UNIVERSITÄT HANNOVER
Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. R. Grübel
Dr. C. Franz, M. Kötter, M. Reich

Hannover, 28. Oktober 2004

Aufgabenblatt 4 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Hausübung

Aufgabe 19.

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A und B seien zwei unabhängige Ereignisse. Sind dann auch A^c und B^c unabhängig?

(b) Die Ereignisse A und B seien unabhängig und es gelte $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt mindestens eines dieser Ereignisse ein? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt genau eines dieser Ereignisse ein?

(2/2 Punkte)

Lösung.

(a) Da A und B unabhängig sind, dürfen wir $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ voraussetzen. Damit folgt:

$$\begin{aligned} P(A^c) \cdot P(B^c) &= \big(1 - P(A)\big) \cdot \big(1 - P(B)\big) \;=\; 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \;=\; \big(1 - P(A)\big) - \big(P(B) - P(A \cap B)\big) \\ &= P(A^c) - P(B \cap A^c) \;=\; P(A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

Also sind auch A^c und B^c unabhängig. Ebenso zeigt man im Übrigen die Unabhängigkeit von A und B^c, sowie von A^c und B.

(b) Mit A und B sind nach Aufgabenteil (a) auch A^c und B^c, A und B^c sowie A^c und B stochastisch unabhängig. Folglich gilt:

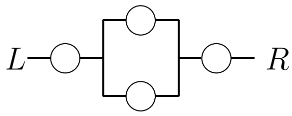
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

und

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c + A^c \cap B) &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) \;=\; P(A) \cdot P(B^c) + P(A^c) \cdot P(B) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 20. (Netzwerke)

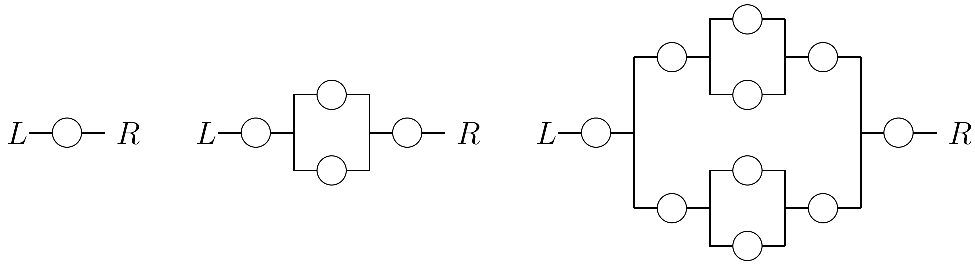
(a) Ein Netzwerk besteht aus 4 wie im nachfolgenden Diagramm angeordneten Schaltern, die unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit p geschlossen sind.



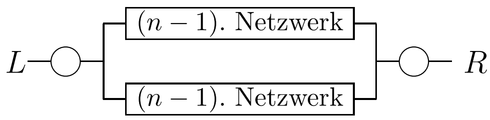
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ein Strom von L nach R fließen?

(b) Sie können obiges Netzwerk als zweites Glied einer ganzen Folge von Netzwerken auffassen.

1. Netzwerk: **2. Netzwerk:** **3. Netzwerk:**



n. Netzwerk:



Sei $P_n(p)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im n. Netzwerk der Strom von L nach R fließen kann. Beweisen Sie die folgende Rekursionsformel:

$$P_{n+1}(p) = p^2 \cdot \Big(2P_n(p) - P_n^2(p)\Big),\ n \in \mathbb{N},\ P_1(p) = p.$$

(c) Zeichnen Sie einmal das 4. Netzwerk. “Zu Fuß” würden Sie $P_4(p)$ wohl nur sehr schwer herausbekommen, aber mit der obigen Rekursionsformel ist das nicht weiter schwer. Welchen Wert hat $P_4(p)$? (Der Einsatz von Maple erleichtert die Berechnung ungemein.)

