Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 9. November 2004

Aufgabenblatt 4 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Stundenübung

Aufgabe 16. (Bedingte Unabhängigkeit) Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B, C drei Ereignisse, wobei $P(C) > 0$ gilt. Dann heißen die Ereignisse A und B *bedingt unabhängig* unter C, wenn gilt:

$$P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C).$$

Beweisen oder widerlegen Sie: Sind A und B unabhängige Ereignisse, so sind sie auch bedingt unabhängig unter C.

Aufgabe 17. Beim Kartenspiel "Bridge" werden von den 52 Karten eines üblichen Kartenspiels (bestehend aus jeweils As, 2, 3, ..., 10, Bube, Dame und König in den Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo) jeweils 13 an die vier Spieler Nord, Ost, Süd und West ausgeteilt. Nachdem die Karten für ein Bridgespiel ausgeteilt worden sind, stellen Sie (Nord) zu Ihrer Bestürzung fest, dass Sie kein einziges As erhalten haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Ihr Partner genau k Asse $(k = 0, 1, ..., 4)$?

Aufgabe 18. (Das Ziegenproblem) Bei einer Game-Show befindet sich hinter einer von drei Türen ein Auto. Der Kandidat wählt eine Tür; der Showmaster öffnet draufhin eine der beiden übrigen bzw. die übrige Tür, hinter der kein Auto steht. Der Kandidat hat nun die Option, von seiner ursprünglichen Wahl abzurücken und sich für die andere noch geschlossene Tür zu entscheiden. Sollte er dies tun? (Wir setzen voraus, dass er das Auto haben möchte.)

Hausübung

Aufgabe 19.

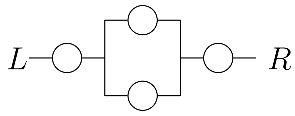
(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A und B seien zwei unabhängige Ereignisse. Sind dann auch A^c und B^c unabhängig?

(b) Die Ereignisse A und B seien unabhängig und es gelte $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt mindestens eines dieser Ereignisse ein? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt genau eines dieser Ereignisse ein?

(2/2 Punkte)

Aufgabe 20. (Netzwerke)

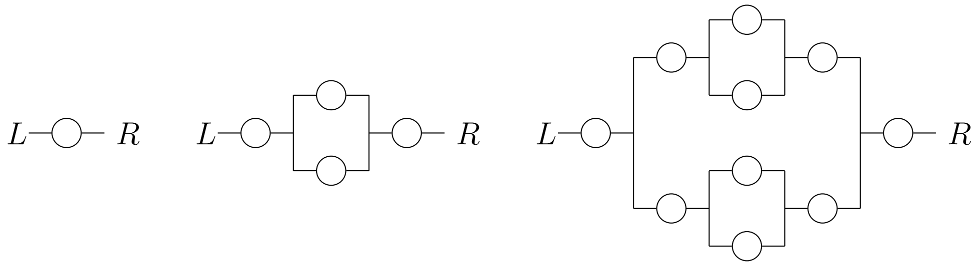
(a) Ein Netzwerk besteht aus 4 wie im nachfolgenden Diagramm angeordneten Schaltern, die unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit p geschlossen sind.



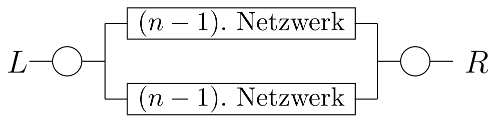
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ein Strom von L nach R fließen?

(b) Sie können obiges Netzwerk als zweites Glied einer ganzen Folge von Netzwerken auffassen.

1. **Netzwerk:** 2. **Netzwerk:** 3. **Netzwerk:**



n. **Netzwerk:**



Sei $P_n(p)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im n. Netzwerk der Strom von L nach R fließen kann. Beweisen Sie die folgende Rekursionsformel:

$$P_{n+1}(p) = p^2 \cdot \Big(2P_n(p) - P_n^2(p)\Big),\ n \in \mathbb{N},\ P_1(p) = p.$$

(c) Zeichnen Sie einmal das 4. Netzwerk. “Zu Fuß” würden Sie $P_4(p)$ wohl nur sehr schwer herausbekommen, aber mit der obigen Rekursionsformel ist das nicht weiter schwer. Welchen Wert hat $P_4(p)$? (Der Einsatz von Maple erleichtert die Berechnung ungemein.)

(d) * Versuchen Sie durch Computerexperimente (Maple, etc.) (oder ersatzweise durch scharfes Nachdenken) herauszubekommen, wie sich die Funktion $P_n(p)$ mit $n \to \infty$ verhält.

(e) * Können Sie dieses Verhalten begründen? Warum spielt die Wahrscheinlichkeit $p = 1/\sqrt{2}$ eine so wichtige Rolle?

(2/2/2/2/3* Punkte)*

Abgabe der Hausübungen in den Übungsstunden vom 15. bis 17. November.