

FGV EMap
João Pedro Jerônimo

Projeto e Análise de Algoritmos
Revisão para A1

Rio de Janeiro
2025

Conteúdo

1	Notação Assintótica	3
2	Recorrência	6
2.1	Método da substituição	7
2.2	Método da árvore de recursão	7
2.3	Método da Recorrência	8
2.4	Método mestre	9
3	Algoritmos de busca	11
3.1	Busca em um vetor ordenado	12
3.2	Árvores	12
3.3	Árvores Binárias de Busca	16
4	Tabela Hash	18
4.1	Um problema	20
4.1.1	Primeira abordagem: Endereçamento Direto	20
4.1.2	Segunda abordagem: Lista Encadeada	20
4.2	Definição	21
4.3	Soluções para colisão	21
4.3.1	Tabela hash com encadeamento	21
4.3.2	Hash uniforme simples (A solução ideal)	24
4.3.3	Tabela hash com endereçamento aberto	25
5	ALGORITMOS DE ORDENAÇÃO	30
5.1	Bubble Sort	31
5.2	Selection Sort	32
5.3	Insertion Sort	34
5.4	Mergesort	35
5.5	Quicksort	36
5.6	Heapsort	39
5.7	Counting Sort	41
5.8	Radix Sort	43
5.9	Bucket Sort	44

Notação Assintótica

Já vemos desde o começo do curso que um algoritmo é um conjunto de instruções feitas com o objetivo de resolver um determinado problema. Porém, certos problemas apresentam diversos tipos de solução!



Figura 1: Caminhos problema-solução

Então como podemos comparar eles? Como eu sei qual que é o melhor caminho até minha solução? De primeira a gente pode pensar: “Vê quanto tempo executou!”, mas isso gera um problema... Se eu executo um algoritmo em um computador de hoje em dia e o mesmo algoritmo em um computador de 1980, com certeza eles vão levar tempos diferentes para executar, correto? Isso pode afetar na medição que eu estou fazendo do meu algoritmo!

Então o que fazer? O mais comum é analisarmos o quão bem meu algoritmo consegue funcionar de acordo com o quão grande meu problema fica!

Definição 1.1 (Função de Complexidade): A complexidade de um algoritmo é a função $T : U^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que leva do espaço do tamanho das entradas do problema até a quantidade de instruções feitas para realizá-lo

Exemplo:

```
1 def sum(numbers: list):
2     result = 0
3     for number in numbers:
4         result += 1
5     return result
```

Eu tenho que, para esse algoritmo, $T(n) = n$, pois, quanto maior é a quantidade de números na minha lista, maior é o tempo que a função vai ficar executando

Só que achar qual é essa função exatamente pode ser muito trabalhoso, além de que muitas funções são parecidas e podem gerar uma dificuldade na hora da análise. Então o que fazemos?

Faz sentido dizermos que, se a partir de algum ponto uma função T_1 cresce mais do que T_2 , então o algoritmo T_1 acaba sendo pior, então criamos a definição:

Definição 1.2 (Big O): Dizemos que $T(n) = O(f(n))$ se $\exists c, n_0 > 0$ tais que

$$T(n) \leq cf(n), \quad \forall n \geq n_0 \quad (1)$$

Ou seja, dado algum c e n_0 qualquer, depois de n_0 , $f(n)$ SEMPRE cresce mais que $T(n)$

Definição 1.3 (Big Ω): Dizemos que $T(n) = \Omega(f(n))$ se $\exists c, n_0 > 0$ tais que

$$T(n) \geq cf(n), \quad \forall n \geq n_0 \quad (2)$$

Definição 1.4 (Big Θ): Dizemos que $T(n) = \Theta(f(n))$ se $T(n) = \Omega(f(n))$ e $T(n) = O(f(n))$

Recorrência

Alguns algoritmos são fáceis de terem suas complexidades calculadas, porém, na programação, existem casos onde uma função utiliza ela mesma dentro de sua chamada, as temidas **recursões**

```
1 def fatorial(n):  
2     if n == 1:  
3         return 1  
4     return n*fatorial(n-1)
```

py

Então nós temos um $T(n)$ que chama $T(n-1)$, o que fazemos? Temos 4 métodos de resolver esse problema

- **Método da substituição**
- **Método da árvore de recursão**
- **Método da iteração**
- **Método mestre**

2.1 Método da substituição

Vamos provar por **indução** que $T(n)$ é O de uma função **pressuposta**. Só posso usar quando eu tenho uma hipótese da solução. Precisamos provar exatamente a hipótese. Pode ser usado para limites superiores e inferiores

Exemplo:

$$T(n) = \begin{cases} \theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad (3)$$

Vamos pressupor que $T(n) = O(n^2)$. Queremos então provar $T(n) \leq cn^2$.

Caso base: $n = 1 \Rightarrow T(1) = 1 \leq cn^2$

Passo Indutivo: Vamos supor que vale para $\frac{n}{2}$, e ver se vale para n . Então temos:

$$T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c \frac{n^2}{4} \quad (4)$$

Vamos testar para $T(n)$ então

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \Rightarrow T(n) \leq 2c \frac{n^2}{4} + n \\ &\Leftrightarrow T(n) \leq \frac{cn^2}{2} + n \\ &\Leftrightarrow \frac{cn^2}{2} + n \leq cn^2 \\ &\Leftrightarrow 2n \leq 2cn^2 - cn^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{2} \leq c \end{aligned} \quad (5)$$

Ou seja, conseguimos escolher um c e um n_0 de forma que $\forall n \geq n_0, T(n) \leq cn^2$, logo, $T(n) = O(n^2)$

2.2 Método da árvore de recursão

O método da árvore de recursão consiste em construir uma árvore definindo em cada nível os sub-problemas gerados pela iteração do nível anterior. A forma geral é encontrada ao somar o custo de todos os nós

- Cada nó representa um subproblema.
- Os filhos de cada nó representam as suas chamadas recursivas.
- O valor do nó representa o custo computacional do respectivo problema.

Esse método é útil para analisar algoritmos de divisão e conquista.

Exemplo:

$$T(n) = \begin{cases} \theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + n & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad (6)$$

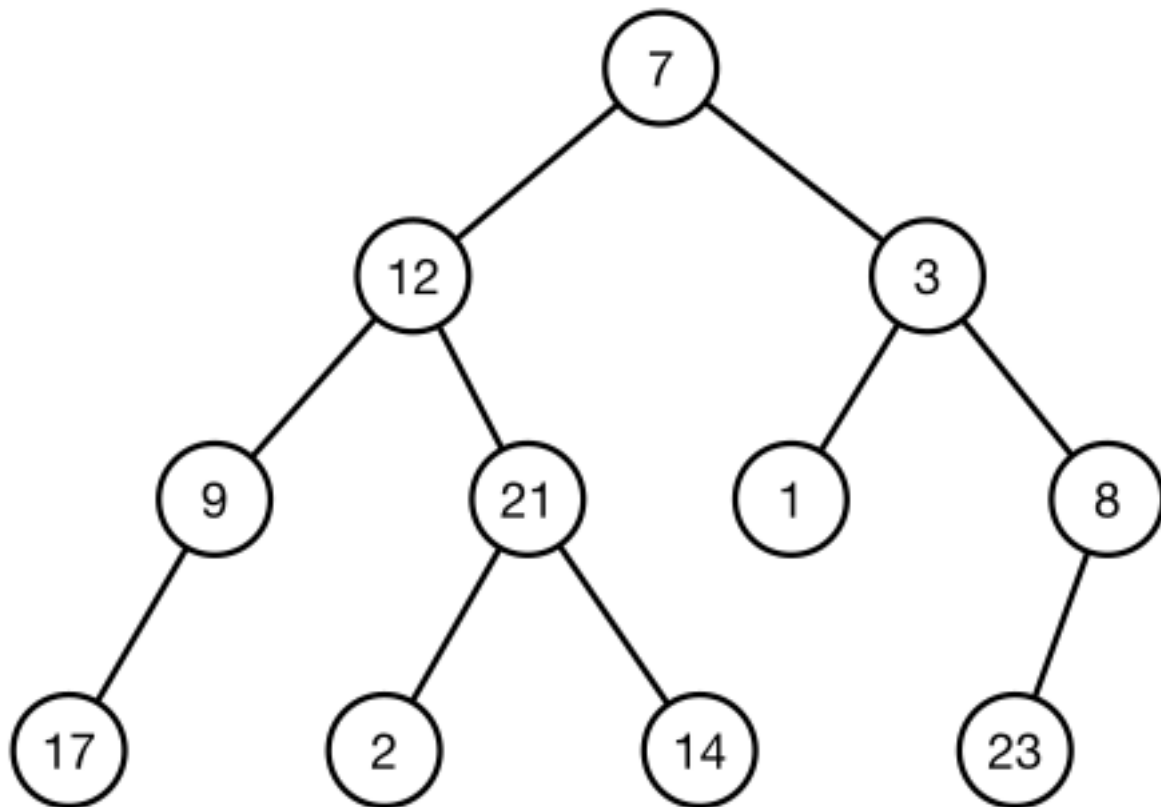


Figura 2: Árvore de $T(n)$

Temos então que:

$$T(n) = \sum_{k=0}^{\log(n)} 2^k \frac{n}{2^k} = n \log(n) + n \quad (7)$$

Então temos que $T(n) = O(n \log(n))$

2.3 Método da Recorrência

O método da iteração consiste em expandir a relação de recorrência até o n -ésimo termo, de forma que seja possível compreender a sua forma geral

Exemplo:

$$T(n) = \begin{cases} \theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T(n-1) + n & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad (8)$$

Expandindo, temos:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n-1) + n \\
T(n) &= 2(2T(n-2) + n) + n \\
&\vdots \\
T(n) &= 2^k T(n-k) + (2^k - 1)n - \sum_{j=1}^{k-1} 2^j j
\end{aligned} \tag{9}$$

Para chegar na última iteração, temos que $k = n - 1$

$$T(n) = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1)n - \sum_{j=1}^{n-2} 2^j j \tag{10}$$

Temos que: $\sum_{j=1}^{n-2} 2^j j = \frac{1}{2}(2^n n - 3 \cdot 2^n + 4)$, então podemos fazer:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2^{n-1} + 2^{n-1}n - n - 2^{n-1}n + 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \\
&\Leftrightarrow T(n) = 2^{n-1} - n + 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \\
&\Leftrightarrow T(n) = 4 \cdot 2^{n-1} - n - 2 = 2^{n+1} - n - 2 \\
&\Leftrightarrow T(n) = \Theta(2^n)
\end{aligned} \tag{11}$$

2.4 Método mestre

Esse teorema é uma decoreba. Ele te dá um caso geral e vários casos de resultado dependendo dos valores na estrutura de $T(n)$

Teorema 2.4.1 (Teorema Mestre): Dada uma recorrência da forma

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \tag{12}$$

Considerando $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ assintoticamente positiva

- Se $f(n) = O(n^{\log_b(a) - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
- Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, então $T(n) = \Theta(f(n) \log(n))$
- Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a) + \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$ e atender a uma condição de regularidade $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ para alguma constante positiva $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$

Exemplo (Primeiro caso):

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n \tag{13}$$

Então $a = 9$, $b = 3$ e $f(n) = n$, calculamos então:

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_3(9)} = n^2 \tag{14}$$

Ou seja, conseguimos escolher $\varepsilon = 1$ de forma que

$$f(n) = O(n^{2-1}) = O(n) \tag{15}$$

Ou seja, $T(n) = \Theta(n^2)$

Exemplo (Segundo caso):

