Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 7. Oktober 2004

Lösungen zu Aufgabenblatt 1 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 3. (Efrons Würfel)

(a) Gegeben seien drei faire sechsseitige Würfel (d.h. jede Seite eines Würfels erscheint mit derselben Wahrscheinlichkeit 1/6), ein blauer, ein roter und ein grüner. Die Seiten des blauen Würfels tragen jeweils zweimal die Ziffern 2, 6 und 7, die Seiten des roten Würfels jeweils zweimal die Ziffern 3, 4 und 8 und die Seiten des grünen Würfels jeweils zweimal die Ziffern 1, 5 und 9.
Alle drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Es bezeichne X das Ergebnis des blauen, Y das Ergebnis des roten und Z das des grünen Würfels. Geben Sie einen geeigneten endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) zur Beschreibung dieses Zufallsexperiments an und berechnen Sie dann:

$$P(X < Y), \quad P(Y < Z) \text{ und } P(Z < X).$$

(b) Angenommen Sie und Ihr(e) Freund(in) studieren beide Mathematik und kennen daher die Lösung des Aufgabenteils (a). Ihr(e) Freund(in) bietet Ihnen folgendes Spiel an: Sie dürfen als erstes einen der drei Würfel wählen, anschließend wird er/sie sich dann einen der beiden verbleibenden Würfel aussuchen. Dann werfen Sie beide jeweils den von Ihnen gewählten Würfel. Derjenige, der die höhere Augenzahl würfelt, hat gewonnen und wird vom Verlierer zum Essen eingeladen. Würden Sie sich auf dieses Spiel einlassen?

(c) Angenommen, Sie wollen mit zwei Ihrer Freunde ein ähnliches Spiel spielen. Dazu wählt sich jeder von Ihnen einen der drei Würfel aus, dann werfen Sie alle drei gleichzeitig, und derjenige mit der höchsten Augenzahl hat gewonnen. Hätten Sie bei diesem Spiel irgendwelche Präferenzen für einen der drei Würfel?

Bitte begründen Sie die Antworten zu (b) und (c) jeweils kurz. *(3/1/1 Punkte)*

Lösung.

(a) Als sinnvoller WRaum erweist sich (Ω, P) mit

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(2,3,1),(2,3,5),(2,3,9),(2,4,1),(2,4,5),(2,4,9),(2,8,1),(2,8,5),(2,8,9),\\ &(6,3,1),(6,3,5),(6,3,9),(6,4,1),(6,4,5),(6,4,9),(6,8,1),(6,8,5),(6,8,9),\\ &(7,3,1),(7,3,5),(7,3,9),(7,4,1),(7,4,5),(7,4,9),(7,8,1),(7,8,5),(7,8,9)\},\end{aligned}$$

und

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \text{ mit } P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \ \forall A \subset \Omega, \ \text{“Laplace-Experiment”}.$$

Es gilt:

$$\#\Omega = 3^3 = 27$$

und

$$\begin{aligned}
\#\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < Y(\omega)\} &= \#\{(2,3,1),(2,3,5),(2,3,9),(2,4,1),(2,4,5),\\
&\quad (2,4,9),(2,8,1),(2,8,5),(2,8,9),(6,8,1),\\
&\quad (6,8,5),(6,8,9),(7,8,1),(7,8,5),(7,8,9)\}\\
&= 15,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\#\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) < Z(\omega)\} &= \#\{(2,3,5),(2,3,9),(2,4,5),(2,4,9),(2,8,9),\\
&\quad (6,3,5),(6,3,9),(6,4,5),(6,4,9),(6,8,9),\\
&\quad (7,3,5),(7,3,9),(7,4,5),(7,4,9),(7,8,9)\}\\
&= 15,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\#\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) < X(\omega)\} &= \#\{(2,3,1),(2,4,1),(2,8,1),(6,3,1),(6,3,5),\\
&\quad (6,4,1),(6,4,5),(6,8,1),(6,8,5),(7,3,1),\\
&\quad (7,3,5),(7,4,1),(7,4,5),(7,8,1),(7,8,5)\}\\
&= 15.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$P(X < Y) = P(Y < Z) = P(Z < X) = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}.$$

