UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 12. Januar 2005

Aufgabenblatt 9 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 48. *(Das Postbotenproblem)*
Es sei Ω die Menge der Permutationen $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ von $(1, 2, ..., n)$. Wir betrachten das durch Ω festgelegte Laplace-Experiment (vgl. das Postbotenproblem, Beispiel 2.7 der Vorlesung). Es sei $Y(\omega)$ die Anzahl der Fixpunkte von ω. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Hinweis. Es gilt $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ mit

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \ \omega_i = i \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für alle $i = 1, 2, ..., n$.

(5 Punkte)

Lösung. Wir definieren Zufallsvariablen X_i, $i = 1, ..., n$, durch

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \ \omega_i = i, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $Y = X_1 + ... + X_n$ und es gilt

$$EX_i = P\big(\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_i = i\}\big) = \frac{(n-1)!}{n!},$$

$$\text{Var } X_i = E\,X_i^2 - \big(E\,X_i\big)^2 = E\,X_i - \big(E\,X_i\big)^2 = \frac{(n-1)!}{n!} - \left(\frac{(n-1)!}{n!}\right)^2,$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= E\,X_iX_j - E\,X_iE\,X_j \\ &= P(\{\omega \in \Omega \ : \ \omega_i = i,\ \omega_j = j\}) - E\,X_iE\,X_j \\ &= \frac{(n-2)!}{n!} - \left(\frac{(n-1)!}{n!}\right)^2. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$E\,Y = \sum_{i=1}^{n} E\,X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} = 1,$$

sowie mit der Gleichung von Bienaymé

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} Y &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i + \sum_{i\neq j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)\\ &= n \cdot \left(\frac{(n-1)!}{n!} - \left(\frac{(n-1)!}{n!} \right)^2 \right) + (n^2 - n) \cdot \left(\frac{(n-2)!}{n!} - \left(\frac{(n-1)!}{n!} \right)^2 \right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 49. *(Faltung der Gammaverteilung)*
Wir schreiben $\Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, für die in Aufgabe 38 vorgestellte Gammaverteilung mit den Parametern α und λ. Zeigen Sie: Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$, so gilt $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$.
(5 Punkte)

Lösung. Der Satz zur Faltung aus der Vorlesung besagt: Für alle $z > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx\\ &= \int_0^z \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)}\, (z-x)^{\beta-1}\lambda^{\beta} \cdot e^{-\lambda z}\, dx\\ &= e^{-\lambda z}\, \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, \lambda^{\alpha+\beta} \int_0^z x^{\alpha-1} \cdot (z-x)^{\beta-1}\, dx\\ &= e^{-\lambda z}\, \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, z^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 y^{\alpha-1} \cdot (1-y)^{\beta-1}\, dy,\end{aligned}$$

wobei die Substitution $y = x \cdot z^{-1}$ verwendet wurde.
Der letzte Faktor hängt nun aber gar nicht mehr von z ab. Also ist die Dichte f_{X+Y} von $X + Y$ ein konstantes Vielfaches von

$$e^{-\lambda z}\, \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\, z^{\alpha+\beta-1}, \quad z > 0,$$

der Dichte zur Verteilung $\Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$. Da Wahrscheinlichkeitsdichten das Integral 1 haben, sind Dichten, die Vielfache voneinander sind, gleich. Also hat $X+Y$ die oben angegebene Dichte und ist somit $\Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$-verteilt.