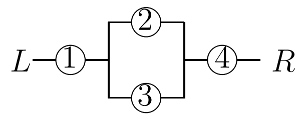
(d) * Versuchen Sie durch Computerexperimente (Maple, etc.) (oder ersatzweise durch scharfes Nachdenken) herauszubekommen, wie sich die Funktion $P_n(p)$ mit $n \to \infty$ verhält.

(e) * Können Sie dieses Verhalten begründen? Warum spielt die Wahrscheinlichkeit $p = 1/\sqrt{2}$ eine so wichtige Rolle?

(2/2/2/2/3* Punkte)*

Lösung.

(a) Die Schalter seien wie folgt durchnummeriert:



Es bezeichne A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, das Ereignis, dass der Schalter Nr. i eingeschaltet ist und S das Ereignis, dass ein Strom von L nach R fließen kann. Damit das Ereignis S eintreten kann, müssen die Schalter Nr. 1 und 4 und zusätzlich mindestens einer der Schalter Nr. 2 und 3 geschlossen sein. Also gilt

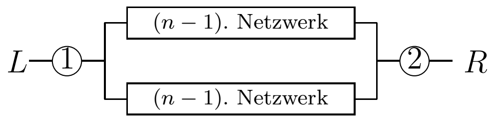
$$P(S) = P\Big(A_1 \cap A_4 \cap (A_2 \cup A_3)\Big)$$

und mit der Unabhängigkeit der Ereignisse A_1, A_2, A_3 und A_4 folgt

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A_1 \cap A_4 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_4 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= p^3 + p^3 - p^4 \\ &= 2 \cdot p^3 - p^4. \end{aligned}$$

(b) Für das n. Netzwerk führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

n. Netzwerk:



Es bezeichne wieder A_1 bzw. A_2 das Ereignis, dass der Schalter Nr. 1 bzw. Nr. 2 geschlossen ist, S_n, dass ein Strom im n. Netzwerk von L nach R fließen kann und zusätzlich O_{n-1} bzw. U_{n-1} das Ereignis, dass das obere bzw. untere $(n-1)$. Netzwerk den Strom leitet. Mit den gleichen Überlegungen wie zuvor gilt jetzt:

$$\begin{aligned} P(S) &= P\Big(A_1 \cap A_2 \cap (O_{n-1} \cup U_{n-1})\Big) \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap O_{n-1}) + P(A_1 \cap A_2 \cap U_{n-1}) - P(A_1 \cap A_2 \cap O_{n-1} \cap U_{n-1}). \end{aligned}$$

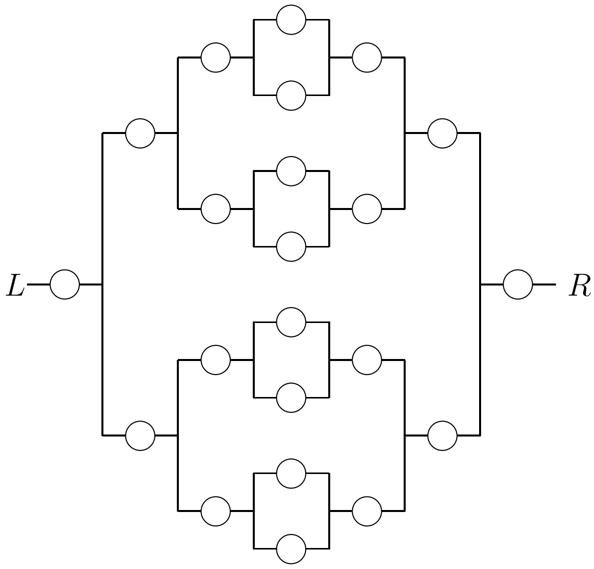
Nun sind die Ereignisse A_1, A_2, O_{n-1} und U_{n-1} offensichtlich unabhängig und es folgt:

$$P(S_n) = p^2 \cdot P(O_{n-1}) + p^2 \cdot P(U_{n-1}) - p^2 \cdot P(O_{n-1}) \cdot P(U_{n-1}).$$

Beachtet man jetzt noch, dass gilt $P(S_n) = P_n(p)$ und $P(O_{n-1}) = P(U_{n-1}) = P_{n-1}(p)$, so folgt die behauptet Rekursionsformel, wobei $P_1(p) = p$ klar sein dürfte.

