UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, Dr. M. Reich

Hannover, 30. Dezember 2004

Aufgabenblatt 10 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Stundenübung

Aufgabe 45. Es seien X, Y, Z Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment und $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Kovarianz ein bilinearer Operator ist, d.h. es gilt

  (i) $\mathrm{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathrm{Cov}(X, Z) + b\mathrm{Cov}(Y, Z)$ und

  (ii) $\mathrm{Cov}(Z, aX + bY) = a\mathrm{Cov}(Z, X) + b\mathrm{Cov}(Z, Y)$.

(b) Wir betrachten die Abbildung $(a, b) \longmapsto \varphi(a, b) := E\,(X - a - bY)^2$. Für welche reellen Zahlen a, b ist φ minimal, und wie groß ist dieses Minimum?

(c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass unkorrelierte Zufallsvariablen nicht notwendigerweise auch unabhängig sind.

Aufgabe 46. *(Multinomialverteilung)*
Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ sei multinomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$, d.h.

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!} p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$$

für $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \ldots + k_r = n$, wobei $p_1, \ldots, p_r \geq 0$ und $p_1 + \ldots + p_r = 1$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_i, $i = 1, 2, \ldots, r$.

(b) Bestimmen Sie für $i, j = 1, 2, \ldots, r$ die Kovarianzen $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ der Komponenten von X.

(c) Sind die Komponenten von X unabhängig?

Aufgabe 47. *(Faltung der geometrischen Verteilung)*
Gegeben seien zwei unabhängige, mit Parameter p geometrisch verteilte Zufallsgrößen X und Y. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

Hausübung

Aufgabe 48. *(Das Postbotenproblem)*
Es sei Ω die Menge der Permutationen $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ von $(1, 2, ..., n)$. Wir betrachten das durch Ω festgelegte Laplace-Experiment (vgl. das Postbotenproblem, Beispiel 2.7 der Vorlesung). Es sei $Y(\omega)$ die Anzahl der Fixpunkte von ω. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

Hinweis. Es gilt $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ mit

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \ \omega_i = i \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für alle $i = 1, 2, ..., n$.

(5 Punkte)

Aufgabe 49. *(Faltung der Gammaverteilung)*
Wir schreiben $\Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, für die in Aufgabe 38 vorgestellte Gammaverteilung mit den Parametern α und λ. Zeigen Sie: Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ und $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$, so gilt $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$.

(5 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungsstunden vom 17. Januar bis 19. Januar.