Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
F. Dennert, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 2. Februar 2005

Aufgabenblatt 12 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 58: (momenterzeugende Funktion zur Gamma-Verteilung)

(a) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion zu $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

(b) Beweisen Sie damit, dass

$$\Gamma(\alpha, \lambda) \star \Gamma(\beta, \lambda) = \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$$

gilt.

(3/1 Punkte)

Lösung: (a) Es sei $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Dann lautet die momenterzeugende Funktion $\varphi_X(t)$ für alle $t < \lambda$:

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= Ee^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \lambda^\alpha \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \lambda^\alpha \cdot e^{-(\lambda-t)x}\, dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (\lambda-t)^\alpha \cdot e^{-(\lambda-t)x}\, dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha} \cdot 1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha .
\end{aligned}$$

(b) Sind X und Y unabhängig, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$, so gilt

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\beta = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha+\beta}$$

für alle $t < \lambda$, also ist $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$.

Aufgabe 59: Ein fairer Würfel wir 20 Mal geworfen. Es bezeichne X die Summe der Augenzahlen. (Die einzelnen Würfe werden als stochastisch unabhängig angenommen.)

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 30)$, $P(X = 50)$, $P(X = 70)$ und $P(X = 100)$. (Es bietet sich an, dies mit Hilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion von X zu tun und MAPLE zuhilfe zu nehmen.)

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Vergleichen Sie die unter (a) erhaltenen Wahrscheinlichkeiten mit den Werten der Dichte einer Normalverteilung mit den unter (b) ermittelten Parametern an den Stellen $x = 30, 50, 70, 100$.

(d) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion und die Dichte aus Teil (c) in einem Diagramm dar.

(3/1/1/1 Punkte)

Lösung: (a) Es bezeichne X_i, $i = 1, ..., 20$, das Wurfergebnis im i. Versuch. Da die einzelnen Würfe des Würfels als stochastisch unabhängig angenommen werden, ergibt sich die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $g_X(z)$ von X als 20. Potenz der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion für einen einzelnen Wurf des Würfels, d.h. es ist

$$g_X(z) = \left(\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6\right)^{20}.$$

Multipliziert man dies aus, so erhält man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als Koeffizienten vor den entsprechenden Potenzen von z:

$$P(X = 30) = 0.5429991705 \cdot 10^{-8}, \quad P(X = 50) = 0.1652011820 \cdot 10^{-2},$$
$$P(X = 70) = 0.5181859020 \cdot 10^{-1}, \quad P(X = 100) = 0.1448751637 \cdot 10^{-4}.$$

MAPLE-Worksheet

```
[> Digits:=20:
[> g := x -> (1/6)*(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6);
[> g20 := expand(g(x)^20):
[> c := i -> evalf(coeff(g20,x,i)):
[> c(30); c(50); c(70); c(100);
```

(b) Für einen einzelnen Wurf des Würfels ergibt sich $E(X_i) = 7/2$ und $\operatorname{var}(X_i) = 35/12$, und damit

$$E(X) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = 20 \cdot \frac{7}{2} = 70$$

wegen der Linearität des Erwartungswerts, sowie

$$\operatorname{var}(X) = \sum_{i=1}^{20} \operatorname{var}(X_i) = 20 \cdot \frac{35}{12} = \frac{175}{3}$$

wegen der Gleichung von Bienamyé und der Unabhängigkeit der X_i.

MAPLE-Worksheet

```
[> ewert := sum(k/6,k=1..6);
[> mom2 := sum(k^2/6,k=1..6):
[> var := mom2 - ewert^2;
[> EWert := 20*ewert;
[> Var := 20*var;
```

(c) Wie in der Aufgabe gefordert, betrachten wir die Dichte

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

der Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 70$ und $\sigma^2 = \frac{175}{3}$. Es ergibt sich

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(30) = 0.5779803317 \cdot 10^{-7}, \;\; \varphi_{\mu,\sigma^2}(50) = 0.1694111602 \cdot 10^{-2},$$
$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(70) = 0.5223380565 \cdot 10^{-1}, \;\; \varphi_{\mu,\sigma^2}(100) = 0.2331739079 \cdot 10^{-4}.$$

Die Werte stimmen also absolut näherungsweise mit den in Teil (a) berechneten Wahrscheinlichkeiten überein, was ja auch aus dem Zentralen Grenzwertsatz folgt. Qualitativ läßt sich noch festhalten, daß die Approximation an den Rändern schlechter ist als im zentralen Bereich, konkret ergeben sich als relative Fehler die Werte $964,4\%$, $2,5\%$, $0,8\%$ und $60,9\%$. Das sieht zunächst einmal sehr schlecht aus, doch wie gesagt, absolut betrachtet liegen die Werte nahe bei einander, was auch die graphische Darstellung in Teil (d) beeindruckend vor Augen führt.

MAPLE-Worksheet

```
[> phi := x -> (2*Pi*Var)^(-1/2)*exp(-(x-EWert)^2/(2*Var)):
[> d := i -> evalf(phi(i)):
[> d(30); d(50); d(70); d(100);
```

(d) Darstellung unter MAPLE:

MAPLE-Worksheet

```
[> with(plots):
[> punkte := seq([i,c(i)],i=40..100):
[> plot1 := plot([punkte],style=point):
[> plot2 := plot(phi(x),x=40..100):
[> display([plot1,plot2]);
```

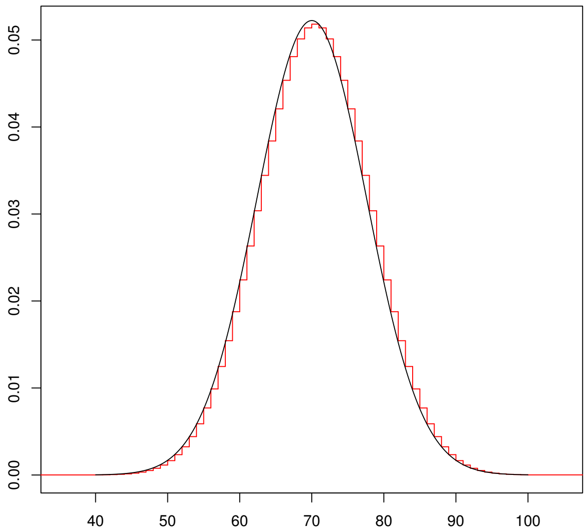

Abbildung 1: Vergleich von Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion und Dichte der Normalverteilung