krijgt ter grootte van € 2.000 gedurende 3 achtereenvolgende jaren, waarbij het bedrag jaarlijks op 31 december wordt uitbetaald.
We willen weten, wat de contante waarde is van deze gezamenlijke uitkeringsgelden.
Het antwoord hierop is de optelsom van de contante waarde van elk van de drie bedragen afzonderlijk. Dit komt neer op € 1.851,85 + € 1.714,67 + € 1.587,66 = € 5.154,18.

Deze eigenschap, waarbij de contante waarde van de som van een reeks kasstromen gelijk is aan de som van de contante waarden van de afzonderlijke kasstromen met gegeven looptijd, wordt de *additiviteitseigenschap* genoemd. Het gebruik van een tijdbalk (of kalenderas) kan helpen bij het opstellen van een kasstroomoverzicht. Van bovenstaand getallenvoorbeeld staat in figuur 16.1 de tijdas of kalenderas met de kasstromen.

Figuur 16.1 Kasstroomoverzicht



De algemene formule voor de contante-waardeberekening van een reeks wisselende kasstromen Kt gedurende N perioden lopend van t = 1 tot en met t = N en een discontovoet van r% voor elke kasstroom, is weergegeven in formule 16.6:

$$CW = \sum_{t=1}^{N} \frac{K_t}{(1+r)^t} \qquad [16.6]$$

isbn: 978-90-01-78886-5

Formule16.6 is de sleutelformule van alle contante-waardeberekeningen, die als een rode draad door alle waarderingsvraagstukken heen loopt!

16.4 Vereenvoudigingen voor de contante-waardeberekening

Sommige kasstroompatronen hebben kenmerken waarbij het berekenen van de contante waarde sneller gaat door het toepassen van een kortere formule dan formule 16.6. We bespreken er twee, die we in latere hoofdstukken terug zullen zien.

16.4.1 Perpetuïteit

In latere hoofdstukken zal een aantal financiële instrumenten worden besproken, die als voornaamste kenmerk hebben dat:

1. in elke periode eenzelfde (nominale) kasstroom vrijvalt
2. de belegging of investering, waarover de kasstromen vrijvallen, geen vervaldatum kent.

Financiële instrumenten met de tweede eigenschap heten een *perpetuïteit*. Bij de berekening van de contante waarde van een perpetuïteit met gelijke kasstromen K gaat de contante waarde van formule 16.6 over in formule 16.7:

$$\frac{K}{r} \qquad [16.7]$$

Hoewel in de praktijk perpetuïteiten niet heel veel voorkomen, kan formule 16.7 een goede benaderingsformule zijn voor een constante reeks kasstromen met een lange looptijd.

Voorbeeld 16.6
Een projectontwikkelaar verhuurt kantoorruimte. Met de huurder is een huurcontract afgesloten met een looptijd van 20 jaar. Hierin is vastgelegd dat de huurder maandelijks een constant huurbedrag betaalt van € 1.000. De projectontwikkelaar maakt de huurinkomsten contant tegen 2% *per maand.* We willen de contante waarde van dit huurcontract uitrekenen.

Toepassing van formule 16.6 met N = 240 (20 jaar × 12 maanden), r = 2% en K = € 1.000 geeft een contante waarde van € 49.568,55. Toepassing van formule 16.7 geeft een contante waarde van € 50.000. Een afwijking van 0,86% door de benaderingswijze.

