UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
F. Dennert, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 19. Januar 2005

Aufgabenblatt 11 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 53: Die Zufallsvariablen X und Y seinen unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten zu

$$\begin{aligned} V &:= X + Y \quad \text{und} \\ W &:= \frac{X}{X+Y}. \end{aligned}$$

(b) Welche Verteilungen haben V und W?

(c) Zeigen Sie, daß V und W unabhängig sind.

(3/2/1 Punkte)

Lösung: Es seien X und Y unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, es gilt also $f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 \cdot \exp\big(-\lambda(x+y)\big)$. Benutze den Transformationssatz für Wahrscheinlichkeitsdichten, um zunächst die gemeinsame Dichte von V und W zu bestimmen:

$$\begin{aligned} &\mathcal{U} := (0,\infty)^2, \quad \mathcal{V} := (0,\infty) \times (0,1) \\ &\Psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \Psi(x,y) := \Big(x+y, \frac{x}{x+y}\Big) =: (v,w). \end{aligned}$$

Dann ist Ψ bijektiv und es ist

$$\Psi^{-1}(v,w) = \big(v \cdot w, v \cdot (1-w)\big).$$

Weiter ergibt sich

$$\big(\Psi^{-1}\big)' = \begin{pmatrix} w & v \\ 1-w & -v \end{pmatrix}$$

und

$$\Big|\det\Big(\big(\Psi^{-1}\big)'(v,w)\Big)\Big| = v.$$

Nach dem Transformationssatz gilt dann für die gemeinsame Dichte von V und W:

$$\begin{aligned} f_{V,W}(v,w) &= \frac{1}{|\det\big(\Psi'(\Psi^{-1}(v,w))\big)|} \cdot f_{X,Y}\big(\Psi^{-1}(v,w)\big) \\ &= \Big|\det\Big(\big(\Psi^{-1}\big)'(v,w)\Big)\Big| \cdot f_{X,Y}\big(\Psi^{-1}(v,w)\big) \\ &= v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v}. \end{aligned}$$

Durch Ausintegrieren über die einzelnen Komponenten erhält man dann die Dichten von V und W:

$$f_V(v) = \int_0^1 f_{V,W}(v,w)dw = \int_0^1 v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v} dw = v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v},$$

$$f_W(w) = \int_0^\infty f_{V,W}(v,w)dv = \int_0^\infty v \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda v} dv = 1,$$

jeweils für $v \in (0, \infty)$ bzw. $w \in (0,1)$. Daraus folgt, daß V Gamma-verteilt mit Parametern 2 und λ und W gleichverteilt auf $(0,1)$ ist, und wegen $f_{V,W}(v,w) = f_V(v) \cdot f_W(w)$ sind V und W unabhängig.

Aufgabe 54: (w'erzeugende Funktion zur Binomialverteilung)
X sei binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$.

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu X.

(b) Es seinen X_1 und X_2 unabhängig und jeweils $\text{Bin}(n,p)$-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$ (Faltung).

(3/2 Punkte)

Lösung: Es sei $X \sim \text{Bin}(n,p)$, d.h. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, ..., n$.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} E(z^X) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (zp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= \big(pz + (1-p)\big)^n \;=\; \big(1 - p(z-1)\big)^n. \end{aligned}$$

(b) Seien $X_1 \sim \text{Bin}(n,p)$ und $X_2 \sim \text{Bin}(n,p)$ und X_1 und X_2 unabhängig. Dann gilt für die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen

$$E(z^{X_1 + X_2}) = E(z^{X_1}) \cdot E(z^{X_2}) = \big(1 - p(z-1)\big)^{2n}.$$

Wegen der eindeutigen Zuordnung zwischen wahrscheinlichkeitserzeugender Funktion und Verteilung ist dann $X_1 + X_2 \sim \text{Bin}(2n, p)$.