UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, Dr. M. Reich

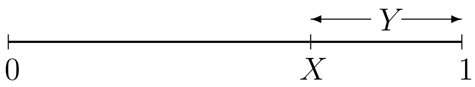
Hannover, 26. November 2004

Aufgabenblatt 7 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 33. (Zerbrechende Stäbe)
Ein Stab der Länge 1 möge an einer zufälligen Stelle zerbrechen. Genauer wollen wir annehmen, dass alle Bruchpositionen gleichwahrscheinlich sind, d.h. der Abstand X des Bruchpunktes vom linken Endpunkt des Stabes sei $U(0,1)$-verteilt.



Sei Y die Länge des kürzeren Bruchstückes (das natürlich nicht immer wie in der Skizze das rechte zu sein braucht). Dann ist Y wieder eine Zufallsvariable.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Verhältnis der Länge des kürzeren Bruchstücks zu der des längeren, also $Y/(1-Y)$, kleiner oder gleich $1/4$?

(3/3 Punkte)

Lösung.

(a) Es gilt $X \sim U(0,1)$ und $Y = \min\{X, 1-X\}$. Y kann offenbar nur Werte im Intervall $[0, 1/2]$ annehmen und es gilt

$$\begin{aligned} P(Y \le y) &= 1 - P(Y > y) \\ &= 1 - P(\min\{X, 1-X\} > y) \\ &= 1 - P(X > y \text{ und } 1 - X > y) \\ &= 1 - P(X > y \text{ und } X < 1 - y) \\ &= 1 - P(y < X < 1 - y) \\ &= 1 - P(X \in [y, 1-y]), \text{ das Intervall } [y, 1-y] \text{ hat die Länge } 1 - 2y, \\ &= 1 - (1 - 2y) \\ &= 2y. \end{aligned}$$

Es ist also $Y \sim U(0, 1/2)$.

(b) Das Verhältnis der Länge des kürzeren Bruchstücks zu der des längeren ist $Y/(1-Y)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{Y}{1-Y} \leq \frac{1}{4}\right) &= P(4Y \leq 1-Y) \\ &= P(5Y \leq 1) \\ &= P\left(Y \leq \frac{1}{5}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Aufgabe 34. (Quantiltransformation)

(a) Es sei F eine stetige und streng monoton wachsende Verteilungsfunktion, F^{-1} bezeichne die Umkehrfunktion zu F und U sei eine auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $F^{-1}(U)$.

(b) Nutzen Sie das Resultat aus Aufgabenteil (a), um aus einer unif$(0, 1)$-verteilten Zufallsvariable U eine mit Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariable zu konstruieren.

(2/2 Punkte)
Lösung.

(a) Für die Verteilungsfunktion von $F^{-1}(U)$ gilt:

$$P\big(F^{-1}(U) \leq y\big) = P\big(U \leq F(y)\big) = F(y).$$

$F^{-1}(U)$ hat also Verteilungsfunktion F.

(b) Mit diesem Resultat folgt, dass wir aus einer unif$(0, 1)$-Zufallsvariablen U eine $\exp(\lambda)$-Zufallsvariable durch $F^{-1}(U)$ erhalten, wenn F^{-1} die Umkehrfunktion zur Verteilungsfunktion F der Exponentialverteilung mit Parameter λ ist. Es gilt:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

und damit

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-x).$$

Mit U ist auch $1-U$ unif$(0, 1)$-verteilt, man erhält also sowohl

$$-\frac{1}{\lambda}\log(1-U), \quad \text{als auch} \quad -\frac{1}{\lambda}\log(U)$$

als mögliche Lösungen.