UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 11. November 2004

Aufgabenblatt 6 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 28.

(a) Es sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen

$$Y := \frac{1}{1+X} \quad \text{und} \quad Z := \frac{X}{1+X}.$$

(b) Sei X hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, M und n, d.h.

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für} \;\; k = 0, ..., \min\{M, n\}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(2/2 Punkte)

Lösung.

(a) Es gilt $Y + Z = 1$, also $\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(Y + Z) = \mathrm{E}(1) = 1$. Wir brauchen also nur einen der beiden Erwartungswerte explizit auszurechnen. Wir entscheiden uns für den von Y und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot P(X=k) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} \cdot e^{-\lambda} \;=\; \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \cdot \left(e^{\lambda} - 1\right) \;=\; \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Mit $\mathrm{E}(Z) = 1 - \mathrm{E}(Y)$ folgt dann

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; 1 - \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \;=\; \frac{\lambda - 1 + e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

(b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{k \cdot M! \cdot (N-M)! \cdot n! \cdot (N-n)!}{k! \cdot (M-k)! \cdot (n-k)! \cdot (N-M-n+k)! \cdot N!} \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{M \cdot (M-1)! \cdot (N-M)! \cdot n \cdot (n-1)! \cdot (N-n)!}{(k-1)! \cdot (M-k)! \cdot (n-k)! \cdot (N-M-n+k)! \cdot N \cdot (N-1)!} \\
&= \frac{M \cdot n}{N} \cdot \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{M \cdot n}{N} \cdot \sum_{k=0}^{\min\{M-1,n-1\}} \frac{\binom{M-1}{k}\binom{N-M}{(n-1)-k}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{M \cdot n}{N} \cdot 1 = \frac{M \cdot n}{N}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 29. Ein fairer Würfel wird n mal nacheinander geworfen (Laplace-Modell (Ω, P) mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^n$). Die Zufallsvariable Y_n sei die größte der geworfenen Augenzahlen, also $Y_n(\omega_1, \ldots, \omega_n) := \max_{1 \le j \le n} \omega_j$, $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{E}Y_n$ und zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}(Y_n) = 6.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Var}(Y_n) = 0.$$

(3/3 Punkte)

Lösung.

(a) Mit Aufgabe 27 folgt

$$\mathrm{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{6} P(Y_n \ge k) = 6 - \sum_{k=1}^{6} P(Y_n < k) = 6 - \sum_{k=1}^{5} P(Y_n \le k) = 6 - \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{k}{6}\right)^n$$

und damit die Behauptung. Alternative kann man diese Aussage auch ohne direkte Berechnung des Erwartungswertes erhalten: Es ist $\mathrm{E}(Y_n) \le 6$ und $\mathrm{E}(Y_n) \ge 6P(Y_n = 6)$. Es gilt $P(Y_n = 6) = 1 - P(Y_n \le 5) = 1 - (5/6)^n$, womit die Behauptung folgt.

(b) Es gilt

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{E}((Y_n - \mathrm{E}(Y_n))^2) = (6 - \mathrm{E}(Y_n))^2 P(Y_n = 6) + \sum_{j=1}^{5} (j - \mathrm{E}(Y_n))^2 P(Y_n = j).$$

Wegen $P(Y_n = 6) \to 1$ für $n \to \infty$ (vgl. Teil (a)) gilt $P(Y_n = j) \to 0$ für $n \to \infty$ und $j = 1, \ldots, 5$. Zusammen mit $\mathrm{E}(Y_n) \to 6$ für $n \to \infty$ (vgl. Teil (a)) folgt die Behauptung.