UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
F. Dennert, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 12. Januar 2005

Aufgabenblatt 11 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Stundenübung

Aufgabe 50: (a) Es sei F die gemeinsame Verteilungsfunktion zweier Zufallsvariablen X und Y. Finden Sie eine Formel, die $P\big(a < X \le b, c < Y \le d\big)$ in Abhängigkeit von F darstellt.

(b) Ist

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x_1, x_2) := \begin{cases} 1, & x_1 + x_2 \ge 0, \\ 0, & x_1 + x_2 < 0, \end{cases}$$

eine Verteilungsfunktion?

Aufgabe 51: (Box-Muller-Verfahren)
Die Zufallsvariablen U_1 und U_2 seinen unabhängig und $\text{unif}(0,1)$-verteilt.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten zu

$$X_1 := \sqrt{-2\log(U_1)} \cdot \cos(2\pi U_2) \quad \text{und}$$
$$X_2 := \sqrt{-2\log(U_1)} \cdot \sin(2\pi U_2).$$

(b) Welche Verteilungen haben X_1 und X_2?

(c) Zeigen Sie, daß X_1 und X_2 unabhängig sind.

Aufgabe 52: (w'erzeugende Funktion zur negativen Binomialverteilung)
X sei negativ binomialverteilt mit den Parametern $r \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu X. Was können Sie daraus für die Faltung unabhängiger, geometrisch verteilter Zufallsvariablen folgern?

Hausübung

Aufgabe 53: Die Zufallsvariablen X und Y seinen unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten zu

$$V := X + Y \quad \text{und}$$
$$W := \frac{X}{X+Y}.$$

(b) Welche Verteilungen haben V und W?

(c) Zeigen Sie, daß V und W unabhängig sind.

(3/2/1 Punkte)

Aufgabe 54: (w'erzeugende Funktion zur Binomialverteilung)
X sei binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$.

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu X.

(b) Es seinen X_1 und X_2 unabhängig und jeweils $\text{Bin}(n,p)$-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$ (Faltung).

(3/2 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungsstunden vom 24. Januar bis 26. Januar.