(c) Das vierte Netzwerk sieht wie folgt aus:

4. Netzwerk:



Mit Hilfe der Rekursionsformel aus Aufgabenteil (b) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
P_1(p) &= p \\
P_2(p) &= 2p^3 - p^4 \\
P_3(p) &= 4p^5 - 2p^6 - 4p^8 + 4p^9 - p^{10} \\
P_4(p) &= 8p^7 - 4p^8 - 8p^{10} + 8p^{11} - 18p^{12} + 16p^{13} \\
&\quad -4p^{14} + 32p^{15} - 48p^{16} + 24p^{17} - 20p^{18} \\
&\quad +32p^{19} - 24p^{20} + 8p^{21} - p^{22}
\end{aligned}
$$

(d) Durch Computerexperimente ergibt sich folgende Entwicklung von $P_n(p)$ mit $n \to \infty$:

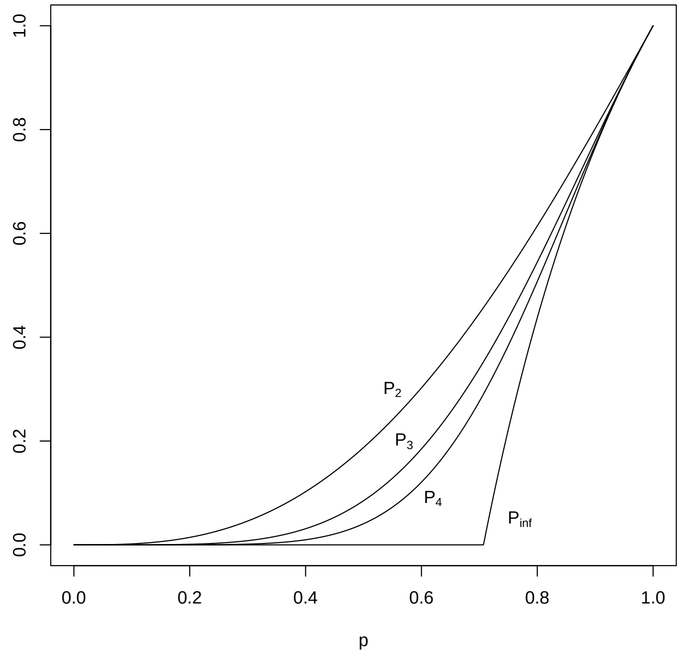


Abbildung 1: Die Entwicklung von P_n mit $n \to \infty$.

Durch scharfes Nachdenken erhält man als Grenzfunktion

$$P_\infty(p) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } p \le 1/\sqrt{2}, \\ 2 - \frac{1}{p^2} & \text{, falls } p > 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

(Begründung in Aufgabenteil (e).)

(e) Die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ sind trivial. Wenn die Folge $(P_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ für festes $p \in (0,1)$ überhaupt konvergiert, so gegen einen Fixpunkt der Funktion

$$F(x) := p^2\Big(2 \cdot x - x^2\Big).$$

Als Fixpunkte erweisen sich $x_1 = 0$ und $x_2 = 2 - 1/p^2$. Außerdem liegt die Folge $(P_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ immer im Intervall $[0,1]$.

