UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 3. Dezember 2004

Aufgabenblatt 8 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 38. (*Gamma-Verteilung*)
Die *Gamma-Verteilung* mit den Parametern α und λ $(\alpha, \lambda > 0)$ ist die Verteilung auf $(0, \infty)$ mit der Dichtefunktion

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Hierbei bezeichnet $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ die *Gammafunktion.*

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit dieser Verteilung.

(b) Bestimmen Sie die Varianz einer Zufallsvariablen mit dieser Verteilung.

(c) Zeigen Sie, daß sich die *Exponentialverteilung* als Spezialfall der *Gamma-Verteilung* ergibt.

(3/2/1 Punkte)

Lösung.

(a) Sei $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Mit der Substuitution $y = \lambda x$ folgt:

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^\infty x \cdot f_{\alpha,\lambda}(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty y^{\alpha}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert für alle $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}dx \\ &= -x^{\alpha}e^{-x}\big|_0^\infty + \alpha \cdot \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \\ &= \alpha \cdot \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt $EX = \alpha/\lambda$.

(b) Analog zu Teil (a) erhält man

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_0^\infty x^2 \cdot f_{\alpha,\lambda}(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1}\lambda^\alpha e^{-\lambda x}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^{\alpha+1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

und damit

$$\operatorname{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

(c) Beim Vergleich der Dichtefunktionen erweist sich die *Exponentialverteilung* mit Parameter λ als Spezialfall der *Gamma-Verteilung*, und zwar für den Parameter $\alpha = 1$.

Aufgabe 39. Es sei $X \sim N(0,1)$.

(a) Bestimmen Sie $E(|X|)$.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert $E\big(e^{tX}\big)$ und welcher Wert ergibt sich dann?

(2/2 Punkte)

Lösung. Es sei $X \sim N(0,1)$.

(a) Dann gilt

$$\begin{aligned} E|X| &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx = -\int_{-\infty}^{0} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx + \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx \\ &= 2 \cdot \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty x \cdot e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \big(-e^{-x^2/2}\big)\Big|_0^\infty \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \big(0-(-1)\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

(b) Sei φ_{μ,σ^2} die Dichte zu $N(\mu,\sigma^2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} E\big(e^{tX}\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \varphi_{0,1}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-t)^2/2} \cdot e^{t^2/2}dx = e^{t^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-t)^2/2}dx \\ &= e^{t^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{t,1}(x)dx = e^{t^2/2} < \infty \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 40. Es sei X eine absolut stetige, nicht-negative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass gilt

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(t))\ dt.$$

*(*3 Punkte)*

Lösung. Es sei f die Dichte von X. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1 - F(t))\ dt &= \int_0^\infty \int_t^\infty f(u)\ du\ dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty I(u \geq t) f(u)\ du\ dt \\
&= \int_0^\infty f(u) \int_0^u 1\ dt\ du \\
&= \int_0^\infty u f(u)\ du \ = \ EX.
\end{aligned}$$