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1 \quad (16)$$

Então $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$ e $f(n) = 1$, calculamos então:

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_{\frac{3}{2}}(1)} = 1 \quad (17)$$

Ou seja, $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, e isso quer dizer que $T(n) = \Theta\left(n^{\log_{\frac{3}{2}}(1) \log(n)}\right) = \Theta(\log(n))$

Exemplo (Terceiro caso):

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log(n) \quad (18)$$

Então $a = 3$, $b = 4$ e $f(n) = n \log(n)$, calculamos então:

$$n^{\log_b(a)} = n^{\log_4 3} \approx n^{0.79} \quad (19)$$

Temos então que $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3 + \varepsilon})$ para um $\varepsilon \approx 0.2$. Então agora vamos analisar a condição de regularidade:

$$\begin{aligned} af\left(\frac{n}{b}\right) &\leq cf(n) \\ 3\left(\frac{n}{4} \log\left(\frac{n}{4}\right)\right) &\leq cn \log(n) \Rightarrow c \geq \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (20)$$

Ou seja, $T(n) = \Theta(n \log(n))$

Exemplo (Exemplo que não funciona):

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log(n) \quad (21)$$

Para agilizar, isso se encaixa no caso em que $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a) + \varepsilon})$. Vamos então checar a regularidade:

$$\begin{aligned} af\left(\frac{n}{b}\right) &\leq cf(n) \\ 2 \frac{n}{2} \log\left(\frac{n}{2}\right) &\leq cn \log(n) \\ \Leftrightarrow c &\geq 1 - \frac{1}{\log(n)} \end{aligned} \quad (22)$$

Impossível! Já que $c < 1$

Esse método pode ser simplificado para uma categoria específica de funções

Teorema 2.4.2 (Teorema mestre simplificado): Dada uma recorrência do tipo:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^k) \quad (23)$$

Considerando $a \geq 1$, $b > 1$ e $k \geq 0$:

- Se $a > b^k$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- Se $a = b^k$, então $T(n) = \Theta(n^k \log n)$
- Se $a < b^k$, então $T(n) = \Theta(n^k)$

Algoritmos de busca

Vamos apresentar algoritmos de busca e suas complexidades

3.1 Busca em um vetor ordenado

Dado um vetor ordenado de inteiros:

```
1 int* v = { 2, 5, 9, 18, 23, 27, 32, 33, 37, 41, 43, 45 };
```

C++

Queremos escrever um algoritmo que recebe o vetor v , um número x e retorna o índice de x no vetor v se $x \in v$. Temos dois algoritmos principais para esse problema

BUSCA LINEAR

C++

```
1 int linear_search(const int v[], int size, int x) {  
2     for (int i = 0; i < size; i++) {  
3         if (v[i] == x) {  
4             return i;  
5         }  
6     }  
7     return -1;  
8 }
```

No pior caso, esse algoritmo tem complexidade $\Theta(n^2)$

Porém, se considerarmos uma lista ordenada, podemos fazer algo mais inteligente. Comparamos do meio do vetor e dependendo se o valor atual é maior ou menor comparado ao avaliado, então eu ignoro uma parte do vetor. O algoritmo consiste em avaliar se o elemento buscado (x) é o elemento no meio do vetor (m), e caso não seja executar a mesma operação sucessivamente para a metade superior (caso $x > m$) ou inferior (caso $x < m$).

BUSCA BINÁRIA

C++

```
1 int search(int v[], int leftInx, int rightInx, int x) {  
2     int midInx = (leftInx + rightInx) / 2;  
3     int midValue = v[midInx];  
4     if (midValue == x) {  
5         return midInx;  
6     }  
7     if (leftInx >= rightInx) {  
8         return -1;  
9     }  
10    if (x > midValue) {  
11        return search(v, midInx + 1, rightInx, x);  
12    } else {  
13        return search(v, leftInx, midInx - 1, x);  
14    }  
15 }
```

Podemos escrever a complexidade da função como:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + c \quad (24)$$

Fazendo os cálculos, obtemos que $T(n) = \Theta(\log(n))$

3.2 Árvores

Uma árvore binária consiste em uma estrutura de dados capaz de armazenar um conjunto de nós.

- Todo nó possui uma chave

- Opcionalmente um valor (dependendo da aplicação).
- Cada nó possui referências para dois filhos
- Sub-árvores da direita e da esquerda.
- Toda sub-árvore também é uma árvore.

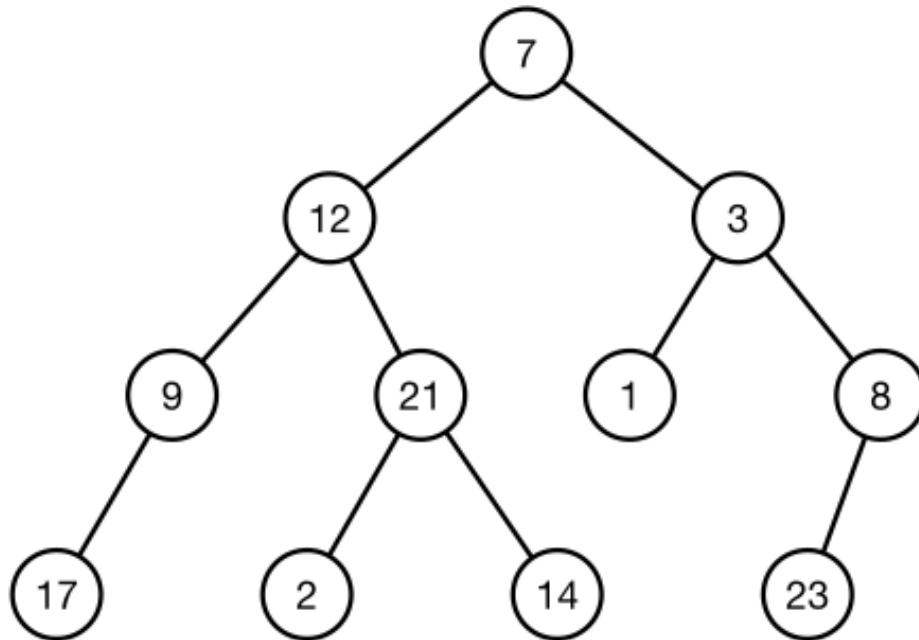


Figura 3: Exemplo de árvore

Um nó sem pai é uma **raiz**, enquanto um nó sem filhos é um nó **folha**

Definição 3.2.1 (Altura do nó): Distância entre um nó e a folha mais afastada. A altura de uma árvore é a altura do nó raiz

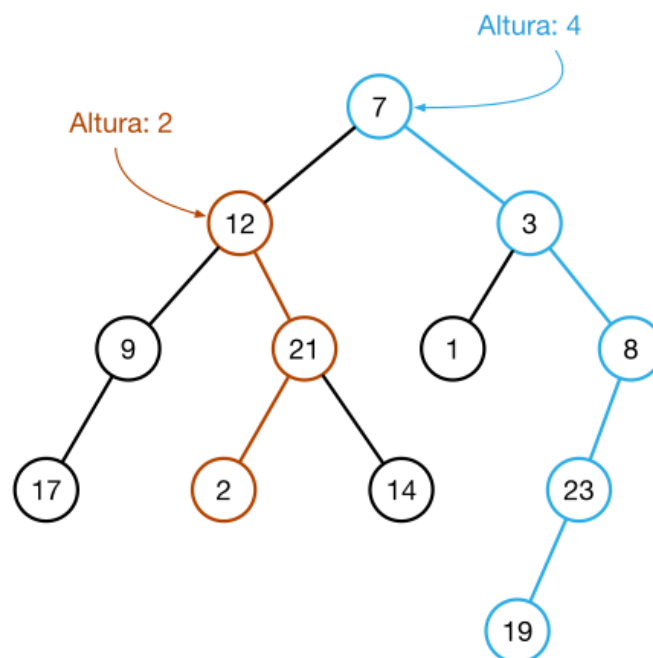


Figura 4: Exemplificação de altura

Teorema 3.2.1: Dada uma árvore de altura h , a quantidade máxima de nós n_{\max} e mínima n_{\min} são:

$$\begin{aligned} n_{\min} &= h + 1 \\ n_{\max} &= 2^{h+1} - 1 \end{aligned} \quad (25)$$

Definição 3.2.2: Uma árvore está **balanceada** quando a altura das subárvores de um nó apresentem uma diferença de, no máximo, 1

Teorema 3.2.2: Dada uma árvore com n nós e balanceada, a sua altura h será, no máximo:

$$h = \log(n) \quad (26)$$

Para códigos posteriores, considere a seguinte estrutura:

```
1  class Node {
2      public:
3          Node(int key, char data)
4              : m_key(key)
5              , m_data(data)
6              , m_leftNode(nullptr)
7              , m_rightNode(nullptr)
8              , m_parentNode(nullptr) {}
9          Node & leftNode() const { return * m_leftNode; }
10         void setLeftNode(Node * node) { m_leftNode = node; }
11
12         Node & rightNode() const { return * m_rightNode; }
13         void setRightNode(Node * node) { m_rightNode = node; }
14
15         Node & parentNode() const { return * m_parentNode; }
16         void setParentNode(Node * node) { m_parentNode = node; }
17
18     private:
19         int m_key;
20         char m_data;
21         Node * m_leftNode;
22         Node * m_rightNode;
23         Node * m_parentNode;
24 };
```

Temos alguns tipos de problemas para trabalhar em cima das árvores e suas soluções:

Problema: Dada uma árvore binária A com n nós encontre a sua altura

```
1  int nodeHeight(Node * node) {
2      if (node == nullptr) {
3          return -1;
```

```


4     }
5
6     int leftHeight = nodeHeight(node->leftNode());
7     int rightHeight = nodeHeight(node->rightNode());
8
9     if (leftHeight < rightHeight) {
10         return rightHeight + 1;
11     } else {
12         return leftHeight + 1;
13     }
14 }

```

A complexidade dessa solução é $\Theta(n)$

Problema: Dada uma árvore binária A imprima a chave de todos os nós através da busca em profundidade. Desenvolva o algoritmo para os 3 casos: Em ordem, pré-ordem, pós-ordem

EM ORDEM


 C++

```

1 void printTreeDFSInorder(class Node * node) {
2     if (node == nullptr) {
3         return;
4     }
5     printTreeDFSInorder(node->leftNode());
6     cout << node->key() << " ";
7     printTreeDFSInorder(node->rightNode());
8 }

```

PRÉ-ORDEM


 C++

```

1 void printTreeDFSPreorder(class Node * node) {
2     if (node == nullptr) {
3         return;
4     }
5     cout << node->key() << " ";
6     printTreeDFSPreorder(node->leftNode());
7     printTreeDFSPreorder(node->rightNode());
8 }

```

PÓS-ORDEM

 C++

```

1 void printTreeDFSPostorder(class Node * node) {
2     if (node == nullptr) {
3         return;
4     }
5     printTreeDFSPostorder(node->leftNode());
6     printTreeDFSPostorder(node->rightNode());
7     cout << node->key() << " ";
8 }


```

Problema: dada uma árvore binária A imprima a chave de todos os nós através da busca em largura.

```

1 void printTreeBFSWithQueue(Node * root) {
2     if (root == nullptr) {
3         return;
4     }

```

 C++

```

5  queue<Node*> queue;
6  queue.push(root);
7  while (!queue.empty()) {
8      Node * node = queue.front();
9      cout << node->key() << " ";
10     queue.pop();
11     Node * childNode = node->leftNode();
12     if (childNode) {
13         queue.push(childNode);
14     }
15     childNode = node->rightNode();
16     if (childNode) {
17         queue.push(childNode);
18     }
19 }
20 }

