

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní



Aktivní tuhost a bezvůlové ovládání redundantních paralelních robotů

Doktorská disertační práce

Autor: **Ing. Martin Florián**

Studijní obor: Mechanika tuhých a poddajných těles a prostředí

Školitel: Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.

Praha, říjen 2006

ANOTACE

Paralelní roboty s redundancí pohonů se oproti běžným robotům vyznačují širšími možnostmi ovládání důležitých pracovních charakteristik. Podle toho, na kterou charakteristiku je při řízení robotu kladen důraz, hovoříme o různých strategiích řízení. Tato práce pojednává o dvou takových strategiích – o impedančním řízení v otevřené smyčce a o ovládání s vyloučením vůlí v pohonech.

První zmíněná strategie je založena na existenci tzv. aktivní složky pracovní tuhosti robotu, která vzniká při zatížení robotu hnacími silami, a lze ji ovládat bez zpětné vazby. V práci je popsán výpočet této složky tuhosti, dále je formulováno a následně řešeno několik typů úloh nezávislého ovládání interakčních sil a impedančních charakteristik. Existence aktivní tuhosti je doložena simulací a experimentem, její praktická využitelnost je kriticky zhodnocena.

Pokud jde o ovládání s vyloučením vůlí, je nejprve formulována podmínka vymezení vůlí v pohonech, poté jsou popsány dvě metody nalezení tzv. bezvůlového řízení – jednak pro danou trajektorii, dynamiku a interakci s okolím, jednak na základě znalosti oblastí pracovního prostoru, kde lze vůle vymezit vždy, nezávisle na dynamice a interakci. Pro mapování těchto tzv. oblastí vymezitelných vůlí je navržen původní algoritmus. Obě metody jsou ilustrovány počítačovými simulacemi.

ANNOTATION

“Active Stiffness and Anti-backlash Control of Redundant Parallel Robots”

Parallel robots with actuation redundancy are, in comparison with robots without redundant drives, characterized by wider possibilities of the control of important workspace characteristics. According to the emphasis which characteristic is placed on, we speak about various control strategies. This thesis deals with two such strategies – open-loop robot impedance control and anti-backlash control.

The first strategy is based upon the phenomenon of so-called active stiffness, which appears when a robot is loaded by driving forces. This component of robot work-space stiffness may be controlled in an open loop, without feedback. The computation of this stiffness element is derived, afterwards several tasks are solved of independent force control and the control of chosen stiffness characteristics. The existence of active stiffness is proved by simulation and an experiment, its practical usability is critically judged.

As regards the anti-backlash control strategy, initially the condition of drive backlashes exclusion is stated, then two methods of finding the anti-backlash control are described – firstly for a given robot trajectory, dynamics and interaction, secondly on the basis of the knowledge of the spaces where backlashes can be eliminated at any time, regardless of interaction and dynamics. An original algorithm is proposed for mapping these so-called anti-backlash areas. Both methods are illustrated with computer simulations.

PODĚKOVÁNÍ

Chtěl bych nejprve poděkovat svému školiteli Prof. Ing. Michaelu Valáškoví, DrSc. za poskytnuté náměty, kvalitní odborné vedení a za jeho ochotu a velkorysost.

Můj největší dík však patří mé ženě Kateřině a mým rodičům, kteří mi vždy stáli nablízku, dodávali energie, a bez jejichž neocenitelné morální podpory by tato práce nevznikla.

Autor

OBSAH

I ÚVOD	1
II SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY	4
2.1 Definice základních pojmů	4
2.2 Impedanční řízení robotu	7
2.2.1 Pasivní řízení tuhosti	9
2.2.2 Zpětnovazební řízení tuhosti	9
2.2.3 Řízení tuhosti v otevřené smyčce	10
2.3 Ovládání robotu s vyloučením vůlí	13
III CÍLE	16
IV METODY ŘEŠENÍ	17
4.1 Ovládání aktivní tuhosti redundantního paralelního robotu	17
4.1.1 Analýza pracovní tuhosti paralelního robotu	17
4.1.2 Ovládání pracovní tuhosti	22
4.1.2.1 Ovládání směru vratné síly	23
4.1.2.2 Ovládání směru a gradientu vratné síly	28
4.1.2.3 Ovládání směru vratné síly s maximalizací jejího gradientu	31
4.1.2.4 Maximalizace směrové tuhosti	32
4.1.2.5 Obecné ovládání matice pracovní tuhosti	36
4.2 Ovládání robotu s vyloučením vůlí v pohonech	38
4.2.1 Formulace a implementace podmínky vymezení vůlí	38
4.2.2 Hledání bezvůlového ovládání pro daný pracovní cyklus	40
4.2.2.1 Matematická formulace úlohy	40
4.2.2.2 Řešení úlohy nalezení bezvůlového ovládání	42
4.2.2.3 Metody získání startovací množiny znaménkových vektorů	43
4.2.3 Mapování oblastí vymezených vůlí	46
4.2.3.1 Podmínka vymezenosti vůlí v oblasti pracovního prostoru	46
4.2.3.2 Testování znaménkových vektorů na vymezenost vůlí	48
4.2.3.3 Algoritmus hledání oblastí vymezených vůlí	49
4.2.4 Postup nalezení bezvůlového ovládání robotu	51
V VÝSLEDKY	52
5.1 Ovládání aktivní tuhosti robotu	52
5.1.1 Počítačová simulace úlohy maximalizace směrové tuhosti	52
5.1.2 Experiment – prokázání existence aktivní tuhosti	54
5.1.3 Analýza praktické využitelnosti aktivní tuhosti robotu	58
5.2 Bezvůlové ovládání robotu	61
5.2.1 Počítačová simulace bezvůlového ovládání	61
5.2.2 Počítačové mapování oblastí vymezených vůlí	66
VI DŮSLEDKY PRO VĚDU A PRAXI	78
6.1 Řízená aktivní tuhost	78
6.2 Online vyloučení vůlí v pohonech	80
VII ZÁVĚR	81
DODATEK A	83
DODATEK B	85
LITERATURA	87
PUBLIKACE AUTORA	90

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 2.1:	Rovinný paralelní robot o 3 stupních volnosti.....	5
Obr. 2.2:	Rovinný redundantní paralelní robot se 4 pohony a 3 stupni volnosti.....	6
Obr. 2.3:	Vliv vůlí v pohonech na přesnost nastavení požadované polohy platformy.....	14
Obr. 4.1:	Rovinný redundantní paralelní robot se 4 pohony a 2 stupni volnosti.....	18
Obr. 4.2:	Směrová tuhost rovinného robotu s bodovou platformou.....	33
Obr. 5.1:	Závislost směrové tuhosti na poloze platformy a směru vynucené změny polohy platformy.....	53
Obr. 5.2:	Uspořádání experimentu	57
Obr. 5.3:	Detail platformy s připevněným tenzometrickým siloměrem	57
Obr. 5.4:	Srovnání aktivní a pasivní tuhosti při úloze 4.1.2.3 (s maximalizací aktivní tuhosti) aplikované na robot z Obr. 4.1	59
Obr. 5.5:	Průběh hnacích momentů při bezvůlovém ovládání.....	62
Obr. 5.6:	Naplánovaná trajektorie referenčního bodu P platformy robotu	63
Obr. 5.7:	Časová závislost hnacích krouticích momentů	64
Obr. 5.8:	Časová závislost hnacích krouticích momentů při odchylkách redukované dynamické síly	65
Obr. 5.9:	Oblasti vymežitelných vůlí rovinného robotu se 3 rotačními pohony a 2 stupni volnosti	68
Obr. 5.10a:	Oblasti vymežitelných vůlí rovinného robotu se 4 rotačními pohony a 2 stupni volnosti	69
Obr. 5.10b:	Oblasti vymežitelných vůlí rovinného robotu se 4 rotačními pohony a 2 stupni volnosti	70
Obr. 5.11:	Oblasti vymežitelných vůlí rovinného robotu se 4 rotačními pohony a 3 stupni volnosti – řez pro konstantní natočení platformy $\psi=45^\circ$	71
Obr. 5.12:	Oblast vymežitelných vůlí rovinného robotu se 4 rotačními pohony a 3 stupni volnosti – řezy pro různá natočení platformy ψ	72
Obr. 5.13:	Ukázky oblastí vymežitelných vůlí robotu s 8 translačními pohony a 6 stupni volnosti („octapod“)	73
Obr. 5.14:	Oblasti vymežitelných vůlí rovinného robotu se 4 translačními pohony a 3 stupni volnosti („sliding star“)	74
Obr. 5.15:	Oblasti vymežitelných vůlí rovinného robotu se 4 translačními pohony a 3 stupni volnosti („sliding star“) - řezy pro různá natočení platformy ψ	75
Obr. 5.16:	Oblast vymežitelných vůlí robotu se 4 translačními pohony a 3 stupni volnosti („sliding delta“)	76
Obr. 5.17:	Kinematické schéma a laboratorní model robotu „sliding delta“	76
Obr. 5.18:	Kinematické schéma a laboratorní model robotu „sliding star“	77
Obr. 5.19:	Kinematické schéma a laboratorní model robotu „octapod“	77

POUŽITÉ SYMBOLY

symbol	význam
$\mathbf{D}(\mathbf{s})$	diagonální matice, jejíž diagonální prvky tvoří vektor \mathbf{s}
\mathbf{D}_f	vektor setrvačných silových účinků ve fyzikálních souřadnicích robotu
\mathbf{F}_e	vektor interakčních sil – efektivní zatížení platformy robotu
F_{ex}, F_{ey}	kartézské složky interakční síly (prvky vektoru \mathbf{F}_e)
\mathbf{F}_D	vektor setrvačných sil redukovanych na pohyb platformy robotu
\mathbf{F}_X	vektor výsledného redukovaneho zatížení robotu v pracovním prostoru
\mathbf{I}	jednotková matice
\mathbf{J}^+	pseudo-inverzní jakobián transformace $\mathbf{X} \rightarrow \Phi$
\mathbf{J}_s^{+T}	transformovaný pseudo-inverzní jakobián: $\mathbf{J}^{+T} \mathbf{D}(\mathbf{s})$
k_{hh}, k_{ij}	prvky matice tuhosti v pracovním prostoru
\mathbf{K}_S	směrová pracovní tuhost
\mathbf{K}_X	matice impedance (tuhosti) robotu v pracovním prostoru
\mathbf{K}_{Xa}	aktivní složka tuhosti robotu v pracovním prostoru
\mathbf{K}_{Xp}	pasivní složka tuhosti robotu v pracovním prostoru
\mathbf{K}_Φ	matice tuhosti robotu v prostoru pohonů
\mathbf{M}_{hi}	hnací momenty (prvky vektoru \mathbf{T}_a)
m	počet stupňů volnosti robotu
n	počet pohonů robotu
\mathbf{R}	vektor fyzikálních souřadnic členů robotu
\mathbf{s}	znaménkový vektor: $\text{sign}(\mathbf{T}_a)$
$\{\mathbf{s}\}$	množina znaménkových vektorů
\mathbf{T}_a	vektor hnacích momentů, resp. sil
T_{aj}	prvek vektoru hnacích momentů
$\mathbf{T}_{a \max}$	vektor maximálních (dosažitelných) hnacích momentů (sil)
$\mathbf{T}_{a \min}$	vektor požadovaných prahových hodnot hnacích momentů (sil)
\mathbf{T}_{as}	vektor absolutních hodnot prvků vektoru \mathbf{T}_a
\mathbf{X}	vektor pracovních souřadnic robotu
x_p, y_p	kartézské souřadnice platformy robotu (prvky vektoru \mathbf{X})
$\Delta \mathbf{F}_e$	vektor změny efektivního zatížení platformy robotu
$\Delta \mathbf{X}$	vektor změny polohy platformy robotu
φ_i	souřadnice pohonů robotu (prvky vektoru Φ)
Φ	vektor souřadnic robotu v prostoru pohonů
ψ	natočení platformy rovinného robotu

I ÚVOD

V současnosti stále ještě většina průmyslových manipulátorů připomíná konstrukci lidskou paži: Skládají se ze série tuhých těles propojených rotačními nebo posuvnými vazbami, ve kterých jsou současně umístěny pohony. Mechanismy tohoto typu, založené na koncepci otevřeného mechanického řetězce, se nazývají sériovými roboty. Srovnáním charakteristik různých sériových manipulátorů se potvrdily některé inherentní vlastnosti sériových struktur, které limitují jejich průmyslové použití: Jedná se především o omezenou zátěžnou kapacitu (plynoucí z jejich nízké tuhosti), pracovní rychlost (pohony značně přispívají k setrvačným hmotám) a relativně malou přesnost (sčítání odchylek akčních souřadnic pohonů) [Merlet, 2000]. Ukázalo se, že zmíněné nevýhody manipulátorů lze eliminovat aplikací jednoho ze dvou stěžejních principů – buď modulární konstrukcí robotů [Tesar, 1991], anebo použitím paralelních struktur robotů [Merlet, 1996, 2000].

Zejména koncept paralelních robotů přináší značné výhody. Struktura paralelních robotů je charakterizována uzavřeným kinematickým řetězcem a umístěním pohonů (zpravidla pouze) na rámu. Výčet různých kinematických uspořádání paralelních robotů je uveden např. v publikacích [Merlet, 2000], [Tsai, 1999]. Paralelní manipulátory se vyznačují vysokou pohyblivostí (odlehčená konstrukce s pohony na rámu), zatížitelností a přesností (danou vysokou statickou tuhostí – zjednodušeně si lze paralelní manipulátory představit jako pohyblivé příhradové konstrukce). Naproti tomu ve srovnání s jejich sériovými protějšky je značnou nevýhodou paralelních manipulátorů omezený pracovní prostor, který navíc velmi často obsahuje singulární polohy [Sefrioui and Gosselin, 1992]. Mechanismus ztrácí v singulární konfiguraci veškerou tuhost a stává se neovladatelným. Singularity tak narušují spojitost pracovního prostoru paralelního robotu.

Pro eliminaci singularit byl vyvinut koncept redundantních (kinematicky nadbytečných) pohonů, jehož podstata tkví ve využití většího počtu pohonů, než je počet stupňů volnosti koncového efektoru paralelního manipulátoru [Merlet, 1996], [Šika, Valášek, Miláček and Bastl, 1997]. Kromě minimalizace výskytu singulárních poloh v pracovním prostoru plynou z podstaty redundantních paralelních robotů jejich

další výhodné vlastnosti, především ještě lehčí a dynamičtější konstrukce a větší tuhost [Šika, 1998], [Valášek, Šika, Bauma, and Vampola, 2004].

Koncept redundantních pohonů byl s úspěchem aplikován u řady paralelních mechanismů, jako jsou např. víceprsté mechanické ruce, krácející mechanismy, hmatové displeje a obráběcí stroje [Buttolo and Hannaford, 1995], [Li, Lee and Suh, 1998], [Kock and Schumacher, 1998], [Valášek, 2004]. Dále lze redundantních pohonů využít například k online kalibraci paralelních manipulátorů: Přesným měřením souřadnic všech pohonů v několika polohách robotu lze získat „nadbytečné“ informace, na jejichž základě lze vypočítat skutečné rozměry robotu [Valášek, 2004], [Valášek, Šika and Štembera, 2004].

Jedním z klíčových problémů je řešení dynamiky redundantních paralelních robotů, nezbytné při aplikaci řídicích algoritmů především v případě větších uvažovaných zrychlení. Formulace inverzní dynamiky je zde složitější než u paralelních mechanismů bez redundantních pohonů [Nakamura and Ghodoussi, 1989], [Murray, Li and Sastry, 1994], [Šika, 1998].

Řízení je další velmi specifickou, zatím jen zčásti probádanou kapitolou redundantních paralelních robotů. V literatuře popisovaná řešení jsou zatím vesměs neúplná nebo neobecná [Freischen, 1997], [Kock and Schumacher, 2000].

Přestože byly redundantní pohony uvedeny do oblasti paralelních robotů relativně nedávno, vývoj i praktické aplikace ukazují na výhodnost, v některých případech i nezbytnost využití tohoto konceptu. Na teoretickém i technologickém poli však zůstává několik problémů k vyřešení či dořešení a také řada námětů, kudy směřovat další výzkum, přičemž mezi nejvýznamnější jistě patří výčet a popis možných strategií řízení redundantních paralelních robotů. Tato práce se zabývá dvěma takovými strategiemi – řízenou pracovní tuhostí paralelního robotu a vyloučením vůlí v pohonech při řízení robotu.

Práce je členěna následujícím způsobem: V **kapitole II** jsou nejprve zavedeny základní pojmy používané při popisu řešených problémů a některé důležité definice, poté následuje seznámení se současným stavem výzkumu zde řešených či bezprostředně souvisejících problémů, a to s ohledem (především) na cizí publikace. V závěru příslušných podkapitol jsou uvedena témata, kterým podle mínění autora dosud nebyla věnována pozornost, jakou si zasluhují. Na tato konstatování

navazuje **kapitola III**, ve které jsou formulovány cíle této práce. Následující kapitoly (počínaje kapitolou IV) jsou vždy rozděleny do dvou částí – v první z nich je diskutována problematika řízené pracovní tuhosti, v druhé pak téma bezvůlového řízení. **Kapitola IV** obsahuje teoretickou analýzu obou problémů a popis navrhovaných metod řešení problémů souvisejících s vytýčenými cíli. **Kapitola V** prezentuje simulační a experimentální výsledky. V **kapitole VI** je shrnut význam prezentovaných teoretických závěrů a simulačních a experimentálních výsledků v kontextu vědy a techniky a jsou předloženy některé náměty na další vývoj v diskutovaných oblastech. **Kapitola VII** obsahuje shrnutí cílů dosažených v rámci této práce.

II SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

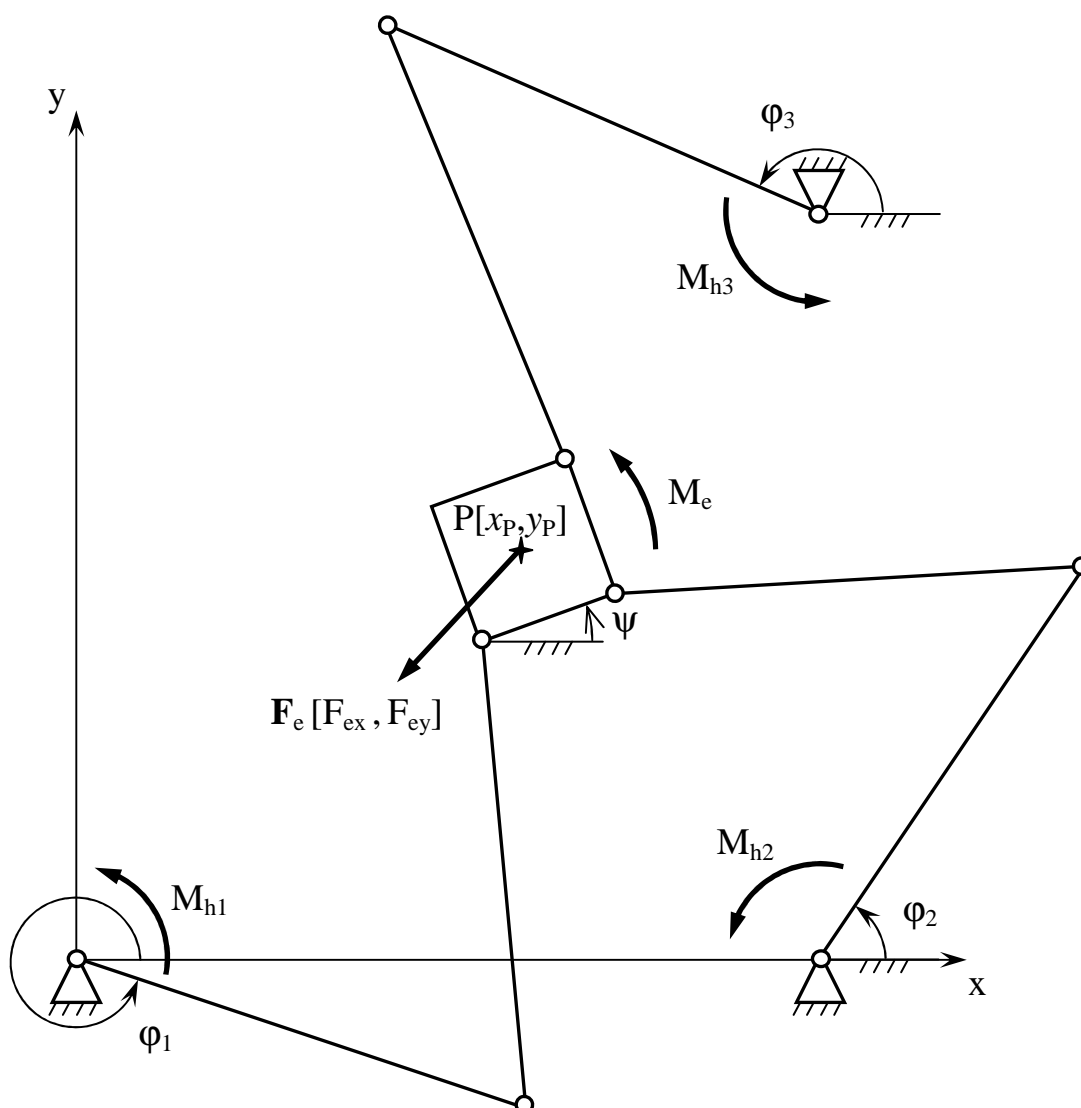
2.1 Definice základních pojmů

Než začneme s popisem stavu výzkumu řešené problematiky, definujme některé základní pojmy a veličiny, které budeme dále používat.

Paralelní robot je mechanismus tvořený uzavřeným kinematickým řetězcem, jehož **koncový efektor** (**platforma** robotu) je k rámu vázán několika sériemi kinematických dvojic. Pohony jsou zpravidla umístěny ve vazbách mechanismu s rámem, viz ilustrační Obr. 2.1.

Polohu robotu popisujeme ve dvou prostorech: v **prostoru pohonů** vektorem souřadnic Φ , tj. **vektorem souřadnic pohonů** (v případě robotu z Obr. 2.1 $\Phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3]^T$), a v **pracovním prostoru** robotu **vektorem pracovních** či **kartézských souřadnic** \mathbf{X} , který obsahuje souřadnice platformy robotu v souřadném systému spojeném s rámem, zpravidla kartézském (na Obr. 2.1 $\mathbf{X} = [x_p \ y_p \ \psi]^T$).

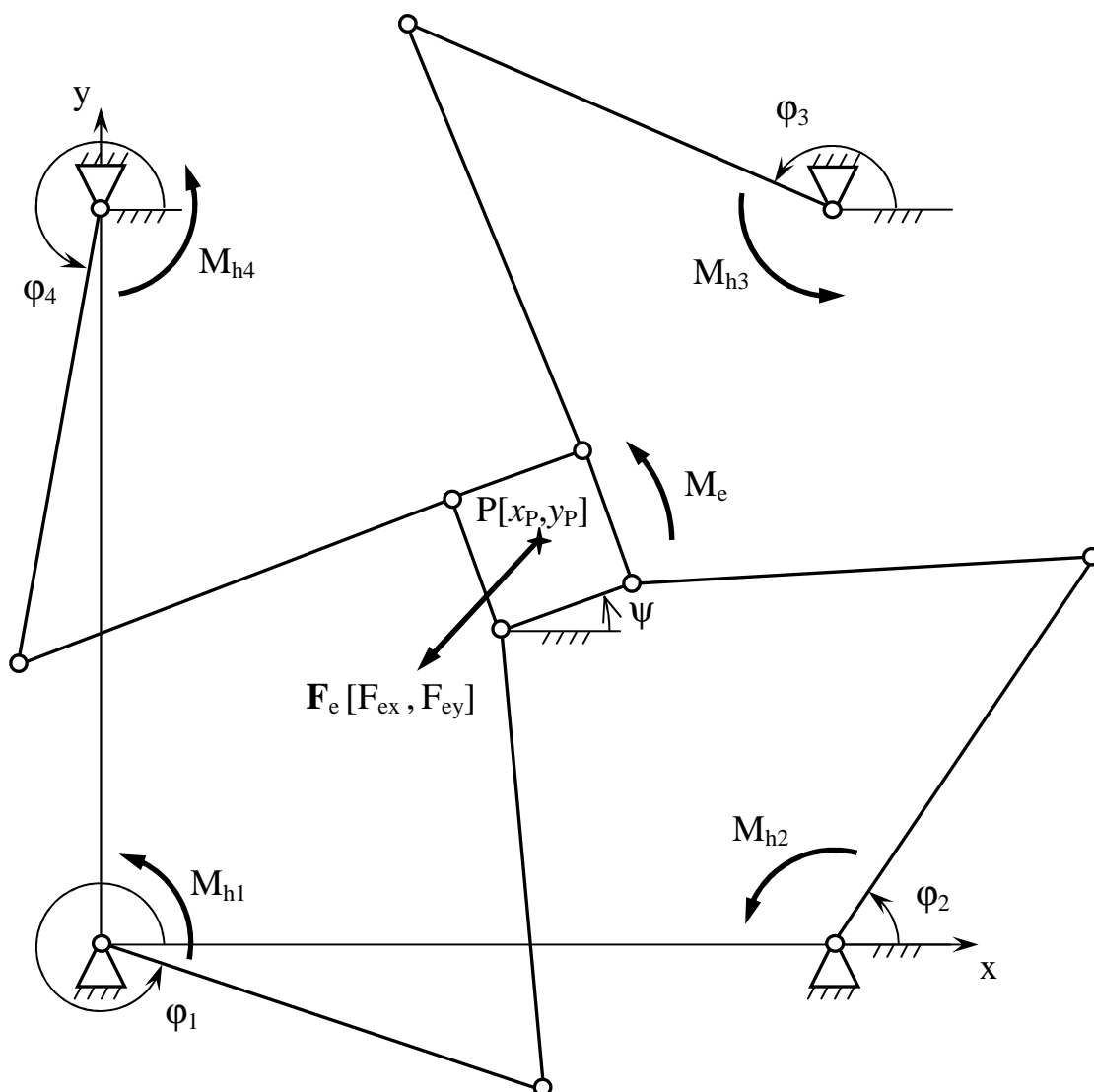
Pokud jde o silové poměry, bude nás především zajímat **vstupní zatížení robotu**, neboli **zatížení v prostoru souřadnic pohonů**, dané vektorem pohonných sil či momentů \mathbf{T}_a (na Obr. 2.1 $\mathbf{T}_a = [M_{h1} \ M_{h2} \ M_{h3}]^T$) a **efektivní** (vnější) **zatížení platformy** robotu reprezentované vektorem \mathbf{F}_e interakčních sil mezi robotem a jeho okolím, redukováných na pracovní souřadnice (v případě robotu na Obr. 2.1 $\mathbf{F}_e = [F_{ex} \ F_{ey} \ M_e]^T$, F_{ex} , F_{ey} a M_e jsou externí silové účinky redukované na pohyb platformy robotu popsany jeho pracovními souřadnicemi $[x_p \ y_p \ \psi]^T$).



Obr. 2.1: Rovinný paralelní robot o 3 stupních volnosti

Zatímco u paralelního robotu bez redundantních pohonů odpovídá **počet pohonů** n (tj. souřadnic v prostoru pohonů) **počtu pracovních souřadnic** m (na Obr. 2.1 $n = m = 3$), **redundantní paralelní robot** se vyznačuje tím, že počet pohonů je vždy vyšší, tj. $n > m$, aniž by „nadbytečné“ aktuátory ovlivňovaly kinematickou pohyblivost mechanismu robotu. Rozdíl $n - m$ počtu pohonů a stupňů volnosti redundantního robotu definuje jeho **stupeň redundance**.

Příklad redundantního paralelního robotu je na Obr. 2.1: v tomto případě je $n = 4$ a $m = 3$, jeho stupeň redundance je tedy roven jedné. Vektor jeho souřadnic v prostoru pohonů $\Phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4]^T$ má oproti robotu z Obr. 2.1 o jeden člen navíc, stejně tak vektor hnacích momentů $T_a = [M_{h1} \ M_{h2} \ M_{h3} \ M_{h4}]^T$.



Obr. 2.2: Rovinný redundantní paralelní robot se 4 pohony a 3 stupni volnosti

Jak bylo zmíněno v úvodu, pojem redundantních pohonů byl do oblasti paralelních robotů uveden v souvislosti s eliminací *singulárních poloh*, ve kterých je robot neovladatelný [Merlet, 1996], [Šika, 1998]. Ukázalo se však, že kromě tohoto

účelu lze redundanci pohonů využít i k ovlivnění různých pracovních charakteristik robotu. V této souvislosti můžeme hovořit o různých **strategiích ovládání** či **řízení redundantního robotu**. Každá z těchto strategií je zaměřena na optimalizaci vybrané pracovní charakteristiky po dobu, kdy robot vykonává zadaný úkol.

Jestliže se nám jedná o zlepšení pohybových vlastností robotu, tj. maximalizaci pracovních rychlostí a zrychlení, pak je úkolem řízení zkoordinovat působení jednotlivých pohonů tak, aby sloužilo k tomuto účelu. Základem této strategie je řešení inverzní dynamické úlohy. Dané problematice byla a stále je věnována velká pozornost [Nakamura and Ghodoussi, 1989], [Šika, 1998], [Kock and Schumacher, 2000].

Další možností, jak využít redundantní pohony, je ovlivnění interních nebo externích silových účinků. V 80. letech minulého století byly popsány různé metody řízení průmyslových manipulátorů z hlediska polohy a silové interakce [Whitney, 1985], [Paul, 1987], [Khatib, 1987]. Zmíněné metody popisují řízení polohy nebo síly nezávisle, případně v hybridní kombinaci. V řadě průmyslových aplikací, např. při obrábění nebo montáži, je však současná regulace polohy a interakce s okolím stěžejním požadavkem.

2.2 Impedanční řízení robotu

Silovou interakci je možné ovládat buď přímo [Nahon and Angeles, 1989], [Luecke and Lai, 1997], nebo ve vztahu k malé změně polohy platformy robotu. Tato práce je zaměřena na druhý zmíněný přístup, obecně označovaný jako **impedanční řízení**, nebo též **řízení pracovní tuhosti robotu**. **Mechanická impedance** [Hogan, 1987] je jedna z charakteristik mechanismů, obecně závislá na poloze i zatížení, kterou si laicky můžeme představit jako odpor proti přemístění ve vztahu k jeho velikosti i směru.