16.4.2 Annuïteit

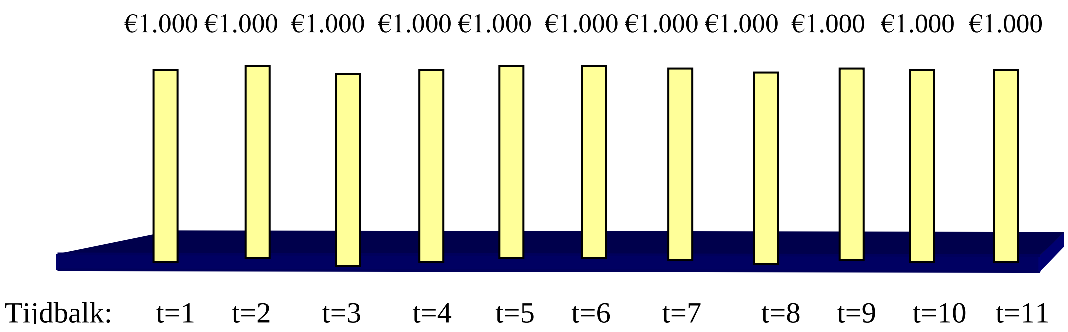
De annuïteit is een financieel instrument, waarbij gedurende N perioden iedere keer een constante kasstroom K wordt ontvangen/betaald. Annuïteiten komen in de financiële wereld veel voor, in het bijzonder bij

isbn: 978-90-01-78886-5

hypothecaire leningen. Voordeel van een annuïteit is, dat de betalingsverplichtingen kunnen worden afgestemd op de periodieke inkomsten van de lener, zoals het maandsalaris. Uiteraard kan de contante waarde van een annuïteit worden berekend met de standaardformule [16.6]. Maar ook voor de annuïteit is er een snellere rekenmethode.
Om deze toe te lichten wordt uitgegaan van de in figuur 16.1 weergegeven tijdbalken voor een annuïteit met een looptijd van N = 7 perioden, een uitbetaling van K = € 1.000 per keer en een discontovoet van r = 2% per periode. Bestudering van de drie tijdbalken in figuur 16.1 leert dat een annuïteit gelijkwaardig is aan het verschil van twee perpetuïteiten met dezelfde kasstromen, maar met twee verschillende aanvangstijdstippen. Wegens deze gelijkwaardigheid kan de contante waarde van een annuïteit berekend worden als de contante waarde van de eerste perpetuïteit minus die van tweede.
De contante waarde van eerste perpetuïteit is K/r = € 1.000 / 0,02 = € 50.000.
De contante waarde van de tweede perpetuïteit wordt gemeten op het tijdstip vóór het vrijvallen van de eerste kasstroom. Dus de contante waarde van de tweede perpetuïteit is eveneens € 50.000 maar is gemeten op tijdstip t = 7, aangezien de eerste kasstroom op t = 8 is! Om de tweede perpetuïteit van de eerste te mogen aftrekken moet de contante waarde van de tweede reeks van € 50.000 eerst worden teruggerekend naar t = 0. Dit levert een contante waarde: 50.000 / $(1{,}02)^7$ = € 43.528. De contante waarde van de annuïteit komt uit op: € 50.000 – € 43.528 ≈ € 6.472.
De rechtstreekse berekening volgens formule 16.6 geeft een contante waarde van € 6.472. Dit antwoord is exact.

Figuur 16.2 Berekening van een annuïteit met behulp van twee perpetuïteiten

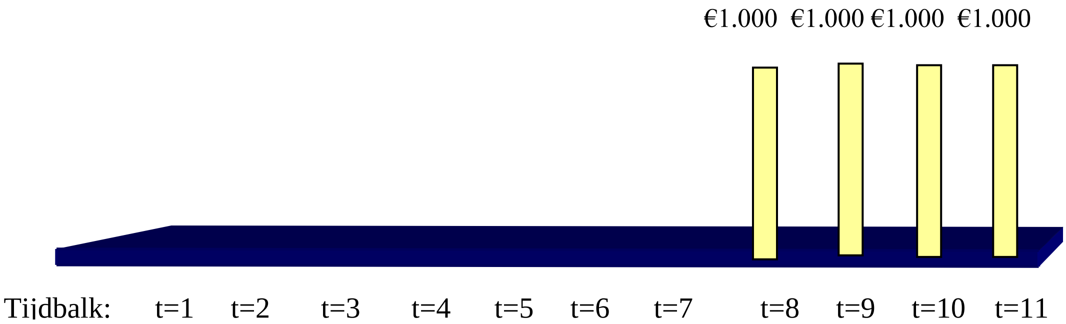
Figuur a



Perpetuïteit die elke periode €1.000 uitbetaalt. NB: alleen 11 perioden getekend!