```

3.3 Árvores Binárias de Busca

Definição 3.3.1 (Árvores de busca): São uma classe específica de árvores que seguem algumas características:

- A chave de cada nó é maior ou igual a chave da raiz da sub-árvore esquerda.
- A chave de cada nó é menor ou igual a chave da raiz da sub-árvore direita

$\text{left.key} \leq \text{key} \leq \text{right.key}$

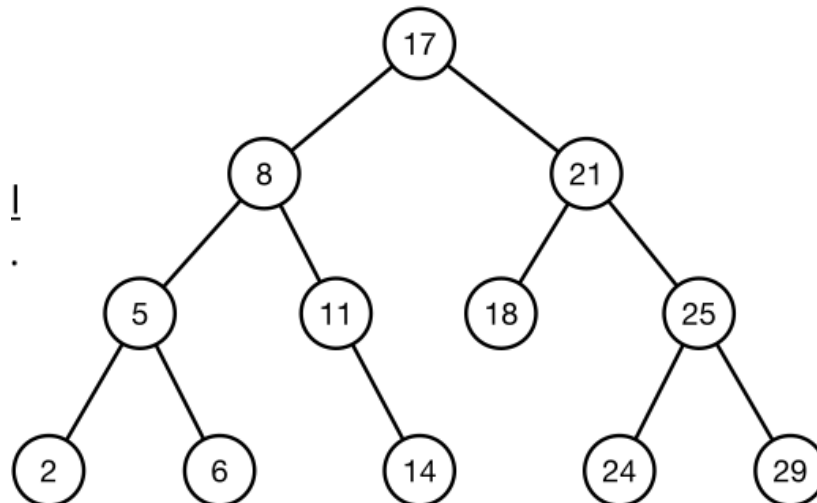


Figura 5: Exemplo de árvore binária

Então queremos utilizar essa árvore para poder procurar valores. Na verdade ela é bem parecida com o caso de aplicar uma busca binária em um vetor ordenado.

Problema: dada uma árvore binária de busca A com altura h encontre o nó cuja chave seja k .

BUSCA EM ÁRVORE BINÁRIA (RECURSÃO)

C++

```

1  Node * binaryTreeSearchRecursive(Node * node, int key) {
2      if (node == nullptr || node->key() == key) {
3          return node;
4      }
5      if (node->key() > key) {


```



```
6     return binaryTreeSearchRecursive(node->leftNode(), key);
7 } else {
8     return binaryTreeSearchRecursive(node->rightNode(), key);
9 }
10 }
```

Esse algoritmo tem complexidade $\Theta(h)$

BUSCA EM ÁRVORE BINÁRIA (ITERATIVO)

 C++

```
1 Node * binaryTreeSearchIterative(Node * node, int key) {
2     while (node != nullptr && node->key() != key) {
3         if (node->key() > key) {
4             node = node->leftNode();
5         } else {
6             node = node->rightNode();
7         }
8     }
9     return node;
10 }
```

Tabela Hash

Nós a utilizamos para armazenar e pesquisar tuplas $\langle \text{chave}, \text{valor} \rangle$. São comumente chamadas de **dicionários**, porém, podemos classificar assim:

- **Dicionários:** Maneira genérica de mapear *chaves* e *valores*
- **Hash Tables:** Implementação de um dicionário por meio de uma função de **hash**

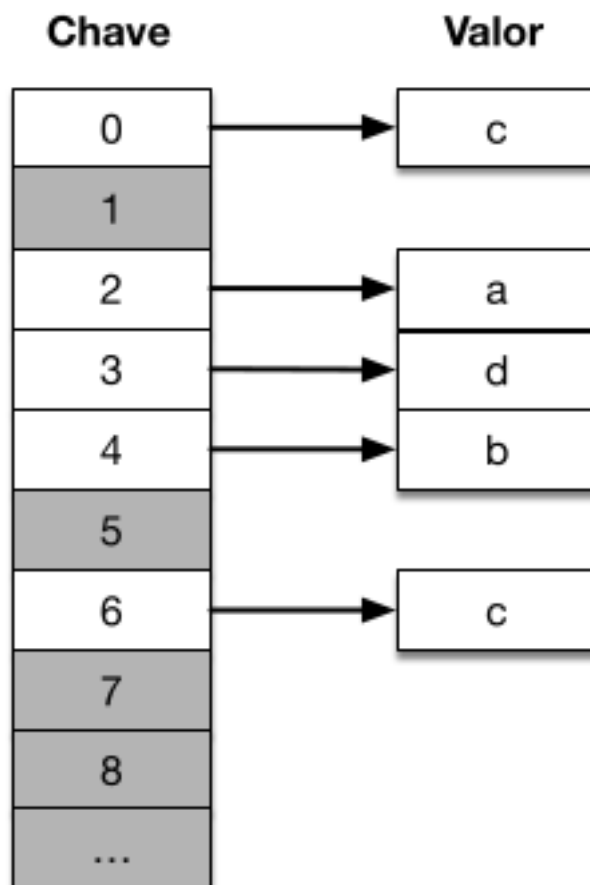


Figura 6: Desenho de tabela hash

Nós queremos criar funções $\Theta(1)$ para executar funções de **inserção**, **busca** e **remoção**. Todas as chaves contidas na tabela são **únicas**, já que elas identificam os valores unicamente.

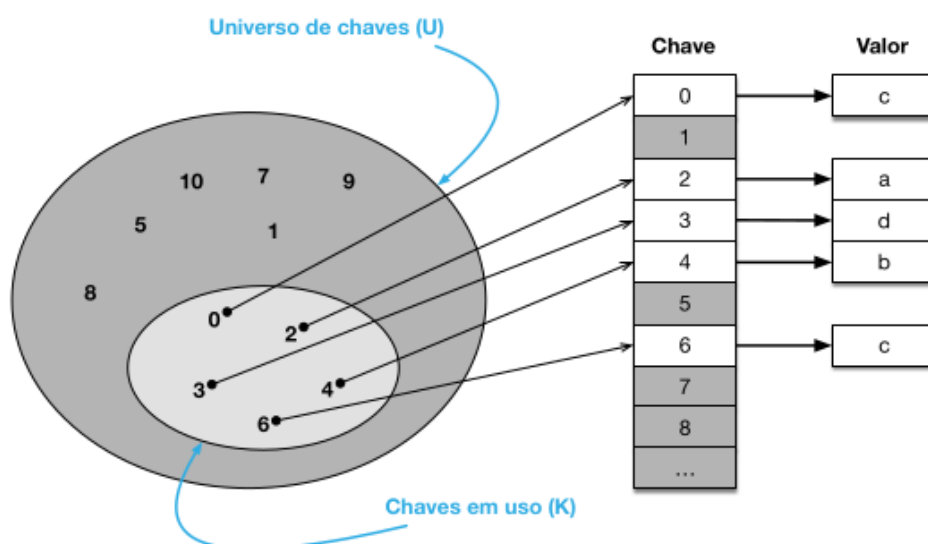


Figura 7: Estruturação da Hash Table

- **Universo de Chaves (U):** Conjunto de chaves possíveis
- **Chaves em Uso (K):** Conjunto de chaves utilizadas

Vamos idealizar um problema para motivar os nossos objetivos.

4.1 Um problema

Problema: Considere um programa que recebe eventos emitidos por veículos ao entrar em uma determinada região. Cada evento é composto por um inteiro representando o ID do veículo. O programa deve contar o número de vezes que cada veículo entrou na região. Ocasionalmente o programa recebe uma requisição para exibir o número de ocorrências de um dado veículo.

Mandatário: a contagem deve ser incremental, sem qualquer estratégia de cache. Uma requisição para exibir o resultado parcial da contagem deverá contemplar todos os eventos recebidos até o momento.

4.1.1 Primeira abordagem: Endereçamento Direto

```
1 // Aloca-se um vetor com o tamanho do universo U:
2 int table[U];
3 for (int i = 0; i < U; i++) {
4     table[i] = 0;
5 }
6
7 // Ao processar cada evento incrementa-se a posição no vetor
8 void add(int key) {
9     table[key]++;
10 }
11
12 // Lê-se a contagem acessando a posição do vetor diretamente
13 int search(int key) {
14     return table[key];
15 }
```

- $\text{add} = \Theta(1)$
- $\text{search} = \Theta(1)$

4.1.2 Segunda abordagem: Lista Encadeada

```
1 typedef struct LLNode CountNode;
2 struct LLNode {
3     int id;
4     int count;
5     CountNode * next;
6 };
7
8 void add(int key) {
9     CountNode * node = m_firstNode;
10    while (node != nullptr && node->id != key) {
11        node = node->next;
12    }
13    if (node != nullptr) {
14        node->count += 1;
15    } else {
16        CountNode * newNode = new CountNode;
17        newNode->id = key;
18        newNode->count = 1;
19        newNode->next = m_firstNode;
20        m_firstNode = newNode;
21    }
```

```

21 }
22 }
23 int search(int key) {
24     CountNode * node = m_firstNode;
25     while (node != nullptr && node->id != key) {
26         node = node->next;
27     }
28     return node != nullptr ? node->count : 0;
29 }

```

Infelizmente nessa abordagem nós não atingimos o objetivo principal de realizar as operações em $\Theta(1)$, já que a função de busca é $\Theta(n)$ no pior caso

4.2 Definição

Agora que entendemos toda a ideia da hash table, podemos fazer uma definição melhor para ela

Definição 4.2.1 (Hash Table): A **tabela hash** é uma estrutura de dados baseada em um vetor de M posições acessado através de endereçamento direto

Definição 4.2.2 (Função de Espalhamento/Hashing): É uma função que mapeia uma chave em um índice $[0, M - 1]$ do vetor. O resultado dessa função é comumente chamado de **hash**. O objetivo da função de espalhamento é reduzir o intervalo de índices de forma que M seja muito menor que o tamanho do universo U .

Exemplo:

```

1 hash(key) = key % M

```

Definição 4.2.3 (Colisão): É quando a função de espalhamento gera os mesmos hashes para chaves diferentes. Existem várias abordagens para resolver esse problema

Uma função de hash é considerada **boa** quando minimiza as colisões (Mas, pelo princípio da casa dos pombos, elas são inevitáveis)

4.3 Soluções para colisão

Vamos ver algumas abordagens para resolver o problema de colisão

4.3.1 Tabela hash com encadeamento

O problema de colisão é solucionado armazenando os elementos com o mesmo hash em uma lista encadeada.

