UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 22. Oktober 2004

Aufgabenblatt 3 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 14. In diesem Jahr soll in Niedersachsen die täglich stattfindende Keno-Lotterie gestartet werden. Dabei werden in einer Urne 70 durchnummerierte Kugeln gut durchmischt und anschließend 20 Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen entnommen. Die Mitspieler haben zuvor einen Tippschein mit 2 bis 10 verschiedenen Zahlen von 1 bis 70 angekreuzt, in der Hoffnung, dass diese gezogen werden.
Wir untersuchen die Fälle näher, dass 2 oder 10 Zahlen angekreuzt werden.

(a) Wie wahrscheinlich ist es, bei 2 getippten Zahlen zu gewinnen, d.h. beide getippten Zahlen befinden sich unter den 20 gezogenen?

(b) Bei 10 getippten Zahlen gewinnt man, wenn 0,5,6,7,8,9 oder alle 10 Zahlen richtig sind. Berechnen Sie für jeden dieser Fälle die Gewinnwahrscheinlichkeit.

(c) Wie hoch ist beim Tippen von 10 Zahlen die Gesamtgewinnwahrscheinlichkeit? Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis von Teil (a).

(2/4/1 Punkte)

Lösung. Diese Aufgabe kann dem interessierten Studenten als Beispiel zur später eingeführten hypergeometrischen Verteilung dienen.

(a) Es gibt $\binom{70}{2}$ (gleichwahrscheinliche) Möglichkeiten, 2 Zahlen auf dem Keno-Schein anzukreuzen. Stellen wir uns die 20 gezogenen Zahlen (unsichtbar) markiert vor, so gibt es $\binom{20}{2}$ Möglichkeiten, 2 der markierten Zahlen anzukreuzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass man 2 der gezogenen Zahlen angekreuzt hat, ist also

$$\frac{\binom{20}{2}}{\binom{70}{2}} \approx 0.0787.$$

(b) Es gibt $\binom{70}{10}$ (gleichwahrscheinliche) Möglichkeiten, 10 Zahlen auf dem Keno-Schein anzukreuzen. Stellen wir uns die 20 gezogenen Zahlen (unsichtbar) markiert vor, so gibt es $\binom{20}{k}\binom{50}{10-k}$ Möglichkeiten, genau k der markierten Zahlen anzukreuzen (wähle k aus den 20 aus, die verbleibenden $10-k$ aus den 50 nicht markierten). Die Wahrscheinlichkeit, dass k der der angekreuzten Zahlen gezogen werden (und $10-k$ nicht), ist also

$$\frac{\binom{20}{k}\binom{50}{10-k}}{\binom{70}{10}}.$$

Als nummerische Werte ergeben sich

k	Gewinnwahrscheinlichkeit
0	$2.58 \cdot 10^{-2}$
5	$8.28 \cdot 10^{-2}$
6	$2.25 \cdot 10^{-2}$
7	$3.83 \cdot 10^{-3}$
8	$3.89 \cdot 10^{-4}$
9	$2.12 \cdot 10^{-5}$
10	$4.66 \cdot 10^{-7}$

(c) Die Gesamtgewinnwahrscheinlichkeit beim Tippen von 10 Zahlen ist 0.135, beim Tippen von 2 Zahlen nur 0.0787. (Auf dieser Basis kann man keine Aussagen treffen, ob man besser 2 oder besser 10 Zahlen ankreuzt. Um dies festzustellen, ist wichtig, welche Gewinnsummen ausgeschüttet werden. Dazu in einer späteren Aufgabe mehr)

Aufgabe 15.

(a) Eine Gruppe von n Banditen versteckt sich in den n Häusern einer Geisterstadt. Jeder Bandit wählt unabhängig von den anderen eines der Häuser als Versteck, wobei jedes Haus mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Dabei darf es vorkommen, dass mehrere Banditen dasselbe Haus als Versteck wählen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in mindestens einem Haus kein Bandit verbirgt?

(b) Verwenden Sie Aufgabenteil (a), um zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n! \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (n-k)^n.$$

(2/4 Punkte)

Lösung.

(a) Es gibt n^n Möglichkeiten n Banditen auf n Häuser bei möglicher Mehrfachbesetzung zu verteilen. Bei wievielen dieser Möglichkeiten bleibt mindestens eines der Häuser frei? Schwer zu sagen. Einfach ist jedoch die Anzahl der Möglichkeiten für das Gegenereignis zu berechnen: Die Anzahl der Möglichkeiten, die n Banditen so zu verteilen, dass **kein** Haus frei bleibt, beträgt $n!$. Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$1 - \frac{n!}{n^n}.$$

(b) Zu zeigen ist

$$n! \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (n-k)^n.$$

Da Aufgabenteil (a) verwendet werden soll, formen wir diese Gleichung zunächst einmal so um, dass auf der linken Seite die unter (a) berechnete Wahrscheinlichkeit steht und versuchen dann die rechte Seite entsprechend zu interpretieren:

$$\frac{n!}{n^n} \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n} \right)^n$$

$$
\begin{aligned}
\frac{n!}{n^n} &= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n \\
1-\frac{n!}{n^n} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

Links steht jetzt also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, das beim Verteilen von n unterscheidbaren Objekten auf n Plätze bei möglicher Mehrfachbesetzung mindestens ein Platz frei bleibt. Und auf der rechten Seite? Das ist nichts anderes als die Darstellung dieses Ereignisses mit Hilfe der Siebformel! Der Summationsindex k gibt die Anzahl der Plätze an , die jeweils (auf jeden Fall) frei bleiben, der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, jeweils diese k Plätze auszuwählen, die frei bleiben sollen, und $\left(\frac{n-k}{n}\right)^n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Objekte auf die übrigen $n-k$ Plätze verteilt werden.