Universität Hannover
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 4. November 2004

Aufgabenblatt 5 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 24.

(a) Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen; X bezeichne das Minimum der beiden erhaltenen Augenzahlen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X.

(b) Ein Paar fairer Würfel wird sechsunddreißigmal geworfen; X sei die Anzahl der erhaltenen Doppel-Sechsen. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten nimmt X die Werte 1, 3 und 6 an? Welche Werte liefert die Approximation durch eine Poisson-Verteilung im Sinne von Satz 4.4? Versuchen Sie eine Aussage über die Qualität der Approximation zu machen.

(3/3 Punkte)

Lösung.

(a) Es bezeichne X_1 das Ergebnis des ersten Würfelwurfes und X_2 das Ergebnis des zweiten Würfelwurfes. Dann sind X_1 und X_2 unabhängig und jeweils gleichverteilt auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und es gilt $X = \min\{X_1, X_2\} =: X_1 \vee X_2$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion von X. X kann die Werte $1, 2, 3, 4, 5, 6$

annehmen, und es gilt für $k \in \{1, ..., 6\}$:

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(X_1 \vee X_2 = k) \\
&= P\big(\{X_1 = X_2 = k\} \cup (\{X_1 = k\} \cap \{X_2 > k\}) \\
&\quad \cup(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 > k\})\big) \\
&= P\big(\{X_1 = X_2 = k\}\big) + P\big(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 > k\}\big) \\
&\quad +P\big(\{X_2 = k\} \cap \{X_1 > k\}\big), \text{ da diese Ereignisse disjunkt sind,} \\
&= P\big(\{X_1 = k\}\big) \cdot P\big(\{X_2 = k\}\big) + P\big(\{X_1 = k\}\big) \cdot P\big(\{X_2 > k\}\big) \\
&\quad +P\big(\{X_2 = k\}\big) \cdot P\big(\{X_1 > k\}\big), \\
&\quad \text{da diese Zufallsvariablen unabhängig sind,} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{6-k}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6-k}{6} \\
&= \frac{1 + 6 - k + 6 - k}{36} \\
&= \frac{13 - 2k}{36}.
\end{aligned}$$

(b) Ein Paar fairer Würfel wird sechsunddreißigmal geworfen. X bezeichne die Anzahl der erhalten Doppel-Sechsen. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 36$ und $p = 1/36$, kurz $X \sim \text{Bin}(36, 1/36)$. Dementsprechend ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert k annimmt für alle $k = 0, 1, ..., 36$ zu:

$$P(X = k) = \binom{36}{k} \left(\frac{1}{36}\right)^k \left(\frac{35}{36}\right)^{n-k}.$$

Insbesondere gilt:

$$P(X = 1) = \binom{36}{1} \left(\frac{1}{36}\right)^1 \left(\frac{35}{36}\right)^{35} \approx 0.3731,$$

$$P(X = 3) = \binom{36}{3} \left(\frac{1}{36}\right)^3 \left(\frac{35}{36}\right)^{33} \approx 0.0604,$$

$$P(X = 6) = \binom{36}{6} \left(\frac{1}{36}\right)^6 \left(\frac{35}{36}\right)^{30} \approx 0.0003843.$$

Das Gesetz der seltenen Ereignisse (Lemma 3.1) besagt nun, dass man bei "großem" n und "kleinem" p die Verteilung $\text{Bin}(n, p)$ durch die Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = n \cdot p$ approximieren kann. In unserem Falle ist also $\lambda = n \cdot p = 36 \cdot (1/36) = 1$

zu wählen. Ist $\tilde{X}$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 1$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ $P(\tilde{X} = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$. Dementsprechend ergeben sich hier folgende Approximationen:

$$P(\tilde{X} = 1) = e^{-1} \cdot \frac{1}{1!} \approx 0.3679,$$

$$P(\tilde{X} = 3) = e^{-1} \cdot \frac{1}{3!} \approx 0.0613,$$

$$P(\tilde{X} = 6) = e^{-1} \cdot \frac{1}{6!} \approx 0.0005109.$$

Man stellt fest, dass die Approximationen kleinerer Wahrscheinlichkeiten einen größeren relativen Fehler aufweisen; es gilt

$$\frac{|P(X = 1) - P(\tilde{X} = 1)|}{|P(X = 1)|} \approx \frac{|0.3731 - 0.3679|}{|0.3731|} \approx 1.4\%,$$

$$\frac{|P(X = 3) - P(\tilde{X} = 3)|}{|P(X = 3)|} \approx \frac{|0.0604 - 0.0613|}{|0.0.0604|} \approx 1.5\%,$$

$$\frac{|P(X = 6) - P(\tilde{X} = 6)|}{|P(X = 6)|} \approx \frac{|0.0003843 - 0.0005109|}{|0.0003843|} \approx 32.9\%.$$

Die Approximation der Binomial-Verteilung durch die Poisson-Verteilung wird also bei Werten für k, die nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit auftreten, zunehmend schlechter.

Aufgabe 25. (Banach's matchbox problem) Herr B. war ein passionierter Pfeifenraucher und hatte stets in seiner linken und in seiner rechten Tasche jeweils eine Streichholzschachtel, die beide anfänglich n Streichhölzer enthielten. Benötigte Herr B. ein Streichholz, so wählte er eine der beiden Taschen zufällig aus und entnahm der darin befindlichen Schachtel ein Streichholz. Irgendwann war dann natürlich die gewählte Schachtel leer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthielt die andere Schachtel in diesem Moment noch genau k $(0 \leq k \leq n)$ Streichhölzer?

(4 Punkte)

Erste Lösung. Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit p_1 für das Ereignis, dass die Schachtel in B.'s linker Tasche als erstes leer ist, und dass dann in der Schachtel in seiner rechten Tasche noch genau k $(0 \leq k \leq n)$ Streichhölzer sind. Das bedeutet jedoch, dass B. vor dem $(2n-k+1)$. Versuch bereits n Mal in seine linke Tasche gegriffen hat und nun im $(2n - k + 1)$. Versuch zum $(n + 1)$. Mal in die linke Tasche greift. Es gibt $\binom{2n-k}{n}$ Möglichkeiten, die n Versuche, in denen B. in seine linke Tasche greift, auf die ersten $2n-k$ Versuche zu verteilen. Jede dieser Möglichkeiten hat jedoch die gleiche Wahrscheinlichkeit $(1/2)^{2n-k+1}$ und es ergibt sich:

$$p_1 = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}.$$

Sei nun p_2 das Ereignis, dass die Schachtel in B.'s rechter Tasche als erstes leer ist, und dass dann in der Schachtel in seiner linken Tasche noch genau k $(0 \leq k \leq n)$ Streichhölzer sind.

Aus Symmetriegründen gilt $p_1 = p_2$. Damit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}.$$

Zweite Lösung. Wir berechnen zunächst wieder die Wahrscheinlichkeit p_1 für das Ereignis, dass die Schachtel in B.'s linker Tasche als erstes leer ist, und dass dann in der Schachtel in seiner rechten Tasche noch genau k ($0 \leq k \leq n$) Streichhölzer sind. Das bedeutet jedoch nichts anderes, als dass eine mit den Parametern $r = n+1$ und $p = 1/2$ negativ binomialverteilte ZV (Anzahl der Versuche, bis zum $(n+1)$. Mal in die linke Tasche gegriffen wird) den Wert $2n-k+1$ annimmt. Dann gilt

$$p_1 = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}.$$

Mit den gleichen Symmetrieüberlegungen wie oben ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$2\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}.$$

(Anmerkung: Die negative Binomialverteilung wurde in Aufgabe 22 eingeführt.)