UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 3. Dezember 2004

Aufgabenblatt 8 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Stundenübung

Aufgabe 35. Es sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Bestimmen Sie $E\big(\min\{X, a\}\big)$.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert $E\big(e^{tX}\big)$ und welcher Wert ergibt sich dann?

Aufgabe 36. Beweisen Sie: Für jede Zufallsvariable X mit existierendem 2. Moment wird die Funktion

$$\mathbb{R} \ni a \longmapsto E\big(X - a\big)^2 \in \mathbb{R}$$

durch $a = EX$ minimiert.

Aufgabe 37. (Glühbirnen)
Die Lebensdauer X einer Glühbirne der Marke A sei exponentialverteilt mit Parameter λ_A, die Lebensdauer Y einer Glühbirne der Marke B sei exponentialverteilt mit Parameter λ_B. Wir setzen voraus, dass X und Y unabhängig sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt eine Typ B-Birne länger als eine Typ A-Birne?

Hausübung

Aufgabe 38. (*Gamma-Verteilung*)
Die *Gamma-Verteilung* mit den Parametern α und λ ($\alpha, \lambda > 0$) ist die Verteilung auf $(0, \infty)$ mit der Dichtefunktion

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Hierbei bezeichnet $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ die *Gammafunktion*.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit dieser Verteilung.

(b) Bestimmen Sie die Varianz einer Zufallsvariablen mit dieser Verteilung.

(c) Zeigen Sie, daß sich die *Exponentialverteilung* als Spezialfall der *Gamma-Verteilung* ergibt.

(3/2/1 Punkte)

Aufgabe 39. Es sei $X \sim N(0, 1)$.

(a) Bestimmen Sie $E(|X|)$.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert $E\left(e^{tX}\right)$ und welcher Wert ergibt sich dann?

(2/2 Punkte)

Aufgabe 40. Es sei X eine absolut stetige, nicht-negative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass gilt

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(t))\; dt.$$

*(*3 Punkte)*

Abgabe der Hausübungen in den Übungsstunden vom 13. Dezember bis 15. Dezember.