Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 14. Oktober 2004

Lösungen zu Aufgabenblatt 2 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 9. Im Stadtrat einer Großstadt sind vier Parteien A, B, C und D vertreten. Ein 15-köpfiger Stadtratsausschuss soll neu besetzt werden. Folgende Übersicht gibt an, wie viele Sitze jede der Parteien besetzen kann und wie viele dafür geeignete Fachleute sie hat:

Partei	A	B	C	D
Anzahl der Sitze	3	4	6	2
Anzahl der Fachleute	5	6	8	3

(a) Wie viele verschiedene Zusammensetzungen des Ausschusses sind möglich?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die beiden Experten Huber und Meier der Partei C, die stets zusammenarbeiten, dem Ausschuss nur gemeinsam oder gar nicht angehören wollen?

(3/3 Punkte)

Lösung.

(a) Um den Ausschuss zu besetzen, muss man aus der Menge der 5 Fachleute der Partei A 3 Fachleute auswählen, dann aus den 6 Fachleuten der Partei B 4 Fachleute, usw. Es ergeben sich
$$\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{8}{6}\binom{3}{2} = 10 \cdot 15 \cdot 28 \cdot 3 = 12600$$
mögliche Besetzungen.

(b) Man kann zwei (disjunkte) Fälle unterscheiden: Huber und Meier gehören beide dem Ausschuss an, oder Huber und Meier gehören beiden nicht dem Ausschuss an.
Besetzungen mit Huber und Meier: $\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{3}{2}\binom{6}{4}$.
Besetzungen ohne Huber und Meier: $\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{3}{2}\binom{6}{6}$.
Daraus ergeben sich insgesamt
$$\binom{5}{3}\binom{6}{4}\binom{3}{2}\left[\binom{6}{4} + \binom{6}{6}\right] = 10 \cdot 15 \cdot 3 \cdot (15+1) = 7200$$
mögliche Besetzungen.

Aufgabe 10.

(a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Nullen und n Einsen ($m < n$) so nebeneinanderzuschreiben, dass keine zwei Nullen nebeneinanderstehen?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim n-fachen Wurf einer fairen Münze exakt m-mal 'Kopf' kommt?

(c) * Wiederum werde eine faire Münze n-fach geworfen. Wie groß ist (im Falle $m > n/2$) die Wahrscheinlichkeit, dass m-mal 'Kopf' geworfen wird und in der gesamten Wurffolge niemals zweimal hintereinander 'Zahl' erscheint?

(3/2/4 Punkte)

Lösung.

(a) Man denke sich die n Einsen in einer Reihe nebeneinandergeschrieben. Zwischen den Einsen gibt es zusammen mit der ersten und der letzten Position $n+1$ Zwischenräume. Die m Nullen sollen nun so auf die Zwischenräume verteilt werden, dass in jeden Zwischenraum höchstens eine Null kommt, oder mit anderen Worten: wir wählen aus den $n+1$ Zwischenräumen m aus und schreiben in jeden genau eine Null. Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Zwischenräume aus $n+1$ auszuwählen? Antwort:

$$\binom{n+1}{m},$$

und dies ist damit auch die gesuchte Anzahl der Anordnungen der Nullen und Eisen in der vorgeschriebenen Weise.

(b) Wir schreiben abkürzend "1" für das Ereignis, dass beim Wurf der Münze Kopf erscheint und "0" für das Ereignis, dass beim Wurf der Münze Zahl erscheint. Dann haben wir ein Laplace-Experiment über dem Ergebnisraum

$$\Omega := \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\},\ i = 1, 2, \dots n\}$$

der 0-1-Folgen der Länge n über $\{0,1\}$. Dabei soll beispielsweise $\omega_i = 1$ bedeuten, dass beim i-ten Wurf der Münze Kopf erscheint. Es ist $\#\Omega = 2^n$.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: "Es erscheint exakt m Mal Kopf". Das bedeutet aber, dass wir als Ergebnis ein n-Tupel aus Ω erhalten, bei dem genau m Positionen 1 und $n-m$ Positionen 0 sind. Also Frage: Wieviele Möglichkeiten gibt es, m Einsen auf n Positionen und anschließend $n-m$ Nullen aus die verbleibenden $n-m$ Positionen zu verteilen? Antwort:

$$\#A = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-m} = \binom{n}{m}$$

und damit

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{n}{m}}{2^n}.$$

(c) * Ω sei wie in Aufgabenteil (b). Sei B das hier betrachtete Ereignis. Dann bedeutet die Forderung, dass niemals zweimal hintereinander Zahl erscheint, dass genau die 0-1-Folgen aus Ω in B liegen, die m Einsen und $n-m$ Nullen enthalten und bei denen niemals zwei Nullen aufeinanderfolgen. Lt. Aufgabenteil (a) ist damit

$$\#B = \binom{m+1}{n-m},$$

und somit gilt

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\binom{m+1}{n-m}}{2^n}.$$