V případě mechanické impedance robotu v jeho pracovním prostoru se také mluví o **pracovní (kartézské) tuhosti** robotu [Yi, Freeman and Tesar, 1989]. Matice

pracovní tuhosti \mathbf{K}_X je definována poměrem změny vektoru efektivního zatížení $\Delta \mathbf{F}_e$ a jejím prostřednictvím vyvolané malé změny polohy platformy $\Delta \mathbf{X}$: *

$$\mathbf{K}_X = \lim_{\Delta \mathbf{X} \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_e}{\Delta \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.2.1)$$

Jak bude ukázáno v kapitole 4.1.1, lze pro kartézskou tuhost robotu odvodit následující vztah [Yi, Freeman and Tesar, 1989]:

$$\mathbf{K}_X = \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{K}_\Phi \cdot \mathbf{J}^+ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a \right]_{\mathbf{T}_a = \text{konst}} = \mathbf{K}_{Xp} + \mathbf{K}_{Xa}, \quad (2.2.2)$$

kde \mathbf{J}^+ je jakobián transformace mezi pracovními souřadnicemi a souřadnicemi pohonů:

$$\mathbf{J}^+(\mathbf{X}) = \frac{d\Phi}{d\mathbf{X}} \quad (2.2.3)$$

a \mathbf{K}_Φ je matice tuhosti pohonů:

$$\mathbf{K}_\Phi = \frac{\partial \mathbf{T}_a}{\partial \Phi} \quad (2.2.4)$$

Vzorec (2.2.2) pro výpočet pracovní tuhosti se skládá ze dvou členů, označených jako \mathbf{K}_{Xp} a \mathbf{K}_{Xa} . Tuto skutečnost lze interpretovat tak, že pracovní tuhost má dvě složky, pro které se ujal termíny *pasivní* a *aktivní tuhost* (či obecněji impedance).

Ukazuje se, že kartézskou tuhost lze jakožto jednu z pracovních charakteristik paralelního robotu ovlivnit jeho řízením. Podle toho, která veličina (a jakým způsobem) ze vztahu (2.2.2) je ovlivňována, můžeme řízení pracovní tuhosti robotu rozdělit do tří kategorií – pasivní řízení, zpětnovazební řízení a řízení v otevřené smyčce.

* Definici kartézské tuhosti můžeme formulovat i s opačnou kauzalitou: je to poměr vektoru $-\Delta \mathbf{F}$ vratných sil (tj. změn sil, kterými koncový efektor robotu působí na své okolí) vyvolaných malou změnou $\Delta \mathbf{X}$ polohy koncového efektoru.

2.2.1 Pasivní řízení tuhosti

V tomto případě se nejedná o řízení v pravém slova smyslu, jde v podstatě o analýzu pasivní složky kartézské tuhosti robotu z hlediska poddajnosti jeho strukturálních členů. Příkladem je práce [Salisbury, 1980], v níž autor uvažuje vliv poddajnosti jednotlivých vazeb sériového manipulátoru na jeho pracovní tuhost: ta je potom dána transformací tuhosti vazeb prostřednictvím inverzního jakobiánu. Tyto znalosti byly např. využity při návrhu tzv. RCC (Remote Center Compliance) zařízení pro montáž [Asada and Ogawa, 1987] nebo v případě optimalizace distribuce tuhosti mezi aktuátory průmyslového manipulátoru [Thomas, Yuan-Chou and Tesar, 1985].

Tyto a podobné řídicí strategie, založené na konstrukčním návrhu zvažujícím poddajnost vazeb, jsou však značně limitovány pokud jde o šíři spektra požadovaných tuhostních charakteristik. Požadavky na jejich adaptabilitu vedly na zpětnovazební řízení tuhosti manipulátorů.

2.2.2 Zpětnovazební řízení tuhosti

Zpětnovazební regulace pracovní tuhosti robotu spočívá v online měření polohových odchylek, nalezení proporcionálních zesílení odpovídajících požadované tuhosti a v transformaci těchto hodnot do vstupních signálů jednotlivých pohonů. Jinými slovy, řízení kartézské tuhosti je uskutečňováno prostřednictvím nastavení tuhosti pohonů (viz první člen vztahu (2.2.2)) na základě informací poskytovaných zpětnou vazbou.

Použití zpětnovazebního impedančního řízení jako nástroje pro regulaci polohy je podrobně popsáno v [Asada and Slotine, 1986, Chapter 7]. V [Hogan, 1985, 1987] jsou v nelineární zpětné vazbě zahrnuty linearizované dynamické charakteristiky uvolněného koncového efektoru a v reálném čase počítané dynamické veličiny manipulátoru. Přestože regulátor pracuje velmi dobře ve svých třech modifikacích (bez automatického přepínání) – při pohybu volném, přechodovém a s vnější interakcí, nezabývá se problémem stability a neřeší případ vnějšího silového

impulsu. Navíc analýza regulátoru pohybu s interakcí, založeném na nestrukturovaných dynamických modelech robotu a jeho okolí, ukázala, že pro jasně definovanou a stabilní manipulaci musí být předem vytvořeny podmínky v podobě nenulové, omezené počáteční poddajnosti robotu nebo okolí [Kazerooni and Tsay, 1988]. Autoři práce navrhuji, že tato poddajnost může být zaručena buď aplikací konceptu pasivní tuhosti (viz podkapitola 2.2.1), nebo zpětnovazebním řízením pracovní tuhosti robotu.

Ačkoliv jsou všechny tyto metody zpětnovazebního impedančního řízení schopny regulovat tuhostní charakteristiky i polohu platformy robotu, mají i ty svá omezení. Pro zaručení stability se například předpokládá, že jsou aktuátory schopny vyvinout neomezenou sílu (krouticí moment), odpovídající zpětnovazebnímu zesílení potřebnému k překonání libovolné poruchy a redukci odchylek na požadovanou úroveň. To však ve skutečnosti možné není.

Pravděpodobně nejzávažnějším nedostatkem zpětnovazební regulace je však omezená vzorkovací frekvence zpětnovazební smyčky, znemožňující přesné online snímání a včasnou aplikaci požadovaných pohonných sil [An and Hollerbach, 1988].

Ukázalo se, že některé ze zmíněných problémů spojených se zpětnovazebním řízením pracovní tuhosti robotu by mohla vyřešit aplikace řízení v otevřené smyčce.

2.2.3 Řízení tuhosti v otevřené smyčce

Jako jeden z prvních se tímto typem ovládání mechanické impedance začal zabývat N. Hogan, který poukazuje na analogii problému řízení mechanických systémů s ovládáním lidské paže za její interakce s okolím [Hogan, 1984]. Velmi stručně shrnuto, při antagonistickém působení skupin svalů ovládajících paži vzniká předpětí, které umožňuje udržovat požadovanou polohu paže za působení vnějších sil i bez zpětné vazby (experimentálně doloženo). Toto předpětí se dá ovlivnit nezávisle na poloze paže, a to díky „redundanci svalů“ (tedy období redundantních pohonů v případě manipulátorů), a je také nazýváno *aktivní tuhostí* [Kock and Schumacher, 1998].

Nutnou podmínkou ovladatelnosti aktivní tuhosti robotu je tedy vzájemná kinematická závislost souřadnic jednotlivých pohonů (tj. členů vektoru Φ , viz kapitola 2.1) [Hogan, 1983], se kterou se setkáváme právě u redundantních paralelních robotů (případně u antagonisticky strukturovaných sériových mechanismů, jako v Hoganově případě). Stupeň redundance pohonů je mírou této kinematické závislosti a v důsledku i ovladatelnosti tuhostních charakteristik, konkrétně počtu nezávisle nastavitelných členů matice kartézské tuhosti \mathbf{K}_X (viz kapitola 2.1) Struktura a stupeň redundance redundantního paralelního robotu tedy zásadně ovlivňuje možnosti nezávislého ovládání kontaktních sil robotu s okolím a jeho impedančních charakteristik.

Co si představit pod pojmem řízení pracovní tuhosti robotu v otevřené smyčce? Jedná se o ovládání impedance robotu prostřednictvím její aktivní složky, tedy druhého členu vztahu (2.2.2). Samotnému ovládání musí předcházet offline plánování pohonných sil tak, aby v jednotlivých bodech dané trajektorie bylo dosaženo předepsaného efektivního zatížení platformy robotu a současně požadované pracovní tuhosti. To následně umožní potlačení poruch v otevřené smyčce, čímž se potřeba zpětné vazby redukuje na kompenzaci náhodných poruch a nemodelovaných odchylek v dynamice. Narozdíl od zpětnovazebního řízení tuhosti je aktivní tuhost k dispozici ihned a bez komplikací spojených se zpětnou vazbou.

Jak bylo zmíněno na začátku kapitoly, fenomén aktivní tuhosti začal studovat N. Hogan, jehož práce se v aplikacích zaměřovaly výhradně na sériové manipulátory s antagonisticky poháněnými kinematickými dvojicemi, např. [Hogan, 1985].

Do oblasti paralelních robotů byl tento pojem uveden autory [Yi, Freeman and Tesar, 1989], kteří klasifikovali způsoby impedančního řízení, uvedli vztah pro výpočet matice pracovní tuhosti robotu a nastínili, jakým způsobem požadavky na impedanci robotu implementovat v rámci jeho řízení v otevřené smyčce. Jejich koncepce ovšem v zásadě předpokládá, že bude k dispozici takový počet redundantních pohonů, který umožní nastavení všech nezávislých prvků matice pracovní tuhosti, a obecně neřeší případ, kdy je pohonů méně.

Na výše zmíněnou práci navázali např. autoři [Kock and Schumacher, 1998], se zabývali aktivní tuhostí rovinného robotu se dvěma stupni volnosti a třemi pohony,

jehož kinematické schéma je znázorněno na Obr. 2.3. Základem jejich řídicí strategie (kterou autoři označují anglickým termínem „lower bound stiffness control“) se stala podmínka pro minimální singulární hodnotu matice tuhosti v pracovním prostoru, která zaručí, že tuhost v jakémkoli směru nepoklesne pod určitou hraniční hodnotu:

$$\sigma_{\min}(\mathbf{K}_x) = \sigma_{\text{des}}, \quad (2.2.5)$$

kde $\sigma_{\min}(\mathbf{K}_x)$ je nejmenší singulární hodnota matice tuhosti, σ_{des} je požadavek na její omezení zdola. Autoři naznačují, jakým způsobem se tato podmínka převede na podmínku pro hnací momenty. Jejich popis problematiky předpokládá oproti publikaci [Yi, Freeman, and Tesar, 1989] právě jeden kinematicky nadbytečný pohon, implementace zmíněné cílové podmínky není zobecněna pro obecný robot s vícenásobnou redundancí, právě jeden kinematicky nadbytečný pohon.

Prakticky ve stejné době byla podobná problematika řešena na odboru mechaniky strojní fakulty ČVUT [Valášek, Florián, and Šika, 1999], [Florián & Valášek, 2000]: adekvátní části publikací se zabývaly maximalizací směrové pracovní tuhosti při silovém řízení redundantního paralelního robotu v otevřené smyčce, řešení bylo ilustrováno rovněž na příkladu rovinného robotu se stupněm redundance rovným jedné. Ze zmíněných publikovaných výsledků částečně vychází tato práce.

V problematice ovládání aktivní tuhosti redundantních paralelních robotů stále zůstávají některé podstatné otázky otevřené. Zaprvé chybí širší výčet různých způsobů, jak a za jakým účelem lze ovlivňovat matici aktivní pracovní tuhosti, včetně důležité informace, kolik redundantních pohonů je k danému způsobu ovlivnění potřeba. Zadruhé, a to je společným nedostatkem dosud publikovaných cizích prací, žádná z nich se nezabývá důležitou analýzou, za jakých podmínek může vlastně aktivní složka pracovní tuhosti vzniknout a jakých reálných hodnot může nabývat. Tato práce se snaží na zmíněné otázky odpovědět.

2.3 Ovládání robotu s vyloučením vůlí

Jednou z nežádoucích vlastností mechanismů je přítomnost mechanických vůlí. Zvláště v případech, kde je vyžadována vysoká přesnost nastavení polohy, jako jsou např. průmyslové manipulátory nebo obráběcí stroje, představují vůle značný problém: nejenže snižují přesnost zařízení, ale můžou také ohrozit stabilitu jeho řízení, neboť vnášejí do řídicí smyčky hysterezi a dopravní zpoždění.

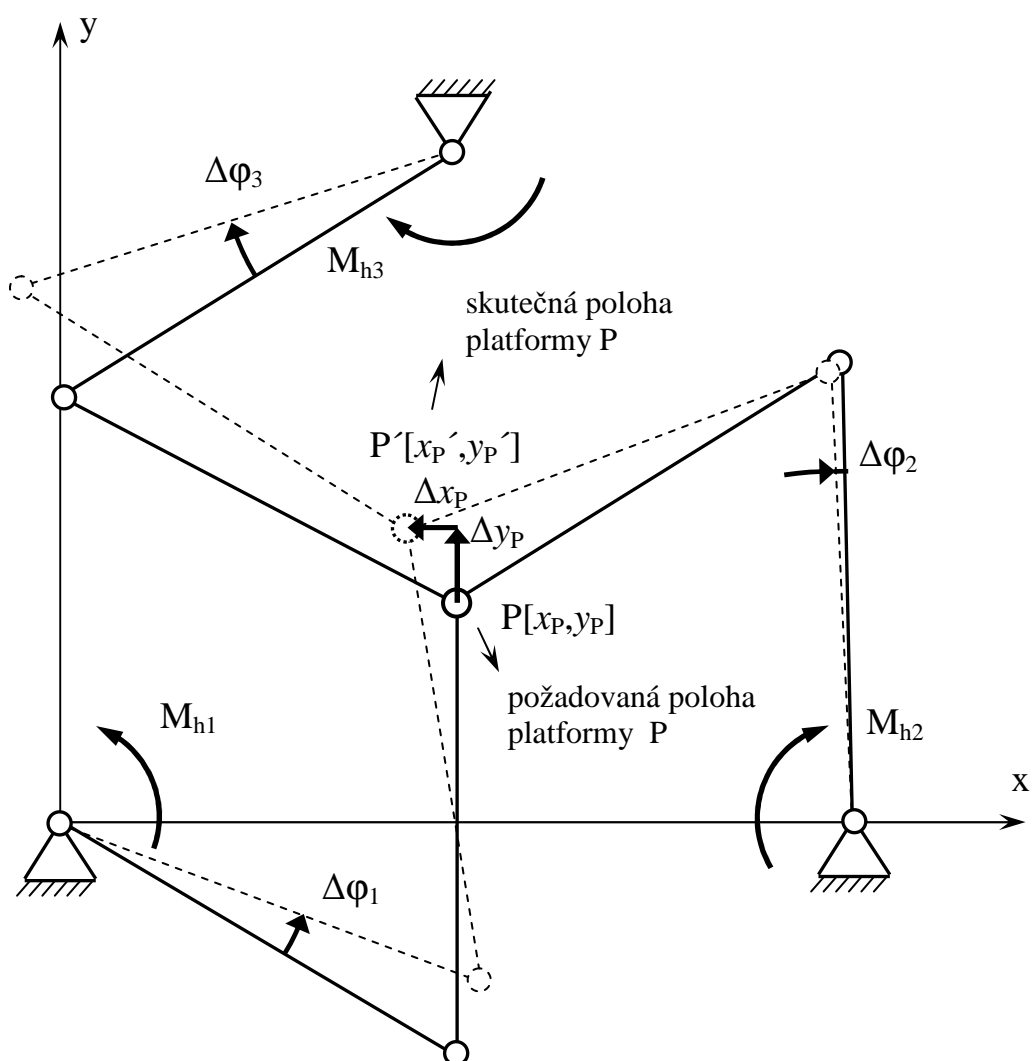
Problém vůlí se zpravidla řeší pomocí předpětí: předepjatá ložiska, ozubená kola, různé přitlačné pružinové konstrukční prvky používané v přesné mechanice, apod. Tato metoda odstranění vůlí má ale své nevýhody. Především se tímto způsobem zvyšují pasivní odpory ve vazbách, což má jednak za následek větší mechanické ztráty, jednak tyto odpory opět mohou zkomplikovat řízení a snížit přesnost silového i polohového nastavení. Další nevýhoda, přesněji řečeno omezení, plyne z toho, že v některých případech může být předpětí překonáno velkým zatížením předepjatých vazeb (způsobené např. vnějším silovým impulsem), kdy se vůle projeví i přes toto opatření. V neposlední řadě tyto předepjaté konstrukční prvky mohou představovat komplikaci po technologické stránce, případně se jimi celé zařízení prodražuje.

U paralelních robotů nás budou zajímat především vůle v pohonech, případně v kombinaci s vůlemi v převodových ústrojích umístěných bezprostředně za pohony. Tyto vůle totiž mají podstatný podíl na přesnost polohového řízení robotu.

Vliv vůlí v pohonech na chybu v nastavení požadované polohy platformy robotu je ilustrován na Obr. 2.3 – jedná se o rovinný redundantní paralelní robot se třemi pohony a dvěma stupni volnosti. Odchytky $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3$ nastavení souřadnic pohonů způsobené vůlemi v pohonech mají za následek chybu $[\Delta x_P, \Delta y_P]$ v požadované poloze bodové platformy robotu P.

Abychom vyloučili vliv vůlí v pohonech na řízenou akci paralelního robotu, museli bychom po celou dobu jejího vykonávání zajistit splnění tzv. **podmínky vymezení vůlí** [Valášek & Florián, 2000], tj. zaručit, aby se během celého pracovního cyklu nezměnil smysl silového působení ani jednoho z pohonů (v případě robotu

z Obr. 2.3 by tedy měly mít hnací momenty M_{h1} , M_{h2} a M_{h3} stále stejnou orientaci), a to bez ohledu na dynamiku i interakci robota s okolím. To se nám v případě paralelního robota s kinematicky nezávislými souřadnicemi pohonů obecně nepodaří. Situace se ale změní, bude-li se jednat o redundantní paralelní robot: Podobně jako v případě impedančního řízení v otevřené smyčce máme totiž u redundantních pohonů díky jejich vzájemné kinematické závislosti jistou volnost v jejich využití, závislou na stupni redundance. Tuto volnost lze využít právě k aplikaci výše zmíněné podmínky konstantního smyslu působení pohonů. Budeme pak mluvit o **řízení s vyloučením vůlí v pohonech** nebo také stručně o **bezvůlovém řízení**.



Obr. 2.3: Vliv vůlí v pohonech na přesnost nastavení požadované polohy platformy

V oblasti bezvůlového řízení byl cizím autorem doposud publikován jen dílčí výsledek: [Kock, 1998] mezi různými strategiemi řízení redundantního paralelního robotu uvádí řízení s vyloučením vůlí a daný problém ilustruje simulací pro reálný model rovinného paralelního robotu se dvěma stupni volnosti a třemi pohony. Podmínku vyloučení vůlí autor ale neformuluje obecně a také neuvádí postup její implementace v rámci syntézy řízení.

Problematika řízení s vyloučením vůlí byla tedy dosud zčásti *terra incognita*: Chyběla obecná formulace podmínky vymezení vůlí online, dále obecná metodika nalezení bezvůlového řízení a také odpověď na otázku, zda a za jakých podmínek lze toto řízení v rámci celého pracovního prostoru nebo jeho části nalézt vždy.

Snahou autora této práce je náprava zmíněných nedostatků. K úloze nalezení bezvůlového ovládání je přistupováno dvěma rozdílnými způsoby: V prvním případě je popsána metoda, jak toto ovládání najít pro danou trajektorii robotu s předepsanou dynamikou a interakcí s okolím. Druhý přístup je obecnější, spočívá v mapování oblastí pracovního prostoru robotu, ve kterých bezvůlové ovládání existuje vždy, bez ohledu na dynamiku a interakci. Část této práce zabývající se ovládáním s online vymezením vůlí se opírá o metody a výsledky publikované v pracích [Florián & Valášek, 2000], [Valášek & Florián, 2000], [Valasek, Belda and Florian, 2002], [Florián & Valášek, 2006].

III CÍLE

Jak bylo konstatováno v úvodu, jedním z prioritních úkolů vývoje redundantních paralelních robotů je mapování jejich možností, pokud jde o využití redundantních pohonů. V souvislosti s tím byla v předchozí kapitole zmíněna některá důležitá témata, zasluhující si více pozornosti, než jim dosud bylo v cizích publikacích věnováno. V návaznosti na tyto závěry budou nyní formulovány cíle pokrývající dva tematické okruhy, jimiž se autor v rámci této disertační práce zabýval, tj. problematiku využití redundance pohonů zaprvé k ovládání aktivní tuhosti robotu, zadruhé k vyloučení vůlí v pohonech při řízení robotu.

Cíle této práce jsou následující:

I.

- A.** Na základě odvozeného výpočtu aktivní tuhosti redundantního paralelního robotu navrhnout různé strategie účelného ovládání této složky tuhosti.
- B.** Analyzovat praktickou použitelnost fenoménu aktivní tuhosti.

II.

- A.** Navrhnout metodiku efektivního nalezení bezvůlového řízení redundantního paralelního robotu pro danou trajektorii, dynamiku pohybu a interakci s okolím.
- B.** Zjistit, zda a za jakých podmínek lze nalézt řízení s vymezením vůlí pro celý pracovní prostor nebo jeho část vždy, tj. nezávisle na dynamice a interakci.

IV METODY ŘEŠENÍ

4.1 Ovládání aktivní tuhosti redundantního paralelního robotu

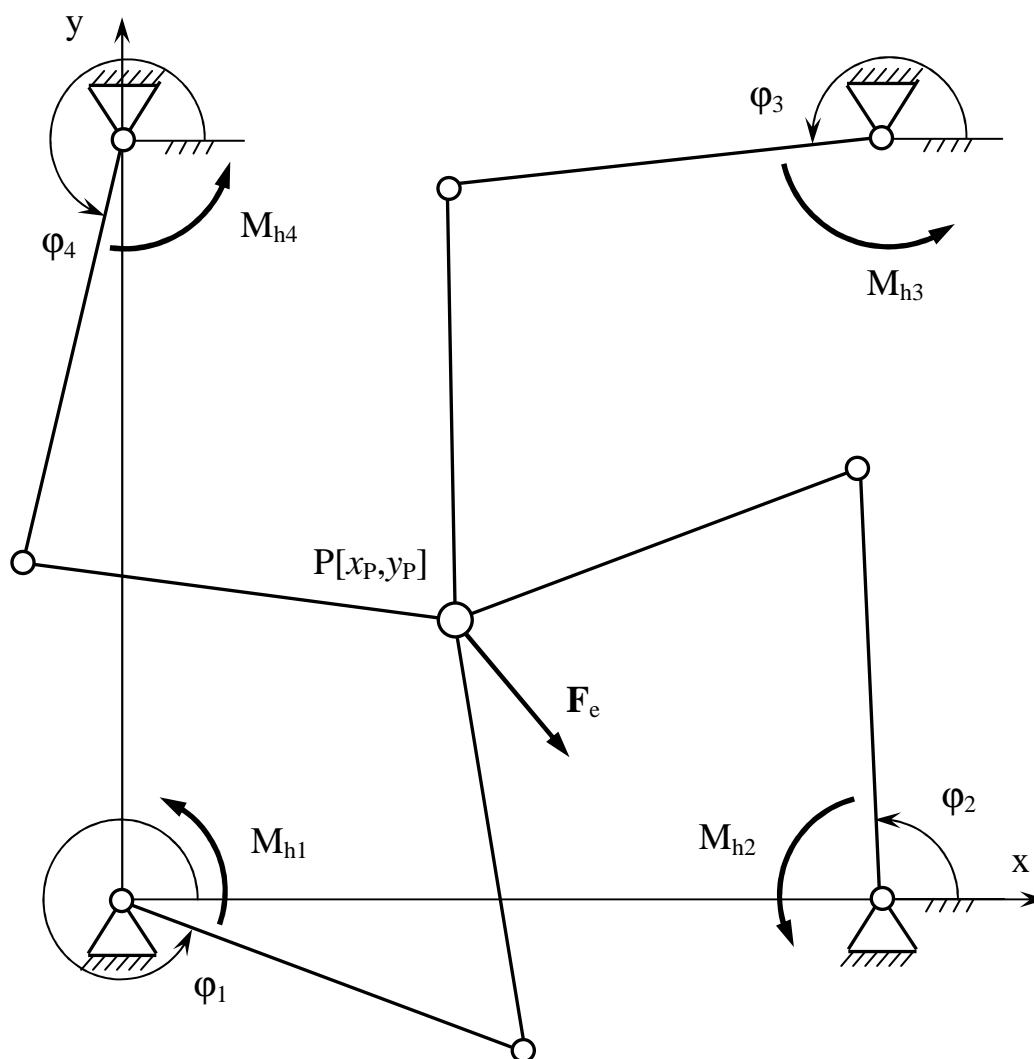
Tato kapitola sestává ze dvou podkapitol, pokrývajících cíl **I.A**: V sekci 4.1.1 je vyjádřena aktivní složka pracovní tuhosti robotu, sekce 4.1.2 je zaměřena na popis několika úloh využití redundantních pohonů k ovládání různých tuhostních charakteristik.

4.1.1 Analýza pracovní tuhosti paralelního robotu

Jak bylo zmíněno v úvodu, velkou výhodou paralelních robotů je jejich vysoká „statická“ tuhost, tedy celková tuhost jejich konstrukce při znehybnění vazeb s rámem (v nichž jsou umístěny pohony), daná poddajností jednotlivých členů konstrukce*. Ve skutečnosti je však výsledná tuhost robotu velmi podstatně ovlivněna poddajností samotných pohonů a také, jak ukážeme dále, působícími hnacími silami (momenty). *V dalším tedy budeme pro zjednodušení považovat jednotlivé strukturální členy robotu za absolutně tuhé, až na aktuátory, u nichž budeme uvažovat poddajnost v jejich akčních souřadnicích.*

Pro přehlednost si k ilustrování rozboru problému pracovní tuhosti zvolme jednoduchý rovinný redundantní paralelní robot s bodovým koncovým efektozem P, jehož kinematické schéma je na Obr. 4.1: na dva stupně volnosti platformy (pohyb bodu v rovině) připadají čtyři pohony, stupeň redundance je tedy dvě. Souřadnice v prostoru pohonů jsou $\Phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4]^T$, v pracovním prostoru pak $\mathbf{X} = [x_p \ y_p]^T$.

* Zde je namísto připomenout jistou schematickou podobnost paralelních robotů s příhradovými konstrukcemi, které se právě vyznačují velkou tuhostí.



Obr. 4.1: Rovinný redundantní paralelní robot se 4 pohony a 2 stupni volnosti

Zabývejme se nyní *inverzní kinematickou úlohou*, neboli transformací souřadnic z pracovního prostoru do prostoru pohonů:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{X}) \quad (4.1.1)$$

V případě robotu z Obr. 4.1 bude

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_P, y_P) \\ \varphi_2(x_P, y_P) \\ \varphi_3(x_P, y_P) \\ \varphi_4(x_P, y_P) \end{bmatrix} \quad (4.1.1a)$$

Explicitní vyjádření této závislosti nepředstavuje u paralelních robotů velký problém, totéž platí pro výpočet matice parciálních derivací souřadnic pohonů podle pracovních souřadnic, tzv. *pseudo-inverzního jakobiánu* \mathbf{J}^+ [Kock and Schumacher, 1998]:

$$\mathbf{J}^+(\mathbf{X}) = \frac{d\Phi}{d\mathbf{X}}, \quad (4.1.2)$$

zde

$$\mathbf{J}^+(x_p, y_p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_p} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_p} \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial y_p} \end{bmatrix} \quad (4.1.2a)$$

Budeme-li nyní pro zjednodušení předpokládat statickou silovou interakci robotu s okolím, tj. bez setrvačných účinků, můžeme za této podmínky napsat jednoznačný vztah mezi efektivním zatížením \mathbf{F}_e platformy robotu a vstupním zatížením od pohonů \mathbf{T}_a (viz kapitola 2.1), přičemž v našem ilustrativním příkladě je $\mathbf{T}_a = [\mathbf{M}_{h1} \quad \mathbf{M}_{h2} \quad \mathbf{M}_{h3} \quad \mathbf{M}_{h4}]^T$ a $\mathbf{F}_e = [\mathbf{F}_{ex} \quad \mathbf{F}_{ey}]^T$. Pro odvození kýženého vztahu použijeme princip virtuálních prací:

$$\mathbf{F}_e^T \cdot \delta \mathbf{X} = \mathbf{T}_a^T \cdot \delta \Phi, \text{ kde } \delta \Phi = \mathbf{J}^+(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{X}, \text{ tj.}$$

$$\mathbf{F}_e^T \cdot \delta \mathbf{X} = \mathbf{T}_a^T \cdot \mathbf{J}^+(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{X}$$

$$\mathbf{F}_e^T = \mathbf{T}_a^T \cdot \mathbf{J}^+ = (\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a)^T \Rightarrow$$

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a \quad (4.1.3)$$

Nyní již můžeme definovat *mechanickou impedanci* (tuhost) robotu [Yi, Freeman and Tesar, 1989], a to:

- *v prostoru pohonů:*

$$\mathbf{K}_\Phi = \frac{\partial \mathbf{T}_a}{\partial \Phi} \quad (4.1.4)$$

- *v pracovním prostoru:*

$$\mathbf{K}_X = \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial \mathbf{X}} \quad (4.1.5)$$

Na základě dosazení z transformačního vztahu (4.1.3) za \mathbf{F}_e odvodíme vztah pro výpočet pracovní tuhosti:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_X &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[\mathbf{J}^{+T}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{T}_a \right]_{\mathbf{T}_a = \text{konst.}} + \mathbf{J}^{+T} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}_a(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}, \text{ kde} \\ \frac{\partial \mathbf{T}_a}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial \mathbf{T}_a}{\partial \Phi} \cdot \frac{d\Phi}{d\mathbf{X}} = \mathbf{K}_\Phi \cdot \mathbf{J}^+ \quad \Rightarrow \\ \mathbf{K}_X &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a \right]_{\mathbf{T}_a = \text{konst.}} + \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{K}_\Phi \cdot \mathbf{J}^+, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

neboli

$$\mathbf{K}_X = \mathbf{K}_{Xa} + \mathbf{K}_{Xp}.$$

Vztah konstatuje zajímavou skutečnost: Pracovní tuhost robotu není pouhou transformací tuhosti pohonů (tu reprezentuje druhý sčítanec odvozeného vztahu), ale obsahuje také složku, která kromě polohy robotu závisí jen na hnacích momentech \mathbf{T}_a [Valášek, Florián, and Šika, 1999], [Florián & Valášek, 2000]. První člen vztahu (4.1.6) je nazýván *aktivní tuhostí* \mathbf{K}_{Xa} , druhý *tuhostí pasivní* \mathbf{K}_{Xp} :

$$\mathbf{K}_{Xa} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a \right]_{\mathbf{T}_a = \text{konst.}} \quad (4.1.7)$$

$$\mathbf{K}_{Xp} = \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{K}_\Phi \cdot \mathbf{J}^+ \quad (4.1.8)$$

V případě robotu z Obr. 4.1 budeme z hlediska pasivní tuhosti předpokládat, že změna polohy (úhlu natočení) daného pohonu vyvolá vratný moment pouze u tohoto pohonu, tj. budeme uvažovat pouze diagonální členy matice pasivní tuhosti:

$$\mathbf{K}_{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{h1}}{\partial \varphi_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_{h2}}{\partial \varphi_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_{h3}}{\partial \varphi_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_{h4}}{\partial \varphi_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varphi 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\varphi 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\varphi 3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\varphi 4} \end{bmatrix} \quad (4.1.4a)$$

Pak lze pro aktivní a pasivní složku matice tuhosti v pracovním prostoru odvodit následující vztahy:

$$\mathbf{K}_{\text{Xa}} = \begin{bmatrix} M_{h1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_p^2} + M_{h2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_p^2} + M_{h3} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_p^2} + M_{h4} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_p^2}, & M_{h1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_p \partial y_p} + M_{h2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_p \partial y_p} + M_{h3} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_p \partial y_p} + M_{h4} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_p \partial y_p} \\ \%, & M_{h1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_p^2} + M_{h2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_p^2} + M_{h3} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y_p^2} + M_{h4} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y_p^2} \end{bmatrix} \quad (4.1.7a)$$

$$\mathbf{K}_{\text{Xp}} = \begin{bmatrix} k_{\varphi 1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} \right)^2 + k_{\varphi 2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_p} \right)^2 + k_{\varphi 3} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_p} \right)^2 + k_{\varphi 4} \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial x_p} \right)^2, & k_{\varphi 1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_p} + k_{\varphi 2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_p} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_p} + k_{\varphi 3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_p} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_p} + k_{\varphi 4} \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_p} \frac{\partial \varphi_4}{\partial y_p} \\ \%, & k_{\varphi 1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_p} \right)^2 + k_{\varphi 2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_p} \right)^2 + k_{\varphi 3} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_p} \right)^2 + k_{\varphi 4} \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial y_p} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.1.8a)$$

Jak ilustruje náš příklad, aktivní tuhost v pracovním prostoru reprezentuje symetrická čtvercová matice. Pasivní složka pracovní tuhosti bude symetrická tehdy, pokud bude symetrická také matice tuhosti v prostoru pohonů, což obvykle je. Celková kartézská tuhost robotu, nebo obecněji řečeno impedance robotu v prostoru pracovních souřadnic, je pak součtem obou složek:

$$\mathbf{K}_{\text{X}} = \mathbf{K}_{\text{Xp}} + \mathbf{K}_{\text{Xa}} = \dots = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (4.1.6a)$$

V našem konkrétním případě se také jedná o čtvercovou symetrickou matici, tj. $k_{12}=k_{21}$.