Für $p \le 1/\sqrt{2}$ liegt der Fixpunkt x_2 außerhalb des Intervalls $[0,1]$, so dass als möglicher Grenzwert nur der Fixpunkt $x_1 = 0$ in Frage kommt. Man kann sich überlegen, dass in diesem Fall der Fixpunkt x_1 tatsächlich ein anziehender Fixpunkt ist und es ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} P_n(p) = x_1 = 0.$$

Das folgende Bild zeigt beispielsweise den Fall $p = 0.65$:

Für $p > 1/\sqrt{2}$ liegt der Fixpunkt x_2 innerhalb des Intervalls $[0,1]$, und es erweist sich, dass jetzt der Fixpunkt x_1 ein abstoßender, der Fixpunkt x_2 jedoch ein anziehender

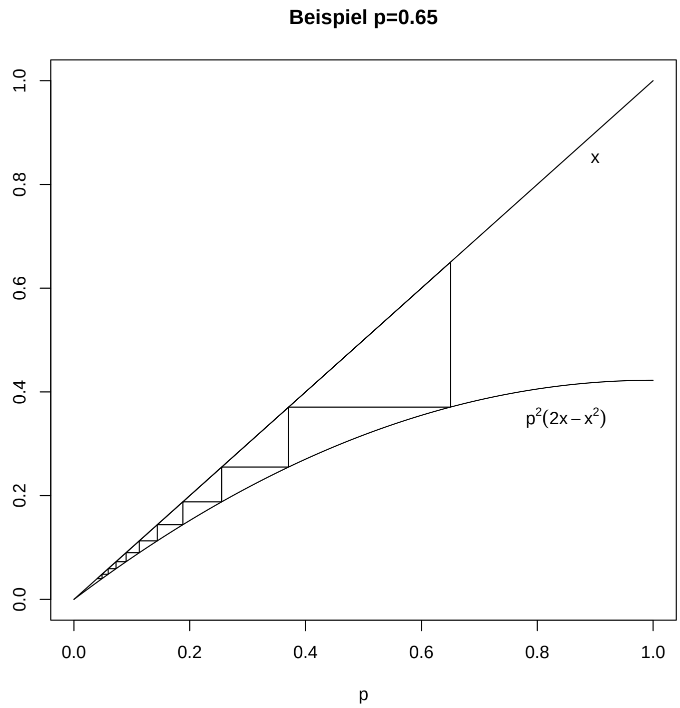


Abbildung 2: Im Fall $p \leq 1/\sqrt{2}$ erweist sich 0 als anziehender Fixpunkt

Fixpunkt ist, und es ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(p) = x_2 = 2 - \frac{1}{p^2}.$$

Abbildung 3 zeigt beispielsweise den Fall $p = 0.8$.

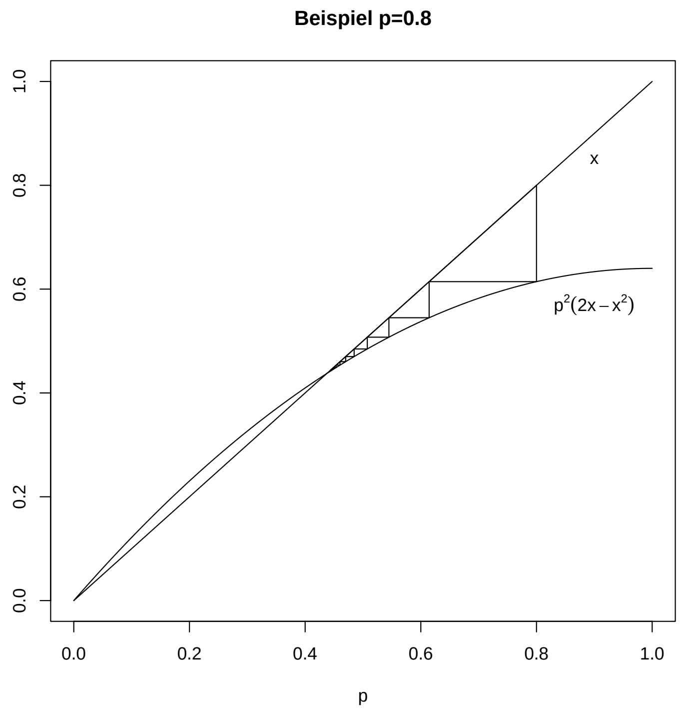


Abbildung 3: Im Fall $p > 1/\sqrt{2}$ ist $1/\sqrt{2}$ der anziehende Fixpunkt