

Aufgabenblatt 7 zur Vorlesung

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik A
WS 2004/05

Stundenübung

Aufgabe 30. Es sei X eine absolutstetig verteilte Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (1 - x^2) & , \text{ falls } |x| \leq 1, \\ 0 & , \text{ falls } |x| > 1. \end{cases}$$

- (a) Welchen Wert hat die Konstante c ?
- (b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X .
- (c) Berechnen Sie $P(-0.5 < X < 0)$ und $P(X > 0 \mid X > -0.5)$.

Aufgabe 31.

- (a) Es sei X eine Zufallsgröße mit stetiger Verteilungsfunktion F . Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion zu $Y := X^2$.
- (b) Es sei Y der Flächeninhalt eines Quadrats mit zufälliger Seitenlänge X , wobei X exponentialverteilt mit Parameter λ ist. Bestimmen Sie die Dichte f und die Verteilungsfunktion F von Y .

Aufgabe 32. Es sei X exponentialverteilt mit Parameter λ , d.h. X besitze die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , \text{ falls } x \geq 0, \\ 0 & , \text{ falls } x < 0. \end{cases}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Exponentialverteilung ebenso wie die geometrische Verteilung die sog. Eigenschaft der *Gedächtnislosigkeit* besitzt, d.h. es gilt

$$P(X \geq x + y \mid X \geq x) = P(X \geq y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

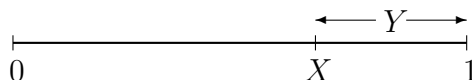
Sei nun $Y := \lceil X \rceil$. Dann ist Y eine diskrete Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilung von Y .

(Bemerkung: für eine reelle Zahl z bezeichnet $\lceil z \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich z ist.)

Hausübung

Aufgabe 33. (Zerbrechende Stäbe)

Ein Stab der Länge 1 möge an einer zufälligen Stelle zerbrechen. Genauer wollen wir annehmen, dass alle Bruchpositionen gleichwahrscheinlich sind, d.h. der Abstand X des Bruchpunktes vom linken Endpunkt des Stabes sei $\text{unif}(0, 1)$ -verteilt.



Sei Y die Länge des kürzeren Bruchstückes (das natürlich nicht immer wie in der Skizze das rechte zu sein braucht). Dann ist Y wieder eine Zufallsvariable.

- (a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y .
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Verhältnis der Länge des kürzeren Bruchstücks zu der des längeren, also $Y/(1 - Y)$, kleiner oder gleich $1/4$?

(3/3 Punkte)

Aufgabe 34. (Quantiltransformation)

- (a) Es sei F eine stetige und streng monoton wachsende Verteilungsfunktion, F^{-1} bezeichne die Umkehrfunktion zu F und U sei eine auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $F^{-1}(U)$.
- (b) Nutzen Sie das Resultat aus Aufgabenteil (a), um aus einer $\text{unif}(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariable U eine mit Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariable zu konstruieren.

(2/2 Punkte)

Abgabe der Hausübungen in den Übungsstunden vom 6. Dezember bis 8. Dezember.