4.1.2 Ovládání pracovní tuhosti

Zabývejme se nyní otázkou využití redundantních pohonů k ovlivnění kartézské tuhosti robotu. *Budeme předpokládat statickou nebo kvazistatickou interakci robotu s okolím, kdy dynamiku robotu můžeme z hlediska silových poměrů zanedbat. Rovněž předpokládejme, že se robot během této interakce nikdy neocitne v singulární poloze. Další předpoklad je, že tuhosti jednotlivých pohonů nejsou ovlivněny ostatními pohony, tj. že pokud matice tuhosti v prostoru pohonů obsahuje nějaké nenulové prvky, pak jedinečně na diagonále, viz podmínka (4.1.4a). Pak bude matice celkové kartézské tuhosti symetrická, viz kapitola 4.1.1. Uvedené předpoklady platí pro celou kapitolu 4.1.2, pokud není uvedeno jinak.*

Při odvozování obecných vztahů budeme často vycházet z konkrétního příkladu rovinného redundantního paralelního robotu se dvěma stupni volnosti a čtyřmi pohony, viz Obr. 4.1.

Cílem ovládání robotu bude v první řadě nastavení předepsaného vektoru efektivního zatížení \mathbf{F}_e , tedy interakčních sil, kterými v libovolné dané poloze \mathbf{X} v rámci pracovního prostoru působí okolí na koncový efektor robotu.* Transformační vztah (4.1.3) můžeme chápat jako soustavu rovnic pro hnací momenty \mathbf{T}_a při daných interakčních silách:

$$\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a = \mathbf{F}_e \quad (4.1.9)$$

V našem ilustrativním případě robotu z Obr. 4.1 bude tedy platit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} \cdot M_{h1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_p} \cdot M_{h2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_p} \cdot M_{h3} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_p} \cdot M_{h4} &= F_{ex} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_p} \cdot M_{h1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_p} \cdot M_{h2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_p} \cdot M_{h3} + \frac{\partial \varphi_4}{\partial y_p} \cdot M_{h4} &= F_{ey} \end{aligned} \quad (4.1.9a)$$

Je zřejmé, že z hlediska neznámých $M_{h1}, M_{h2}, M_{h3}, M_{h4}$ se jedná o soustavu dvou lineárních rovnic, pro jejíž jednoznačné řešení jsou dvě z neznámých nadbytečné, což je důsledek redundance pohonů. Pro jednoznačné určení momentů je tedy třeba tyto dvě rovnice doplnit ještě např. dvěma rovnostmi obsahujícími alespoň dva hnací

* Robot tedy působí na okolí opačně orientovaným vektorem $-\mathbf{F}_e$.

momenty. V obecném případě robotu s m stupni volnosti a n pohony je tedy podobně třeba doplnit např. $n-m$ rovnostních podmínek.

Zaměříme nyní pozornost na formulaci různých úloh účelného ovlivnění impedance robotu v jeho pracovním prostoru, kdy je k dispozici jistý omezený počet redundantních pohonů. Formulace spolu s předkládanými řešeními jednotlivých úloh jsou obsahem následujících podkapitol 4.1.2.1 – 4.1.2.5. Navržené úlohy 4.1.2.1 – 4.1.2.4 i jejich řešení jsou původní, úloha 4.1.2.5 vychází z analýzy dané problematiky v [Yi, Freeman and Tesar, 1989]. Další odlišná úloha je obsažena v publikaci [Kock and Schumacher, 1998], viz též kapitola 2.2.3.

4.1.2.1 Ovládání směru vratné síly

Jednou z úloh užitečného ovlivnění mechanické impedance robotu je zaručit, aby libovolná malá změna polohy platformy robotu $d\mathbf{X}$ vynucená jeho okolím vyvolala vratnou sílu $-d\mathbf{F}_e^*$ působící výhradně proti směru této změny. Jinými slovy naší snahou bude, aby po malém vychýlení libovolného směru měl robot tendenci vrátit se do své původní polohy.

K odvození podmínek splnění této úlohy použijeme známou větu o skalárním součinu dvou vektorů, v našem případě $d\vec{F}_e$ a $d\vec{X}$:

$$d\vec{F}_e \cdot d\vec{X} = |d\vec{F}_e| |d\vec{X}| \cos \gamma, \quad (4.1.10)$$

kde γ je úhel, který tyto dva vektory svírají. Základním požadavkem diskutované úlohy je, aby vektory $-d\vec{F}_e$ a $d\vec{X}$ směřovaly proti sobě, tj. svíraly úhel π . Musí tedy platit

$$\overset{!}{\gamma} = 0 \quad (4.1.11)$$

tj. $\cos \gamma = 1$. Tuto podmínku aplikujeme na vztah (4.1.10), který současně pro další odvozování přepíšeme do maticové podoby:

$$d\mathbf{F}_e^T d\mathbf{X} \overset{!}{=} \left(d\mathbf{F}_e^T d\mathbf{F}_e \right)^{\frac{1}{2}} \left(d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.12)$$

* Nyní hovoříme o silách, kterými robot působí na okolí, proto znaménko minus.

Z definice kartézské tuhosti (4.1.5) plyne

$$d\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_X d\mathbf{X} \quad (4.1.13)$$

Toto dosadíme do vztahu (4.1.12), který následně postupně upravíme:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_X d\mathbf{X})^T d\mathbf{X} &= \left((\mathbf{K}_X d\mathbf{X})^T \mathbf{K}_X d\mathbf{X} \right)^{\frac{1}{2}} \left(d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} \right)^{\frac{1}{2}} \\ d\mathbf{X}^T \mathbf{K}_X^T d\mathbf{X} &= \left(d\mathbf{X}^T \mathbf{K}_X^T \mathbf{K}_X d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(d\mathbf{X}^T \mathbf{K}_X^T d\mathbf{X} \right)^2 &= d\mathbf{X}^T \mathbf{K}_X^T \mathbf{K}_X d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} \\ d\mathbf{X}^T \mathbf{K}_X^T \left[d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}^T \mathbf{K}_X^T \right] d\mathbf{X} &= d\mathbf{X}^T \mathbf{K}_X^T \left[\mathbf{K}_X d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}^T \right] d\mathbf{X} \end{aligned}$$

Abychom se vyhnuli zdlouhavému násobení všech činitelů posledního vztahu, využijeme skutečnosti, že činitele nalevo a napravo od obou výrazů (pro názornost uvedených) v hranatých závorkách jsou na obou stranách vztahu shodné. Dále si uvědomme, že poslední odvozená rovnost musí platit pro libovolnou změnu polohy $d\mathbf{X}$ a pro obecně nenulovou matici pracovní tuhosti \mathbf{K}_X . Za těchto podmínek můžeme tvrdit, že poslední vztah platí právě tehdy, když jsou si rovny výrazy v hranatých závorkách na obou stranách vztahu:

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}^T \mathbf{K}_X^T = \mathbf{K}_X d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}^T \quad (4.1.14)$$

Jde o rovnost dvou matic, z níž nyní odvodíme hledané podmínky pro náš konkrétní příklad robotu z Obr. 4.1. Pracovní tuhost vyjádříme ve tvaru obecné matice 2x2 – viz výraz na pravé straně (4.1.6a), malá změna vektoru polohy platformy našeho robotu je $d\mathbf{X} = [dx_p \quad dy_p]^T$. Tato vyjádření použijeme ve vztahu (4.1.14), a ten dále roznásobíme:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx_p \\ dy_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_p & dy_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_p \\ dy_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_p & dy_p \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} d^2 x_p & dx_p dy_p \\ dx_p dy_p & d^2 y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^2 x_p & dx_p dy_p \\ dx_p dy_p & d^2 y_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11}d^2x_p + k_{12}dx_pdy_p, & k_{21}d^2x_p + k_{22}dx_pdy_p \\ k_{11}dx_pdy_p + k_{12}d^2y_p, & k_{21}dx_pdy_p + k_{22}d^2y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}d^2x_p + k_{12}dx_pdy_p, & k_{11}dx_pdy_p + k_{12}d^2y_p \\ k_{21}d^2x_p + k_{22}dx_pdy_p, & k_{21}dx_pdy_p + k_{22}d^2y_p \end{bmatrix} \quad (4.1.15)$$

Porovnáním členů matic na obou stranách vztahu zjistíme, že odpovídající prvky na diagonálách jsou identické, odtud tedy žádná podmínka neplyne. Dále jsou identické rovnosti vyplývající z porovnání obou mimodiagonálních prvků, takže pro odvození hledaných podmínek nám bude stačit jedna z nich, např. rovnost prvků na prvním řádku a druhém sloupci obou matic:

$$\begin{aligned} k_{21}d^2x_p + k_{22}dx_pdy_p &= k_{11}dx_pdy_p + k_{12}d^2y_p, \text{ neboli} \\ k_{21}d^2x_p + (k_{22} - k_{11})dx_pdy_p - k_{12}d^2y_p &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Aby tato rovnost platila pro libovolnou malou změnu polohy platformy, musí být koeficienty všech tří členů, obsahujících různé kombinace dx_p a dy_p , nulové, tj. musí platit

$$\begin{aligned} \text{I) } k_{11} &= k_{22} \\ \text{II) } k_{12} &= 0 \\ \text{III) } k_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Nyní pro zpřehlednění problému uvažujme absolutní poddajnost pohonů, tj. $\mathbf{K}_\Phi = \mathbf{0}$.

Pak bude nulová i pasivní složka pracovní tuhosti, jak plyne z (4.1.8a): $\mathbf{K}_{x_p} = \mathbf{0}$.

Celková pracovní tuhost je v důsledku toho dána pouze její aktivní složkou (4.1.7a), což je symetrická matice. Z toho plyne, že při splnění jedné z podmínek II) nebo III) soustavy (4.1.17) je ta druhá splněna automaticky.* Zbývají nám tedy pouze podmínky I) a II), do nichž dosadíme ze vztahu (4.1.7a):

$$\begin{aligned} \text{I) } M_{h1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_p^2} + M_{h2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_p^2} + M_{h3} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_p^2} + M_{h4} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_p^2} &= M_{h1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_p^2} + M_{h2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_p^2} + M_{h3} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y_p^2} + M_{h4} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y_p^2} \\ \text{II) } M_{h1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_p \partial y_p} + M_{h2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_p \partial y_p} + M_{h3} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_p \partial y_p} + M_{h4} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_p \partial y_p} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

* Totéž by platilo i za předpokladu nenulové tuhosti pohonů ve tvaru (4.1.4a).

Toto jsou tedy dvě hledané doplňující podmínky, které zaručí, aby při vynuceném malém vychýlení platformy robot vyvinul vratnou sílu působící proti směru vychýlení. Soustavu rovnic pro řešení úlohy jako celku dostaneme spojením dílčích soustav (4.1.9a) a (4.1.18):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_p} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_p} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_p} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_p} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial y_p} \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y_p^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_p \partial y_p} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_p \partial y_p} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_p \partial y_p} & \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_p \partial y_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{h1} \\ M_{h2} \\ M_{h3} \\ M_{h4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ex} \\ F_{ey} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.19)$$

Jedná se o soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých (hnacích momentech), která má za uvedených podmínek jednoznačné řešení, a toto řešení je tedy klíčem k ovládání interakční síly při respektování našeho požadavku na impedanční chování robotu.

Popisovanou úlohu nyní zobecníme pro redundantní paralelní robot s m stupni volnosti a n pohony. *Budeme hledat takové ovládání robotu, které v libovolném bodě jeho pracovního prostoru splní dva úkoly: 1) nastaví předepsané hodnoty interakčních sil platformy s okolím, 2) zajistí, aby libovolná malá změna polohy platformy vynucená okolím vyvolala u robotu vratné síly působící výhradně proti směru této změny. Budeme opět předpokládat, že se robot během ovládání nedostane do singulární polohy, dále že setrvačné síly jsou zanedbatelné (předpoklad kvazistatické interakce), a že tuhosti jednotlivých pohonů nejsou ovlivněny ostatními pohony, tj. že pokud matice tuhosti v prostoru pohonů obsahuje nějaké nenulové prvky, pak jediné na diagonále.*

Základem řešení dané úlohy zůstává podmínka (4.1.9) dosažení požadovaných interakčních sil \mathbf{F}_e , tedy soustavy m rovnic s n neznámými, jimiž jsou prvky vektoru hnacích momentů \mathbf{T}_a .

Dalšími potřebnými podmínkami jsou vztahy zaručující splnění požadované imedanční vlastnosti robotu. V případě robotu z Obr. 4.1 jsme odvodili soustavu podmínek (4.1.17), kterou nyní zobecníme^{*}: Matice pracovní tuhosti musí vypadat tak, že si všechny její diagonální prvky budou rovny (podmínky typu **B**) a všechny prvky mimo diagonálu budou nulové (podmínky typu **C**), jinými slovy bude se jednat o diagonální matici (s identickými prvky na diagonále). Za uvedeného předpokladu, že se tuhosti pohonů vzájemně neovlivňují, je matice pracovní tuhosti symetrická a podmínky nulových prvků stačí formulovat např. pouze pro prvky nad diagonálou. Zapišme právě formulované podmínky matematicky:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}) \quad k_{hh} &= k_{11} \\ \mathbf{C}) \quad k_{ij} &= 0 \\ \text{pro } h &= 2, 3, \dots, m; \\ i &= 1, 2, \dots, m-1; \quad j = i+1, i+2, \dots, m \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Tyto podmínky vedou na soustavu $\left(\frac{1}{2}m+1\right)(m-1)$ rovnic, které získáme aplikací podmínek typu **B**) i **C**) na jednotlivé prvky matice pracovní tuhosti vyjádřené podle věty (4.1.6), tedy obsahující jednotlivé prvky vektoru \mathbf{T}_a – neznámé hnací momenty.

Spojením soustavy (4.1.9) (označíme jako podmínku **A**) a soustav typu **B**) a **C**) vyplývajících z aplikace podmínek (4.1.20) na (4.1.6) dostaneme celkovou soustavu $m + \left(\frac{1}{2}m+1\right)(m-1)$ rovnic pro n neznámých (prvků vektoru \mathbf{T}_a), jejíž jednoznačné řešení je řešením dané úlohy. Rovnice zapišeme ve formě soustavy podmínek typu **A**), **B**) a **C**):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}) \quad \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a &= \mathbf{F}_e \\ \mathbf{B}) \quad k_{hh} &= k_{11} \quad \text{pro } h = 2, 3, \dots, n \\ \mathbf{C}) \quad k_{ij} &= 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = i+1, i+2, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

kde k_{hh} a k_{ij} jsou prvky matice

$$\mathbf{K}_X = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a \right]_{\mathbf{T}_a = \text{konst}} + \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{K}_\Phi \cdot \mathbf{J}^+$$

^{*} Jestliže je matice \mathbf{K}_X symetrická (předpoklad), pak ze vztahu 4.1.14 plyne, že násobení \mathbf{K}_X musí být komutativní. Postačující podmínkou pro komutativní násobení je, že matice je diagonální. Tedy postačující podmínkou pro 4.1.12 je diagonální matice \mathbf{K}_X , což je zobecněním podmínek 4.1.17.

Na tomto místě je třeba zdůraznit, že faktorem zásadně ovlivňujícím existenci obecného řešení námi formulované úlohy je stupeň redundance robotu: Aby daná úloha měla jednoznačné řešení v libovolném bodě pracovního prostoru, musí počet pohonů (tj. i neznámých) odpovídat počtu rovnic soustavy (4.1.21):

$$n = m + \left(\frac{1}{2}m + 1\right)(m - 1) \quad (4.1.22)$$

Tuto podmínku můžeme ilustrovat následující tabulkou pro narůstající počet stupňů volnosti platformy:

m	2	3	4	5	6
n	4	8	13	19	26

Např. v našem případě rovinného robotu s bodovou platformou (tedy s dvěma stupni volnosti) obsahuje soustava (4.1.19), vedoucí k řešení dané úlohy, čtyři rovnice – dvě pro dosažení definované interakční síly a další dvě pro požadované ovlivnění kartézské tuhosti robotu. Z hlediska její řešitelnosti jsou tedy potřeba čtyři pohony (tj. dva kinematicky nadbytečné). Tuto podmínku splňuje robot z Obr. 4.1, naopak v případě robotu z Obr. 2.3 se stupněm redundance rovným jedné by daná úloha obecné řešení neměla.

4.1.2.2 Ovládání směru a gradientu vratné síly

Všimněme si, že pomocí řešení (4.1.19) úlohy formulované v předchozí kapitole sice požadovaným způsobem upravíme impedanční vlastnosti robotu z Obr. 4.1, ale na *velikost* jeho pracovní tuhosti přímý vliv nemáme. Situace by se ovšem změnila, kdybychom měli k dispozici ještě jeden „nadbytečný“ pohon. Odvozené podmínky (4.1.17) pro prvky matice pracovní tuhosti nám totiž „mezi řádky“ říkají, že velikost pracovní tuhosti lze přímo nastavit na základě doplnění *jediné* přídavné podmínky. Vzhledem k tomu, že podle podmínek (4.1.17) mají být jedinými nenulovými prvky impedanční matice dva prvky diagonální a ty si mají být rovny, stačilo by doplnit podmínku pro velikost jednoho z diagonálních prvků:

$$k_{11} = k, \quad (4.1.23)$$

kde k je požadovaná hodnota prvku matice tuhosti. Kombinace podmínek (4.1.17) a (4.1.23) pak jednoznačně definuje matici pracovní tuhosti

$$\mathbf{K}_x = k\mathbf{I}, \quad (4.1.24)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice $m \times m$, v našem případě 2×2 . Za povšimnutí stojí skutečnost, že při této matici kartézské tuhosti bude impedance robotu ve všech směrech stejná.

Jak bylo naznačeno výše, existence jednoznačného řešení soustavy s nově zahrnutou podmínkou (4.1.23) je podmíněna dalším pohonem navíc, aby počet neznámých (hnacích momentů) odpovídal počtu rovnic, kterých je v případě našeho rovinného robotu se dvěma stupni volnosti pět. K tomu tedy dospějeme přidáním jednoho pohonu (a kinematické série členů tvořící vazbu tohoto pohonu s platformou) k robotu z Obr. 4.1 (jeho stupeň redundance pak bude roven třem). Celá soustava rovnic pak bude v našem konkrétním případě vypadat takto:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial x_p} & \frac{\partial \varphi_5}{\partial x_p} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_p} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_p} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_p} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial y_p} & \frac{\partial \varphi_5}{\partial y_p} \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial y_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial y_p^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_p \partial y_p} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_p \partial y_p} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_p \partial y_p} & \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_p \partial y_p} & \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x_p \partial y_p} \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_p^2} & \frac{\partial^2 \varphi_5}{\partial x_p^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{h1} \\ \mathbf{M}_{h2} \\ \mathbf{M}_{h3} \\ \mathbf{M}_{h4} \\ \mathbf{M}_{h5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{ex} \\ \mathbf{F}_{ey} \\ 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \quad (4.1.25)$$

Nyní opět naposledy diskutovanou úlohu zobecníme pro redundantní paralelní robot s n pohony a m stupni volnosti: *Hledáme takové ovládání robotu, které umožní nezávislé nastavení interakčních sil a pracovní impedance – z hlediska impedančních vlastností robotu budeme požadovat nejen to, aby vratná síla působila vždy proti směru vynuceného přemístění platformy, ale také aby byla ve všech směrech zaručena jistá velikost gradientu této vratné síly, a to prostřednictvím definované hodnoty k jednoho z diagonálních prvků matice tuhosti.*

K soustavě (4.1.21) minulé úlohy nám v souladu s odvozením pro náš konkrétní případ rovinného robotu se dvěma stupni volnosti přibude ještě jedna doplňující podmínka (4.1.23), nastavující velikost pracovní tuhosti, kterou lze v udané podobě aplikovat obecně. Počet rovnic soustavy vedoucí k řešení naší nové úlohy je tedy $m + \left(\frac{1}{2}m + 1\right)(m - 1) + 1 = \frac{1}{2}m(m + 3)$. Tomuto počtu musí z hlediska obecné řešitelnosti nové úlohy odpovídat počet neznámých, tedy i pohonů:

$$n = \frac{1}{2}m(m + 3) \quad (4.1.26)$$

Pro ilustraci opět uvedeme tabulku, jak n roste s m :

m	2	3	4	5	6
n	5	9	14	20	27

Zapišme celou soustavu podmínek vedoucích k řešení diskutované úlohy pohromadě jako soustavu podmínek **A**), **B**), **C**) a **D**) pro vektor neznámých \mathbf{T}_a :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}) \quad & \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a = \mathbf{F}_e \\
 \mathbf{B}) \quad & k_{hh} = k_{11} \text{ pro } h = 2, 3, \dots, n \\
 \mathbf{C}) \quad & k_{ij} = 0 \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = i+1, i+2, \dots, n \\
 \mathbf{D}) \quad & k_{11} = k,
 \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

kde k_{hh} a k_{ij} jsou prvky matice

$$\mathbf{K}_x = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a \right]_{\mathbf{T}_a = \text{konst}} + \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{K}_\Phi \cdot \mathbf{J}^+$$

\mathbf{F}_e je předepsané efektivní zatížení platformy, k je zvolená hodnota diagonálního prvku matice tuhosti.

4.1.2.3 Ovládání směru vratné síly s maximalizací jejího gradientu

Nyní předchozí úlohu formulujme poněkud obecněji: *V libovolné poloze budeme chtít dosáhnout maximálního gradientu vratné síly (nezávisle na jejím směru), který je robot schopen, s ohledem na předepsané maximální hodnoty hnacích momentů, vyvinout. Požadavek, aby vratná síla působila vždy proti směru vynuceného přemístění platformy, zůstává, zrovna tak jako požadavek na dosažení předepsaných interakčních sil. Předpokládejme, že maximální hodnoty hnacích momentů budou dostatečně vysoké, aby nelimitovaly uvažované hodnoty efektivního zatížení platformy robotu.*

Tato úloha vede podobně jako ta minulá k doplňující podmínce pro prvky matice pracovní tuhosti. Uvědomíme-li si charakter této matice (4.1.24), vyplývající z podmínky pro směr vratné síly, dojdeme k závěru, že dosažení maximálního gradientu vratné síly je ekvivalentní s maximalizací hodnoty jednoho z diagonálních prvků matice tuhosti. Soustava podmínek vedoucí k řešení dané úlohy bude pak podobná soustavě (4.1.27), s tím rozdílem, že rovnostní podmínka typu **D)** přejde v podmínku nalezení maxima, a přibude podmínka pro horní omezení hnacích momentů předepsanými hodnotami $\mathbf{T}_{a \max}$:

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{D)} \max_{\mathbf{T}_a} (k_{11}) \text{ při splnění } \mathbf{A}), \mathbf{B}), \mathbf{C}), \mathbf{E)} : \\
 &\quad \mathbf{A)} \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a = \mathbf{F}_e \\
 &\quad \mathbf{B)} k_{hh} = k_{11} \text{ pro } h = 2, 3, \dots, m \\
 &\quad \mathbf{C)} k_{ij} = 0 \text{ pro } i = 1, 2, \dots, m-1; j = i+1, i+2, \dots, m \\
 &\quad \mathbf{E)} \mathbf{T}_a \leq \mathbf{T}_{a \max}, \mathbf{T}_a \geq -\mathbf{T}_{a \max} \\
 &\quad \text{kde } k_{hh} \text{ a } k_{ij} \text{ jsou prvky matice} \\
 &\quad \mathbf{K}_x = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a]_{\mathbf{T}_a = \text{konst}} + \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{K}_\phi \cdot \mathbf{J}^+
 \end{aligned} \tag{4.1.28}$$

Nyní k problému řešení takovéto soustavy. Je třeba si uvědomit, že jednotlivé prvky matice tuhosti jsou (až na případné konstantní hodnoty) lineárními kombinacemi neznámých (prvků vektoru \mathbf{T}_a). To platí i pro prvek k_{11} , který je předmětem maximalizace. Soustava je tedy typickou úlohou lineárního programování, k jejímuž řešení nabízejí běžné výpočetní programy (např. Matlab) účinné prostředky.

Zde je namístě zdůraznit, že úloha vedoucí k řešení této soustavy podmínek má dvě výhody oproti úloze minulé: jednak respektuje maximální dosažitelné hodnoty hnacích momentů, jednak ji lze aplikovat na libovolný redundantní paralelní robot, jehož počet pohonů (tj. neznámých) je z hlediska řešitelnosti soustavy (4.1.28) pouze zdola omezen, a to počtem rovnostných podmínek této soustavy:

$$n \geq m + \left(\frac{1}{2}m + 1\right)(m - 1) \quad (4.1.29)$$

Praktický dopad podmínky maximalizace tuhosti na řešení se však projeví až při počtu pohonů o jednu vyšším*, tj. při

$$n \geq \frac{1}{2}m(m + 3) \quad (4.1.30)$$

Opět uvedeme tabulku, jak minimální n roste s m :

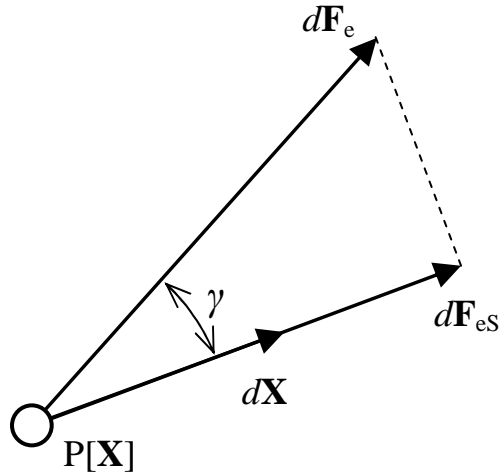
m	2	3	4	5	6
n_{\min}	5	9	14	20	27

4.1.2.4 Maximalizace směrové tuhosti

Odlišnou úlohou je maximalizace tuhosti v daném směru. Základem následujících úvah je situace, kdy malá změna polohy platformy robotu $d\mathbf{X}$ definovaného směru, vynucená okolím, vyvolá změnu efektivního zatížení $d\mathbf{F}_e$ (neboli, z pohledu robotu, vratné síly dané opačně orientovaným vektorem $-d\mathbf{F}_e$). *Jedním ze dvou cílů nové úlohy je, aby kolmý průmět tohoto silového přírůstku do směru definovaného změnou polohy $d\mathbf{X}$ byl maximální, s ohledem na dosažitelné hodnoty hnacích momentů \mathbf{T}_{\max} .*

Situaci si ilustrujeme na příkladu našeho rovinného robotu s bodovou platformou P – viz Obr. 4.2.

* Teprve tehdy bude za uvedených předpokladů podmínkám typu **B**) a **C**) vyhovovat nekonečně mnoho řešení, čímž bude vytvořen prostor pro maximalizaci.



Obr. 4.2: Směrová tuhost rovinného robotu s bodovou platformou

Abychom se při řešení této úlohy zbavili závislosti výsledku na velikosti změny polohy platformy, zavedeme nyní pojem **směrové tuhosti** K_S [Florián & Valášek, 2000]: jedná se o skalární hodnotu, která je definována poměrem kolmého průmětu $d\mathbf{F}_{es}$ (viz Obr. 4.2) přírůstku efektivního zatížení $d\mathbf{F}_e$ do směru daného malou změnou polohy platformy $d\mathbf{X}$ a velikosti této změny. Zapišme tuto definici nejprve za použití vektorového značení:

$$K_S = \frac{|d\vec{F}_{es}|}{|d\vec{X}|} = \frac{|d\vec{F}_e|}{|d\vec{X}|} \cos \gamma, \quad (4.1.31)$$

kde γ je úhel, který svírají vektory $d\mathbf{F}_e$ a $d\mathbf{X}$.