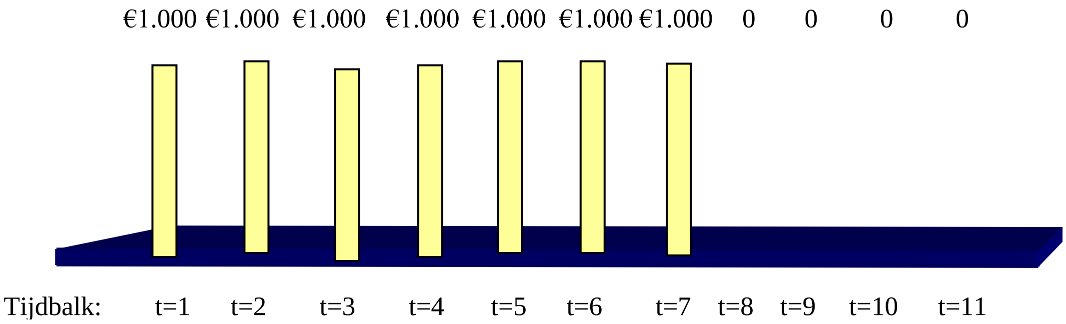
isbn: 978-90-01-78886-5

Figuur b



Perpetuïteit die iedere periode €1.000 uitbetaalt, maar pas *begint* op t = 8

Figuur a minus figuur b geeft figuur c:



Het kasstroomoverzicht van een annuïteit met K = €1.000, en een looptijd van 7 perioden die gelijk is aan het verschil van de eerste perpetuïteit minus de tweede.

De contante waarde van een annuïteit die periodiek K euro uitbetaalt gedurende N perioden met een discontovoet van r% wordt gegeven in formule 16.8:

$$CW = K \times \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r \times (1+r)^N} \right) \qquad [16.8]$$

Dit is de algemene formule voor de bepaling van de contante waarde van een annuïteit.
De factor tussen haakjes is de annuïteitenfactor met een looptijd van N perioden en een discontovoet van r%. Annuïteitenfactoren zijn uitvoerig getabelleerd en in financiële software opgenomen. Men kan het gebruik van annuïteitenberekeningen desgewenst ook omdraaien.
Indien van een investering de contante waarde, looptijd en discontovoet bekend zijn, kunnen met behulp van de annuïteitenfactor de constante periodieke kasstromen worden berekend.

isbn: 978-90-01-78886-5

16.5 Equivalente jaarlijkse kosten

Bij veel investeringen moeten bedrijven een keuze maken uit twee of meer alternatieven.
Indien de levensduren van de investeringsalternatieven ongelijk zijn, kan de netto contante waarde tot verkeerde conclusies en niet-optimale investeringsbeslissingen leiden.

Voorbeeld 16.7
Een verhuisondernemer staat voor de vraag welke nieuwe vrachtwagen wordt aangeschaft.
Merk A kost € 80.000 en heeft een verwachte levensduur van 5 jaar met jaarlijkse constante onderhoudskosten van € 25.000.
Merk B kost € 120.000, heeft een verwachte levensduur van 8 jaar met jaarlijkse constante onderhoudskosten van € 18.000. De rekenrente voor beide merken is 5%.

De netto contante waarde van A met een annuïteitenfactor van € 80.000 + 4,3295 × € 25.000 = € 188.237.
De netto contante waarde van B met een annuïteitenfactor van € 120.000 + 6,4632 × € 18.000 = € 236.338.