(b) Wähle ich den blauen Würfel, so wählt mein Freund den roten Würfel und gewinnt mit W. 5/9. Wähle ich aber den roten Würfel, so wählt er den grünen Würfel und gewinnt ebenfalls mit W. 5/9. Wähle ich schließlich den grünen Würfel, so wählt mein Freund den blauen Würfel und gewinnt wiederum mit W. 5/9. Egal welchen Würfel ich wähle, ich wäre bei diesem Spiel immer im Nachteil und würde mich nicht darauf einlassen, es sei denn, ich bin unbedingt darauf aus zu verlieren.
(Bemerkung: Eigentlich ist der oben gewählte WRaum zur Beschreibung dieses Experiments gar nicht geeignet, schließlich werden hier ja nur zwei Würfel geworfen. Unser “gesunde Menschenverstand” sagt uns jedoch, dass wir genausogut auch noch den dritten Würfel mitwerfen können und dann in dem obigen WRaum

arbeiten, ohne uns jedoch weiter um das Ergebnis des dritten Würfels zu kümmern. Später werden wir diesen Sachverhalt durch den Begriff der *stochastischen Unabhängigkeit* mathematisch präzisieren.)

(c) Egal welchen Würfel man wählt, man hat immer gegenüber einem der beiden anderen Würfel eine Gewinnw. von 5/9 und gegenüber dem anderen eine Gewinnw. von 4/9. Deshalb könnte man zunächst auf die Idee kommen, dass es egal ist, welchen Würfel man wählt. Zählt man aber genau nach, so merkt man, dass der blaue und der rote Würfel bei jeweils 8 Versuchsausgängen gewinnen, der grüne jedoch bei 11. Also sollte man den grünen Würfel wählen.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $A \cup B \cup C$ im Falle

$$P(A) = 2P(A^c \cap (B \cup C)), \quad P(A^c \cup B^c \cup C^c) = 2/3, \quad P(A \setminus B^c) = P(A \cap C^c)$$

(2 Punkte)

Lösung. Es ist

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap (B \cup C)) = \frac{3}{2}P(A)$$

und

$$P(A) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C^c),$$

wobei aus $P(A \setminus B^c) = P(A \cap C^c)$ folgt

$$P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) = P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C^c),$$

also $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B^c \cap C^c)$ und somit

$$P(A) = 2P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) \geq 2P(A \cap B \cap C)$$

Es folgt mit $P(A \cap B \cap C) = 1 - P((A \cap B \cap C)^c) = 1 - P(A^c \cup B^c \cup C^c) = \frac{1}{3}$

$$P(A \cup B \cup C) \geq 3P(A \cap B \cap C) = 1 \quad \text{und daher} \quad P(A \cup B \cup C) = 1.$$

Aufgabe 5. Es seien $A_1, \dots, A_n$ Ereignisse. Beweisen Sie die Boolesche Ungleichung

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(2 Punkte)

Lösung. Beweis durch vollständige Induktion.
IA: Für $n = 2$ gilt:

$$A_2 = (A_2 \cap A_1) + (A_2 \cap A_1^c) \Rightarrow P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c),$$
$$(A_1 \cup A_2) = A_1 + (A_2 \cap A_1^c) \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c)$$

und damit

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2).$$

(Wurde auch schon in der Vorlesung gezeigt.)
IS: Es gilt

$$\begin{aligned} P\big(A_1 \cup \ldots \cup A_n\big) &= P\big((A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n\big) \\ &\leq P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) + P(A_n), \text{ nach IA,} \\ &\leq P(A_1) + \ldots + P(A_{n-1}) + P(A_n), \text{ nach IV.} \end{aligned}$$