UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 30. Dezember 2004

Aufgabenblatt 9 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 43. Beim Kartenspiel "Bridge" werden von den 52 Karten eines üblichen Kartenspiels (bestehend aus jeweils As, 2, 3, ..., 10, Bube, Dame und König in den Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo) jeweils 13 an die vier Spieler Nord, Ost, Süd und West ausgeteilt. Es sei X die Anzahl der Asse von Spieler Nord, Y die Anzahl der Asse von Spieler Süd.

(a) Bestimmen Sie (tabellarisch) die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X und Y.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben beide Spieler dieselbe Anzahl von Assen?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Spieler Nord und Süd zusammen alle vier Asse?

3/2/1 Punkte)

Lösung.

(a) Wir stellen uns die Karten von 1 bis 52 durchnumeriert vor, o.B.d.A. seien dabei die Karten von 1 bis 4 die Asse. Wir definieren den Ergebnisraum Ω durch

$$\Omega := \{(D_1, D_2, D_3, D_4) : D_i \subset \{1, ..., 52\},\ \#D_i = 13,\ D_i \cap D_j = \emptyset\ (i \neq j)\}.$$

O.B.d.A. sei D_1 die Menge der Karten von Spieler Nord und D_2 die Menge der Karten von Spieler Süd. Das Austeilen ist dann ein Laplace-Experiment auf Ω und es gilt

$$\#\Omega = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}.$$

X ist die Anzahl der Asse von Spieler Nord, Y die der Asse von Spieler Süd, es gilt also:

$$X(\omega) = \#\big(D_1(\omega) \cap \{1,2,3,4\}\big)$$

und

$$Y(\omega) = \#\big(D_2(\omega) \cap \{1,2,3,4\}\big)$$

Mit ähnlichen Überlegungen, wie wir sie schon einmal in Aufgabe 12 in Zusammenhang mit einem Skatspiel angestellt haben, folgt nun für alle $k, l \in \{0,1,2,3,4\}$ mit $k + j \leq 4$:

$$P(X = k, Y = j) = \frac{\binom{4}{k}\binom{48}{13-k}\binom{4-k}{j}\binom{35+k}{13-j}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}.$$

Tabellarisch ergeben sich die folgenden Werte (jeweils $\times 20825$):

$Y \setminus X$	0	1	2	3	4
0	1150	2600	1950	572	55
1	2600	4225	2028	286	0
2	1950	2028	468	0	0
3	572	286	0	0	0
4	55	0	0	0	0

(Man beachtet die hierbei auftretenden Symmetrien, die den Rechenaufwand erheblich reduzieren.)

(b) Beide Spieler haben genau dann dieselbe Anzahl von Assen, wenn gilt $X = Y$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit:

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) + ... + P(X = 4, Y = 4) \\ &= \frac{1}{20825} \cdot (1150 + 4225 + 468 + 0 + 0) \\ &= \frac{5843}{20825} \approx 0.2806. \end{aligned}$$

(c) Spieler Nord und Süd haben genau dann alle 4 Asse, wenn gilt $X + Y = 4$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit

$$\begin{aligned} P(X + Y = 4) &= P(X = 0, Y = 4) + P(X = 1, Y = 3) + ... + P(X = 4, Y = 0) \\ &= \frac{1}{20825} \cdot (55 + 286 + 468 + 286 + 55) \\ &= \frac{1150}{20825} \approx 0.0552. \end{aligned}$$

Aufgabe 44.

(a) Es sei Z der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen X und Y; wir setzen voraus, dass X und Y unabhängig und auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilt sind. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y sowie den Erwartungswert und die Verteilungsfunktion von Z.

(b) Die Zufallsvariablen V und W besitzen die gemeinsame Dichtefunktion

$$f_{V,W}(v, w) = \begin{cases} c \cdot (w^2 - v^2) \cdot e^{-w} & \text{, falls } -w \leq v \leq w \text{ , } 0 < w < \infty \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie c.

(2/2 Punkte)

Lösung.

(a) Da X und Y unif$(0,1)$-verteilt sind, also beide die Dichte $1_{(0,1)}$ besitzen, gilt für die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y:

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) = \int_0^x \int_0^y f_{X,Y}(x,y) dy\, dx \\
&= \int_0^x \int_0^y f_X(x) \cdot f_Y(y) dy\, dx \quad \text{(Unabhängigkeit)} \\
&= \int_0^x \int_0^y 1\, dy\, dx = x \cdot y,
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in (0,1)$ und allgemein

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \leq 0 \text{ oder } y \leq 0, \\ x \cdot y & \text{, falls } x, y \in (0,1), \\ x & \text{, falls } x \in (0,1) \text{ und } y \geq 1, \\ y & \text{, falls } y \in (0,1) \text{ und } x \geq 1, \\ 1 & \text{, falls } x \geq 1 \text{ und } y \geq 1. \end{cases}$$

Man kann natürlich auch gleich mit der Unabhängigkeit von X und Y argumentieren und erhält dann sofort $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

Der Erwartungswert von Z ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 y\, dy \cdot \int_0^1 x\, dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Auch hier kann man natürlich sofort mit der Unabhängigkeit von X und Y argumentieren und erhält $E(Z) = E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

Für die Verteilungsfunktion von Z gilt

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \le z) \;=\; P(X \cdot Y \le z) \;=\; P\big((X,Y) \in \{(x,y) \;:\; x \cdot y \le z\}\big) \\
&= \iint\limits_{\{(x,y)\,:\,x\cdot y \le z\}} f_{X,Y}(x,y)\; d(x,y) \;=\; \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\min\{1,z/y\}} f_{X,Y}(x,y)\; dx\, dy \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\min\{1,z/y\}} f_X(x) \cdot f_Y(y)\; dx\, dy \;=\; \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\min\{1,z/y\}} 1\; dx\, dy \\
&= \int\limits_0^1 \min\left\{1, \frac{z}{y}\right\} dy \;=\; \int\limits_0^z 1\; dy + \int\limits_z^1 \frac{z}{y}\; dy \\
&= z + z \cdot \log(y)\Big|_z^1 \;=\; z + z \cdot (0 - \log(z)) \;=\; z - z \cdot \log(z)\;, \quad 0 < z < 1.
\end{aligned}
$$

(b) Es muss gelten:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{V,W}(v,w)\; d(v,w) = 1.$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{V,W}(v,w)\; d(v,w) \\
&= \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-w}^{w} c \cdot (w^2 - v^2) \cdot e^{-w}\; dv\, dw \;=\; \int\limits_0^{\infty} c \cdot \left(w^2 \cdot v - \frac{v^3}{3}\right)\Big|_{-w}^{w} \cdot e^{-w}\; dw \\
&= c \cdot \int\limits_0^{\infty} \left(2 \cdot w^3 - \frac{2 \cdot w^3}{3}\right) \cdot e^{-w}\; dw \;=\; c \cdot \int\limits_0^{\infty} \frac{4 \cdot w^3}{3} \cdot e^{-w}\; dw \\
&= \;...\quad \text{(dreimal partielle Integration)} \\
&= c \cdot \int\limits_0^{\infty} 8 \cdot e^{-w}\; dw \;=\; -c \cdot 8 \cdot e^{-w}\Big|_0^{\infty} \;=\; c \cdot 8,
\end{aligned}
$$

und somit $c = 1/8$.