Op grond van het criterium van de laagste netto contante waarde – het betreft uitgaven – valt de keuze op de vrachtwagen van merk A. Echter, de levensduur van merk B is langer dan die van A.
Om beide alternatieven vergelijkbaar te maken worden van beide de equivalente jaarlijkse kosten berekend met behulp van een annuïteit. We nemen daarvoor een annuïteit met 5 jaar looptijd en 5% rente die dezelfde netto contante waarde heeft als vrachtwagen A. De equivalente jaarlijkse kosten worden € 188.237/4,3295 = € 43.478. De relatie tussen het kasstroomoverzicht van vrachtwagen A en de equivalente jaarlijkse kosten is in de tabel weergegeven.
Voor vrachtwagen B worden de equivalente jaarlijkse kosten € 236.338/6,4632 = € 36.567.
Aangezien vrachtwagen B de laagste equivalente jaarlijkse kosten heeft, is dit merk de goedkoopste investering. De vergelijkende tabel tussen kasstromen en equivalente jaarlijkse kosten voor merk B is analoog aan die van merk A.

Equivalente jaarlijkse kosten voor vrachtwagen A

Tijdas t =	0	1	2	3	4	5	NCW
Vrachtwagen A	€ 80.000	€ 25.000	€ 25.000	€ 25.000	€ 25.000	€ 25.000	€ 188.237
Equivalente kosten		€ 43.478	€ 43.478	€ 43.478	€ 43.478	€ 43.478	€ 188.237

isbn: 978-90-01-78886-5

Bij de methode van equivalente jaarlijkse kosten worden ongelijke kasstromen over de levensduur omgerekend naar een reeks constante kasstromen met dezelfde netto contante waarde.
Indien voor alle alternatieven deze equivalente jaarlijkse kosten (opbrengsten) worden bepaald, kan het beste alternatief worden geselecteerd. Dit onderwerp is in hoofdstuk 2 over investeringsselectie al besproken.

Samenvatting

Twee identieke bedragen, één nu en één in de toekomst, hebben niet dezelfde waarde als gevolg van rente, verwachte inflatie en debiteurenrisico. De omrekening van een huidig bedrag naar een toekomstig bedrag gebeurt via de renteberekening en die van een toekomstig naar een huidig bedrag via de contante waarde.
Het percentage dat een bedrag jaarlijks aan waarde verliest wordt uitgedrukt in de discontovoet die afhankelijk van het aantal jaren wordt doorgerekend naar een discontofactor. Door een nominaal bedrag met zijn discontofactor te vermenigvuldigen krijgt men de contante waarde van dit bedrag. De contante waarde van een reeks van kasstromen wordt gevonden als de som van de contante waarde van de afzonderlijke kasstromen, het additiviteitsprincipe. Indien de reeks kasstromen aan bepaalde eigenschappen voldoet, zijn er snellere formules voor de contante-waardeberekening.
Als alle kasstromen constant zijn en onbeperkte looptijd hebben, wordt de formule van de perpetuïteit gebruikt; als de kasstromen constant zijn en eindigen na een aantal jaren wordt de annuïteitenformule gebruikt.
Vergelijking van de contante waarde van twee projecten met ongelijke looptijd gebeurt met behulp van de equivalente kosten.

Oefeningen

Meerkeuzevragen

16.1 De additiviteitseigenschap van contante-waardeberekeningen houdt in,

a dat de contante waarde van een reeks kasstromen gelijk is aan de som van de bijbehorende nominale kasstromen.
b dat de contante waarde van iedere reeks van kasstromen kan worden berekend met behulp van een annuïteit.
c dat de som van de contante waarden van een reeks kasstromen gelijk is aan de contante waarde van de som van de kasstromen bij gegeven looptijd.
d dat negatieve kasstromen wegvallen tegen positieve kasstromen.

isbn: 978-90-01-78886-5

16.2 Wat zijn de equivalente kosten van een investeringsproject?

- **a** De equivalente kosten zijn de gedurende de looptijd constante kasstromen die eenzelfde contante waarde hebben als de wisselende kasstromen van het investeringsproject.
- **b** De equivalente kosten zijn de discontovoet waarbij de contante waarde van de kasstromen van het investeringsproject gelijk is aan 0.
- **c** De equivalente kosten zijn de jaarlijkse kosten van gelijksoortige projecten als het investeringsproject.
- **d** De equivalente kosten zijn kosten die bij elkaar opgeteld hetzelfde bedrag opleveren als het investeringsbedrag van het project.