V naší nové úloze nám tedy v souladu s její původní formulací půjde o maximalizaci právě definované veličiny, a to pro směr daný vektorem $d\mathbf{X}$. Zlomek v definici (4.1.31) rozšíříme velikostí vektoru $d\mathbf{X}$ a upravíme:

$$K_S = \frac{|d\vec{F}_e| |d\vec{X}|}{|d\vec{X}| |d\vec{X}|} \cos \gamma = \frac{|d\vec{F}_e| |d\vec{X}| \cos \gamma}{|d\vec{X}|^2} = \frac{d\vec{F}_e \cdot d\vec{X}}{|d\vec{X}|^2} \quad (4.1.32)$$

Vidíme, že směrovou tuhost lze vyjádřit také pomocí skalárního součinu vektorů $d\mathbf{F}_e$ a $d\mathbf{X}$. Tento vztah zapíšeme v maticové podobě a za $d\mathbf{F}_e$ dosadíme ze vztahu (4.1.13):

$$\mathbf{K}_S = \frac{d\mathbf{F}_e^T d\mathbf{X}}{d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}} = \frac{(\mathbf{K}_X d\mathbf{X})^T d\mathbf{X}}{d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}^T \mathbf{K}_X^T d\mathbf{X}}{d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}} \quad (4.1.33)$$

Aplikujme nyní větu (4.1.33) na náš rovinný robot s bodovou platformou:

$$\mathbf{K}_S = \frac{\begin{bmatrix} dx_P & dy_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_P \\ dy_P \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} dx_P & dy_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_P \\ dy_P \end{bmatrix}} \quad (4.1.34)$$

Toto vyjádření postupně upravíme:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_S &= \frac{\begin{bmatrix} k_{11}dx_P + k_{21}dy_P, & k_{12}dx_P + k_{22}dy_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_P \\ dy_P \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} dx_P & dy_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_P \\ dy_P \end{bmatrix}} \\ \mathbf{K}_S &= \frac{k_{11}d^2x_P + k_{21}dx_Pdy_P + k_{12}dx_Pdy_P + k_{22}d^2y_P}{d^2x_P + d^2y_P} \cdot \frac{1}{\frac{d^2x_P}{1}} \\ \mathbf{K}_S &= \frac{k_{11} + (k_{12} + k_{21})\frac{dy_P}{dx_P} + k_{22}\left(\frac{dy_P}{dx_P}\right)^2}{1 + \left(\frac{dy_P}{dx_P}\right)^2} = \frac{k_{11} + (k_{12} + k_{21})\operatorname{tg}\alpha + k_{22}\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \end{aligned} \quad (4.1.34a)$$

Z posledního odvozeného vztahu vyplývá, že směrová tuhost je dána lineární kombinací jednotlivých členů matice pracovní tuhosti, která závisí pouze na daném směru očekávané deformace (ten je v našem konkrétním příkladě dán tangentou úhlu α , který vektor $d\mathbf{X}$ svírá s osou x), ne na její velikosti. Tato věta platí pro obecný

robot o m stupních volnosti [Florián & Valášek, 2000] *. Dále si je třeba uvědomit, že všechny prvky matice pracovní tuhosti lze chápat jako lineární kombinace jednotlivých prvků vektoru pohonných momentů \mathbf{T}_a (až na „konstantní“ členy zastupující pasivní složku tuhosti, závislé pouze na poloze robotu), viz vztah (4.1.6). Z těchto dvou poznatků plyne, že směrová tuhost je také dána lineární kombinací prvků vektoru \mathbf{T}_a (plus konstanta):

$$\mathbf{K}_S = \mathbf{C}^T \mathbf{T}_a + \mathbf{c}_0, \quad (4.1.35)$$

kde \mathbf{c}_0 a prvky vektoru \mathbf{C} ($n \times 1$) jsou konstanty závislé na poloze platformy a na směru předpokládané deformace. Např. v případě robotu z Obr. 4.1 můžeme vztah (4.1.35) rozepsat takto:

$$\mathbf{K}_S = \mathbf{c}_0 + c_1 \mathbf{M}_{h1} + c_2 \mathbf{M}_{h2} + c_3 \mathbf{M}_{h3} + c_4 \mathbf{M}_{h4} \quad (4.1.35a)$$

Z toho vyplývá důležitý závěr pro úlohu maximalizace směrové tuhosti, a to že hledané maximum se vždy nachází na hranici definičního oboru funkce $\mathbf{K}_S = \mathbf{K}_S(\mathbf{T}_a)$ [Florián & Valášek, 2000]. Tyto hranice jsou dány n -rozměrným kvádrem, jehož strany jsou definovány maximálními hnacími momenty.

Formulujme nyní celou úlohu, tentokrát prostřednictvím směrové tuhosti: *Hledáme takové ovládání robotu, které v libovolné (nesingulární) poloze zaručí: 1) nastavení požadované hodnoty efektivního zatížení, 2) maximalizaci směrové tuhosti robotu pro předepsaný směr.*

V rámci maximalizace výrazu (4.1.35) je tedy ještě třeba respektovat podmínku (4.1.9). Soustavu podmínek vedoucí k řešení dané úlohy zapíšeme pohromadě:

$$\begin{aligned} \mathbf{C)} \quad & \max_{\mathbf{T}_a} (\mathbf{K}_S) \text{ při splnění } \mathbf{A), B):} \\ \mathbf{A)} \quad & \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a = \mathbf{F}_e \\ \mathbf{B)} \quad & \mathbf{T}_a \leq \mathbf{T}_{a \max}, \quad \mathbf{T}_a \geq -\mathbf{T}_{a \max}, \\ & \text{kde } \mathbf{K}_S \text{ je vyjádřeno ve tvaru } \mathbf{K}_S = \mathbf{C}^T \mathbf{T}_a + \mathbf{c}_0 \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

* Tvrzení uvádíme na základě obdobně provedených odvození pro roboty s jedním, třemi a čtyřmi stupni volnosti.

Jedná se tedy opět o úlohu lineárního programování. Výhoda takto formulované úlohy je, že za uvedených podmínek je existence jejího jednoznačného řešení \mathbf{T}_a zaručena, pokud jsou řešitelné podmínky \mathbf{A}) soustavy (4.1.36). Jak již bylo konstatováno, tyto podmínky tvoří soustavu m rovnic pro n neznámých, která je (za uvedených podmínek) řešitelná při minimálním počtu pohonů daném počtem stupňů volnosti robotu:

$$n \geq m \quad (4.1.37)$$

Opět platí, že pro praktický dopad výběru maxima je třeba ještě jeden pohon navíc, tedy v případě našeho rovinného robotu s bodovou platformou jsou to minimálně tři pohony, další příklady můžeme opět shrnout do tabulky:

m	2	3	4	5	6
n_{\min}	3	4	5	6	7

Počítačová simulace úlohy nalezení ovládání interakční síly s maximalizací směrové tuhosti pro konkrétní případ rovinného redundantního paralelního robotu s dvěma stupni volnosti a třemi pohony je dokumentována v kapitole 5.1.1.

4.1.2.5 Obecné ovládání matice pracovní tuhosti

Doposud jsme se zabývali případy ovládání vybraných impedančních charakteristik. Už z předcházejícího popisu problémů je zjevné, že čím více pohonů je k dispozici, tím širší jsou možnosti nezávislého ovládání interakce (případně dynamiky robotu) a impedančních charakteristik robotu. Při určitém počtu pohonů je pak možné zcela nezávislé ovládání pracovní tuhosti, jak ukážeme dále [Yi, Freeman and Tesar, 1989].

Obraťme opět pozornost k našemu rovinnému robotu z Obr. 4.1. Symetrická matice tuhosti v pracovním prostoru \mathbf{K}_X má čtyři prvky, z toho tři různé. K polohování platformy robotu nebo k ovládání interakční síly potřebujeme dva pohony, tedy počet odpovídající počtu stupňů volnosti (viz vztah (4.1.9a)). K plnému ovládnutí pracovní tuhosti robotu je nutná možnost nezávislého nastavení všech různých prvků matice \mathbf{K}_X , v našem případě tří (vztah (4.1.6a)). Uvážíme-li, že prvky

této matice lze vyjádřit jako lineární kombinace hnacích momentů (viz vztah (4.1.7a)), potřebujeme k nastavení těchto prvků právě tři kinematicky nadbytečné pohony. Tedy k nezávislému ovládání interakční síly a matice tuhosti rovinného robotu se dvěma stupni volnosti bychom potřebovali celkem pět pohonů.

V obecném případě, pro m stupňů volnosti platformy, má tuhostní matice \mathbf{K}_X $\frac{1}{2}m(m+1)$ různých prvků. Pro nezávislé ovládání interakční síly (4.1.9) a pracovní tuhosti (4.1.6) je pak třeba k dispozici celkem n nezávislých pohonů:

$$n \geq \frac{1}{2}m(m+3) \quad (4.1.38)$$

Následuje tabulka s příklady, jak pro danou úlohu m roste s n :

m	2	3	4	5	6
n_{\min}	5	9	14	20	27

Speciálními případy úlohy nezávislého ovládání interakčních sil a pracovní tuhosti jsou například výše diskutované úlohy 4.1.2.2 a 4.1.2.3.

4.2 Ovládání robotu s vyloučením vůlí v pohonech

V této kapitole se budeme zabývat problematikou vymezení vůlí v akčních souřadnicích pohonů redundantního paralelního robotu v rámci jeho řízení v otevřené smyčce. Ostatní typy vůlí přítomných v mechanismech robotů uvažovány nebudou (viz kapitola 2.3).

V následující podkapitole 4.2.1 je formulována podmínka vymezení vůlí a naznačen postup při její implementaci v rámci ovládání robotu. Podkapitoly 4.2.2 resp. 4.2.3 pokrývají cíle **II.A** resp. **II.B** – zabývají se řešitelností (a v případě 4.2.2 i řešením) úloh nalezení bezvůlového ovládání pro danou trajektorii, dynamiku a interakci, resp. pro nějakou oblast pracovního prostoru robotu. Obsahem poslední podkapitoly 4.2.4 je postup nalezení bezvůlového ovládání v oblastech, jejichž hledání popisuje podkapitola 4.2.3.

4.2.1 Formulace a implementace podmínky vymezení vůlí

Ukazuje se, že k vyloučení vůlí při řízení robotu lze využít redundance pohonů, a to při dodržení jisté podmínky, která zaručí online vymezení vůlí při činnosti paralelního robotu. Tato podmínka, zmíněná již v kapitole 2.3, se stala výchozím bodem řešení uvažované problematiky. Jedná se o jednoduchou *podmínku konstantní orientace silového působení pohonů* (tj. např. hnacích momentů v případě rotačních pohonů) během vykonávání pracovního cyklu.

Definujme nyní vektor \mathbf{s} vyjadřující orientaci jednotlivých prvků vektoru \mathbf{T}_a hnacích sil a pro jednoduchost ho v dalším nazývejme *znaménkovým vektorem* pohonů:

$$\mathbf{s} = \text{sign}(\mathbf{T}_a), \quad (4.2.1)$$

S použitím znaménkového vektoru můžeme podmínku vymezení vůlí zapsat matematicky [Valášek & Florián, 2000], [Valasek, Belda and Florian, 2002]:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad \text{!} \quad \mathbf{s} = \text{konst.} \quad (4.2.2)$$

V případě řízené akce paralelního robotu bez redundantních pohonů je vektor zatížení v prostoru pohonů \mathbf{T}_a v každém okamžiku jednoznačně dán, tudíž vektor znamének pohonů \mathbf{s} nelze libovolně volit. To znamená, že u tohoto typu robotů nelze splnění podmínky vymezení vůlí obecně zaručit. Naopak u redundantního paralelního robotu není vektor \mathbf{T}_a při předepsaném pohybu a efektivním zatížení platformy jednoznačně určen: Transformační vztah (4.1.3) mezi efektivní zátěží platformy a vektorem hnacích momentů lze chápat jako soustavu m lineárních rovnic pro n prvků vektoru \mathbf{T}_a , přičemž $m < n$. To znamená, že u paralelního robotu s redundantními pohony lze vektor \mathbf{T}_a a tím i znaménka pohonů do jisté míry nezávisle ovlivnit.

Zde je však třeba podotknout, že samotné předepsání znaménkového vektoru \mathbf{s} není dostatečným doplňujícím vztahem pro zaručení jednoznačnosti řešení \mathbf{T}_a soustavy (4.1.3), protože neříká nic o jeho velikosti. Pro zohlednění podmínky vymezení vůlí v řídicím algoritmu je tedy nutné zahrnout ji do komplexnější soustavy, obsahující např. optimalizaci nějaké pracovní charakteristiky robotu z hlediska vektoru hnacích sil (momentů). Řešení této soustavy pak zaručí, že orientace všech hnacích sil zůstane stejná po celou dobu vykonávání pracovního cyklu. Jde tedy o to najít odpovídající konstantní kombinaci znamének silového působení pohonů, neboli odpovídající vektor \mathbf{s} . K řešení daného problému je v rámci této práce přistupováno dvěma různými způsoby.

První metoda spočívá v hledání vhodného vektoru znamének pohonů \mathbf{s} , který by vyhovoval podmínce vymezení vůlí pro konkrétní pracovní cyklus s definovanou trajektorií, dynamikou a efektivním zatížením platformy.

Druhý směr výzkumu je zaměřen na mapování pracovního prostoru robotu z hlediska existence znaménkových vektorů \mathbf{s} , pro které je v nějaké oblasti pracovního prostoru podmínka vymezení vůlí splněna vždy, bez ohledu na dynamiku i vnější zatížení robotu. Druhý přístup je obecnější, ale také náročnější z výpočetního hlediska, což může být nezanedbatelný faktor, zvláště v případě většího počtu pohonů a stupňů volnosti.

Oběma přístupům jsou věnovány separátní kapitoly 4.2.2 a 4.2.3.

4.2.2 Hledání bezvůlového ovládání pro daný pracovní cyklus

Jak bylo výše zmíněno, první přístup k implementaci podmínky vymezení vůlí je pevně spjat s konkrétním pracovním cyklem robotu. *Nalezení konstantního znaménkového vektoru bude v tomto případě součástí širší úlohy, a to návrhu řízení robotu v otevřené smyčce. Tento návrh spočívá ve stanovení časové nebo polohové závislosti vektoru hnacích sil \mathbf{T}_a pro dosažení předepsané trajektorie a interakce s okolím při respektování podmínky vymezení vůlí (4.2.2).*

4.2.2.1 Matematická formulace úlohy

V matematické formulaci soustavy podmínek pro vektor hnacích sil \mathbf{T}_a budou zahrnuty následující položky:

- A) podmínka pro \mathbf{T}_a zaručující předepsaný pohyb a interakci,
- B) podmínka vymezení vůlí,
- C) další případné omezující podmínky pro \mathbf{T}_a ,
- D) optimalizační kritérium pro vybraný provozní parametr: tato podmínka je nutným doplňkem pro jednoznačnost řešení soustavy.

Ad A)

Předpokládejme, že na základě předepsané časové závislosti polohy platformy robotu jsou již v jednotlivých bodech trajektorie počítány setrvačné účinky všech pohyblivých částí robotu. Všechny setrvačné účinky je následně třeba redukovat na pracovní souřadnice robotu, viz Dodatek A. Po sečtení obdržného vektoru redukovaných setrvačných sil s předepsaným vektorem interakčních sil s okolím dostaneme **výsledné redukované zatížení robotu \mathbf{F}_X v prostoru pracovních souřadnic** (též viz Dodatek A). Pak můžeme první podmínku psát ve tvaru vycházejícím z transformačního vztahu (4.1.3):

$$\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a = \mathbf{F}_X \quad (4.2.3)$$

Ad B)

Než zapíšeme podmínku vymezení vůlí v nové podobě, definujme nejprve „znaménkovou“ diagonální matici $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ jako čtvercovou matici $n \times n$, jejíž hlavní diagonálu tvoří prvky znaménkového vektoru \mathbf{s} (tedy +1 nebo -1):

$$\mathbf{D}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

Podmínku vymezení vůlí (4.2.2) můžeme nyní formulovat jako nerovnost:

$$\mathbf{D}(\mathbf{s})\mathbf{T} > \mathbf{0}, \quad (4.2.5)$$

kde \mathbf{s} je sloupcový vektor o n členech, nabývajících hodnot +1 nebo -1. Tento vektor vyjadřuje orientaci silového působení jednotlivých pohonů. Poslední podmínka může být zobecněna:

$$\mathbf{D}(\mathbf{s})\mathbf{T}_a > \mathbf{T}_{a \min}, \quad (4.2.6)$$

kde $\mathbf{T}_{a \min}$ je vektor prahových hodnot, pod které nemají poklesnout absolutní hodnoty jednotlivých hnacích sil. Tímto způsobem je možné vytvořit jakousi rezervu pro splnění podmínky vymezení vůlí, vhodnou pro reálné řízení se zpětnovazební složkou, kdy je třeba vzít v úvahu nepřesnost modelu robotu i prostředí a další náhodné vlivy.

Ad C)

Z dodatečných podmínek je vhodné zařadit podmínku pro maximální velikost prvků vektoru \mathbf{T}_a :

$$\text{abs}(\mathbf{T}_a) \leq \mathbf{T}_{a \max}, \quad (4.2.7a)$$

neboli

$$\mathbf{D}(\mathbf{s})\mathbf{T}_a \leq \mathbf{T}_{a \max}, \quad (4.2.7)$$

kde $\mathbf{T}_{a \max}$ je vektor maximálních dosažitelných (absolutních) hodnot hnacích sil, matice $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ je definována vztahem (4.2.4).

Ad D)

Optimalizační kritérium je možné volit libovolně, podle požadavků na dynamické vlastnosti robotu. Zvolme např. kritérium minimálního součtu kvadrátů hnacích sil (jinými slovy minimální velikosti vektoru \mathbf{T}_a):

$$\min_{\mathbf{T}_a} (\mathbf{T}_a^T \mathbf{T}_a) \quad (4.2.8)$$

Nyní můžeme celou soustavu podmínek napsat pohromadě: jedná se o úlohu kvadratického programování [Valášek & Florián, 2000]:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{T}_a} (\mathbf{T}_a^T \mathbf{T}_a) \text{ při splnění } \mathbf{A}), \mathbf{B}), \mathbf{C} \\ \mathbf{A) } \mathbf{J}^{+T} \mathbf{T}_a = \mathbf{F}_x \\ \mathbf{B) } \mathbf{D}(\mathbf{s}) \mathbf{T}_a > \mathbf{T}_{a \min} \\ \mathbf{C) } \mathbf{D}(\mathbf{s}) \mathbf{T}_a \leq \mathbf{T}_{a \max} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

4.2.2.2 Řešení úlohy nalezení bezvůlového ovládání

Řešení dané úlohy spočívá v nalezení řešení \mathbf{T}_a soustavy (4.2.9) ve všech bodech plánované trajektorie pro konstantní vektor \mathbf{s} . Klíčovým krokem je přitom právě nalezení zmíněného znaménkového vektoru – jeho existence je nutnou podmínkou existence řešení úlohy.

Určitý problém představuje fakt, že poslední dvě podmínky soustavy (4.2.9) jsou nerovnosti a nelze proto explicitně vyjádřit řešení soustavy \mathbf{T}_a v závislosti na poloze platformy (případně na čase). Soustavu je tedy nutné řešit v jednotlivých zvolených bodech dané trajektorie. Diskretizace trajektorie musí být dostatečně jemná, aby byly nalezeny a případně eliminovány polohy, ve kterých řešení soustavy (4.2.9) pro uvažovaný znaménkový vektor neexistuje.

Postup řešení úlohy bude následující: Nejprve je třeba vygenerovat množinu $\{\mathbf{s}\}$ všech potenciálně vyhovujících znaménkových vektorů. (Tomuto kroku je věnována následující kapitola 4.2.2.3). Z vytvořené množiny budou postupně vybírány jednotlivé vektory \mathbf{s} a testovány z hlediska řešitelnosti soustavy (4.2.9).

Rozvedením této myšlenky můžeme formulovat jednoduchý *algoritmus* postupu při *hledání bezvůlového řízení* [Valášek & Florián, 2000]:

1. Vytvoř množinu $\{\mathbf{s}\}$ potenciálně vyhovujících znaménkových vektorů.
2. Z množiny $\{\mathbf{s}\}$ vyber první vektor a dosad' ho za \mathbf{s} .
3. V jednotlivých bodech diskretizované trajektorie postupně hledej řešení \mathbf{T}_a soustavy (4.2.9) pro právě uvažovaný vektor \mathbf{s} .
4.
 - a) Pokud v nějakém bodě trajektorie řešení (4.2.9) neexistuje, dosad' za \mathbf{s} další vektor z množiny $\{\mathbf{s}\}$ a vrať se k bodu 3.
 - b) Pokud soustava (4.2.9) nemá v některém z bodů trajektorie řešení pro žádný vektor z množiny $\{\mathbf{s}\}$, nelze potlačit vůle v pohonech během daného pracovního cyklu.
 - c) Jestliže řešení (4.2.9) existuje ve všech vybraných bodech trajektorie, bylo tím nalezeno i řešení celého problému: výslednou redukovanou dynamickou sílu \mathbf{F}_X lze dosáhnout ve všech uvažovaných bodech trajektorie, a to působením pohonných sil \mathbf{T}_a , spočítaných v bodu 2. Tyto síly mají konstantní znaménka, reprezentovaná naposledy vybraným vektorem \mathbf{s} .

4.2.2.3 Metody získání startovací množiny znaménkových vektorů

Soustava podmínek (4.2.9) je v jednotlivých bodech pracovního prostoru obecně řešitelná pro více znaménkových vektorů \mathbf{s} . Jak bylo výše zdůrazněno, pro úspěšné nalezení bezvůlového řízení je třeba, aby zmíněné podmínky byly splněny ve všech bodech plánované trajektorie současně. Množina znaménkových vektorů vyhovujících podél celé trajektorie je proto dána průnikem množin vektorů vyhovujících v jejích jednotlivých bodech. Stanovovat tyto „dílčí“ množiny a následně hledat jejich společné prvky \mathbf{s} by bylo velmi zdlouhavé. Na druhou stranu by bylo výhodné (zvláště pro vyšší počty pohonů) nějakým způsobem redukovat

množinu všech existujících kombinací znamének pohonů (vektorů \mathbf{s}) před aplikací algoritmu popsaného v kapitole 4.2.2.2 – obecně je totiž počet těchto kombinací 2^n . V následujících odstavcích **A.** a **B.** jsou navrženy dvě metody sestavení diskutované množiny $\{\mathbf{s}\}$ potenciálně vyhovujících znaménkových vektorů.

A. Stanovení vyhovujících znaménkových vektorů pro jeden bod trajektorie

Tato metoda spočívá v nalezení všech znaménkových vektorů \mathbf{s} vyhovujících z hlediska řešitelnosti soustavy (4.2.9) v jednom vybraném bodě trajektorie. Pro tento účel ze soustavy vyloučíme optimalizační kritérium, dále pro zjednodušení problému nebudeme uvažovat omezující podmínku **C)** a podmínku **B)** zapíšeme v jejím původním tvaru (4.2.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{+T} \mathbf{T}_a &= \mathbf{F}_x \\ \mathbf{D}(\mathbf{s}) \mathbf{T}_a &> \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Cílem je tedy najít všechny vektory \mathbf{s} , pro které má lineárně programovací úloha (4.2.10) v daném bodě řešení.

Podstatou navrhované metody je lokalizace bodů v prostoru pohonných sil, ve kterých právě $n-m$ prvků vektoru \mathbf{T}_a splňujícího (pouze) silovou rovnováhu (4.2.3) mění znaménka (což můžeme zapsat tak, že jsou tyto prvky nulové – viz podmínky (4.2.11)), zatímco znaménka zbylých m prvků zůstávají stejná. Tyto body jsou totiž hraničními místy mezi jednotlivými oblastmi řešitelnosti (4.2.10), reprezentovanými právě hledanými znaménkovými vektory \mathbf{s} . Pro nalezení zmíněných bodů tedy budeme doplňovat soustavu (4.2.10) $n-m$ rovnicemi

$$\mathbf{T}_{a_j} = 0, \quad (4.2.11)$$

kde \mathbf{T}_{a_j} je j -tý prvek vektoru \mathbf{T}_a , j nabývá hodnot mezi 1 a n . Pro nalezení všech hraničních bodů je třeba vystřídat všech $\binom{n}{m}$ možných kombinací soustav rovnic (4.2.11). Pokud má soustava (4.2.10) doplněná $n-m$ rovnicemi (4.2.11) jednoznačné řešení \mathbf{T}_a , pak je v souladu s těmito rovnicemi $n-m$ jeho prvků nulových a zbylé prvky jsou obecně nenulové. Ke každému takovému bodu existuje sada hledaných

vektorů \mathbf{s} , jejichž m prvků je dáno (shodně pro všechny vektory z této sady) znaménky příslušných nenulových prvků zmíněného řešení \mathbf{T}_a a namísto nul jsou postupně všechny variace $+1$ a -1 . Jednotlivé sady pak obsahují 2^{n-m} vektorů \mathbf{s} , přičemž některé z nich mohou mít společné – ty pak se v hledané množině $\{\mathbf{s}\}$ uvažují jen jednou.

Takto získanou „startovací“ množinu $\{\mathbf{s}\}$ je možné dále zredukovat stanovením podobných množin pro další body trajektorie a nalezením jejich společných vektorů \mathbf{s} .

Nevýhodou popsané metody je to, že její použití může být časově náročné, zvláště pro vyšší stupně redundance. Výhodou je naopak to, že nevynechá žádný vektor \mathbf{s} , pro který lze najít bezvúlové ovládání robotu.

B. Určení nejčtetnějšího znaménkového vektoru podél trajektorie

Myšlenka této metody spočívá v nalezení takového znaménkového vektoru, pro který by ve všech bodech trajektorie byla splněna podmínka (4.2.3), přičemž absolutní hodnoty odpovídajících řešení \mathbf{T}_a této soustavy by byly co možno nejmenší. Tento minimalizační požadavek odpovídá kritériu \mathbf{D} uvedenému v kapitole 4.2.2.1.

Algoritmus je následující: Ve vybraných bodech diskretizované trajektorie spočítáme vektor hnacích sil \mathbf{T}_a , který má při splnění podmínce (4.2.3) nejmenší součet čtverců jednotlivých prvků:

$$\min_{\mathbf{T}_a} (\mathbf{T}_a^T \mathbf{T}_a) \text{ pro } \mathbf{J}^{+T} \mathbf{T}_a = \mathbf{F}_x \quad (4.2.12)$$

K jednotlivým řešením \mathbf{T}_a přiřadíme odpovídající znaménkové vektory (viz definice (4.2.1)), které následně seřadíme podle statistické četnosti výskytu. Startovací množinu $\{\mathbf{s}\}$ pro hledání bezvúlového ovládání získáme výběrem několika nejčtetnějších takto získaných vektorů a případným rozšířením o vektory „sousední“, tj. ty, které se od nalezených liší v jednom prvku.

Použití množiny $\{\mathbf{s}\}$ získané tímto způsobem může podstatně urychlit hledání bezvúlového ovládání, ovšem je zde také značná nevýhoda – tato množina obecně

neobsahuje všechny vektory \mathbf{s} , pro které řešení existuje, a může se tedy stát, že řešení nebude nalezeno, i když existuje. Pak je vhodné vyzkoušet ještě metodu předchozí, která uvedené riziko nemá.

4.2.3 Mapování oblastí vymežitelných vůlí

Druhý přístup k syntéze bezvůlového ovládání redundantního paralelního robotu předpokládá existenci oblastí pracovního prostoru, ve kterých lze vymezit vůle vždy, tedy bez ohledu na dynamiku i interakci robotu s okolím. Nazýváme tyto oblasti *oblastmi vymežitelných vůlí* [Florián & Valášek, 2006]. Definujeme je tak, že jsou to spojitě oblasti pracovního prostoru redundantního paralelního robotu, pro něž existuje taková kombinace nenulových znamének pohonných sil (tj. takový znaménkový vektor \mathbf{s}), že v každém jejich bodě lze působením pohonů dosáhnout libovolného vektoru \mathbf{F}_X výsledného redukovaného zatížení robotu v prostoru pracovních souřadnic (viz Dodatek A).

V dalším se budeme zabývat problémem nalezení oblastí vymežitelných vůlí, přičemž přijmeme předpoklad, že tyto *oblasti neobsahují žádné singulární body*. Potom je uvnitř těchto oblastí hodnota pseudo-inverzního jakobiánu robotu \mathbf{J}^+ (viz kapitola 4.1.1) vždy m .

4.2.3.1 Podmínka vymežitelnosti vůlí v oblasti pracovního prostoru

Pokusme se nyní nalézt podmínku, která by v nějaké oblasti pracovního prostoru robotu zaručila možnost vymezení vůlí nezávisle na výsledném redukovaném zatížení robotu.

„Znaménková“ diagonální matice $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ definovaná vztahem (4.2.4) má snadno ověřitelnou následující vlastnost: $\mathbf{D}(\mathbf{s})\mathbf{D}(\mathbf{s}) = \mathbf{I}$, kde \mathbf{I} je jednotková matice $n \times n$. Matici $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ použijeme při odvození nové podoby soustavy silové rovnováhy (4.2.3):

$$\mathbf{J}^{+T} \mathbf{D}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{s}) \mathbf{T}_a = \mathbf{F}_X,$$

neboli

$$\mathbf{J}_s^{+T} \mathbf{T}_{as} = \mathbf{F}_X, \quad (4.2.13)$$

při označení

$$\mathbf{J}_s^{+T} = \mathbf{J}^{+T} \mathbf{D}(\mathbf{s}) \quad (4.2.14)$$

a

$$\mathbf{T}_{as} = \mathbf{D}(\mathbf{s}) \mathbf{T}_a, \quad (4.2.15)$$

kde \mathbf{s} je znaménkový vektor, jehož prvky reprezentují orientaci působení odpovídajících pohonů, viz definice (4.2.1).

Jestliže v nějaké oblasti pracovního prostoru robotu chceme v rámci jeho řízené akce vymezit vůle v pohonech nezávisle na výsledném redukovaném zatížení, je potřeba (v souladu s výše uvedenou definicí oblasti vymezitelných vůlí) nalézt takový konstantní znaménkový vektor \mathbf{s} , aby soustava rovnic (4.2.13) byla v uvažované oblasti z hlediska prvků vektoru \mathbf{T}_{as} řešitelná pro libovolný vektor \mathbf{F}_X . Při tomto hledání navíc budeme uvažovat pouze případy, kdy jsou v činnosti všechny pohony, tj. jednotlivé prvky vektoru \mathbf{s} jsou +1 nebo -1, nikdy však 0. Z definičních vztahů (4.2.1) a (4.2.15) potom vyplývá, že *všechny prvky vektoru \mathbf{T}_{as} jsou kladné*. Na základě tohoto poznatku pak můžeme otázku splnitelnosti podmínky vymezitelnosti vůlí převést na problém řešitelnosti soustavy

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s^{+T} \mathbf{T}_{as} &= \mathbf{F}_X \\ \mathbf{T}_{as} &> \mathbf{0} \end{aligned}, \quad (4.2.16)$$

kde \mathbf{F}_X je libovolný vektor celkového redukovaného zatížení a \mathbf{T}_{as} je neznámé řešení, pokud existuje.