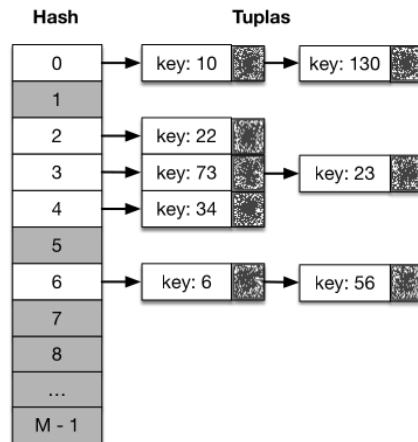


Figura 8: Tabela hash com encadeamento

EXEMPLO DE IMPLEMENTAÇÃO

C++

```

1  typedef struct HashTableNode HTNode;
2  struct HashTableNode {
3      unsigned key;
4      int value;
5      HTNode * next;
6      HTNode * previous;
7  };
8
9  class HashTable {
10 public:
11     HashTable(int size)
12         : m_table(nullptr)
13         , m_size(size) {
14         m_table = new HTNode*[size];
15         for (int i=0; i < m_size; i++) { m_table[i] = nullptr; }
16     }
17     ~HashTable() {
18         for (int i=0; i < m_size; i++) {
19             HTNode * node = m_table[i];
20             while (node != nullptr) {
21                 HTNode * nextNode = node->next;
22                 delete node;
23                 node = nextNode;
24             }
25         }
26         delete[] m_table;
27     }
28     ...
29 private:
30     unsigned hash(unsigned key) const { return key % m_size; }
31     HTNode ** m_table;
32     int m_size;
33 };
34
35
36 void insert_or_update(unsigned key, int value) {
37     unsigned h = hash(key);

```

```

38  HTNode * node = m_table[h];
39  while (node != nullptr && node->key != key) {
40      node = node->next;
41  }
42  if (node == nullptr) {
43      node = new HTNode;
44      node->key = key;
45      node->next = m_table[h];
46      node->previous = nullptr;
47      HTNode * firstNode = m_table[h];
48      if (firstNode != nullptr) {
49          firstNode->previous = node;
50      }
51      m_table[h] = node;
52  }
53  node->value = value;
54 }
55
56
57 HTNode * search(unsigned key) {
58     unsigned h = hash(key);
59     HTNode * node = m_table[h];
60     while (node != nullptr && node->key != key) {
61         node = node->next;
62     }
63     return node;
64 }
65
66
67 bool remove(unsigned key) {
68     unsigned h = hash(key);
69     HTNode * node = m_table[h];
70     while (node != nullptr && node->key != key) {
71         node = node->next;
72     }
73     if (node == nullptr) {
74         return false;
75     }
76     HTNode * nextNode = node->next;
77     if (nextNode != nullptr) {
78         nextNode->previous = node->previous;
79     }
80     HTNode * previousNode = node->previous;
81     if (previousNode != nullptr) {
82         node->previous->next = node->next;
83     } else {
84         m_table[h] = node->next;
85     }
86     delete node;
87     return true;
88 }

```

O pior caso dessa implementação é quando todas as chaves são mapeadas em uma única posição

- **Inserção/Atualização:** $\Theta(n)$
- **Busca:** $\Theta(n)$
- **Remoção:** $\Theta(n)$

Nas operações estamos considerando o pior caso.

4.3.2 Hash uniforme simples (A solução ideal)

Cada chave possui a mesma probabilidade de ser mapeada em qualquer índice $[0, M)$. Essa é uma propriedade desejada para uma função de espalhamento a ser utilizada em uma tabela hash. Infelizmente esse resultado depende dos elementos a serem inseridos. Não sabemos à priori a distribuição das chaves ou mesmo a ordem em que serão inseridas. Heurísticas podem ser utilizadas para determinar uma função de espalhamento com bom desempenho

Alguns métodos mais comuns:

- **Simple**
 - Se a chave for um número real entre $[0, 1)$
 - $\text{hash}(\text{key}) = \lfloor \text{key} \cdot M \rfloor$
- **Método da divisão**
 - Se a chave for um número inteiro
 - $\text{hash}(\text{key}) = \text{key} \% M$
 - Costuma-se definir M como um número primo.
- **Método da multiplicação**
 - $\text{hash}(\text{key}) = \lfloor \text{key} \cdot A \% 1M \rfloor$
 - A é uma constante no intervalo $0 < A < 1$.

Observe que a chave pode assumir qualquer tipo suportado pela linguagem

Exemplo: `countries["BR"]`

A função de espalhamento é responsável por gerar um índice numérico com base no tipo de entrada

EXEMPLO DE HASH PARA STRINGS	
1	<code>int hashStr(const char * value, int size) {</code>
2	<code> unsigned hash = 0;</code>
3	<code> for (int i=0; value[i] != '\0'; i++) {</code>
4	<code> hash = (hash * 256 + value[i]) % size;</code>
5	<code> }</code>
6	<code> return hash;</code>
7	<code>}</code>

A complexidade da função de espalhamento é constante: $\Theta(1)$. Em uma busca mal sucedida, temos que a complexidade é $T(n, m) = \frac{n}{m}$, isso se dá pois temos m entradas no array da tabela hash e temos n entradas utilizadas no todo, então a **complexidade média** do tempo de busca fica $\frac{n}{m}$. Então nosso objetivo é sempre que n seja bem menor que m , de forma que isso seja muito próximo de $\Theta(1)$.

Então podemos calcular a complexidade das operações de **remoção**, **inserção** e **busca** como:

$$T(n) = \frac{1}{n} \sum_i^n \left(1 + \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{m} \right) = \Theta \left(1 + \frac{n}{m} \right) \quad (27)$$

Esse $\frac{1}{n} \sum_i^n$ representa uma média aritmética em todos os nós do valor que vem dentro da soma. Esse 1 dentro representa a operação de *hash* para descobrir o “slot” chave que você irá procurar.

Depois que você procurar o slot e achá-lo (Slot em que a chave que você está buscando estará), você vai percorrer um **número esperado** de $\sum_{j=i+1}^n \frac{1}{m}$ chaves ($\frac{1}{m}$ = Probabilidade (Considerando o hash uniforme simples) de uma chave i colidir com uma chave j)

Considerando a hipótese de hash uniforme simples podemos assumir que cada lista terá aproximadamente o mesmo tamanho.

Conforme você insere elementos na tabela o desempenho vai se degradando, calculando $\alpha = n/m$ a cada inserção conseguimos calcular se a tabela está em um estado ineficiente.

A operação de redimensionamento aumenta o tamanho do vetor de m para M' , porém, isso invalida o mapeamento das chaves anteriores, já que a minha métrica era feita especificamente para o tamanho que eu tinha. Para contornar isso, podemos reinserir todos os elementos. Porém, isso é $\Theta(n)$. Se a operação de resize & rehash tem complexidade $\Theta(n)$, como manter $\Theta(1)$ para as demais operações?

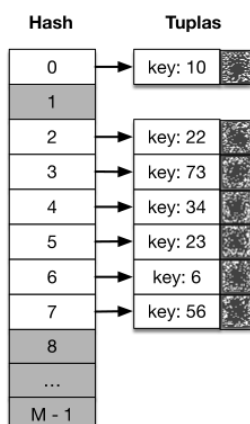
Então temos a **análise amortizada**, que avalia a complexidade com base em uma sequência de operações.

A sequência de operações na tabela de dispersão consiste em:

- n operações de inserção com custo individual $\Theta(1)$
- k operações para redimensionamento com custo total $\sum_{i=1}^{\log(n)} 2^i = \Theta(n)$
 - Considerando que $M' = 2M$

$$\frac{n \cdot \Theta(1) + \Theta(n)}{n} = \Theta(1) \quad (28)$$

4.3.3 Tabela hash com endereçamento aberto



O problema de colisão é solucionado armazenando os elementos na primeira posição vazia a partir do índice definido pelo hash. Ou seja, quando eu vou inserir um elemento y na tabela, mas ele tem o mesmo hash do meu elemento x (Que já está inserido na tabela), eu simplesmente armazeno no próximo slot vazio

Vídeo muito bom com desenhos sobre endereçamento aberto (Clique aqui)

Estrutura de um nó da lista:

```
1 typedef struct DirectAddressHashTableNode DANode;
2 struct DirectAddressHashTableNode {
3     int key;
4     int value;
5 };
```

Ao buscar (ou sondar) um elemento com a chave `key`, nós checamos: Se a posição `table[hash(key)]` estiver **vazia**, nós garantimos que a chave não está presente na tabela, mas se estiver **ocupada**, precisamos verificar se `table[hash(key)].key == key`, já que eu posso ter inserido uma outra chave lá.

Exemplo de implementação:

```
1 class DirectAddressHashTable {
2     public:
3         DirectAddressHashTable(int size)
4             : m_table(nullptr)
5             , m_size(size) {
6             m_table = new DANode[size];
7             for (int i=0; i < m_size; i++) {
8                 m_table[i].key = -1;
9                 m_table[i].value = 0;
10            }
11        }
12        ~DirectAddressHashTable() { delete[] m_table; }
13
14    private:
15        unsigned hash(int key) const { return key % m_size; }
16
17        DANode * m_table;
18        int m_size;
19 };
20
21
22 bool insert_or_update(int key, int value) {
23     unsigned h = hash(key);
24     DANode * node = nullptr;
25     int count = 0;
26     for (; count < m_size; count++) {
27         node = &m_table[h];
28         if (node->key == -1 || node->key == key) {
29             break;
30         }
31         h = (h + 1) % m_size;
32     }
33     if (count >= m_size) {
34         return false; // Table is full
35     }
36     if (node->key == -1) {
37         node->key = key;
38     }
39     node->value = value;
40     return true;
41 }
42
43
44 DANode * search(int key) {
45     unsigned h = hash(key);
46     DANode * node = nullptr;
47     int count = 0;
48     for (; count < m_size; count++) {
49         node = &m_table[h];
50         if (node->key == -1 || node->key == key) {
51             break;
52         }
53     }
```

```

53     h = (h + 1) % m_size;
54 }
55 return count >= m_size || node->key == -1 ? nullptr : node;
56 }
57
58
59 bool remove(int key) {
60     DNode * node = search(key);
61     if (node == nullptr) {
62         return false;
63     }
64     node->key = -1;
65     node->value = 0;
66     return true;
67 }

```

A remoção em uma tabela hash com endereçamento aberto apresenta um problema:

- Ao remover uma chave key de uma posição h , partindo de uma posição h_0 , tornamos impossível encontrar qualquer chave presente em uma posição $h' > h$, pois, quando eu procuro partindo de h_0 , eu vou interpretar que, como h está vazio, eu não preciso mais ir para frente, porém a chave que estou procurando pode estar depois.

Antes

M=10

hash	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
chave	60	21	51	131	33	91	76	61	-1	99

Depois

hash	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
chave	60	21	51	-1	33	91	76	61	-1	99

Figura 10: Exemplo de tabela com problema na remoção

Uma possível solução consiste em marcar o nó removido de forma que a busca não o considere vazio.