16.3 Welke van onderstaande beweringen over een annuïteit met N kasstromen met rente van r% is onjuist?

- **a** Een annuïteit is een reeks constante nominale kasstromen over een eindige looptijd.
- **b** Wanneer de constante kasstroom van de annuïteit wordt vermenigvuldigd met de factor [1/r – 1/(r × (1+r)N] verkrijgt men de contante waarde van de reeks kasstromen.
- **c** Wanneer de constante kasstroom van de annuïteit wordt gedeeld door de factor [1/r – 1/(r × (1+r)N] verkrijgt men de contante waarde van de reeks kasstromen.
- **d** Wanneer men de contante waarde van elk van de N kasstromen op ieder tijdstip berekent en deze vervolgens bij elkaar optelt, verkrijgt men de contante waarde van deze kasstromen.

16.4 Welk van onderstaande alternatieven is geen bron van een reeks toekomstige kasstromen?

- **a** Het maandelijkse salaris dat een werknemer krijgt bijgeschreven op zijn bankrekening gedurende de looptijd van zijn arbeidsovereenkomst.
- **b** De maandelijkse huurinkomsten die een vastgoedeigenaar ontvangt van de huurder gedurende de looptijd van het huurcontract.
- **c** De wekelijkse omzet uit de verkoop van flesjes mineraalwater van een lokale kruidenierszaak.
- **d** De maandelijkse ontvangsten van een telecomprovider uit belabonnementen van abonnementhouders met een mobiele telefoon.
- **e** De maandelijkse betaling van de verschuldigde bedragen uit een annuïteitenlening aan de bank.
- **f** De wekelijkse aalmoezen die een straatmuzikant ontvangt door het spelen langs de openbare weg op zijn accordeon.
- **g** De uitgaven van een eigenaar van een opslagloods voor reparatie naar aanleiding van een loodsbrand.

Opgaven

1 Rederij Netnooyt studeert op de mogelijkheid van de aanschaf van een nieuw containervrachtschip voor regionaal vervoer. De aanschafprijs is € 8 mln. De verwachte inkomsten uit de exploitatie van het schip bedragen € 5 mln per jaar (einde van elk jaar ontvangen) en de bijbehorende operationele kosten bedragen € 4 mln per jaar, welke eveneens aan het

isbn: 978-90-01-78886-5

einde van het jaar worden betaald. Aan het eind van het vijfde jaar en het tiende jaar is groot onderhoud gepland voor € 2 mln per beurt. Aan het eind van jaar 15 is het containerschip rijp voor de sloop en zal worden verkocht aan een schroothandelaar tegen de schrootwaarde van € 1,5 mln. De discontovoet is vastgesteld op 8% per jaar.

Gevraagd:
Bereken de netto contante waarde van de investering in dit containerschip.

2 Een pasgetrouwd stel spaart met het oog op gezinsuitbreiding voor de aanschaf van een huis over 5 jaar.
Met de huidige eigenaar van het huis dat ze op het oog hebben, is overeengekomen dat zij het huis aan het eind van het vijfde jaar kunnen kopen voor € 800.000. Jaarlijks zetten zij aan het eind van ieder jaar een nog onbekend bedrag € X op een spaarrekening. De bank biedt een jaarlijkse rentevergoeding van 10%.

Gevraagd:

a Bereken het bedrag X, dat het echtpaar aan het eind van elk van de jaren 1 tot en met 5 op de spaarrekening moet storten om aan het eind van het vijfde jaar het huis te kunnen kopen voor € 800.000 door de contante waarde van de spaarrekening te berekenen.

b Bereken het bedrag X, dat het echtpaar aan het eind van elk van de jaren 1 tot en met 5 op de spaarrekening moet storten om aan het eind van het vijfde jaar het huis te kunnen kopen voor € 800.000 door de eindwaarde van de spaarrekening te berekenen.