Z hlediska testování řešitelnosti by však bylo vhodné soustavu podmínek (4.2.16) formulovat tak, aby se v ní vektor \mathbf{F}_X nevyskytoval, protože na něm existence jejího řešení nemá záviset. Proto obecný vektor \mathbf{F}_X nahradíme vektorem nulovým:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s^{+T} \mathbf{T}_{as} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{as} &> \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Pokud má tato soustava řešení \mathbf{T}_{as} , pak je řešitelná i soustava (4.2.16). Důkaz tohoto tvrzení je obsahem Dodatku B.

Důležitým závěrem je, že jestliže má soustava (4.2.17) řešení v nějaké spojité oblasti pracovního prostoru, pak se jedná o oblast vymezitelných vůlí [Florián & Valášek, 2006].

4.2.3.2 Testování znaménkových vektorů na vymezitelnost vůlí

V soustavě (4.2.17) jsme našli vhodný prostředek k prokázání existence oblastí vymezitelných vůlí. Pokud však má tato soustava řešení, pak je jich obecně nekonečně mnoho*, proto by bylo užitečné formulovat nějaký vhodný test řešitelnosti této soustavy. Jednoduchou a efektivní metodou se ukázalo převedení soustavy na problém lineárního resp. kvadratického programování, a to připojením jistého kritéria, kterým je nalezení minima či maxima vybrané lineární resp. kvadratické funkce vektoru \mathbf{T}_{as} . Takto vytvořená úloha kvadratického programování může mít např. následující formu:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{T}_{as}} (\mathbf{T}_{as}^T \mathbf{T}_{as}) \quad \text{pro} \\ \mathbf{J}_s^{+T} \mathbf{T}_{as} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{as} &> \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

kde matice \mathbf{J}_s^{+T} je pro zvolený znaménkový vektor \mathbf{s} dána vztahem (4.2.14).

Pokud je tedy soustava (4.2.18) řešitelná v nějaké oblasti pracovního prostoru robotu, je zde splnitelná i soustava podmínek (4.2.17) a vůle v pohonech lze v dané oblasti vymezit nezávisle na dynamice robotu i na interakci s okolím.

Jistým problémem při hledání oblastí vymezitelných vůlí zůstává skutečnost, že pomocí soustavy (4.2.18) nelze testovat zvolený znaménkový vektor \mathbf{s} pro nějakou

* To je dáno rovnostní podmínkou soustavy (4.2.17), kterou je soustava m rovnic o n neznámých, $n > m$

oblast pracovního prostoru robotu jako celek, ale pouze v jejích jednotlivých bodech. Pracovní prostor je proto z hlediska vymežitelnosti vůlí nutné mapovat bod po bodu.

Tomu ovšem musí předcházet vytvoření definované sítě (množiny) bodů, ve kterých bude testování probíhat. Tato diskretizace pracovního prostoru musí být dostatečně jemná, aby eliminovala riziko, že v rámci nějaké mapované oblasti vymežitelných vůlí nebudou nalezeny nehomogenity, které do dané oblasti nepatří. Toto riziko je hlavním úskalím navržené metody.

Na základě nalezené testovací soustavy (4.2.18) a popsaných podmínek jejího použití můžeme nyní formulovat algoritmus pro hledání oblastí vymežitelných vůlí [Florián & Valášek, 2006].

4.2.3.3 Algoritmus hledání oblastí vymežitelných vůlí

1. Inicializační fáze:

- a) Diskretizace pracovního prostoru robotu: Vytvořit rovnoměrnou, dostatečně hustou síť bodů. V každém bodě vyčíslit pseudoinverzní jakobián \mathbf{J}^+ .
- b) Vytvořit kompletní množinu $\{\mathbf{s}\}$ znaménkových vektorů, tj. všech možných kombinací +1 a -1 charakterizujících smysl působení jednotlivých pohonů.

2. Pro jednotlivé znaménkové vektory \mathbf{s} z množiny $\{\mathbf{s}\}$ testovat řešitelnost soustavy (4.2.18), případně její obecnější formy (4.2.21) (viz níže) ve všech bodech diskretizovaného pracovního prostoru a výsledky testů zaznamenávat.

3. Pro jednotlivé znaménkové vektory na základě výsledků testů vytvořit mapy řešitelnosti soustavy (4.2.18) (případně (4.2.21)) a pomocí těchto map lokalizovat oblasti vymežitelných vůlí. Podle preferencí na umístění a velikost oblastí vymežitelných vůlí vybrat nejvhodnější příslušné znaménkové vektory \mathbf{s} .

Ad 2.

Soustavu (4.2.18) je pro testování možné modifikovat zobecněním její poslední podmínky do tvaru

$$\mathbf{T}_{as} > \mathbf{T}_{amin}, \quad (4.2.19)$$

kde $\mathbf{T}_{a \min}$ je vektor minimálních hodnot, pod které nemají poklesnout absolutní hodnoty hnacích sil či momentů. Tento zápis zaručí jistou rezervu pro splnění podmínky vymezení vůlí, vhodnou pro reálné řízení se zpětnovazební složkou, kdy je třeba vzít v úvahu nepřesnost modelu robotu i prostředí a další možné vnější vlivy.

Dále je vhodné soustavu doplnit ještě jednou podmínkou, omezující absolutní hodnoty hnacích momentů naopak shora, tj. s ohledem na maximální dosažitelné momenty $\mathbf{T}_{a \max}$:

$$\mathbf{T}_{as} \leq \mathbf{T}_{a \max} \quad (4.2.20)$$

Rozšířená testovací soustava má pak následnou podobu:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{T}_{as}} & \left(\mathbf{T}_{as}^T \mathbf{T}_{as} \right) \text{ pro} \\ & \mathbf{J}_s^{+T} \mathbf{T}_{as} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{T}_{as} > \mathbf{T}_{a \min} \\ & \mathbf{T}_{as} \leq \mathbf{T}_{a \max} \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Ad 3.

Jednotlivé oblasti vymežitelných vůlí lokalizujeme jako spojitě množiny bodů, v nichž je soustava (4.2.18) resp. (4.2.21) řešitelná pro určitý znaménkový vektor \mathbf{s} . Potenciální rozhraní mezi těmito množinami a množinami, kde naopak daná soustava pro daný vektor \mathbf{s} řešení nemá, pak představují hranice oblastí vymežitelných vůlí. Oblasti vymežitelných vůlí příslušející jednotlivým znaménkovým vektorům se obecně liší velikostí, tvarem a umístěním v rámci pracovního prostoru. Je proto vhodné vybrat ty oblasti, které pokrývají největší části pracovního prostoru, v nichž bude robot podle předpokladů pracovat.

Jak bylo prokázáno v kapitole 4.2.3.1, znaménkové vektory nalezené pomocí popsaného algoritmu nám v příslušných oblastech vymežitelných vůlí garantují možnost nastavení libovolného vektoru výsledného redukováného zatížení v prostoru pracovních souřadnic při dodržení podmínky vymezení vůlí.

4.2.4 Postup nalezení bezvůlového ovládání robotu

V rámci bezvůlového ovládání robotu je třeba pro uvažovaný pracovní cyklus, tj. na základě předepsané trajektorie, dynamiky robotu a průběhu vnějšího efektivního zatížení \mathbf{F}_e , napočítat vektory \mathbf{F}_X výsledného redukovaného zatížení v prostoru pracovních souřadnic pro jednotlivé body diskretizované trajektorie, viz Dodatek A.

Dále je třeba užitím jedné z metod uvedených v kapitolách 4.2.2 a 4.2.3 získat znaménkový vektor \mathbf{s} , který zaručí splnění podmínky vymezení vůlí buď pro konkrétní pracovní cyklus, nebo pro vybranou oblast vymežitelných vůlí.

Základem výpočtu hnacích sil potřebných k dosažení požadovaného chování robotu v daném bodě předepsané trajektorie pracovního prostoru pak bude modifikace soustavy (4.2.16), opět doplněné (pro nalezení jednoznačného řešení) o vhodnou optimalizační podmínku, případně ještě o omezení maximálních absolutních hodnot složek vektoru hnacích sil (4.2.20). Použijeme např. formu podobnou zobecněné testovací soustavě (4.2.21), která povede k minimalizaci velikosti vektoru \mathbf{T}_{as} při současném zamezení poklesu jeho složek pod limitní hodnoty dané $\mathbf{T}_{a \min}$:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{T}_{as}} (\mathbf{T}_{as}^T \mathbf{T}_{as}) \text{ pro} \\ \mathbf{J}_s^{+T} \mathbf{T}_{as} = \mathbf{F}_X, \\ \mathbf{T}_{as} > \mathbf{T}_{a \min} \\ \mathbf{T}_{as} \leq \mathbf{T}_{a \max} \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Řešením této soustavy je tedy vektor \mathbf{T}_{as} splňující všechny obsažené podmínky. Ten následně přepočítáme na vlastní vektor \mathbf{T}_a hnacích sil pomocí snadno odvoditelné modifikace vztahu (4.2.15):

$$\mathbf{T}_a = \mathbf{D}(\mathbf{s}) \mathbf{T}_{as}, \quad (4.2.23)$$

kde \mathbf{s} je nalezený znaménkový vektor zaručující splnění podmínky vymezení vůlí.

Ovládání robotu pak bude probíhat na základě takto určených hodnot v každém bodě diskretizace dané trajektorie. Při řízení je z hlediska potlačení vůlí třeba dbát na to, aby se robot v rámci vykonávání pracovního cyklu nedostal mimo uvažovanou oblast vymežitelných vůlí.

V VÝSLEDKY

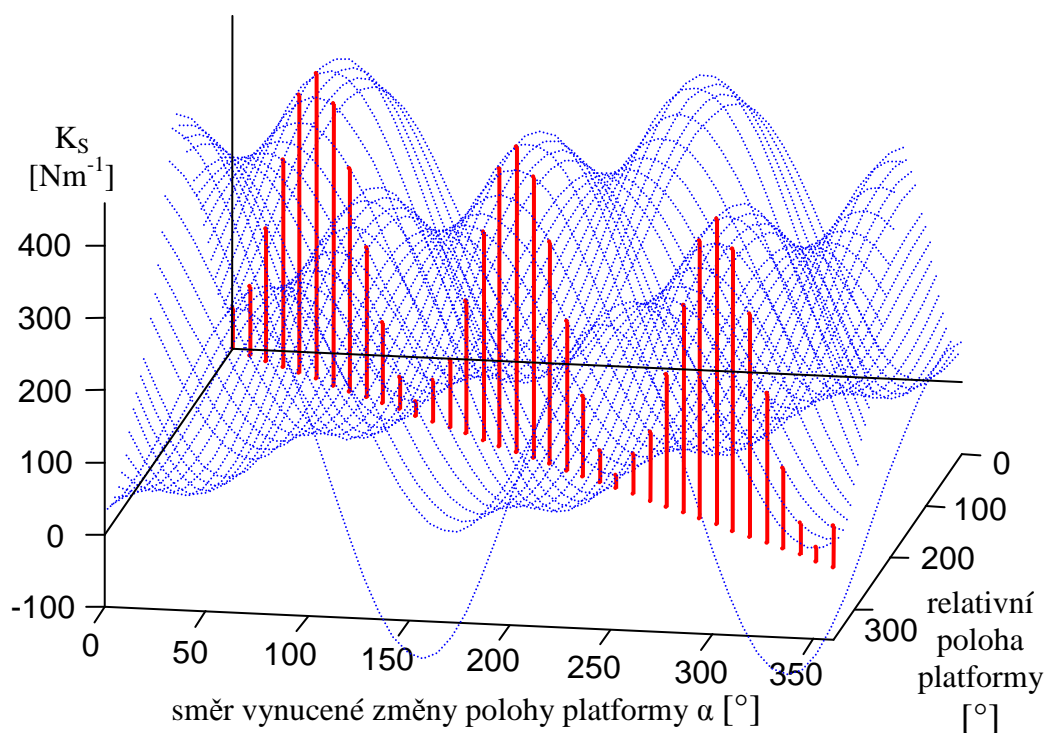
5.1 Ovládání aktivní tuhosti robotu

5.1.1 Počítačová simulace úlohy maximalizace směrové tuhosti

Pro simulaci problému maximalizace směrové tuhosti (viz sekce 4.1.2.4) byl sestaven program ve výpočetním prostředí Matlab. Tento program najde při zadané trajektorii robotu hnací momenty vedoucí k dosažení předepsaného průběhu interakčních sil podél zadané trajektorie, a to při současné maximalizaci směrové tuhosti v různých směrech. Program nakonec vykreslí trojrozměrný graf směrové tuhosti v závislosti na poloze platformy v rámci zadané trajektorie a na směru, ve kterém má být tuhost maximalizována, a to v nějakém definovaném rozsahu. K nalezení řešení klíčové úlohy lineárního programování (4.1.36) byla použita standardní procedura, kterou Matlab pro řešení úloh tohoto typu disponuje.

Na Obr. 5.1 je ukázka grafického výstupu vytvořeného programu [Valášek, Florián, and Šika, 1999]. Jde o jeho aplikaci na rovinný redundantní paralelní robot se dvěma stupni volnosti a třemi pohony, viz Obr 2.3. Při zvolených rozměrech robotu (vzájemná vzdálenost pohonů 0,866 m, délka všech ramen 0,5 m) a maximálních hodnotách hnacích momentů (50 Nm) byla zadána následující úloha: Platforma má na dané trajektorii působit na okolí silou definované konstantní velikosti (50 N), jejíž směr má být stále kolmý na uvažovanou trajektorii, a to s maximální možnou směrovou tuhostí opět ve směru normály k trajektorii. Zvolenou trajektorií je malá kružnice (poloměru 0,1 m) uvnitř pracovního prostoru robotu. Byla uvažována nulová tuhost pohonů, tj. veškerá přítomná pracovní tuhost je aktivní, viz vztahy (4.1.6) až (4.1.8).

Na svislé ose grafu je vynesena směrová tuhost, a to v závislosti na poloze platformy, popsané úhlem jejího průvodiče na dané kruhové trajektorii v rozsahu 0° až 360° , a na směru maximalizace směrové tuhosti, opět v rozsahu celé otáčky. V grafu jsou tlustými svislými čarami zvýrazněny maximalizované tuhosti v daných směrech.



Obr. 5.1: Závislost směrové tuhosti na poloze platformy a směru vynucené změny polohy platformy

Za povšimnutí stojí skutečnost, že ač je směrová tuhost maximalizována v daném směru, není obecně nejvyšší v porovnání s tuhostmi v jiných směrech, což je z grafu zřejmé. Dalším význačným faktem je, že tato maximalizovaná tuhost značně kolísá v závislosti na poloze platformy.

Je třeba podotknout, že splnění úloha maximalizace směrové tuhosti nezaručuje automaticky její kladnou hodnotu. Ta je kromě hnacích momentů značně závislá na poloze platformy, a to prostřednictvím koeficientů souvisejících s inverzní kinematikou robotu, viz např. vztah (4.1.7a). V některých nepříznivých případech je směrová tuhost záporná (pak je lépe obecně hovořit o mechanické impedanci), což vede k nestabilitě polohy platformy. Obecně lze na základě simulačních výsledků říci, že čím vyšší tuhost robotu v pracovním prostoru požadujeme, tím vyšší musí být (do jisté míry) poměr maximálních hnacích momentů ku předepsanému efektivnímu zatížení.

Je zajímavé si uvědomit, že při maximalizaci směrové tuhosti dochází k jakémusi „přetahování“ pohonů robotu: Protože se jedná o úlohu lineárního programování, řešení vždy leží na hranicích definičního oboru, které tvoří maximální dosažitelné hodnoty hnacích momentů. Můžeme zde spatřit analogii s antagonistickými svalovými skupinami pohybového ústrojí živočichů, které pravděpodobně plní podobnou úlohu [Hogan, 1984].

5.1.2 Experiment – prokázání existence aktivní tuhosti

Pro podporu odvozených teoretických poznatků o aktivní tuhosti a souvisejících výsledků simulace byl naplánován a následně realizován experiment na existujícím modelu rovinného paralelního robotu se třemi stupni volnosti a čtyřmi pohony, jehož kinematické schéma ukazuje Obr. 2.2 [Florián & Valášek, 2000]. Hlavním cílem experimentu bylo prokázat existenci aktivní složky kartézské tuhosti na základě experimentálního stanovení směrové tuhosti.

Základem experimentu bylo statické měření interakční síly mezi koncovým efektozem robotu a jeho okolím v definované poloze. Při návrhu experimentu bylo tedy nutné vyřešit dva praktické problémy: a) přesné nastavení polohy platformy robotu, b) přesné měření interakční síly. První problém byl vyřešen umístěním robotu na pohyblivé lože vertikální frézky, vybavené přesným polohovacím systémem, a vytvořením pevné vazby mezi platformou robotu a nehybným výstupním hřídelem frézky. Součástí této vazby byl speciální tenzometrický senzor ve tvaru tenkostěnné trubky (vyrobený na zakázku), jehož úkolem bylo právě měření interakční síly. Senzor byl schopen snímat síly ve dvou na sebe kolmých směrech v rovině pohybu platformy. Dále byl v rámci přípravy experimentu navržen systém zatěžování robotu na vstupních hřídelích, kdy bylo k vyvození předepsaných hnacích krouticích momentů místo aktuátorů použito soustavy kladek, vláken a závaží. Uspořádání experimentu je na Obr. 5.2, detail realizace pevné vazby mezi platformou robotu a hřídelem frézky se zakomponovaným tenzometrickým snímačem ukazuje Obr. 5.2.

Po instalaci celého zařízení byl realizován vlastní experiment: Ve dvou blízkých definovaných polohách středu platformy $[x_p, y_p]$ byly při daných konstantních hnacích momentech (nastavených pomocí zmíněného systému kladek

a závaží) opakovaně změřeny složky F_{ex} a F_{ey} vektoru efektivního zatížení (viz Obr. 2.2) a následně dopočítány jejich průměrné hodnoty a výběrové směrodatné odchylky. Zátěžný krouticí moment M_e snímán nebyl, otáčení platformy bylo v rámci vazby s hlavou frézky zamezeno. Dále se na základě změřených průměrných hodnot vypočítal odhad K_{Sm} směrové tuhosti ve směru daném dvěma polohami platformy, ve kterých bylo měření uskutečněno, a to s využitím odvozeného vztahu (4.1.32), zde v maticovém zápisu:

$$K_{Sm} = \frac{\Delta \mathbf{F}_e^T \Delta \mathbf{X}}{\Delta \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{X}} = \frac{\begin{bmatrix} \Delta F_{ex} & \Delta F_{ey} & \Delta M_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_p \\ \Delta y_p \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \Delta x_p & \Delta y_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_p \\ \Delta y_p \\ 0 \end{bmatrix}} = \frac{\Delta F_{ex} \Delta x_p + \Delta F_{ey} \Delta y_p}{\Delta x_p^2 + \Delta y_p^2} \quad (5.1.1)$$

kde $[\Delta x_p, \Delta y_p]$ je nastavená malá změna polohy platformy (otáčení znemožněno) a $[\Delta F_{ex}, \Delta F_{ey}]$ odpovídající vypočtené změny průměrných hodnot naměřených složek efektivního zatížení platformy. Rovněž byl vypočítán odhad chyby měření směrové tuhosti:

$$S_{Ks} = \left| \frac{\partial K_{Sm}}{\partial \Delta F_{ex}} \right| \cdot 2S_{F_{ex}} + \left| \frac{\partial K_{Sm}}{\partial \Delta F_{ey}} \right| \cdot 2S_{F_{ey}} = \frac{2}{\Delta x_p^2 + \Delta y_p^2} (|\Delta x_p| S_{F_{ex}} + |\Delta y_p| S_{F_{ey}}), \quad (5.1.2)$$

kde $S_{F_{ex}}$ a $S_{F_{ey}}$ jsou výběrové směrodatné odchylky naměřených složek efektivního zatížení (přičemž v uvedeném vztahu jsou uvažovány dvojnásobky jejich hodnot, vzhledem k tomu, že odchylky $\Delta F_{ex}, \Delta F_{ey}$ jsou určeny vždy z dvojic naměřených hodnot F_{ex} a F_{ey} pro dvě uvažované polohy robotu).

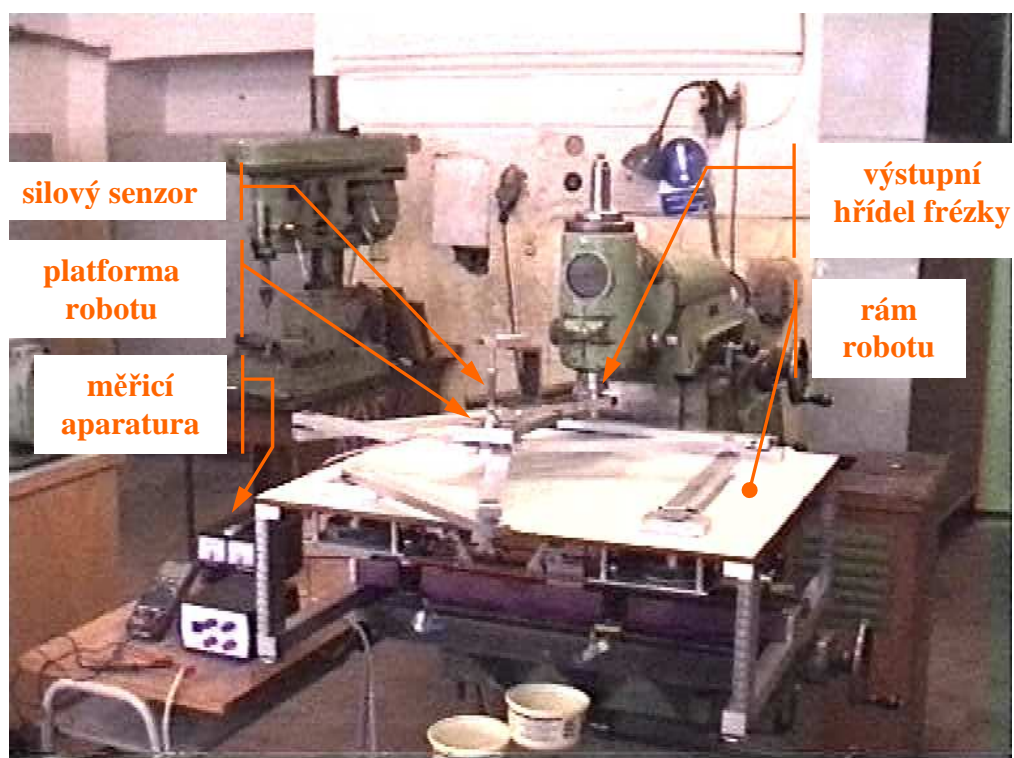
Měření bylo provedeno pro několik dvojic blízkých poloh platformy. Ukázka porovnání naměřených a vypočítaných hodnot pro jednu skupinu měření je obsahem následující tabulky:

hodnoty	F_{ex} [N]	$S_{F_{ex}}$ [N]	F_{ey} [N]	$S_{F_{ey}}$ [N]	ΔF_{ex} [N]	ΔF_{ey} [N]	K_s [Nm ⁻¹]	S_{K_s} [Nm ⁻¹]
vypočtené	8.00	-	0.00	-	-0.10	0.94	94.20	-
naměřené	7.47	0.11	-0.28	0.19	-0.45	0.85	85.32	3.86

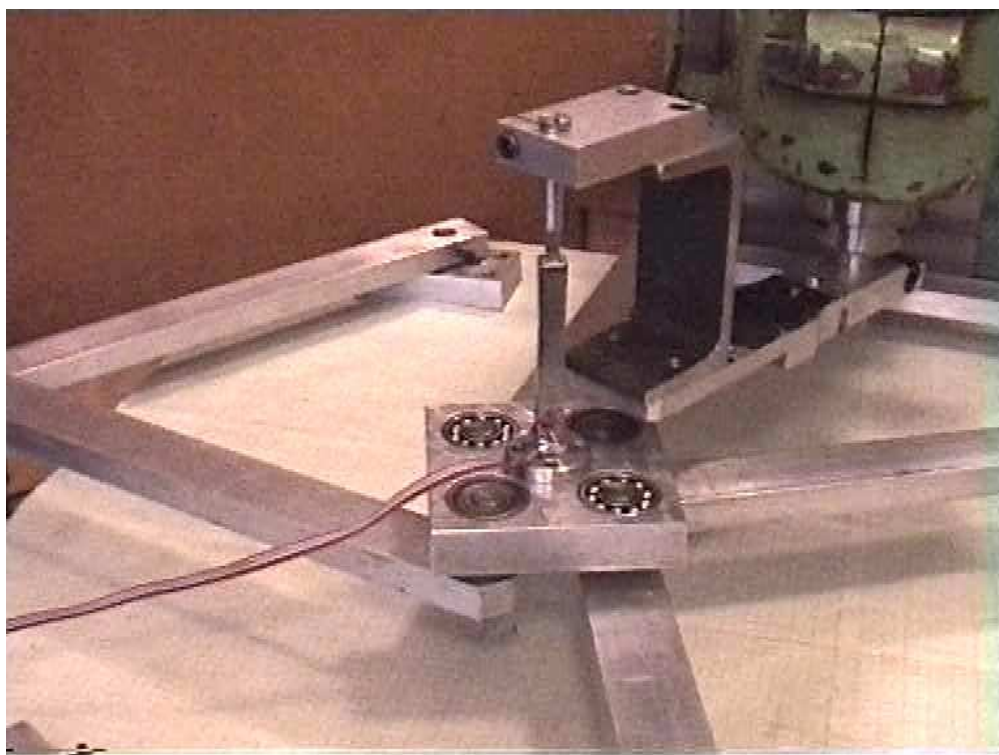
F_{ex} a F_{ey} jsou složky vektoru efektivního zatížení v dané poloze robotu $[x_P, y_P, 0]$. Jejich vypočtené hodnoty přitom vycházejí na základě dané polohy robotu a nastavených hnacích momentů ze vztahu (4.1.3). $S_{F_{ex}}$ a $S_{F_{ey}}$ jsou výběrové směrodatné odchylky jejich naměřených hodnot, spočítané na základě vztahu (5.1.2). ΔF_{ex} , ΔF_{ey} jsou složky změny interaktivní síly nastalé v důsledku předepsané malé změny polohy středu platformy $[\Delta x_P, \Delta y_P]$ (konkrétně $[0,01, 0]$ m): Jejich vypočtené hodnoty opět vycházejí z (4.1.3), naměřené jsou ve skutečnosti rozdílem naměřených hodnot interakčních sil v obou blízkých polohách robotu. Vypočtená hodnota směrové tuhosti vychází ze vztahu (4.1.34a), přičemž pro uvažovanou změnu polohy platformy je $\alpha=0^\circ$. Naměřená hodnota, přesněji řečeno odhad směrové tuhosti na základě naměřených výsledků, se spočítá z (5.1.1).

Výsledky měření byly většinou v relativně dobré shodě s vypočítanými hodnotami, relativní odchylka od vypočtené směrové tuhosti byla zpravidla do deseti procent. Můžeme tedy tvrdit, že existence aktivní tuhosti byla prokázána. Odchylky nad rámec uvažovaných chyb měření interakčních sil jsou přičítány jednak nepřesnosti nastavení konstantního natočení platformy, ale především přítomnosti pasivních odporů jak ve vazbách samotného robotu, tak v systému kladek a závaží generujícím hnací krouticí momenty. Lepší shody vypočtených a experimentálních výsledků by se proto pravděpodobně dosáhlo při vyšších hodnotách hnacích momentů. Ty byly však omezeny nosností vláken použitých k jejich generování.

Výsledky měření ukázaly, že vratná síla vznikající v důsledku přemístění platformy je i při maximalizované směrové tuhosti v daném směru relativně velmi malá, její hodnoty většinou dosahovaly maximálně desítek procent samotných zátěžných sil. Tato skutečnost svědčí o tom, že i když byla přítomnost aktivní složky tuhosti experimentálně potvrzena, její význam nelze přeceňovat. Tomuto tématu je věnována následující podkapitola.



Obr. 5.2: Uspořádání experimentu



Obr. 5.3: Detail platformy s připevněným tenzometrickým siloměrem

5.1.3 Analýza praktické využitelnosti aktivní tuhosti robotu

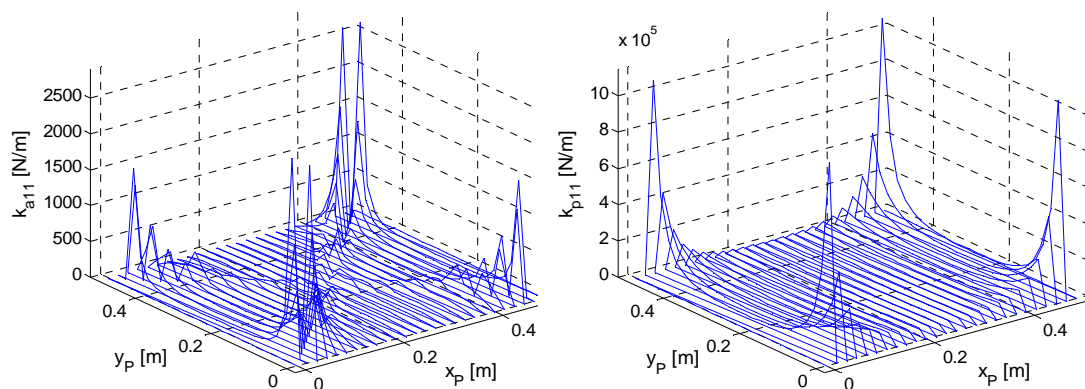
Při bližším zkoumání vztahu (4.1.7) pro výpočet aktivní složky \mathbf{K}_{xa} pracovní tuhosti paralelního robotu zjistíme, že nutnou podmínkou její nenulovosti je následující skutečnost: *Pseudo-inverzní jakobián robotu \mathbf{J}^+* (viz jeho definice (4.1.2)) *nesmí být konstantní maticí, jeho prvky musí záviset na poloze robotu*. Jinými slovy, podmínky pro vznik aktivní tuhosti jsou vytvořeny tehdy, pokud transformace mezi souřadnicemi v pracovním prostoru a v prostoru pohonů není lineární. Tato podmínka je určitě obecně splněna u naprosté většiny paralelních robotů, ale je důležité si uvědomit, že v pracovním prostoru každého robotu se téměř jistě najdou místa, kde aspoň některé členy pseudo-inverzního jakobiánu budou mít ke konstantnímu průběhu velmi blízko, což povede k nízkým hodnotám členů matice \mathbf{K}_{xa} . Pro dosažení co nejvyšší aktivní tuhosti by tedy bylo vhodné, kdyby byl nárůst členů \mathbf{J}^+ při malém přemístění platformy robotu co nejprudší. To ale obecně můžeme těžko zaručit.