- Podemos criar uma flag para representar que o nó será reciclado.

```

1 typedef struct DirectAddressHashTableNode DNode;
2 struct DirectAddressHashTableNode {
3     int key;
4     int value;
5     bool recycled;
6 };

```

- E inicializá-la com o valor false no construtor:

```

1 m_table[i].recycled = false;

```

Então vamos adaptar as funções de busca e remoção

```

1  DNode * search(int key) {
2      unsigned h = hash(key);
3      DNode * node = nullptr;
4      int count = 0;
5      for (; count < m_size; count++) {
6          node = &m_table[h];
7          if ((node->key == -1 && !node->recycled) || node->key == key) {
8              break;
9          }
10         h = (h + 1) % m_size;
11     }
12     return count >= m_size || node->key == -1 ? nullptr : node;
13 }
14
15
16 bool remove(int key) {
17     DNode * node = search(key);
18     if (node == nullptr) {
19         return false;
20     }
21     node->key = -1;
22     node->value = 0;
23     node->recycled = true;
24     return true;
25 }

```

O fator de carga da abordagem de endereçamento aberto é definido da mesma forma: $\alpha = n/M$

- No entanto observe que nesse caso teremos sempre $\alpha \leq 1$ visto que M é o número máximo de elementos no vetor (Antes eu podia ter mais chaves do que espaços no meu vetor).
- A busca por uma determinada chave depende da sequência de sondagem $\text{hash}(\text{key}, i)$ fornecida pela função de espalhamento
- Observe que existem $M!$ permutações possíveis para a sequência de sondagem.
- A sondagem linear é o método mais simples de gerar a sequência de espalhamento $\text{hash}(\text{key}, i) = (\text{hash}'(\text{key}) + i) \% M$

Porém, a abordagem linear rapidamente se torna ineficaz, já que em determinado momento o problema se transforma basicamente em inserir elementos em uma lista, então surge a alternativa da abordagem quadrática

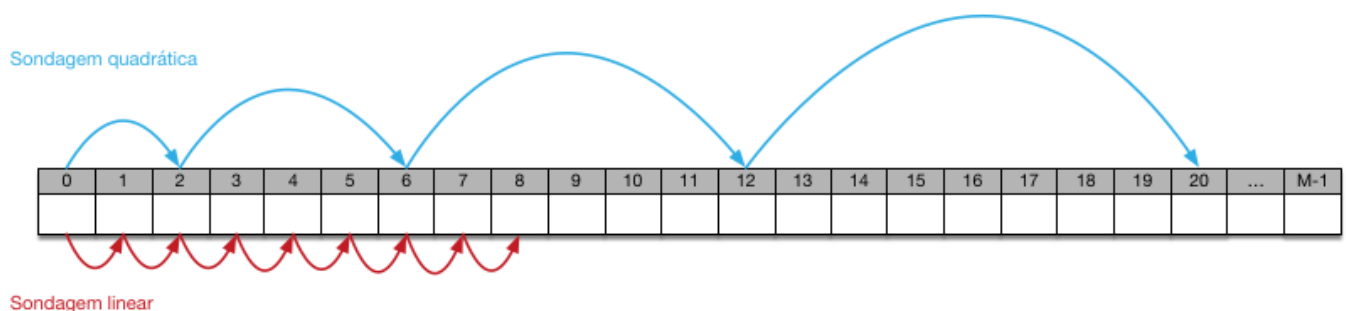


Figura 11: Exemplificação de sondagem quadrática

Agora temos que a função de hash segue o seguinte padrão: $\text{hash}(\text{key}, i) = (\text{hash}'(\text{key}) + b*i + a*i**2) \% m$

Porém isso gera agrupamentos secundários, ou seja, se duas chaves caem no mesmo local inicial $\text{hash}'(\text{key})$, então elas seguirão a mesma sequência e tentarão ocupar os mesmos slots (Aí podemos inserir outras abordagens)

Para melhorar ainda mais nossas abordagens, podemos introduzir o **hash duplo**, que eu vou ter **duas** funções de hash diferentes hash_1 e hash_2 de forma que o novo hash de uma chave vai ser dado por: $\text{hash}(\text{key}, i) = (\text{hash}_1(\text{key}) + i * \text{hash}_2(\text{key})) \% m$ de forma que, mesmo que uma mesma chave

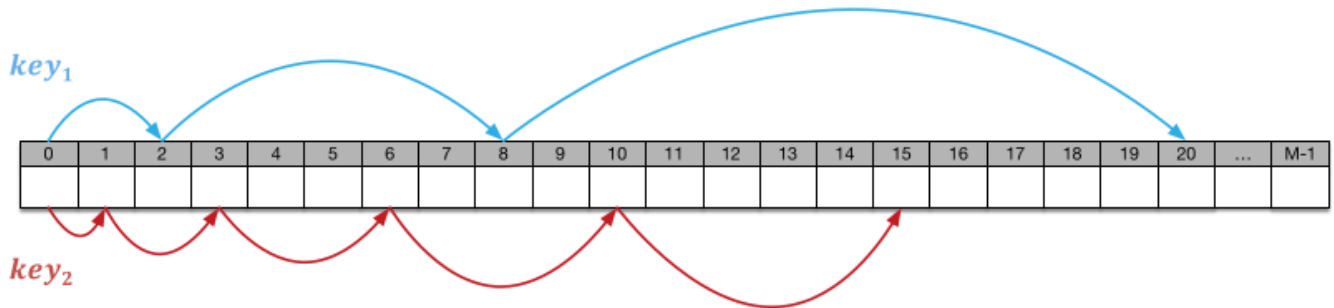


Figura 12: Exemplificação de hash duplo

Porém, vale ressaltar que minha segunda função de hash deve satisfazer:

- Ser completamente diferente da primeira
- Não retornar 0

O número de sondagens para inserir uma chave em uma tabela hash de endereçamento aberto (No caso médio) é:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1 - \alpha} = O(1) \quad (29)$$

ALGORITMOS DE ORDENAÇÃO

Queremos que, dada uma sequência de valores, escreva um algoritmo capaz de retornar a sequência ordenada de valores a partir de uma entrada de vários números não-ordenados.

```
1 int v[] = {8, 11, 2, 5, 10, 16, 7, 15, 1, 4};
```

C++

- Exceto quando especificado de outra forma, assuma que o tipo dos valores são números inteiros
- Utilizaremos o vetor como estrutura de dados, no entanto os algoritmos apresentados podem ser implementados utilizando outras estruturas, como listas encadeadas

Um algoritmo de ordenação é considerado **estável** quando, ao final do programa, elementos de mesmo valor aparecem na mesma ordem que antes. Por exemplo:

8.7	11.4	2.1	5.5	11.3	2.7	7.1	5.3	9.0	4.8
-----	------	-----	-----	------	-----	-----	-----	-----	-----

2.1	2.7	4.8	5.5	5.3	7.1	8.7	9	11.4	11.3
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---	------	------

Figura 13: Exemplo com números fracionários

Considere um algoritmo que ordena o vetor mostrado acima considerando **apenas a parte inteira**. Nesse algoritmo, 5.5 e 5.3 tem o mesmo valor (Já que estamos considerando apenas a parte inteira), e no array antes da ordenação, 5.5 aparece **antes** do 5.3. Se o algoritmo for estável, então essa ordem deverá ser mantida e, como podemos ver no array ordenado, ela de fato foi

5.1 Bubble Sort

O algoritmo bubble sort (ordenação por flutuação) é uma das soluções mais simples para o problema de ordenação. A solução consiste em inverter (trocar) valores de posições adjacentes sempre que $v[i + 1] < v[i]$. Essa operação é executada para cada posição $0 \leq i < n - 1$ ao percorrer a sequência. Observe que ao percorrer a sequência $j = n - 1$ vezes executando esse procedimento atingimos a sequência ordenada.

Exemplo: Considere o seguinte array:

8	11	2	5	1
---	----	---	---	---

$$n = 5$$

$$j = n - 1 = 4$$

Figura 14: Bubble Sort array de exemplo

E a execução do código decorrerá da forma:

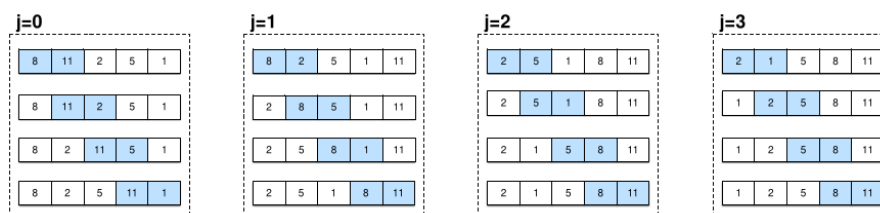


Figura 15: Bubble Sort exemplo de fluxo de código

Então o meu código vai percorrer cada item da minha lista e, sempre que um elemento a esquerda de outro é maior que ele, os dois trocam de posição

IMPLEMENTAÇÃO

C++

```
1 #define swap(v, i, j) { int temp = v[i]; v[i] = v[j]; v[j] = temp; }
2 void bubbleSort(int v[], int n) {
3     for (int j = 0; j < n - 1; j++) {
4         for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
5             if (v[i] > v[i + 1]) {
6                 swap(v, i, i + 1);
7             }
8         }
9     }
10 }
```

O procedimento é executado $n - 1$ vezes e, a cada iteração maior, ele executa $n - 1$ subprocessos, logo, no final vamos ter um total de $T(n) = \Theta(n^2)$ de complexidade (Tanto melhor quanto pior caso)

Porém, podemos fazer uma otimização no algoritmo:

IMPLEMENTAÇÃO ORDENADA

C++

```
1 void bubbleSortOptimized(int v[], int n) {
2     for (int j = 0; j < n - 1; j++) {
3         bool swapped = false;
4         for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
5             if (v[i] > v[i + 1]) {
6                 swap(v[i], v[i + 1]);
7                 swapped = true;
8             }
9         }
10        if (!swapped) { break; }
11    }
12 }
```

Essa otimização checa se, dentro de um loop maior houve alguma troca, se não houve nenhuma, então o algoritmo é encerrado. Ao fazer isso, a complexidade do melhor caso desce para $\Theta(n)$

5.2 Selection Sort

No selection sort, fazemos uma busca em **cada posição** pelo i -ésimo valor que **deveria** estar naquela posição

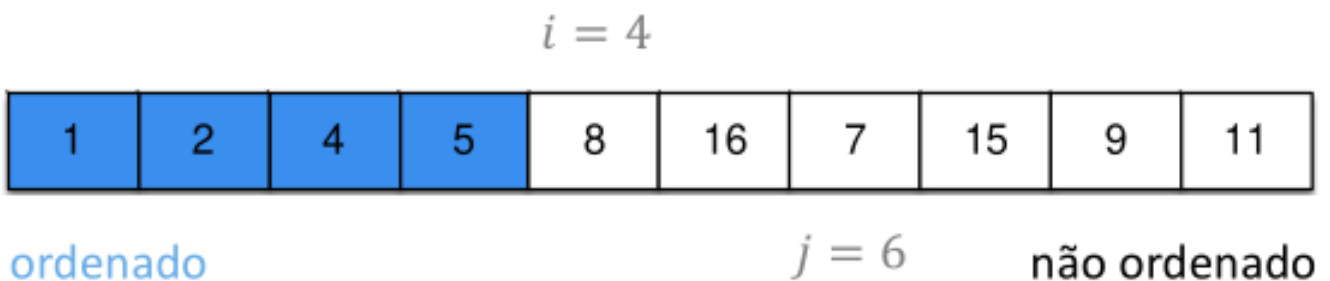


Figura 16: Selection Sort exemplificação

Dado uma posição i , e assumindo que todas as posições anteriores já estão ordenadas, ele vai procurar dentre as próximas $n - i$ posições um valor menor que o da posição i . Se isso acontece, significa que ele deveria estar na posição que i está ocupando, então eu vou trocá-los de posição

Exemplo: Considere o caso:

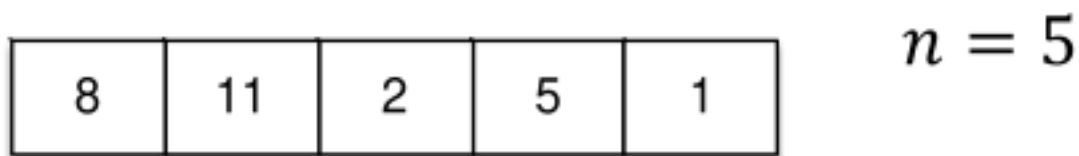


Figura 17: Selection Sort Caso de Exemplo

E assim, o fluxo durante a execução do programa será:

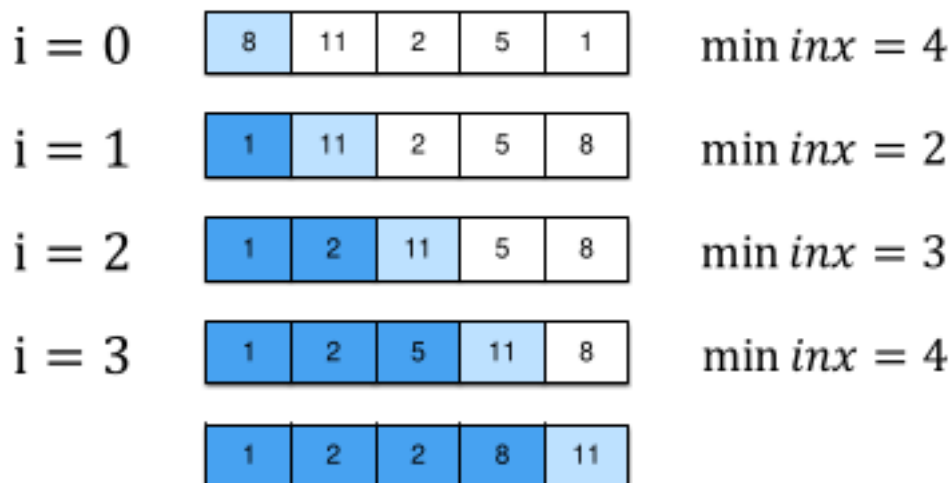


Figura 18: Selection Sort Fluxo do Programa

IMPLEMENTAÇÃO
C++

```

1 void selectionSort(int v[], int n) {
2     for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
3         int minInx = i;
4         for (int j = i + 1; j < n; j++) {
5             if (v[j] < v[minInx]) {
6                 minInx = j;
7             }
8         }
9         swap(v, i, minInx);
10    }
11 }
```

Para avaliar o seu desempenho, podemos montar seu custo total utilizando vendo que, a cada iteração, eu vou avaliar um elemento a menos, de forma que podemos expressar a **função de complexidade** como:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 + 0 \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n - 1)}{2}
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Ou seja, obtemos que $T(n) = \Theta(n^2)$, que também é a complexidade no melhor caso

5.3 Insertion Sort

Muito parecido com o algoritmo de **Selection Sort**, porém, eu vou fixar uma posição i e avaliar o valor naquela posição, e procurar dentre as posições $[0, i - 1]$ qual deveria ser a posição que o valor da posição i deveria estar

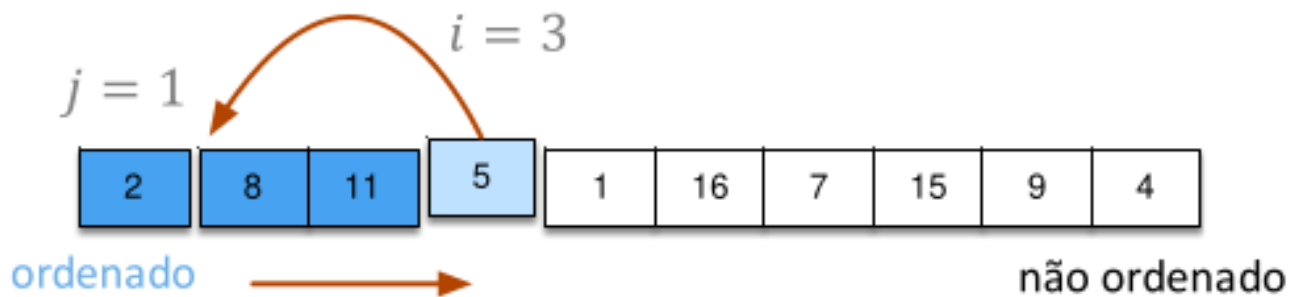


Figura 19: Insertion Sort Exemplificação

Exemplo:

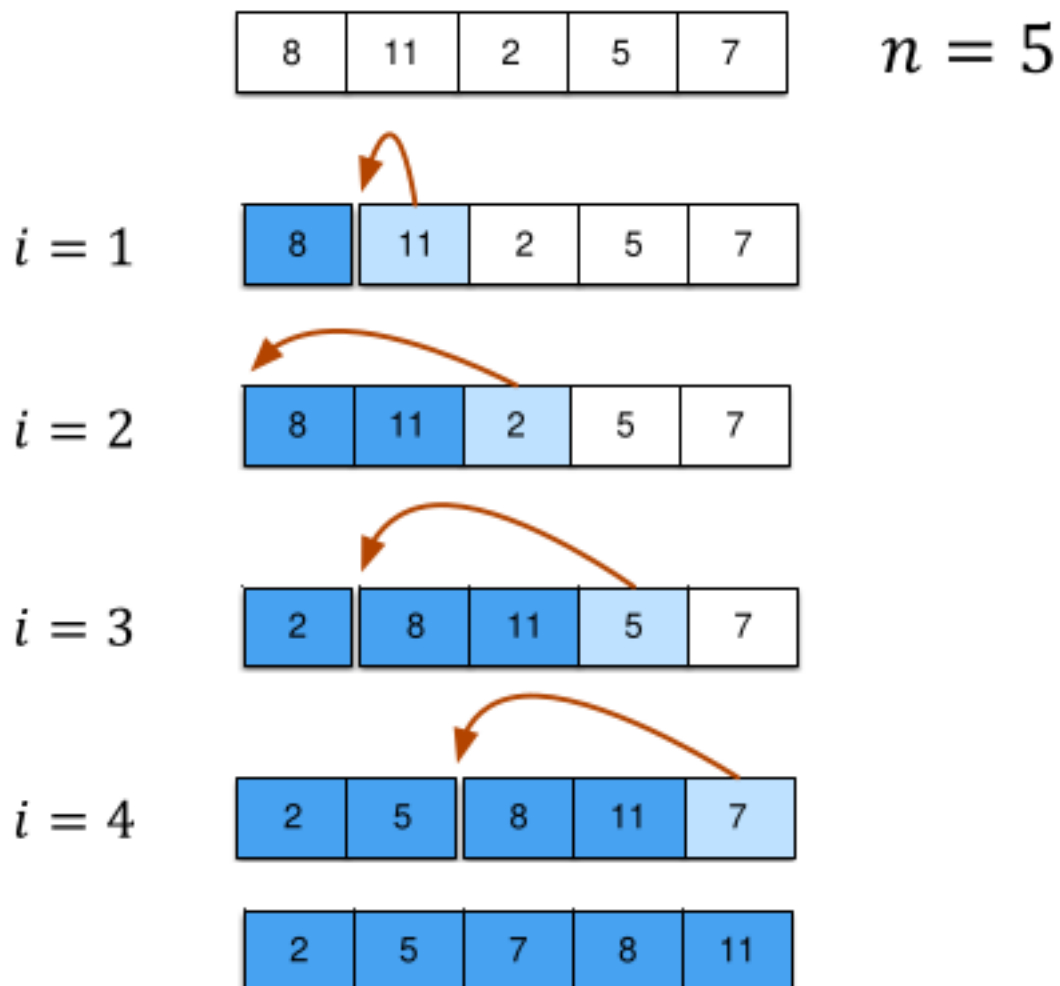


Figura 20: Insertion Sort Exemplo

IMPLEMENTAÇÃO

C++

```
1 void insertionSort(int v[], int n) {  
2     for (int i = 1; i < n; i++) {  
3         int currentValue = v[i];  
4         int j;
```

```

5     for (j = i - 1; j >= 0 && v[j] > currentValue; j--) {
6         v[j + 1] = v[j];
7     }
8     v[j + 1] = currentValue;
9 }
10 }

```

A complexidade desse algoritmo também é expressa na forma:

$$T(n) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2) \quad (31)$$

Porém, no melhor caso, temos que $T(n) = \Theta(n)$

5.4 Mergesort

O algoritmo Mergesort consiste em dividir a sequência em duas partes, executar chamadas recursivas para cada sub-sequência, e juntá-las (merge) de forma ordenada. Esse algoritmo depende de um algoritmo auxiliar de intercalação (merge)

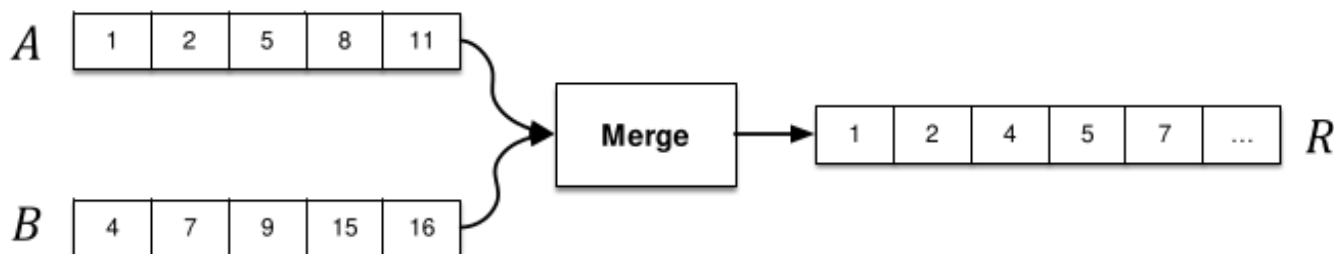


Figura 21: Mergesort Exemplificação

EXEMPLIFICAÇÃO DA FUNÇÃO DE INTERCALAÇÃO

C++

```

1 void merge(int v[], int startA, int startB, int endB)
2 {
3     int r[endB - startA];
4     int aInx = startA;
5     int bInx = startB;
6     int rInx = 0;
7     while (aInx < startB && bInx < endB) {
8         r[rInx++] = v[aInx] <= v[bInx] ? v[aInx++] : v[bInx++];
9     }
10    while (aInx < startB) { r[rInx++] = v[aInx++]; }
11    while (bInx < endB) { r[rInx++] = v[bInx++]; }
12    for (aInx = startA; aInx < endB; ++aInx) {
13        v[aInx] = r[aInx - startA];
14    }
15 }

```

Dado que cada sequência tem n entradas, são executadas $2n$ operações, logo, a complexidade é

$$T(n) = \Theta(n) \quad (32)$$

O algoritmo consiste em dividir a sequência R em duas subsequências A e B . Eu recursivamente ordeno essas duas sequências e repito o processo até que R esteja ordenado

IMPLEMENTAÇÃO

C++

```

1 void mergeSort(int v[], int startInx, int endInx) {
2   if (startInx < endInx - 1) {
3     int midInx = (startInx + endInx) / 2;
4     mergeSort(v, startInx, midInx);
5     mergeSort(v, midInx, endInx);
6     merge(v, startInx, midInx, endInx);
7   }
8 }

```

Podemos então avaliar a função de complexidade:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \quad (33)$$

E já vimos em capítulos anteriores que isso é $T(n) = \Theta(n \log(n))$. Perceba que ele não compara todos os pares mesmo no pior caso, porém, ele exige um espaço de memória $O(n)$ **adicional** para a ordenação

5.5 Quicksort

Um tipo de mergesort, mas contém um algoritmo auxiliar específico, com exceção também que buscamos um algoritmo que não necessite dos $O(n)$ de espaço adicional. O algoritmo escolhe um elemento, o qual chamamos de **pivô**, e separamos em duas partições. Os elementos maiores e menores que o **pivô**

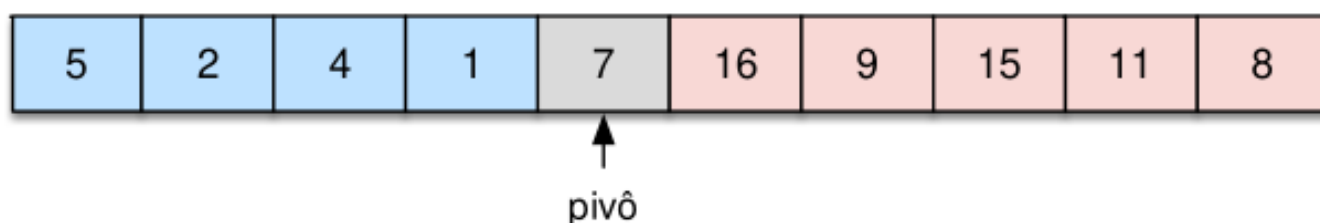


Figura 22: Exemplificação Quicksort

Então resumimos o problema do particionamento como:

Dada uma sequência v e um intervalo $[p, \dots, r]$ transponha elementos desse intervalo de forma que ao retornar um índice j (pivô) tenhamos:

$$v[p, \dots, j-1] \leq v[j] \leq v[j+1, \dots, r] \quad (34)$$

Uma solução muito comum segue o seguinte:

```

1 função particionamento( $v \in \mathbb{R}^r$ ) {
2   var pivô =  $v[r]$ 
3   var j = r
4   percorrer sequência avaliando cada posição  $i \in [p, r-1]$  {
5     se  $v[i] \leq \text{pivô}$  {
6       trocar  $v[i]$  e  $v[j]$ 
7        $j = j + 1$ 
8     }
9   }
10 }

```

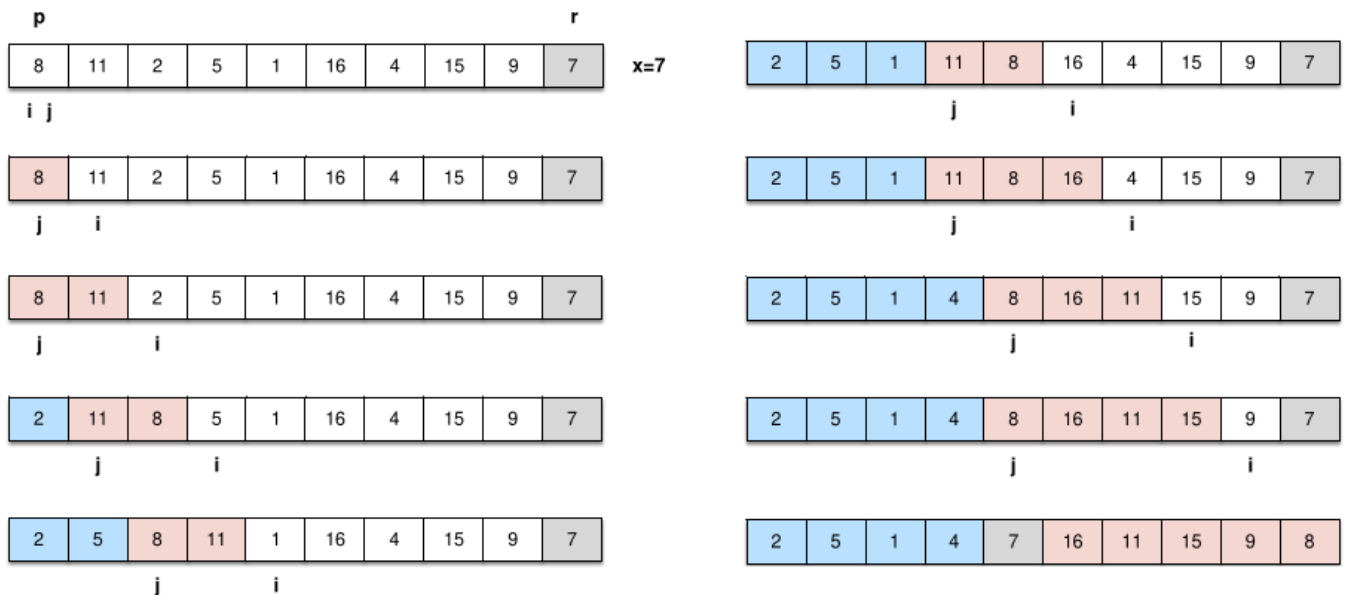


Figura 23: Exemplo visual do algoritmo quicksort

IMPLEMENTAÇÃO

C++

```

1  #define swap(v, i, j) { int temp = v[i]; v[i] = v[j]; v[j] = temp; }
2  int partition(int v[], int p, int r) {
3      int pivot = v[r];
4      int j = p;
5      for (int i=p; i < r; i++) {
6          if (v[i] <= pivot) {
7              swap(v, i, j);
8              j++;
9          }
10     }
11     swap(v, j, r);
12     return j;
13 }

```

Como a sequência de n elementos é percorrida uma única vez executando operações constantes, temos que $T(n) = \Theta(n)$

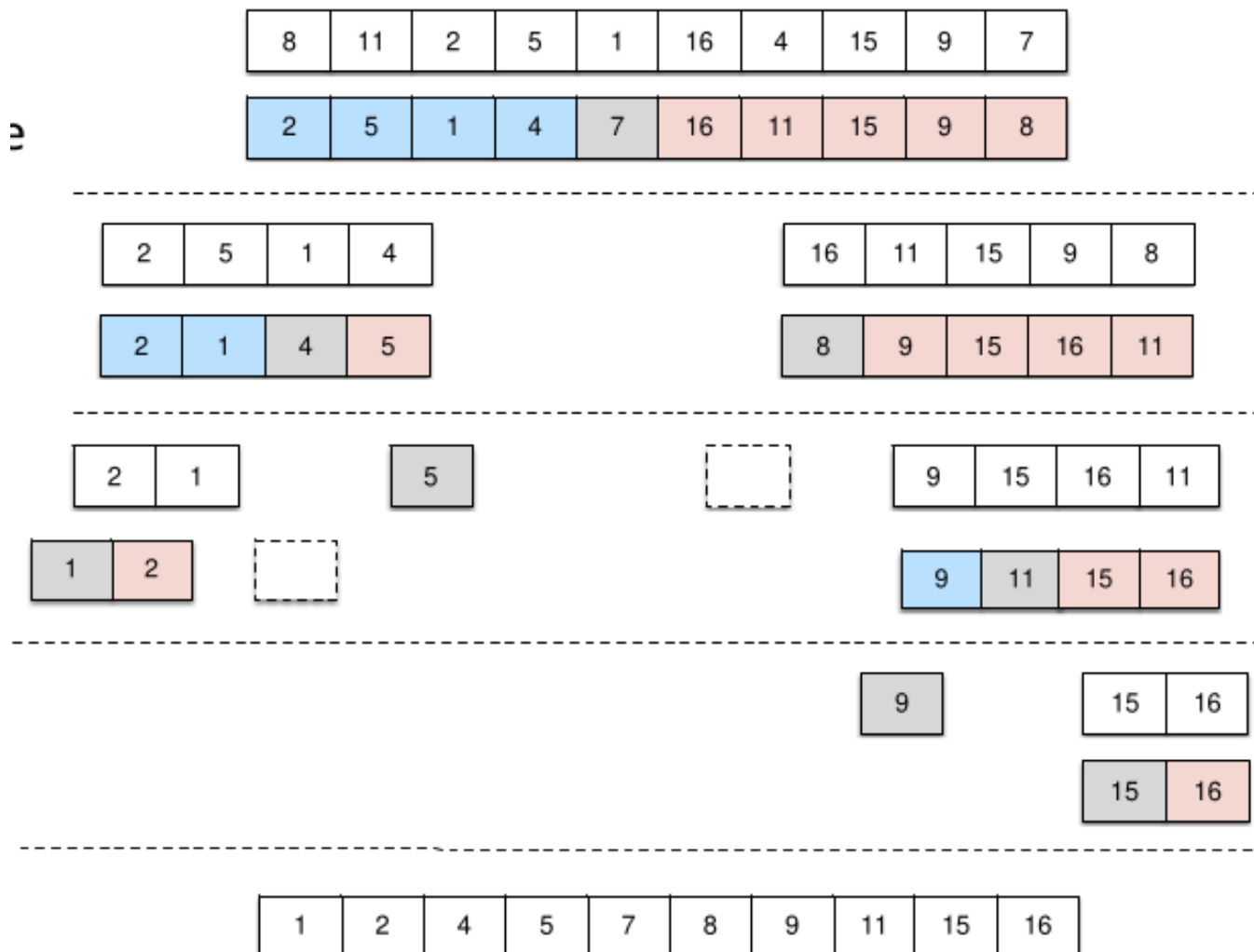


Figura 24: Passo-a-passo do algoritmo

IMPLEMENTAÇÃO

C++

```
1 void quicksort(int v[], int p, int r) {
2     if (p < r) {
3         int j = part(v, p, r);
4     }
5 }
6 quicksort(v, 0, n - 1);
```

Temos que sua função de complexidade é tal que:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(j) + T(n - j - 1) + n \\
 &= T(0) + 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n \\
 &= \frac{n(n + 1)}{2} \\
 &= \Theta(n^2)
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

O pior caso acontece quando o pivô é o último/primeiro elemento e ele é o maior/menor elemento, já que uma partição fica vazia

Já o melhor caso ocorre quando o algoritmo sempre divide todas as partições ao meio

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n = \Theta(n \log(n))
 \tag{36}$$

Já o caso médio ocorre quando o algoritmo divide em partições de tamanho diferente. Imagine que o algoritmo divide em partições do tipo $0.1n$ e $0.9n$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{10}\right) + T\left(\frac{9n}{10}\right) + n \quad (37)$$

Podemos avaliar como $\Theta(n \log(n))$, ou seja, é o mesmo caso do melhor caso possível, mas tem uma constante maior. Ou seja, conseguimos perceber que o desempenho do algoritmo depende **da escolha do pivô**. O pior caso é $\Theta(n^2)$, porém só ocorre em casos muito extremos

5.6 Heapsort

O algoritmo Heapsort consiste em organizar os elementos em um heap binário e reinseri-los utilizando uma estratégia semelhante à do algoritmo de ordenação por seleção.

O heap (monte) é uma estrutura de dados capaz de representar um vetor sob a forma de uma árvore binária, que apresenta as seguintes propriedades:

- É uma árvore quase completa
- Todos os níveis devem estar preenchidos exceto pelo último.
- É mínimo ou máximo
 - Heap mínimo – cada filho será maior ou igual ao seu pai.
 - Heap máximo – cada filho será menor ou igual ao seu pai.

Por enquanto, vamos considerar os **heaps máximos**. A altura de um **heap** com n nós é dada por $\lfloor \log_2(n) \rfloor$. Podemos representar um heap utilizando um **array**, de forma que ele segue as seguintes regras:

- O índice 1 é a raiz da árvore
- O pai de qualquer índice p é $\frac{p}{2}$, com exceção do nó raiz
- O filho esquerdo de um nó p é $2p$
- O filho direito de um nó p é $2p + 1$

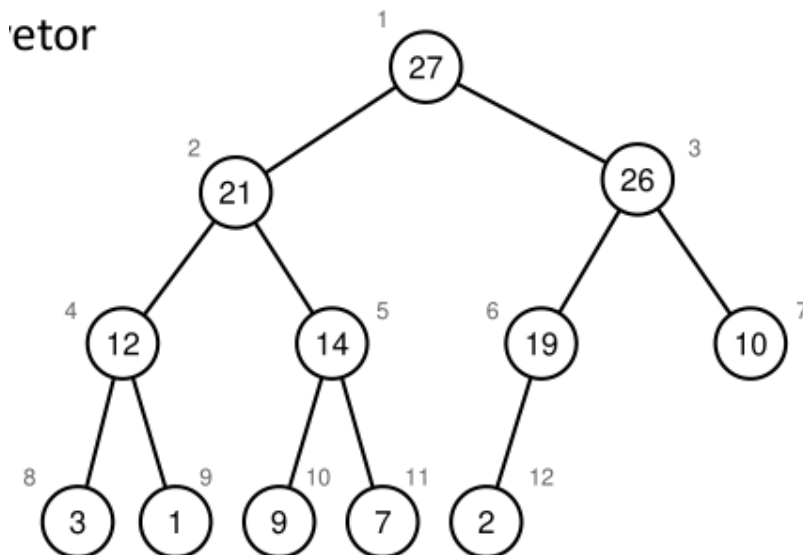


Figura 25: Exemplo de HEAP

27	21	26	12	14	19	10	3	1	9	7	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Figura 26: Forma da Figura 25 como vetor

Podeos ordenar uma árvore em um heap caso as propriedades do vetor não sejam satisfeitas. Podemos utilizar do algoritmo **max-heapify**

- Assume-se que as sub-árvores do nó são heaps-máximos.
- Caso $v[p]$ seja menor que $v[2p]$ ou $v[2p + 1]$ escolhe o maior e executa a troca.
- Em seguida executa max-heapify recursivamente no nó filho alterado.

