Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 19. Oktober 2004

Aufgabenblatt 1 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Stundenübung

Aufgabe 0. (Diese Aufgabe hat nicht viel mit Stochastik zu tun — es soll der Umgang mit den üblichen Bezeichnungen der Mengenlehre geübt werden.)

(a) Betrachten Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}
&A_1 = \{1,2\} \times \{2,3\}, \quad A_2 = \{(i,j) \in \{1,2,3\}^2 : i < j\}, \\
&A_3 = \{H \subset \{1,2,3\} : \#H = 2\}, \\
&B_1 = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\big\}, \quad B_2 = \big\{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\big\}, \\
&B_3 = \big\{(1,2), (1,3), (2,3)\big\}.
\end{aligned}$$

Jeweils eine A-Menge stimmt mit einer B-Menge überein. Welche mit welcher?

(b) Beweisen Sie die de Morganschen Regeln: Für zwei Mengen $A, B \subset \Omega$ gilt

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Aufgabe 1. Es seien A, B und C drei Ereignisse. Geben Sie mengenalgebraische Ausdrücke dafür an, dass

(a) keines der Ereignisse eintritt,

(b) genau zwei der Ereignisse eintreten,

(c) höchstens zwei der Ereignisse eintreten.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ im Falle

$$P(A) = 1/4, \quad P(B^c) = 2/3, \quad P(C) = 1/2,$$
$$P(A^c \cap B) = 1/4, \quad P(B^c \cup C^c) = 5/6, \quad P(A \cap C) = 0.$$

Hausübung

Aufgabe 3. (Efrons Würfel)

(a) Gegeben seien drei faire sechsseitige Würfel (d.h. jede Seite eines Würfels erscheint mit derselben Wahrscheinlichkeit 1/6), ein blauer, ein roter und ein grüner. Die Seiten des blauen Würfels tragen jeweils zweimal die Ziffern 2, 6 und 7, die Seiten des roten Würfels jeweils zweimal die Ziffern 3, 4 und 8 und die Seiten des grünen Würfels jeweils zweimal die Ziffern 1, 5 und 9.
Alle drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Es bezeichne X das Ergebnis des blauen, Y das Ergebnis des roten und Z das des grünen Würfels. Geben Sie einen geeigneten endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) zur Beschreibung dieses Zufallsexperiments an und berechnen Sie dann:

$$P(X < Y), \quad P(Y < Z) \text{ und } P(Z < X).$$

(b) Angenommen Sie und Ihr(e) Freund(in) studieren beide Mathematik und kennen daher die Lösung des Aufgabenteils (a). Ihr(e) Freund(in) bietet Ihnen folgendes Spiel an: Sie dürfen als erstes einen der drei Würfel wählen, anschließend wird er/sie sich dann einen der beiden verbleibenden Würfel aussuchen. Dann werfen Sie beide jeweils den von Ihnen gewählten Würfel. Derjenige, der die höhere Augenzahl würfelt, hat gewonnen und wird vom Verlierer zum Essen eingeladen. Würden Sie sich auf dieses Spiel einlassen?

(c) Angenommen, Sie wollen mit zwei Ihrer Freunde ein ähnliches Spiel spielen. Dazu wählt sich jeder von Ihnen einen der drei Würfel aus, dann werfen Sie alle drei gleichzeitig, und derjenige mit der höchsten Augenzahl hat gewonnen. Hätten Sie bei diesem Spiel irgendwelche Präferenzen für einen der drei Würfel?

Bitte begründen Sie die Antworten zu (b) und (c) jeweils kurz. *(3/1/1 Punkte)*

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ im Falle

$$P(A) = 2P(A^c \cap (B \cup C)), \quad P(A^c \cup B^c \cup C^c) = 2/3, \quad P(A \setminus B^c) = P(A \cap C^c)$$

(2 Punkte)

Aufgabe 5. Es seien $A_1, \dots, A_n$ Ereignisse. Beweisen Sie die Boolesche Ungleichung

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(2 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungsstunden vom 25. bis 27. Oktober.