Pokusme se na konkrétním příkladě ukázat, jakých reálných hodnot může aktivní tuhost nabývat ve srovnání s tuhostí pasivní. Půjde o aplikaci úlohy 4.1.2.3 na rovinný robot s bodovou platformou a čtyřmi pohony z Obr. 4.1. Úkolem je tedy maximalizovat pracovní tuhost tohoto robotu, a to při dodržení předepsaného efektivního zatížení a také požadavku na impedanční chování robotu, aby vratná síla působila vždy proti směru vynuceného malého přemístění platformy, které tuto vratnou sílu vyvolalo.

Parametry úlohy byly zvoleny takto: strana základny robotu (vzdálenost pohonů:) 0,5 m; délka ramen robotu: 0,6 m; maximální krouticí moment pohonů: 10 Nm; tuhost pohonů: 10^3 Nmrad^{-1} ; efektivní zatížení platformy: konstantní síla o složkách $[4, 4] \text{ N}$.

Pro nalezení řešení lineárně programovací úlohy (4.1.28) byla opět použita příslušná procedura výpočetního softwaru Matlab. Řešení bylo hledáno pro zvolenou síť bodů pokrývajících pracovní prostor robotu. V každém bodě byl s použitím vzorce (4.1.7) následně vyčíslen maximalizovaný prvek k_{a11} matice aktivní tuhosti a zároveň

pomocí (4.1.8) odpovídající prvek k_{p11} matice pasivní tuhosti. Srovnání průběhů těchto hodnot v závislosti na poloze platformy $[x_P, y_P]$ je na Obr. 5.4.



Obr. 5.4: Srovnání aktivní a pasivní tuhosti při úloze 4.1.2.3 (s maximalizací aktivní tuhosti) aplikované na robot z Obr. 4.1

Z obrázku je okamžitě zřejmé, že aktivní složka tuhosti je podstatně menší než pasivní. V našem případě průměrná hodnota (113 Nm^{-1}) všech napočítaných hodnot k_{a11} prvku matice aktivní tuhosti tvoří pouze *dvě promile* průměrné hodnoty ($5,48 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1}$) odpovídajícího prvku k_{p11} matice pasivní tuhosti.

Další nevýhodou aktivní složky tuhosti rovněž vyplývající z obrázku je, že její hodnoty velmi kolísají v závislosti na poloze platformy (více než hodnoty pasivní tuhosti), což souvisí s úvahou na začátku této kapitoly.

Jak si dále ukážeme, situace se ještě zhorší v neprospěch aktivní tuhosti, pokud budou pohony (před připojením ke vstupům robotu) zpřevodovány dopomala, což je poměrně obvyklá situace. Uvažujme například předřazení převodovek s převodovým poměrem 10:1. Jestliže nově označíme vlastní natočení pohonu θ a natočení výstupního hřídele převodovky ϕ (tedy vstupního hřídele robotu), pak bude platit $\theta = 10\phi$. Podobný vztah bude platit pro vektory Φ resp. Θ sestavené z natočení všech přítomných převodovek (na výstupu) resp. pohonů: $\Theta = 10 \Phi$. Jestliže je jakobián \mathbf{J}^+ transformace $\mathbf{X} \rightarrow \Phi$ definován vzorcem (4.1.2) (nyní již symbol Φ neoznačuje

natočení pohonů!), definujme podobným způsobem jakobián transformace $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{\Theta}$, který označíme symbolem \mathbf{J}_a^+ :

$$\mathbf{J}_a^+(\mathbf{X}) = \frac{d\mathbf{\Theta}}{d\mathbf{X}} \quad (5.1.3)$$

Pak bude platit

$$\mathbf{J}_a^+ = \frac{d(10\mathbf{\Phi})}{d\mathbf{X}} = 10 \frac{d\mathbf{\Phi}}{d\mathbf{X}} = 10 \mathbf{J}^+ \quad (5.1.4)$$

V analogii se vzorcem (4.1.6) pro výpočet celkové matice tuhosti můžeme pro naši novou situaci s převodovkami psát

$$\mathbf{K}_X = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\mathbf{J}_a^{+T} \cdot \mathbf{T}_a]_{\mathbf{T}_a = \text{konst}} + \mathbf{J}_a^{+T} \cdot \mathbf{K}_\Theta \cdot \mathbf{J}_a^+, \quad (5.1.5)$$

přičemž vektor \mathbf{T}_a krouticích momentů jednotlivých pohonů se v porovnání se stavem bez převodovek nezmění, zrovna tak se nemění matice tuhosti pohonů, pouze s tím, že ji nyní nově značíme \mathbf{K}_Θ . Dosadíme-li \mathbf{J}_a^+ ze vztahu (5.1.4) do (5.1.5), dostaneme

$$\mathbf{K}_X = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [10\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a]_{\mathbf{T}_a = \text{konst}} + 10\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{K}_\Theta \cdot 10\mathbf{J}^+, \text{ tj.}$$

$$\mathbf{K}_X = 10 \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} [\mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{T}_a]_{\mathbf{T}_a = \text{konst}} + 100 \mathbf{J}^{+T} \cdot \mathbf{K}_\Theta \cdot \mathbf{J}^+ \quad (5.1.6)$$

Poslední vztah nám říká toto: Zatímco aktivní složka tuhosti (první člen vztahu) se oproti situaci bez převodovek zvýší desetkrát, pasivní složka (druhý člen) nám vzroste s druhou mocninou převodu, tedy stokrát. Pokud bychom tyto převodovky použili ve výše uvedeném příkladě, dostali bychom průměrnou hodnotu prvku k_{a11} aktivní tuhosti $1,13 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-1}$, zatímco v případě pasivní tuhosti k_{p11} bychom obdrželi prům. hodnotu $5,48 \cdot 10^6 \text{ Nm}^{-1}$, tedy číslo o tři až čtyři řády (!) vyšší.

Z provedené rozvahy jasně vyplývá, že aktivní složka tuhosti není (v současnosti) použitelná v aplikacích, kde jsou požadovány vysoké hodnoty pracovní tuhosti. Jediným řešením by bylo, pokud by byly k dispozici pohony

s podstatně většími krouticími momenty (alespoň v režimu přetížení), řádově 10^4 Nm či více, případně ještě v kombinaci s převodovkami s extrémně vysokými převodovými poměry (řádově např. $10^3:1$).

5.2 Bezvúlové ovládání robotu

5.2.1 Počítačová simulace bezvúlového ovládání

Na základě algoritmu nalezení bezvúlového ovládání, popsaného v kapitole 4.2.2.2 byly s využitím obou alternativních metod sestavení „startovací“ množiny znaménkových vektorů vytvořeny dva programy ve výpočetním prostředí Matlab. Programy fungují pro libovolný redundantní paralelní robot s m stupni volnosti a n pohony.

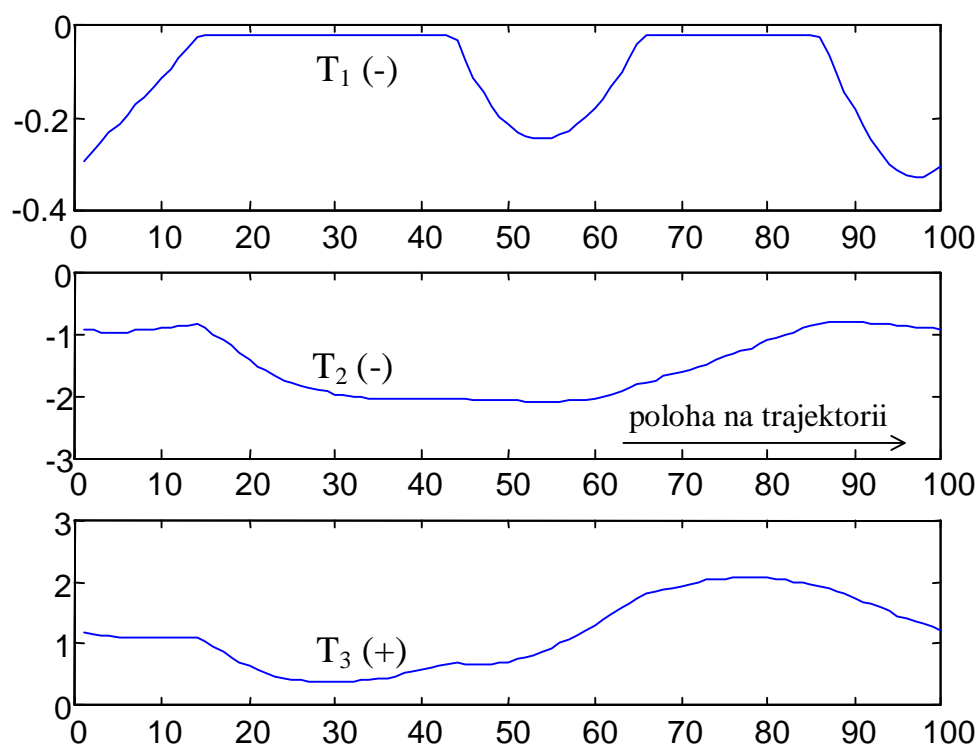
Vstupem obou programů je pseudo-inverzní jakobián \mathbf{J}^+ robotu a průběh redukované dynamické síly podél diskretizované trajektorie, která musí být rovněž předem definována.

Oba programy se liší v první fázi, kdy každý na základě jedné ze dvou navržených alternativních metod generuje množinu $\{\mathbf{s}\}$ potenciálně vyhovujících znaménkových vektorů. Další postup je u obou programů shodný: jednotlivé vektory \mathbf{s} z nalezené množiny $\{\mathbf{s}\}$ jsou postupně testovány z hlediska řešitelnosti soustavy podmínek (4.2.7), přičemž z nalezených řešení \mathbf{T}_a v jednotlivých bodech trajektorie se průběžně sestavuje matice řešení $\{\mathbf{T}\}$. Pokud je soustava (4.2.7) splněna ve všech bodech, algoritmus se uzavírá (další vyhovující vektory \mathbf{s} se už nehledají). Výstupem je nalezený znaménkový vektor \mathbf{s} a jemu odpovídající sada řešení $\{\mathbf{T}\}$ soustavy (4.2.7) v jednotlivých bodech diskretizované trajektorie.

Programy byly testovány na modelech dvou robotů. V *prvním případě* bylo cílem otestovat funkčnost navržených algoritmů na co možná nejjednodušším modelu. K tomuto účelu byl zvolen čistě kinematický model rovinného redundantního paralelního robotu se třemi pohony a bodovou platformou (tedy o dvou stupních

volnosti, viz Obr. 2.3) [Valášek & Florián, 2000]. V pracovním prostoru robotu byla zvolena kruhová trajektorie, diskretizovaná do sta bodů, ve kterých byla řešena úloha (4.2.7) pro definovanou výslednou sílu \mathbf{F}_X redukovanou na kartézské souřadnice platformy. Pro zjednodušení byl průběh této síly podél trajektorie zvolen.

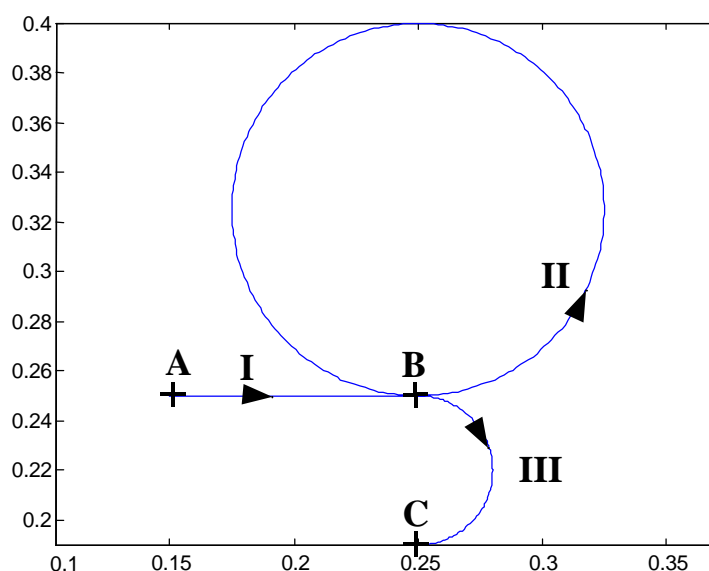
Na Obr. 5.5 je ukázka grafického výstupu programů založených na popsáných algoritmech (jejichž výsledek byl v tomto případě shodný). Jedná se o závislost všech tří pohonných krouticích momentů na poloze, symbolicky vyjádřené indexy bodů na zvolené kruhové trajektorii. Redukovaná síla \mathbf{F}_X byla zvolena jako konstantní vektor: $\mathbf{F}_X = [5 \ 0]^T$ N. Podmínka vymezení vůlí je podél celé trajektorie evidentně splněna, jak ukazují zobrazené závislosti. Na horním grafu (T_1) je jasně vidět vliv omezující podmínky (4.2.5) se zvolenou hraniční hodnotou $T_{a \min} = 0.02$ N na řešení soustavy (4.2.7).



Obr. 5.5: Průběh hnacích momentů při bezvůlovém ovládání

Druhý testovací model byl komplexnější – zahrnoval dynamiku robotu. Jednalo se o model skutečného rovinného redundantního paralelního robotu se třemi stupni volnosti a čtyřmi pohony, viz Obr. 2.2 [Valasek, Belda and Florian, 2002].

Uvnitř pracovního prostoru robotu byla naplánována trajektorie, po níž by se platforma měla pohybovat působením pohonů ovládaných v otevřené smyčce (tj. bez zpětné vazby). V tomto případě nebyla uvažována interakce robotu s okolím, pouze jeho vlastní dynamika. Na Obr. 5.6 je znázorněn tvar zvolené trajektorie referenčního bodu platformy **P**. Úhel natočení platformy byl požadován konstantní: $\psi = 0$.

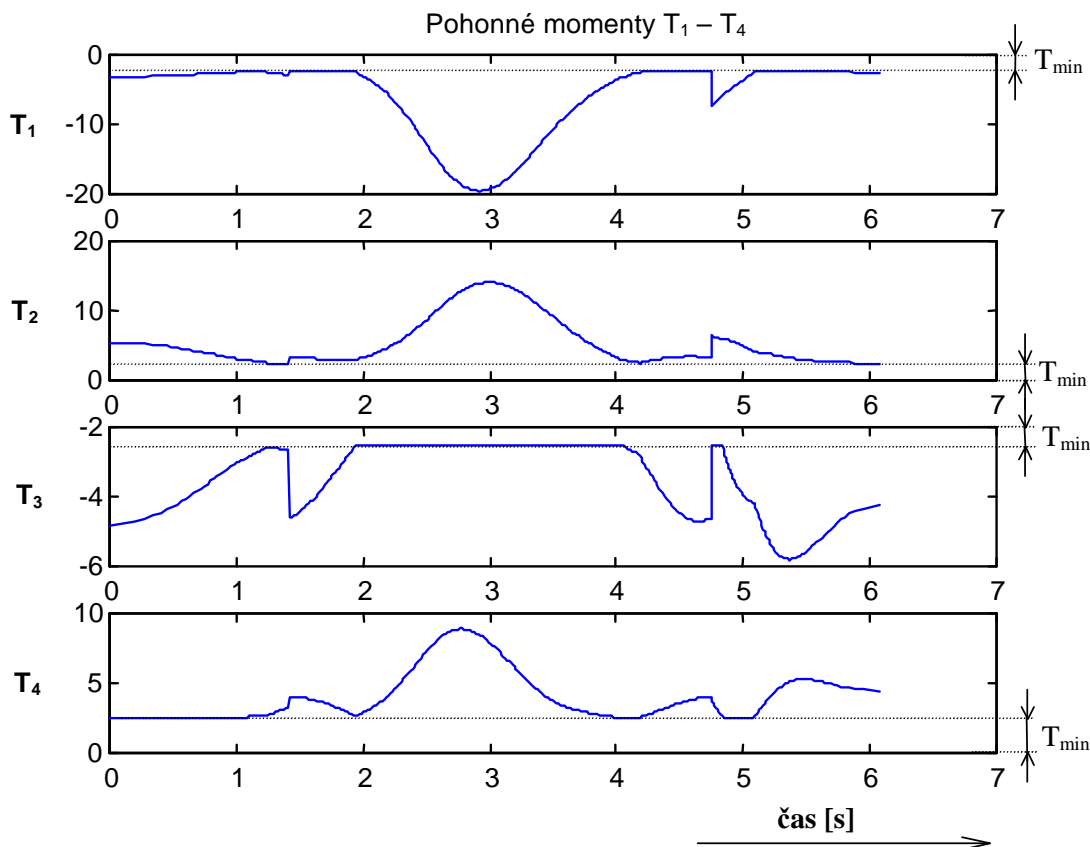


Obr. 5.6: Naplánovaná trajektorie referenčního bodu **P** platformy robotu

V části trajektorie označené **I** (úsečka **AB**) byl požadován rovnoměrně zrychlený pohyb platformy z klidu do definované konečné rychlosti. Poté se měl referenční bod platformy **P** pohybovat rovnoměrně po kružnici (viz část trajektorie **II**), a to rychlostí dosaženou v předchozí fázi. Po návratu do bodu **B** měla platforma při rovnoměrně zpomaleném pohybu opsat půlkružnici **III** a zastavit se v bodě **C**.

Popsaná trajektorie byla diskretizována a v jednotlivých bodech byly na základě naplánovaného pohybu vyjádřeny vektory pracovních souřadnic **X** a jejich prvních a druhých časových derivací. Pomocí těchto hodnot byl potom na základě vztahu (A.7) v každém bodě vyčíslen vektor **F_D** redukovaných dynamických sil.

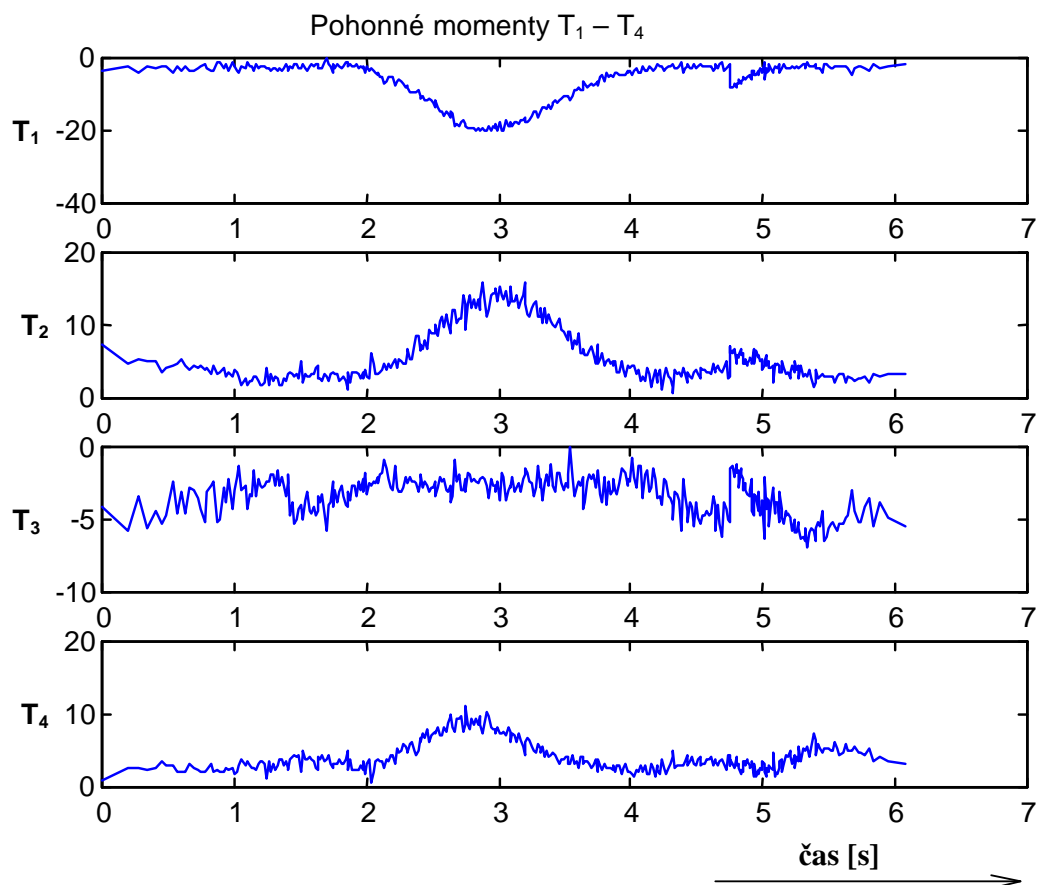
Další postup byl obdobný jako v minulém příkladě – tj. vytvoření „startovací“ množiny vektorů $\{\mathbf{s}\}$ a následné hledání vyhovujícího znaménkového vektoru. Výsledek je patrný z Obr. 5.7, kde jsou znázorněny získané časové závislosti všech čtyř pohonných krouticích momentů.



Obr. 5.7: Časová závislost hnacích krouticích momentů

Ze závislostí opět vyplývá, že podmínka vymezení vůlí je podél celé trajektorie splněna, a to s jistou rezervou T_{amin} (viz vztah (4.2.5)), jejíž význam vyplyne z následující simulace. Abychom ověřili použitelnost získaných výsledků pro reálné řízení robotu se zpětnovazební složkou, můžeme simulovat vliv nepřesností modelů robotu i okolí a náhodných vlivů například odchylkami vektorů redukovaných dynamických sil \mathbf{F}_X od hodnot předem spočítaných na základě naplánovaného pohybu: Z takto pozměněných hodnot v jednotlivých bodech trajektorie znovu spočítáme hledané vektory \mathbf{T}_a pohonných momentů při respektování podmínky vymezení vůlí, tj. s použitím stejného znaménkového vektoru \mathbf{s} nalezeného při hledání

bezvůlového ovládání. Popsaná simulace reálných podmínek byla aplikována na diskutovaný příklad, přičemž amplituda vektoru \mathbf{F}_X byla v jednotlivých bodech trajektorie náhodně pozměněna až o 50%. Jak se v důsledku toho změnily pohonné momenty \mathbf{T}_a , je vidět na následujícím obrázku:



Obr. 5.8: Časová závislost hnacích krouticích momentů při odchylkách redukované dynamické síly

Z obrázku je zřejmé, že i přes simulované poruchy zůstala podmínka vymezení vůlí splněna – hnací momenty nemění během pracovního cyklu znaménka, a to právě díky rezervě T_{amin} , uvažované při předchozí syntéze bezvůlového ovládání.

Některými aspekty praktické implementace podmínky vymezení vůlí při řízení robotu v reálném čase se zabýval K. Belda [Valasek, Belda and Florian, 2002], [Belda, 2002].

5.2.2 Počítačové mapování oblastí vymezených vůlí

Na základě algoritmu mapování pracovního prostoru redundantního paralelního robotu z hlediska existence oblastí vymezených vůlí, popsaného v kapitole 4.2.3.3, byl vytvořen univerzální program v Matlabu [Florián & Valášek, 2006], fungující pro libovolné hodnoty počtu pohonů n a stupňů volnosti m (přičemž musí být splněna podmínka redundance $n > m$).

Vstupem programu je inverzní kinematika uvažovaného robotu, rozsah mapovaného prostoru, vektor $\mathbf{T}_{a \max}$ maximálních dosažitelných hodnot hnacích sil či momentů a také vektor $\mathbf{T}_{a \min}$ jejich požadovaných minimálních hodnot, viz zobecněná soustava podmínek (4.2.21).

Program nejprve vygeneruje kompletní množinu znaménkových vektorů pohonů \mathbf{s} , tedy všech možných kombinací znamének orientace jednotlivých hnacích sil. Poté je diskretizován pracovní prostor robotu. Čím je diskretizace jemnější, tím jsou nalezené mapy podrobnější a spolehlivější, doba výpočtu ovšem rychle narůstá. Následně probíhá vlastní testování jednotlivých znaménkových vektorů z hlediska vymezenosti vůlí. Na základě tohoto testování jsou pro „úspěšné“ znaménkové kombinace postupně vytvářeny mapy oblastí vymezených vůlí, tedy spojitých oblastí pracovního prostoru, ve kterých je podmínka vymezení vůlí (4.2.2) splněna nezávisle na celkovém redukováném zatížení robotu v pracovním prostoru.

Program byl aplikován na několik robotů. Ukázky výstupů – nalezených map oblastí vymezených vůlí – ukazují obrázky Obr. 5.9 až 5.16. Hvězdičky představují jednotlivé body oblastí vymezených vůlí, kroužky ukazují polohu pohonů a tečky zastupují případné singulární či nedosažitelné polohy robotu. Nad každou mapou je uveden příslušný znaménkový vektor orientace hnacích sil. Ve všech případech byly dolní limity $\mathbf{T}_{a \min}$ všech hnacích sil položeny rovné malé konstantní hodnotě (10^{-6}), jejich omezení shora brána v úvahu nebyla.

Obr. 5.9 a Obr. 5.10a, b ukazují vliv stupně redundance na velikost a počet oblastí vymezených vůlí: Na Obr. 5.10a, b jsou zobrazeny všechny mapy pro rovinný robot s bodovou platformou a čtyřmi pohony z Obr. 4.1. Obr. 5.9 obsahuje

opět všechny výsledky pro robot, který vznikne odebráním 4. pohonu robotu z Obr. 4.1. Srovnáním obou skupin map docházíme k závěru, že vyšší stupeň redundance robotu vede nejen k vyššímu počtu oblastí vymezitelných vůlí, ale také zpravidla kladně ovlivní jejich velikost.

Obr. 5.11 až 5.16 ukazují mapy oblastí vymezitelných vůlí pro laboratorní modely redundantních paralelních robotů, postavené na strojní fakultě ČVUT v Praze pod vedením prof. M. Valáška [Valášek, Šika, Bauma, and Vampola, 2004].

Obr. 5.11 zobrazuje řezy oblastí vymezitelných vůlí robotu se čtyřmi pohony a třemi stupni volnosti (tzv. „crosshead“), jehož kinematické schéma je na Obr. 2.2 (viz též foto na Obr. 5.2), a to pro konstantní natočení čtvercové platformy $\psi=45^\circ$. Je zobrazeno šest ze sedmi nalezených oblastí vymezitelných vůlí. Obr. 5.12 ukazuje vliv natočení platformy téhož robotu na tvar a velikost nejperspektivnější oblasti vymezitelných vůlí, příslušející znaménkovému vektoru $[+1 -1 +1 -1]$. Přesněji řečeno, jedná se o šest řezů příslušné oblasti pro různá natočení platformy robotu v rozsahu celé otáčky (řez pro $\psi=180^\circ$ odpovídá řezu $\psi=-180^\circ$).

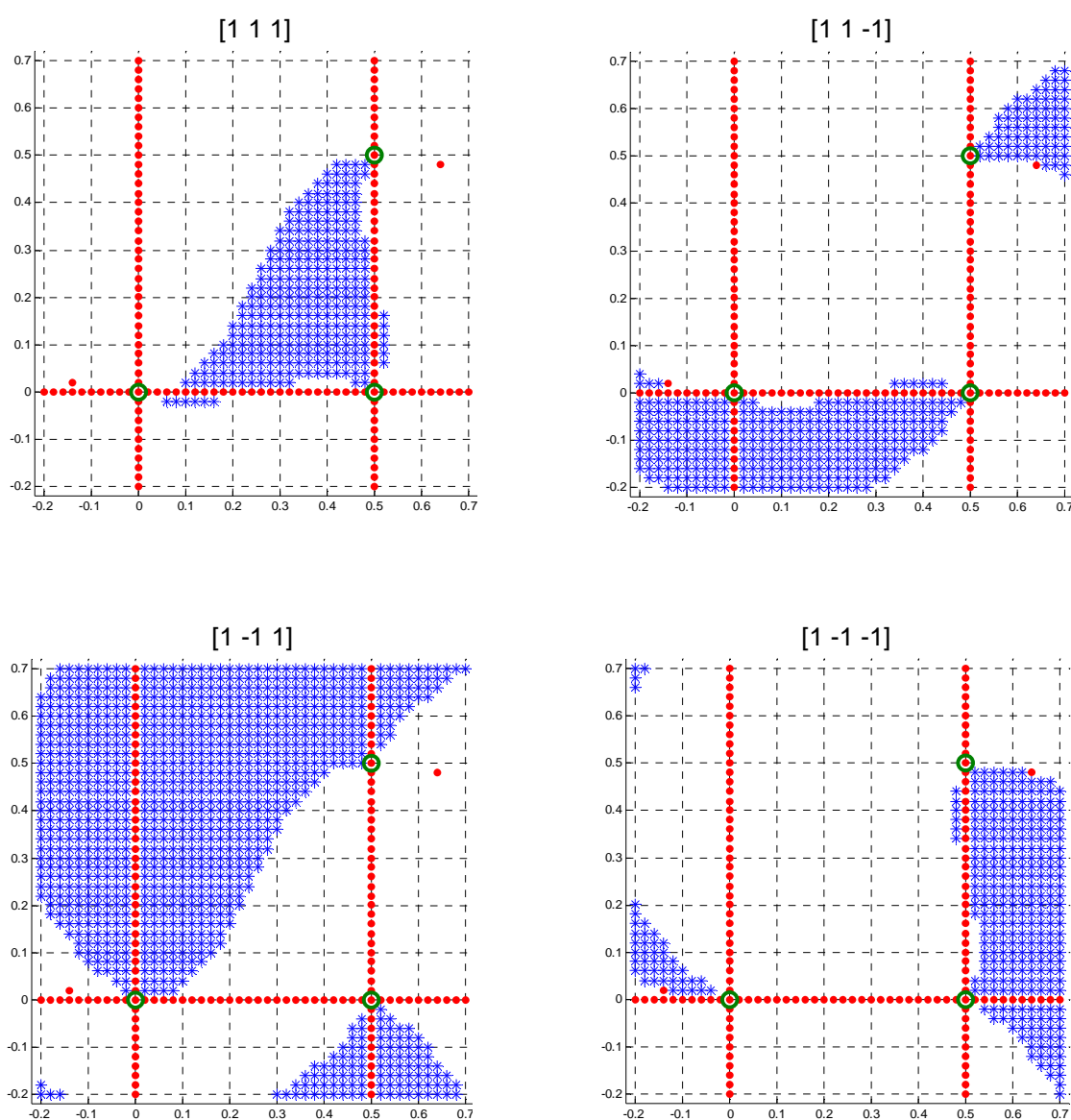
Obr. 5.13 představuje přechod k prostorovým robotům, zde výsledky pro tzv. „octapod“ – robot s osmi pohony na šest stupňů volnosti (viz schéma a foto na Obr. 5.19). Je zde šest ukázek nalezených oblastí z celkového počtu 128. Pozornost zasluhuje především oblast zastoupená znaménkovým vektorem $[+1 -1 +1 -1 +1 -1 +1 -1]$. Ta pokrývá prakticky celý pracovní prostor robotu.

Obr. 5.14 obsahuje všechny oblasti vymezitelných vůlí robotu s rovinným pracovním prostorem, čtyřmi lineárními pohony a čtvercovou platformou o třech stupních volnosti – tzv. „sliding star“, viz Obr. 5.18. Oblasti vymezitelných vůlí jsou opět zobrazeny formou prostorových map: obě horizontální osy zastupují souřadnice x a y referenčního bodu platformy, svislá osa pak reprezentuje natočení platformy. Na Obr. 15 jsou pak znázorněny řezy jednotlivých oblastí pro tři konstantní natočení platformy ψ (v pořadí 0° ; -30° ; $+30^\circ$). Čerchované čáry vyznačují osy vedení translačních pohonů.

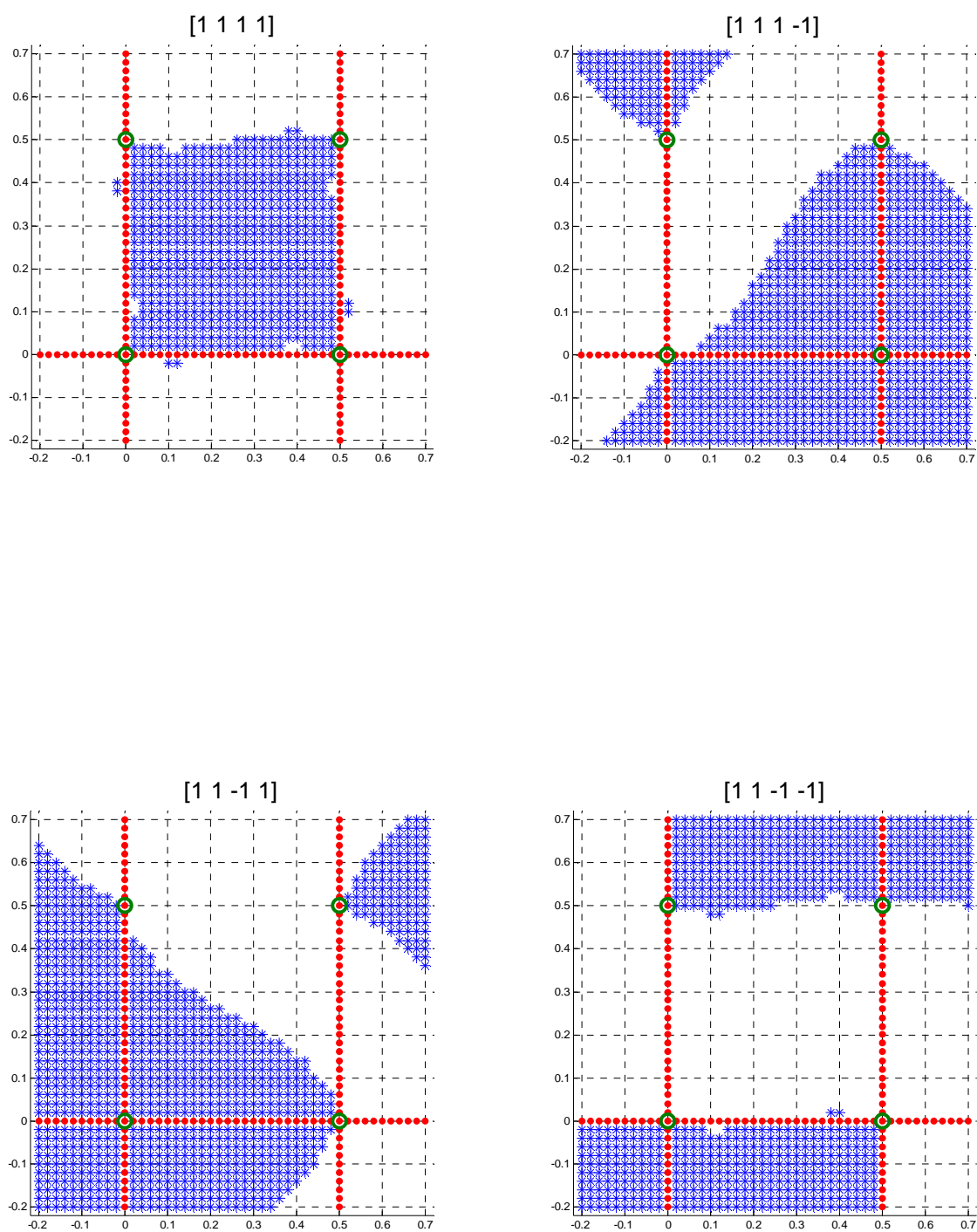
Výsledek z Obr. 5.16 je pozoruhodný tím, že představuje jedinou existující oblast vymezitelných vůlí, která ovšem opět pokrývá celý pracovní prostor robotu.

Jedná se o model „sliding delta“, jehož čtyři lineární pohony ovládají pohyb rovinné platformy o třech stupních volnosti, viz Obr. 5.17.

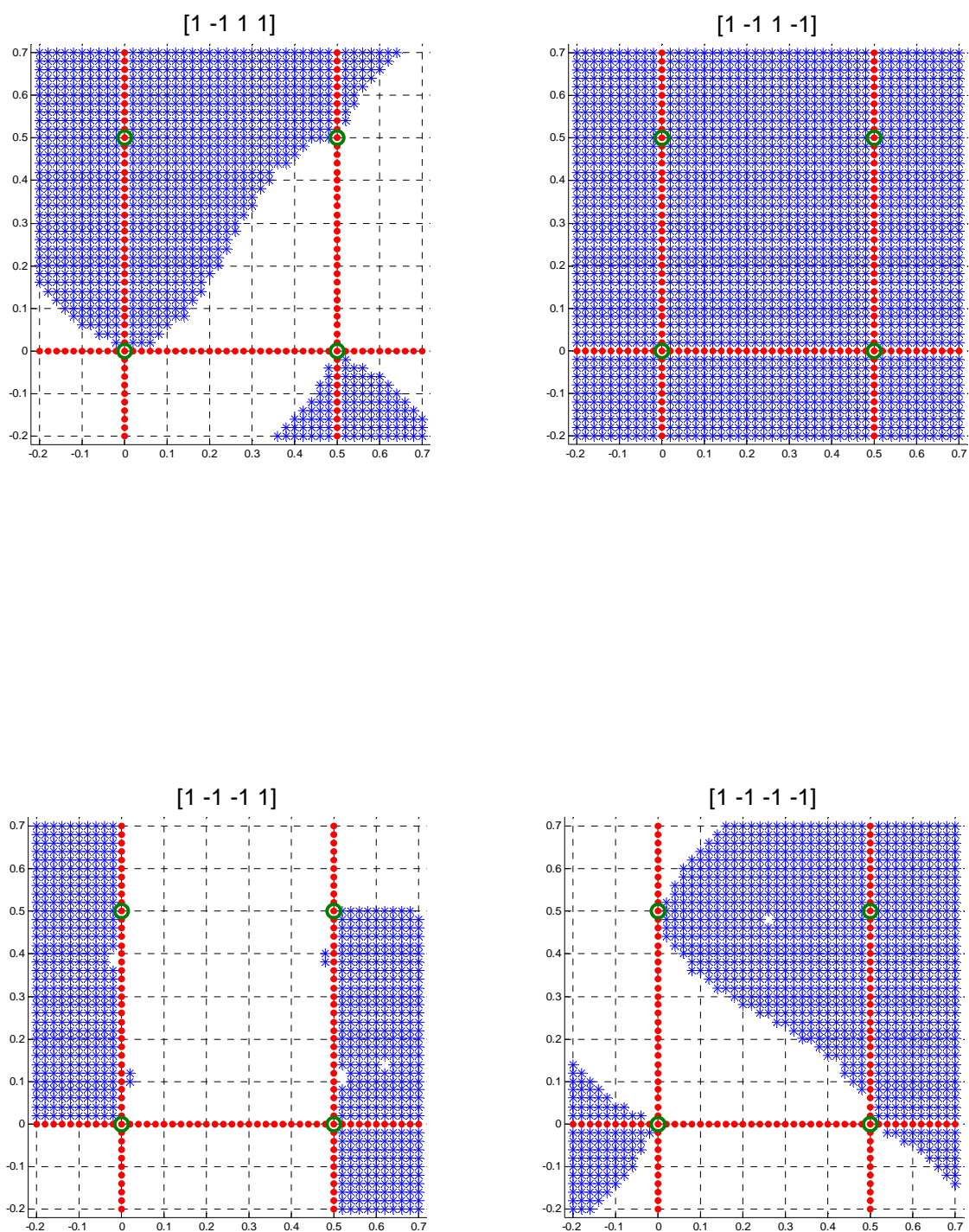
Závěrem můžeme konstatovat, že téměř u všech analyzovaných robotů najdeme oblasti využitelných vůlí, které pokrývají velkou část jejich pracovního prostoru, což je velmi pozitivní zjištění: Jak říká definice těchto oblastí, je v nich při řízení robotu možné vymezit vůle vždy, tj. nezávisle na trajektorii, dynamice i interakci.



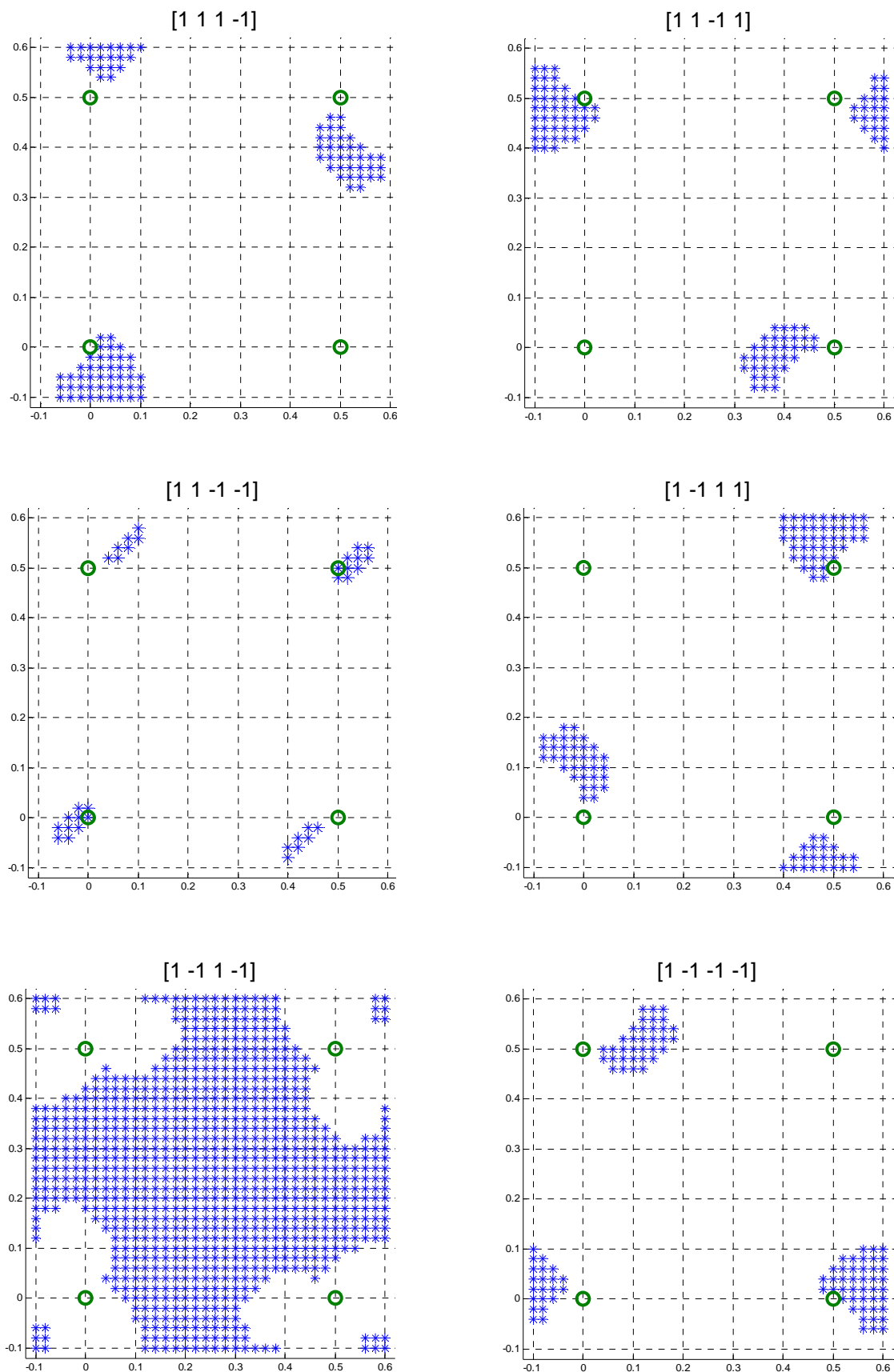
Obr. 5.9: Oblasti vymezitelných vůlí rovinného robotu se 3 rotačními pohony a 2 stupni volnosti



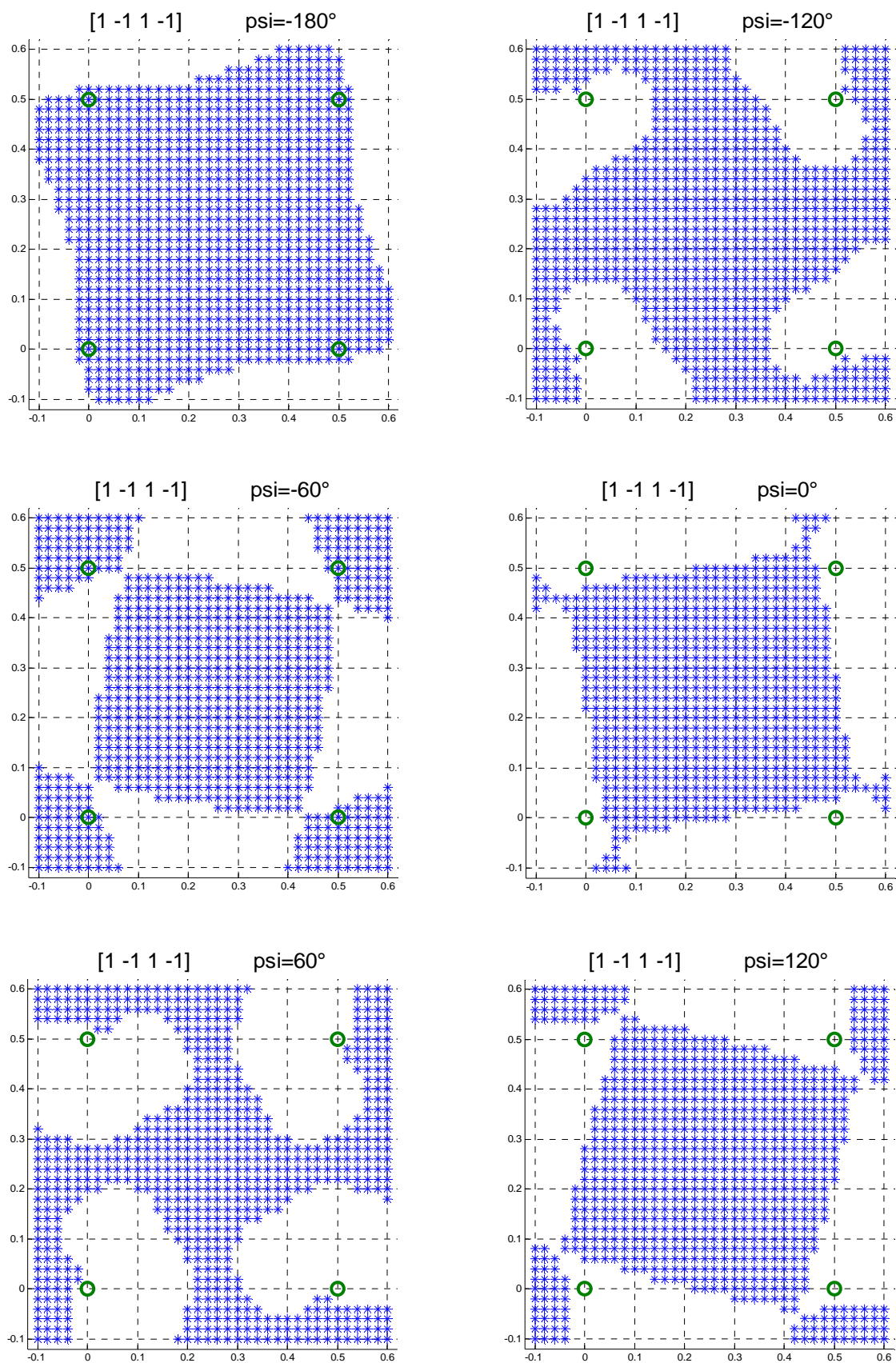
Obr. 5.10a: Oblasti vymezených vůlí rovinného robotu se 4 rotačními pohony a 2 stupni volnosti



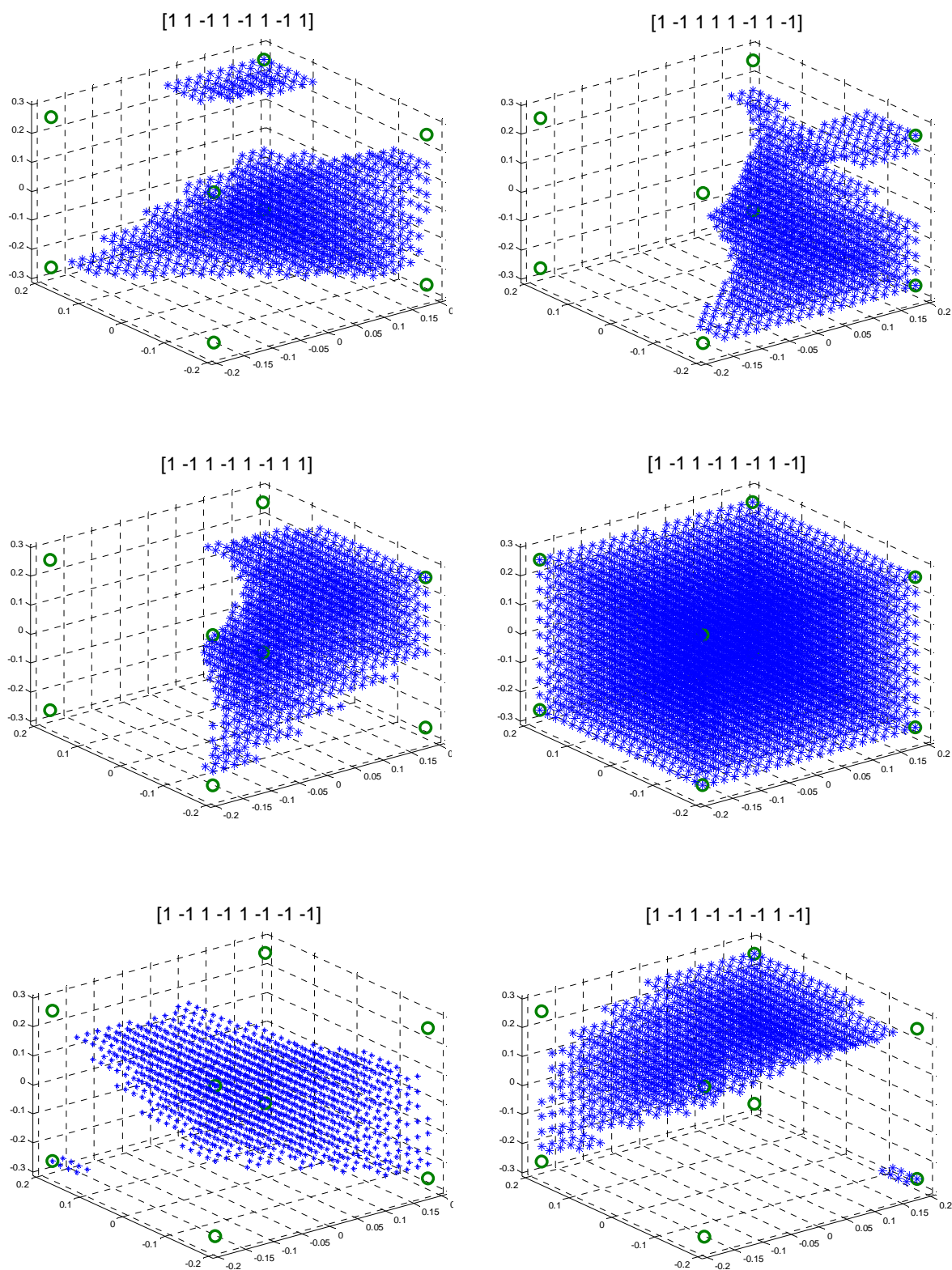
Obr. 5.10b: Oblasti vymezených vůlí rovinného robotu se 4 rotačními pohony a 2 stupni volnosti



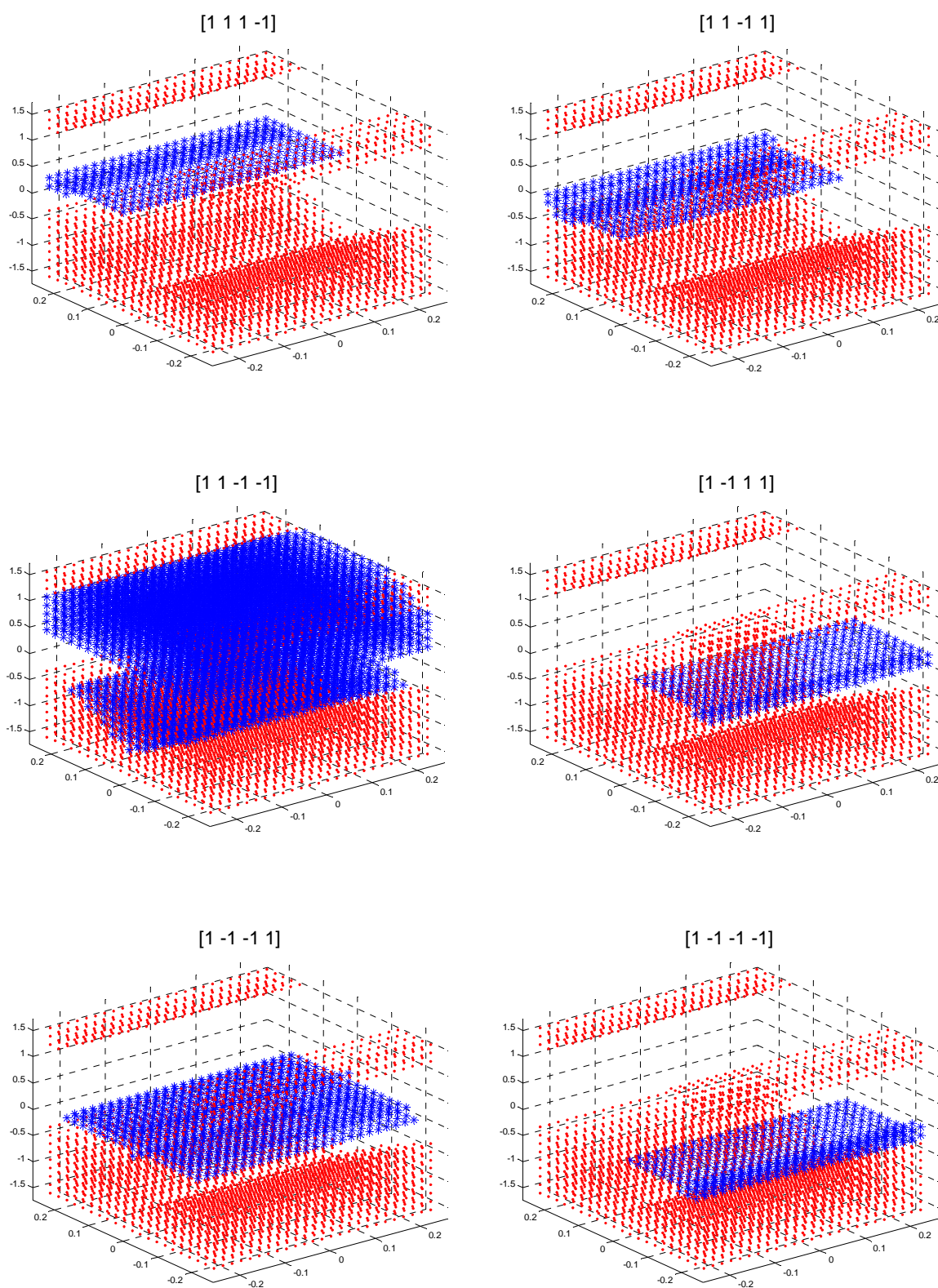
Obr. 5.11: Oblasti vymezených vůlí rovinného robotu se 4 rotačními pohony a 3 stupni volnosti – řez pro konstantní natočení platformy $\psi = 45^\circ$



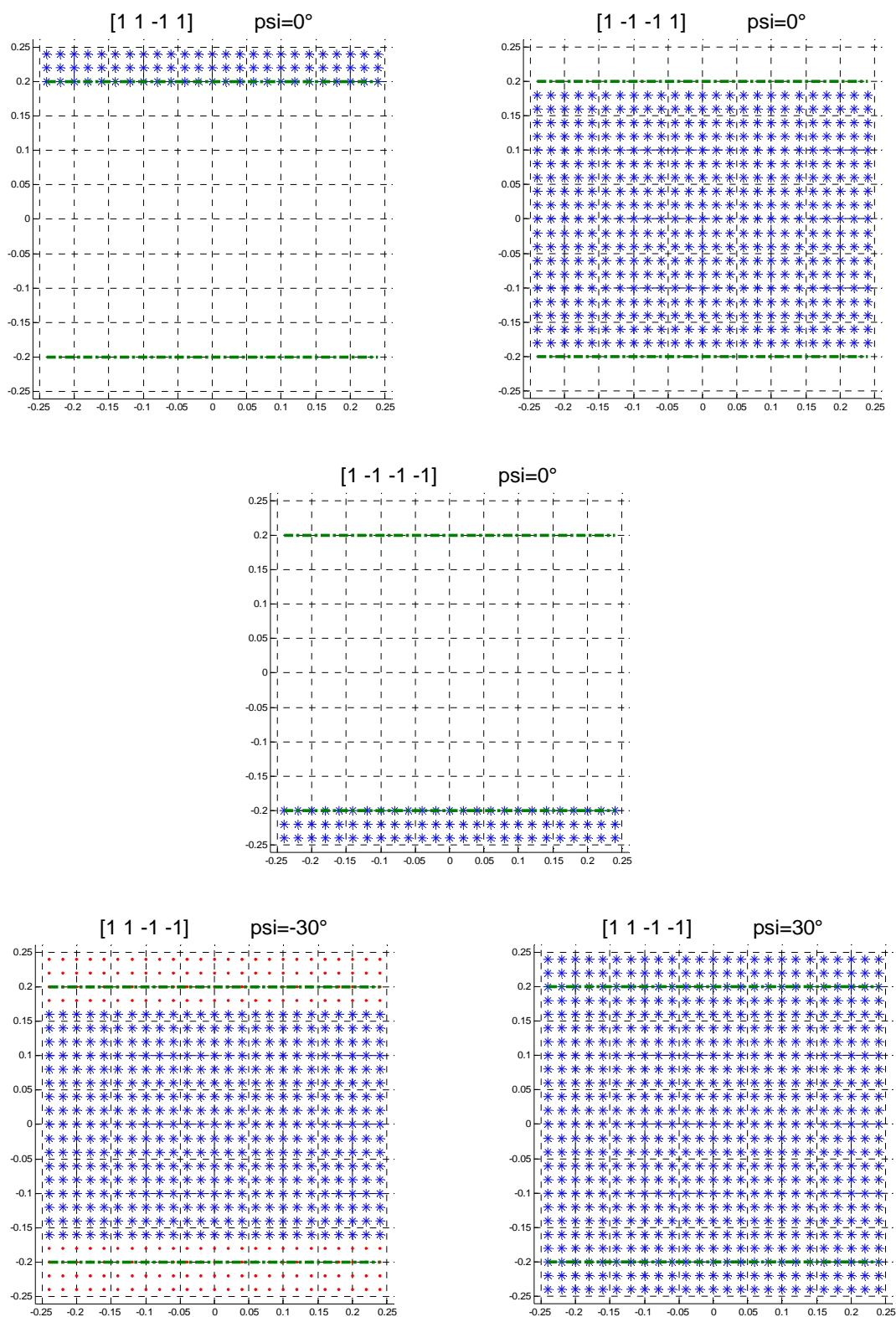
Obr. 5.12: Oblast vymezených vůlí rovinného robotu se 4 rotačními pohony a 3 stupni volnosti – řezy pro různá natočení platformy ψ



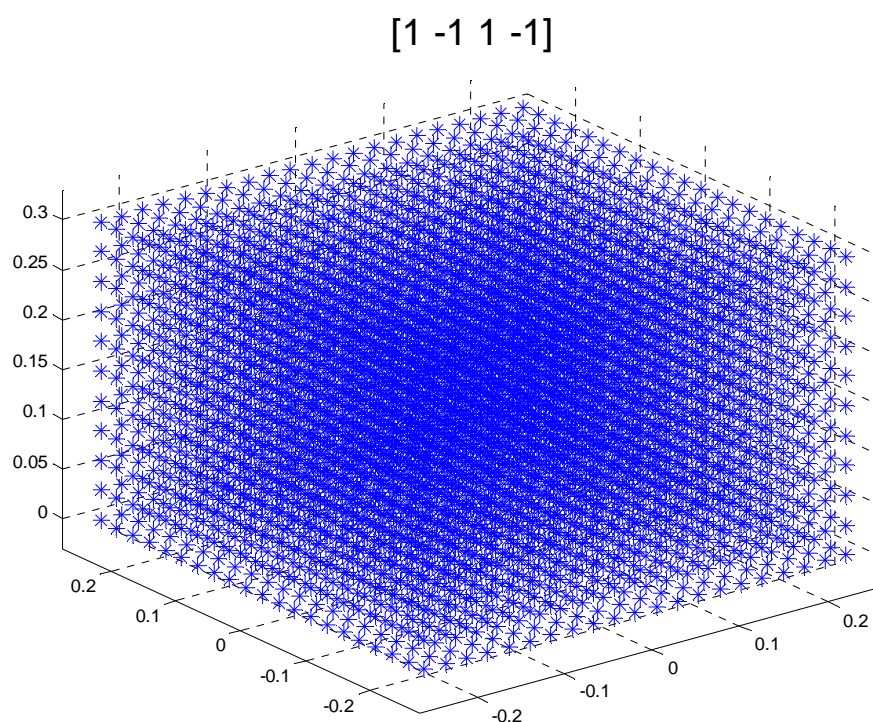
Obr. 5.13: Ukázky oblastí vymežitelných vůlí robotu s 8 translačními pohony a 6 stupni volnosti („octapod“)



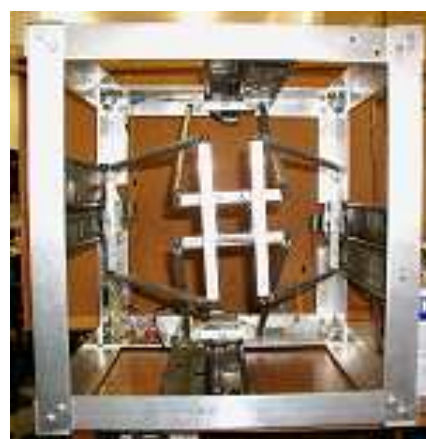
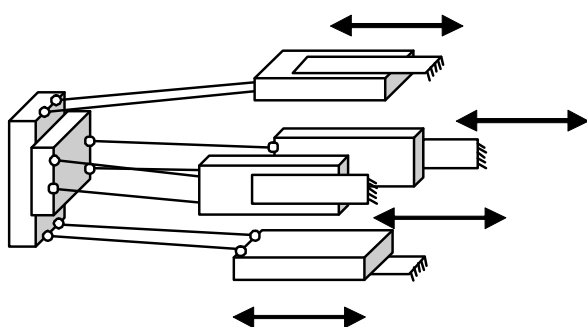
Obr. 5.14: Oblasti vymezených vůlí rovinného robotu se 4 translačními pohony a 3 stupni volnosti („sliding star“)



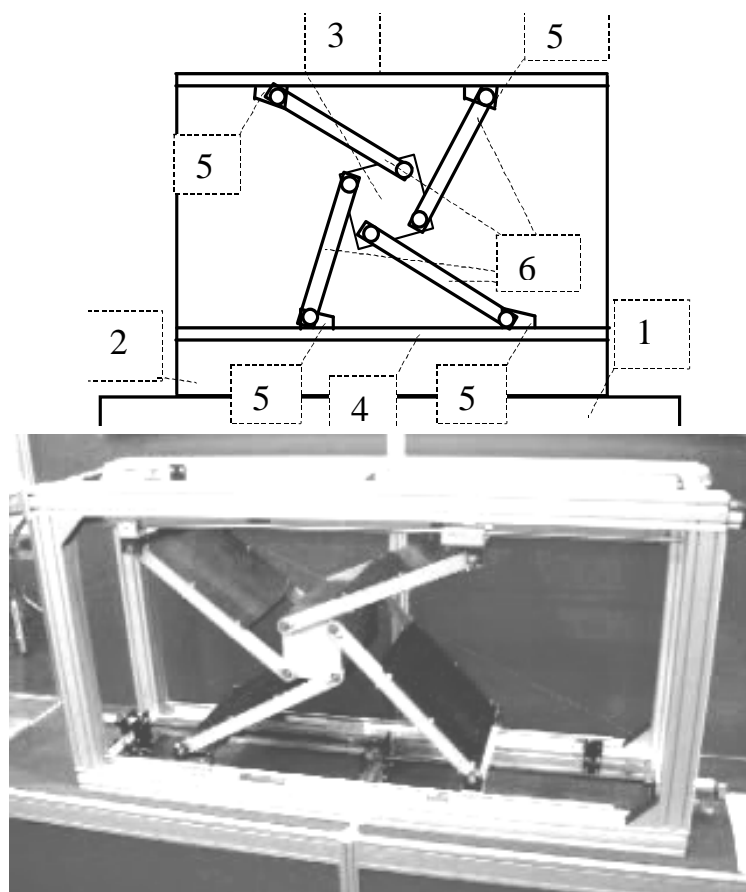
Obr. 5.15: Oblasti vymezených vůlí rovinného robotu se 4 translačními pohony a 3 stupni volnosti („sliding star“) - řezy pro různá natočení platformy ψ



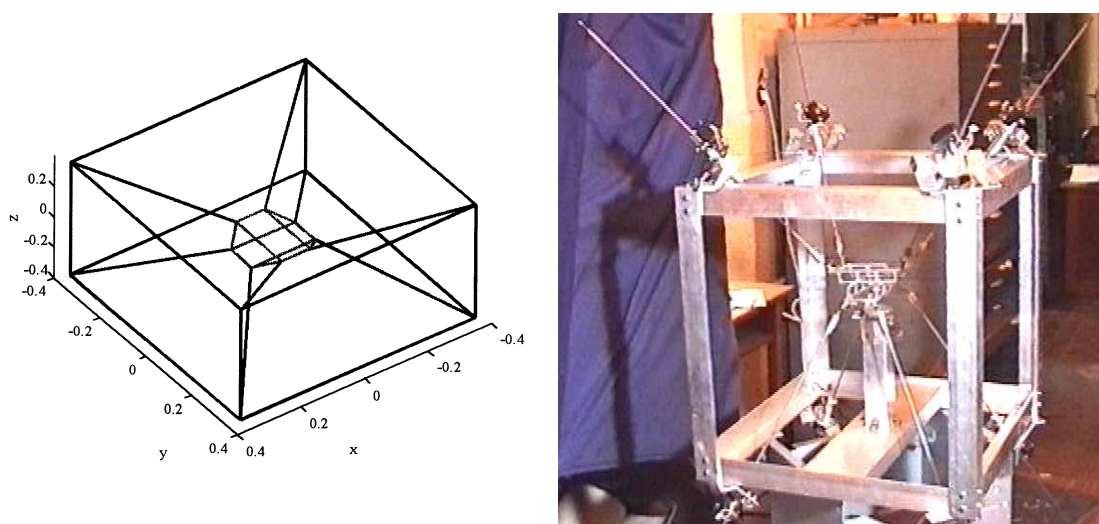
Obr. 5.16: Oblast vymezených vůlí robotu se 4 translačními pohony a 3 stupni volnosti („sliding delta“)



Obr. 5.17: Kinematické schéma a laboratorní model robotu „sliding delta“



Obr. 5.18: Kinematické schéma a laboratorní model robotu „sliding star“



Obr. 5.19: Kinematické schéma a laboratorní model robotu „octapod“

VI DŮSLEDKY PRO VĚDU A PRAXI

V této kapitole jsou shrnuty hlavní přínosy této práce, dále jsou konstatovány omezující podmínky využití navrhovaných metod a jsou navrženy směry, kterými by se měl ubírat další výzkum. Kapitola je ve shodně s ostatními rozdělena na část zabývající se ovládanou aktivní složkou pracovní tuhosti redundantních paralelních robotů a část shrnující význam výzkumu problematiky vyloučení vůlí při řízení redundantních paralelních robotů.

6.1 Řízená aktivní tuhost

Význam impedančního řízení nabyl s nástupem redundantních paralelních robotů nové dimenze. Narozdíl od sériových i paralelních manipulátorů bez redundance pohonů, kde je řízení mechanické impedance odkázáno výhradně na princip polohové zpětné vazby, umožňuje koncepce redundantních pohonů nejen využít, ale (do jisté míry) i ovládat tzv. aktivní složku tuhosti robotu v pracovním prostoru.

Tato složka celkové pracovní impedance nezávisí na tuhosti pohonů, její přítomnost se projeví pouhým zatížením mechanismu robotu hnacími silami od pohonů, a lze ji tedy ovládat v otevřené smyčce. Odtud plyne hlavní výhoda aktivní tuhosti: je k dispozici okamžitě, bez dopravních zpoždění (způsobených časovými konstantami použitých senzorů a aktuátorů, případně zpracováním signálu), které jsou negativním průvodním jevem každé zpětné vazby. Pokud by se podařilo realizovat ovládání robotu s dostatečnou kapacitou aktivní tuhosti, potřeba zpětnovazební složky by se omezila pouze na eliminaci náhodných poruch a nemodelovaných odchylek.

Existence aktivní složky pracovní tuhosti robotu je úzce spjata s kinematickým řešením mechanismu robotu. Rozhodně nelze tvrdit, že přítomnost redundantních pohonů automaticky zaručuje přítomnost aktivní tuhosti. Ta je ve skutečnosti dána něčím jiným, totiž nelineární transformací mezi souřadnicemi pohonů a pracovními

souřadnicemi robotu – teprve za této podmínky je výraz (4.1.7), definující aktivní složku tuhosti, nenulový. S tím také souvisí hlavní úskalí praktického využití popsaného fenoménu: Na velikost aktivní tuhosti robotu má zásadní vliv míra nelinearity i velikost „převodu“ mezi souřadnicemi v prostoru pohonů a v pracovním prostoru. Zde je třeba konstatovat, že tento důležitý závěr byl ve všech dostupných cizích publikacích zcela pominut. Jeho skutečný význam se projevil, když se při počítačových simulacích ukázalo, že u všech zkoumaných typů redundantních paralelních robotů byl podíl aktivní složky tuhosti velmi malý, navíc značně kolísal (i do záporných hodnot). Tak např. v případě rovinných robotů s rotačními pohony s maximálním krouticím momentem 10 Nm se zařazenými převodovkami 10:1 je možné dosáhnout aktivní tuhosti v řádech do 10^3 Nm^{-1} (ve špičce 10^4 Nm^{-1}), zatímco pasivní tuhost dosahuje (při nastavení tuhosti pohonů kolem 10^3 Nrad^{-1}) průměrných hodnot řádově 10^6 Nm^{-1} i více, tedy 1000 x až 10000 x vyšších (viz kapitola 5.1.3). Diskutovaný problém ostatně potvrdil i uskutečněný experiment.

Ze zmíněného závěru tedy plyne značné omezení praktického využití aktivní tuhosti. V současnosti připadají v úvahu zatím jen aplikace, kde je sice požadována řízená pracovní impedance, ale nejsou kladeny přílišné nároky na její velikost, tj. kde budeme hovořit spíše o řízené poddajnosti než tuhosti. V těchto případech by mohl být koncept aktivní tuhosti využit bez větších hardwarových opatření. To se může týkat např. různých manipulačních úloh, kdy je třeba „šetrné“ interakce s okolními objekty.

Pokud ovšem budeme požadovat vysoké hodnoty řízené aktivní tuhosti, musíme se věnovat dalšímu vývoji: Jedním z potenciálních způsobů, jak dosáhnout zvýšení aktivní tuhosti, je podřídit tomuto cíli už kinematickou syntézu robotu – měl by být navržen tak, aby transformace mezi souřadnicemi pohonů a pracovními souřadnicemi byla pokud možno obecně silně nelineární, a to s rychlým náběhem v závislosti na změně pracovní polohy (což mohou částečně řešit předřazené převodovky s vysokým převodovým stupněm). Tento způsob ovšem není obecně aplikovatelný, neboť kinematická struktura robotu je podřízena především požadavkům na jeho pohyb.

Další možností, jak zvýšit aktivní tuhost, je vývoj aktuátorů s vysokými hodnotami maximálních hnacích sil (krouticích momentů), značně převyšujícími potřeby z hlediska uvažovaných hodnot vnějšího efektivního zatížení robotu.

Vzhledem k tomu, že vysokou aktivní tuhost by v mnohých případech stačilo aplikovat jen ve vybraných fázích pracovního cyklu robotu, tak z hlediska požadavků na pohony by to znamenalo potřebu vysokých hnacích sil například jen ve špičkovém zatížení, tedy požadavek na maximální hnací síly by se omezil na vysokou přetížitelnost pohonů. Protože pracovní tuhost robot obecně stabilizuje, je zřejmé, že takovéto předimenzování pohonů by v kombinaci s řízenou aktivní tuhostí zvýšilo stabilitu redundantních paralelních robotů

6.2 Online vyloučení vůlí v pohonech

U mechanismů, kde je vyžadována vysoká přesnost, bylo vždy vyvíjeno značné úsilí ve snaze zbavit se přítomných vůlí. Důležitou skupinu v tomto ohledu tvoří vůle v pohonech či v převodech, které na pohony bezprostředně navazují.

Zatímco doposud byl boj s vůlemi sváděn na poli hardwaru, tj. prostřednictvím různých předepjatých vazeb apod., koncepce navržená v této práci převádí problém vůlí do softwarové oblasti, do problematiky řízení robotu. Už tato skutečnost je sama o sobě velkou výhodou – odpadá potřeba zmíněných konstrukčních řešení. S nimi je navíc často spojen další negativní jev – zvýšení pasivních odporů v mechanismu, vedoucí k odchylkám přenášených sil od nominálních hodnot. Ty pak mohou nežádoucím způsobem ovlivňovat jak dynamiku robotu, tak jeho silovou interakci s okolím. Využití navrženého konceptu bezvůlového řízení tedy může ve srovnání s klasickými metodami odstraňování vůlí vést také k přesnějším výsledkům.

Řízení robotu s vyloučením vůlí je založeno na dodržení základní podmínky – podmínky konstantní orientace pohonných sil. Tuto podmínku je při řízení pohybu či interakce s okolím obecně možné splnit jen tehdy, pokud jsou k dispozici redundantní pohony. Tato práce navrhuje původní metodiku, jak zmíněnou podmínku vymezení vůlí implementovat v rámci dopředného řízení redundantního paralelního robotu, což je její hlavní přínos.

Další vývoj by měl směřovat k propojení navržené metodiky s jinými vyvinutými strategiemi řízení redundantních paralelních robotů, zaměřujícími se na optimalizaci konkrétních pracovních charakteristik.

VII ZÁVĚR

Ve shodě s vytýčenými cíli bylo v obou zkoumaných oblastech využití redundantních pohonů dosaženo následujících výsledků:

I.

- A. Byl odvozen vztah pro výpočet aktivní složky kartézské tuhosti redundantního paralelního robotu, viz kapitola 4.1.1. Dále bylo popsáno několik původních strategií ovládání impedančních charakteristik robotu, včetně informací, jaký počet pohonů je ke splnění dané úlohy třeba (kapitoly 4.1.2.1 – 4.1.2.5).
- B. Existence aktivní tuhosti byla prokázána na základě výsledků simulace (kapitola 5.1.1) a experimentu (kapitola 5.1.2). Současně bylo odhaleno značné omezení praktického využití zkoumaného jevu (kapitola 5.1.3).

II.

- A. Na základě obecně formulované podmínky softwarového vymezení vůlí v pohonech (kapitola 4.2.1) byl vyvinut postup nalezení bezvůlového ovládání redundantního paralelního robotu pro danou trajektorii, dynamiku a interakci (kapitola 4.2.2). Popsané metody byly ověřeny na základě počítačové simulace (kapitola 5.2.1).
- B. Byl popsán původní algoritmus hledání oblastí vymezitelných vůlí, tedy oblastí ve kterých lze najít bezvůlové ovládání vždy, bez ohledu na trajektorii, dynamiku a interakci (kapitola 4.2.3). Algoritmus byl aplikován při mapování pracovního prostoru několika robotů (kapitola 5.2.2). Dále byl navržen způsob, jak na základě informací o nalezených oblastech vymezitelných vůlí implementovat podmínku vymezení vůlí při řízení robotu v otevřené smyčce (kapitola 4.2.4).

Závěrem několik slov o dalším potenciálním výzkumu v obou diskutovaných oblastech. Pro širší praktické uplatnění fenoménu aktivní tuhosti by bylo vhodné, aby

se výzkum dané problematiky dále ubíral dvěma směry: jednak vývojem aktuátorů disponujících velmi vysokými hodnotami akčních sil (resp. krouticích momentů) alespoň v režimu přetížení, jednak vývojem kinematických struktur robotů vhodných z hlediska vyšší dosahované aktivní tuhosti (viz kapitola 5.1.3).

Pokud jde o problematiku řízení s vyloučením vůlí, dalším přínosem by bylo především propojení popsané metodiky nalezení bezvůlového ovládání (kapitola 4.2.4) s reálným řízením redundantních paralelních robotů, ve kterém by byla dopředná složka řízení kombinována se složkou zpětnovazební.

DODATEK A

Vyjádření celkového redukováného zatížení paralelního robotu v prostoru pracovních souřadnic

Uvažujme redundantní paralelní robot, který se skládá z p pohyblivých částí navzájem propojených kinematickými vazbami. Poloha robotu v pracovním prostoru je popsána vektorem pracovních (kartézských) souřadnic \mathbf{X} . Polohy jednotlivých pohyblivých komponentů jsou popsány jejich fyzikálními souřadnicemi $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_p$. Efektivní zatížení platformy robotu je dáno vektorem \mathbf{F}_e interakčních sil, kterými okolí působí na robot.

Z fyzikálních souřadnic všech pohyblivých komponentů robotu sestavme sloupcový vektor $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1^T \ \mathbf{r}_2^T \ \dots \ \mathbf{r}_p^T]^T$ (jehož počet členů bude u prostorového robotu $6p$, v rovinném případě $3p$). Soubornou matici setrvačnosti zahrnující setrvačné hmoty všech pohyblivých částí označme \mathbf{M} .

V případě paralelního robotu lze zpravidla jednoznačně určit inverzní kinematiku. Můžeme tedy vyjádřit vektor fyzikálních souřadnic všech členů jako funkci kartézských souřadnic \mathbf{X} platformy robotu:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{X}) \quad (\text{A.1})$$

Označme matici sestavenou z parciálních derivací fyzikálních souřadnic podle souřadnic platformy jako \mathbf{J}_f^+ :

$$\mathbf{J}_f^+ = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}^T} \quad (\text{A.2})$$

Tento jakobián využijeme pro vyjádření první a druhé časové derivace vektoru fyzikálních souřadnic:

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}^T} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_f^+ \dot{\mathbf{X}} \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{J}}_f^+ \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}_f^+ \ddot{\mathbf{X}} \quad (\text{A.4})$$

Setrvačné účinky ve všech fyzikálních souřadnicích můžeme shrnout do vektoru \mathbf{D}_R :

$$\mathbf{D}_R = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{R}} \quad (\text{A.5})$$

Naším cílem je redukovat vektor \mathbf{D}_R všech setrvačných účinků na pohyb v pracovních souřadnicích, čímž obdržíme redukovanou setrvačnou sílu \mathbf{F}_D . Redukci provedeme s využitím principu virtuálních prací:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D^T d\mathbf{X} &= \mathbf{D}_R^T d\mathbf{R} \\ \mathbf{F}_D^T d\mathbf{X} &= \mathbf{D}_R^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}^T} d\mathbf{X} \\ \mathbf{F}_D^T &= \mathbf{D}_R^T \mathbf{J}_f^+ \\ \mathbf{F}_D &= \mathbf{J}_f^{+T} \mathbf{D}_R \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Po dosazení ze vztahů (A.4) a (A.5) dostáváme

$$\mathbf{F}_D = -\mathbf{J}_f^{+T} \mathbf{M} (\dot{\mathbf{J}}_f^+ \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}_f^+ \ddot{\mathbf{X}}) \quad (\text{A.7})$$

Celkové redukované zatížení robotu v prostoru kartézských souřadnic je pak součtem vnějšího efektivního zatížení platformy a právě odvozených redukovanych setrvačných sil:

$$\mathbf{F}_X = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_D = \mathbf{F}_e - \mathbf{J}_f^{+T} \mathbf{M} (\dot{\mathbf{J}}_f^+ \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}_f^+ \ddot{\mathbf{X}}) \quad (\text{A.8})$$

DODATEK B

Důkaz ekvivalentnosti náhrady soustavy (4.2.16) soustavou (4.2.17) z hlediska existence řešení

Výraz na levé straně prvního vztahu soustavy (4.2.17) lze interpretovat jako kladnou lineární kombinaci vektorů \mathbf{j}_{sk} (kde $k = 1, 2, \dots, n$), což jsou jednotlivé sloupce matice \mathbf{J}_s^{+T} . Soustavu (4.2.17) můžeme tedy zapsat také jako

$$\begin{aligned} t_{as1}\mathbf{j}_{s1} + t_{as2}\mathbf{j}_{s2} + \dots + t_{asn}\mathbf{j}_{sn} &= \mathbf{0}, \\ t_{as1,2,\dots,n} &> 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

kde t_{as1}, \dots, t_{asn} jsou prvky vektoru \mathbf{T}_{as} .

První vztah této soustavy upravíme nejprve tak, že k oběma jeho stranám přičteme \mathbf{j}_{s1} :

$$(t_{s1} + 1)\mathbf{j}_{s1} + t_{s2}\mathbf{j}_{s2} + \dots + t_{sn}\mathbf{j}_{sn} = \mathbf{j}_{s1} \quad (\text{A.10})$$

Tentýž vztah lze však upravit i jiným způsobem způsobem:

$$2 \left(\frac{t_{as2}}{t_{as1}} \mathbf{j}_{s2} + \dots + \frac{t_{asn}}{t_{as1}} \mathbf{j}_{sn} \right) = -2\mathbf{j}_{s1}$$

a opět přičteme \mathbf{j}_{s1} :

$$\mathbf{j}_{s1} + 2 \frac{t_{as2}}{t_{as1}} \mathbf{j}_{s2} + \dots + 2 \frac{t_{asn}}{t_{as1}} \mathbf{j}_{sn} = -\mathbf{j}_{s1} \quad (\text{A.11})$$

Po zhodnocení obou levých stran vztahů (B.2) a (B.3) můžeme konstatovat, že za předpokladu splnění (4.2.17), tj. i (B.1), lze jak vektor \mathbf{j}_{s1} , tak i $-\mathbf{j}_{s1}$ vyjádřit jako kladnou lineární kombinaci všech vektorů $\mathbf{j}_{s1}, \dots, \mathbf{j}_{sn}$. Obdobnými úpravami lze dospět ke stejnému závěru i pro ostatní vektory $\pm \mathbf{j}_{sk}$.

Jedním ze základních předpokladů této kapitoly je, že se robot nenachází v singulární poloze, tj. hodnota matice \mathbf{J}_s^{+T} je m , což znamená, že výběrem z vektorů $\mathbf{j}_{s1}, \dots, \mathbf{j}_{sn}$ lze sestavit bázi eukleidovského prostoru E^m . Pak lze jakýkoliv vektor $m \times 1$

vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{j}_{s1}, \dots, \mathbf{j}_{sn}$. Spojíme-li tento fakt se závěrem získaným porovnáním vztahů (B.2) a (B.3), můžeme tvrdit, že za obou uvedených předpokladů (1. robot není v singulární poloze, 2. soustava (4.2.17) má řešení) lze jakýkoliv vektor $m \times 1$ vyjádřit jako *kladnou* lineární kombinaci vektorů $\mathbf{j}_{s1}, \dots, \mathbf{j}_{sn}$. Pak je ovšem splnitelná podmínka (4.2.16), kterou lze zapsat (obdobně jako (4.2.17)) vektorově pomocí $\mathbf{j}_{s1}, \dots, \mathbf{j}_{sn}$:

$$\begin{aligned} t_{as1} \mathbf{j}_{s1} + t_{as2} \mathbf{j}_{s2} + \dots + t_{asn} \mathbf{j}_{sn} &= \mathbf{F}_X, \\ t_{as1,2,\dots,n} &> 0 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Tím je tedy prokázána ekvivalentnost náhrady soustavy (4.2.16) soustavou (4.2.17) z hlediska existence jejího řešení.

LITERATURA

- An, C.H., and Hollerbach, J.M., 1988, *Model-Based Control of a Robot Manipulator*, MIT Press.
- Asada, H., and Ogawa, K., 1987, „On the dynamic analysis of a manipulator and its end effector interacting with the environment“, in *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, Vol.4, pp. 751- 756
- Asada,H., and Slotine, J.J.E., 1986, *Robot Analysis and Control*, John Wiley And Sons.
- Belda, K., 2002, Řízení redundantních paralelních struktur robotických systémů, doktorská disertační práce, Ústav mechaniky tuhých a poddajných těles a prostředí, FS ČVUT v Praze.
- Buttolo, P. and Hannaford, B., 1995, „Advantages of Actuation Redundancy for the Design of Haptic Displays, in *Proceedings of ASME Dynamic Systems and Control Division*, volume 57-2, pp. 623–630.
- Freischen, K., 1997, *Static Analysis of a Parallel Redundant Wrist* (Thesis on the McGill University).
- Hogan, N., 1983, „Mechanical Impedance Control in Assistive Devices and Manipulators“, pp. 361-371 in M. Brady, J. Hollerbach, T. Johnson, T. Lozano-Perez and M. Mason: *Robot Motion: Planning and Control*.
- Hogan, N., 1984, „Adaptive Control of Mechanical Impedance by Coactivation of Antagonist Muscles“, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-29, No.8, pp. 681-690.
- Hogan, N., 1985, „Impedance Control: An Approach to Manipulation“, in *ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, Vol. 107, pp. 1-24.
- Hogan, N., 1987, „Beyond Regulators: Modelling Control Systems as Physical Systems“, in *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1468-1476.
- Kazerooni, H., and Tsay, T.J., 1988, „Stability Criteria for Robot Compliant Manuevers“, in *Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation*, Philadelphia, Vol. 2, pp. 1166-1172.

- Khatib, O., 1987, „A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation“, in *Proc. IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 1, pp. 43-50.
- Kock, S., 1998, „Regelungsstrategien für parallel roboter mit redundanten antrieben“, in *New machine concepts for handling and manufacturing devices on the basis of parallel structures*, pp. 155-164, Braunschweig, 10-11 Novembre 1998.
- Kock, S. and Schumacher, W., 1998, „A parallel x-y manipulator with actuation redundancy for high-speed and active-stiffness applications“ in *Proc. of IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pp. 2295–2300.
- Kock, S. and Schumacher, W., 2000, „Control of a Fast Parallel Robot with a Redundant Chain and Gearboxes: Experimental Results“, in *Proc. of IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pp. 1924–1929.
- Li, B.J., Lee, J.H., and Suh, H., 1998, „Optimal design of a five-bar finger with redundant actuation“, in *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2068–2074.
- Luecke, G.R., and Lai, K.W., 1997, „A joint error-feedback approach to internal force regulation in cooperating manipulator systems“, in *Journal of Robotic Systems* 14 (9), pp. 631–648.
- Merlet, J., 1996, „Redundant parallel manipulators“, in *Laboratory Robotics and Automation*, pp. 17–24.
- Merlet, J.P., 2000, *Parallel Robots*, Kluwer Academic Publishers.
- Murray, R., Li, Z.X., and Sastry, S., 1994 „Mathematical Introduction to Robotic Manipulation“, in *CRC Press*.
- Nahon, M.A., and Angeles, J., 1989, „Force optimization in Redundantly-actuated Closed Kinematic Chains, in *Proc. of IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pp. 951–956.
- Nakamura, Y., and Ghodoussi, M., 1989, „Dynamics computation of closed-link robot mechanisms with nonredundant and redundant actuators“, in *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 5 (3), pp.294–302.
- Paul, R.P., 1987, „Problems and Research Issues Associated with the Hybrid Control of Force and Displacement“, in *Proc. Workshop on Space Telerobotics, NASA/JPL, Pasadena, CA*, Vol. III, pp. 255-260.
- Salisbury, J.K., 1980, „Active Stiffness Control of a Manipulator in Cartesian Coordinates“, in *Proc. 19th IEEE Conference on Decision and Control*.

- Sefrioui, J. and Gosselin, C., 1992, „Singularity Analysis and Representation of Planar Parallel Manipulators, in *Robotics & Autonomous Systems* 10 (4), pp. 209–224.
- Šika, Z., 1998, Syntéza a analýza redundantních paralelních robotů, doktorská disertační práce, Ústav mechaniky tuhých a poddajných těles a prostředí, FS ČVUT v Praze.
- Šika, Z., Valášek, M., Miláček, S. and Bastl, P., 1997, „Synthesis and Analysis of Planar Redundant Parallel Robot“, in *Proceedings of NATO Advanced Study Institute "Computational Methods in Mechanisms"*, Varna, Vol II, pp.353-362.
- Thomas, M., Yuan-Chou, H., Tesar, D., 1985, „Optimal actuator stiffness distribution for robotic manipulators based on local dynamic criteria“, in *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, St Louis, Vol. 2, pp. 275- 281.
- Tesar, D., 1991, Tutorial on Modular Architecture for Robot Structures, IEEE Conf. on Robotics.
- Tsai, L.-W., 1999, Robot Analysis. John Wiley & Sons, INC.
- Valášek, M., 2004, „Redundant Actuation and Redundant Measurement: The Mechatronic Principles for Future Machine Tools“, in *International Congress on Mechatronics*. CTU in Prague, Faculty of Mechanical Engineering, pp. 131-144. ISBN 80-01-03088-1.
- Valášek, M. Šika, Z., Bauma, V., and Vampola, T., 2004, „The Innovative Potential of Redundantly Actuated PKM“, in *Parallel Kinematic Machines in Research and Practice*. Zwickau: Verlag Wissenschaftliche Scripten, pp. 365-384. ISBN 3-937524-05-3.
- Valášek, M., Šika, Z., and Štembera, J., 2004, „PKM Calibration by Redundant Measurements“, in *Parallel Kinematic Machines in Research and Practice*. Zwickau: Verlag Wissenschaftliche Scripten, pp. 739-744, ISBN 3-937524-05-3.
- Whitney, D.E., 1985, „Historical Perspective and State-of-the-Art in Robot Force Control“, in *Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation*, St. Louis, pp. 262-268.
- Yi, B.-J., Freeman, R.A., and Tesar, D., 1989, „Open-loop stiffness control of overconstrained mechanisms/roboticlinkage systems“, in *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol.3, pp. 1340-1345.

PUBLIKACE AUTORA

- Florián, M., & Valášek, M., 2000, „Control of Redundant Drives”, in *Proceedings of Workshop 2000*, FME CTU in Prague, vol. A, pp. 280. ISBN 80-01-02229-3, (<http://workshop.cvut.cz>).
- Florián, M., & Valášek, M., 2006, „Efficient Computation of Antibacklash Space for Redundant PKM”, in *Proceedings of Int. Conference on Interaction & Feedbacks '06*, UT AVCR, Praha (příspěvek přihlášen na konferenci).
- Valasek, M., Belda, K., and Florian, M., 2002, „Control and Calibration of Redundantly Actuated Parallel Robots”, in Neugebauer, R., (ed.): *Development Methods and Application Experience of Parallel Kinematics*, PKS 2002, IWU FhG, Chemnitz, pp. 411-427.
- Valášek, M., & Florián, M., 2000, „Anti-Backlash Control of Redundant Parallel Robots”, in *Výpočtová mechanika 2000 – sborník*, University of West Bohemia, Pilsen, pp. 421-428. ISBN 80-7082-652-5.
- Valášek, M., Florián, M., and Šika, Z., 1999, „Control of Redundantly Actuated Parallel Robots”, in *Mechatronics and Robotics 99*, University of Technology, Brno, pp. 181-186, ISBN 80-214-0604-6.