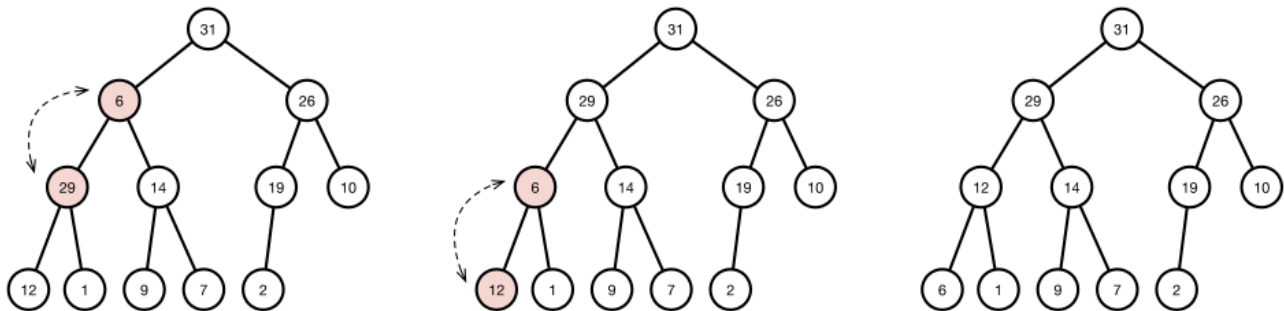


Figura 27: Visualização do algoritmo **max-heapify**

IMPLEMENTAÇÃO

C++

```
1 void heapify(int v[], int n, int i) {
2     int inx = i;
3     int leftInx = 2 * i + 1;
4     int rightInx = 2 * i + 2;
5     if ((leftInx < n) && (v[leftInx] > v[inx])) {
6         inx = leftInx;
7     }
8     if ((rightInx < n) && (v[rightInx] > v[inx])) {
9         inx = rightInx;
10    }
11    if (inx != i) {
12        swap(v, i, inx);
13        heapify(v, n, inx);
14    }
15 }
```

A complexidade desse algoritmo é $T(n) = O(\log n)$.

Dado o devido contexto sobre os **heaps**, vamos voltar para o algoritmo de **heapsort**. Esse algoritmo tem dois passos principais:

1. Organizar o vetor de entradas em um **heap**
2. Ordenar os elementos executando os seguintes passos para $v[n, \dots, 1]$:
 - Trocar o elemento atual $v[i]$ pela raiz $v[1]$ ($v[1]$ é o maior elemento do heap)
 - Corrigir o **heap** usando o **heapify** para a raiz

IMPLEMENTAÇÃO

C++

```
1 void buildHeap(int v[], int n) {
2     for (int i=(n/2-1); i >= 0; i--) {
3         heapify(v, n, i);
4     }
5 }
6 void heapSort(int v[], int n) {
7     buildHeap(v, n);
8     for (int i=n-1; i > 0; i--) {
```



```

9     swap(v, 0, i);
10    heapify(v, i, 0);
11 }
12 }

```

Para analisar o desempenho, podemos fazer o seguinte:

- **Construção do heap:** Executa um **heapify** em um vetor de $\approx n/2$ posições, logo $O(n \log(n))$
- **Ordenação:** Executa o **heapify** para cada elemento em um vetor de $n - 1$ posições, logo, temos um $O(n \log(n))$

No final, somando tudo, temos que $T(n) = \Theta(n \log(n))$. Melhorando um pouco a argumentação sobre a etapa de construção do heap, vamos analisar **aproximadamente**

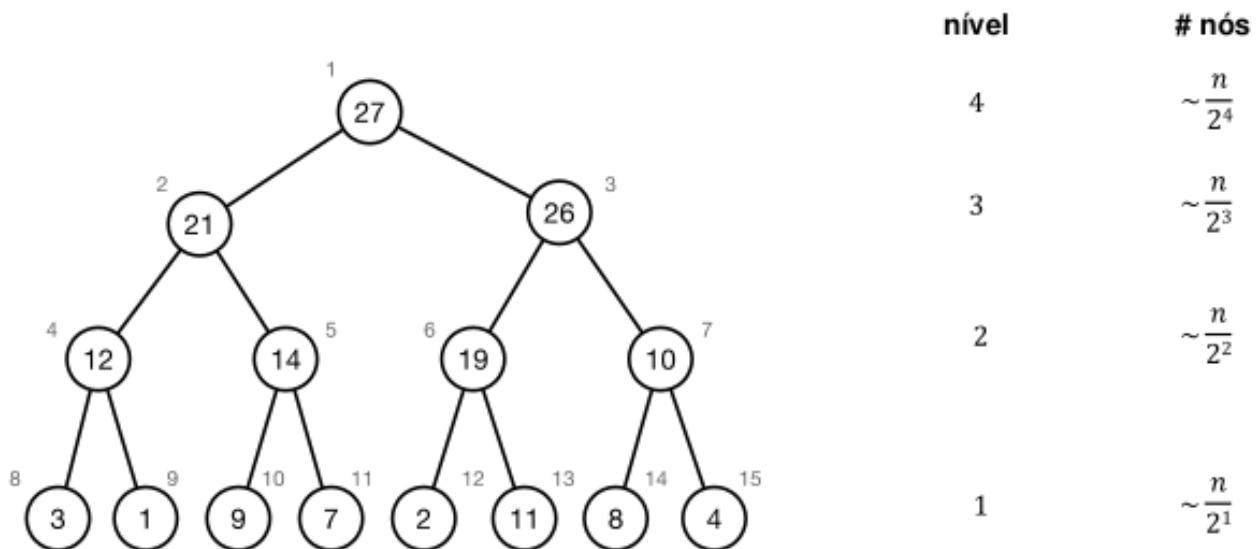


Figura 28: Aproximação de um HEAP

Cada nível i , de baixo para cima, tem aproximadamente $n/2^i$ nós, ou seja, o custo total vai ser:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{\log(n)} i \cdot \frac{n}{2^i} = O(n) \quad (38)$$

5.7 Counting Sort

O algoritmo de ordenação por contagem (counting sort) consiste em computar para cada elemento quantos elementos menores existem na sequência

- Sabendo que o elemento v_i possui j elementos menores do que ele, podemos definir sua posição final como $j + 1$

Vamos enunciar novamente nosso problema: desejamos ordenar os elementos do vetor $v[0, \dots, n - 1]$ considerando as seguintes restrições:

- Os elementos são números inteiros.
- Os números estão presentes no intervalo $[0, \dots, k - 1]$
- O universo possui tamanho k .
- k é pequeno

v	5	2	4	5	1	3	1	1	5	0	4
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

$n = 11$

$k = 6$

Figura 29: Array de Exemplo

Nesse exemplo, temos um total de 11 elementos e 6 opções entre eles (Os elementos vão de 0 à 5)

	0	1	2	3	4	5
f	1	3	1	1	2	3

Figura 30:

Criamos então um a **sequência auxiliar** de tamanho k , nessa sequência, cada índice representa um elemento específico do array e os elemento representam **quantas vezes esses elementos aparecem na lista original**. Com essa sequência f , vamos gerar **outra** sequência auxiliar sf , de tal forma que:

$$sf_i = \sum_{j=0}^{i-1} f[j] = f[i-1] + sf[i-1] \quad (i > 0) \quad (39)$$

Ou seja, o elemento i de sf é a **quantidade de elementos menores que i**

	0	1	2	3	4	5	6
f	1	3	1	1	2	3	
sf	0	1	4	5	6	8	11

Figura 31: Segunda lista auxiliar sf

Então, utilizando sf , podemos criar uma nova lista ordenada, de forma que o elemento $i \in [0, k]$ estará localizado no índice sf_i

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	2	3	4	4	5	5	5

Figura 32: Lista ordenada

IMPLEMENTAÇÃO

C++

```
1 void countingSort(int v[], int n, int k) {
2     int fs[k + 1];
3     int temp[n];
4     for (int j = 0; j <= k; j++) {
5         fs[j] = 0;
6     }
7     for (int i = 0; i < n; i++) {
8         fs[v[i] + 1] += 1;
9     }
10    for (int j = 1; j <= k; j++) {
```

```

11     fs[j] += fs[j - 1];
12 }
13 for (int i = 0; i < n; i++) {
14     int j = v[i];
15     temp[fs[j]] = v[i];
16     fs[j]++;
17 }
18 for (int i = 0; i < n; i++) {
19     v[i] = temp[i];
20 }
21 }

```

Podemos avaliar o desempenho do algoritmo Counting Sort através da seguinte função:

$$\begin{aligned}
 f(n, k) &= c_1 k + c_2 n + c_3 k + c_4 n + c_5 n \\
 &= (c_1 + c_3)k + (c_2 + c_4 + c_5)n \\
 &= \Theta(k + n)
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Exige $O(n + k)$ de espaço adicional. Portanto, se k for muito pequeno a complexidade será $\Theta(n)$. É considerado um algoritmo eficiente para ordenar sequências com elementos repetidos.

5.8 Radix Sort

O algoritmo Radix sort consiste em ordenar os elementos de uma sequência dígito à dígito, do menos significativo para o mais significativo. Considera que cada elemento é uma sequência com w dígitos (Todos os elementos precisam ter w dígitos). Embora o termo dígito remeta à números do conjunto $\{0, 1, \dots, 9\}$, podemos utilizar qualquer valor que possa ser mapeado em um inteiro

L A Y 5 0 2 1	D E M 2 2 0 1	L A Y 5 0 2 1	L I T 1 2 3 4	C A L 8 8 5 4	C A L 8 8 5 4	B A N 9 3 2 3
D E M 2 2 0 1	B A Y 7 2 1 8	F I N 5 0 2 8	D E M 2 2 0 1	D E M 2 2 0 1	B A N 9 3 2 3	B A Y 7 2 1 8
B A N 9 3 2 3	L A Y 5 0 2 1	D E M 2 2 0 1	B D T 2 3 2 9	F I N 5 0 2 8	L A Y 5 0 2 1	B D T 2 3 2 9
O D S 9 9 8 3	B A N 9 3 2 3	B A Y 7 2 1 8	O E S 3 9 2 6	B A N 9 3 2 3	B A Y 7 2 1 8	C A L 8 8 5 4
C A L 8 8 5 4	O E S 3 9 2 6	L I T 1 2 3 4	L A Y 5 0 2 1	O E S 3 9 2 6	O D S 9 9 8 3	D E M 2 2 0 1
L I T 1 2 3 4	F I N 5 0 2 8	B A N 9 3 2 3	F I N 5 0 2 8	O D S 9 9 8 3	B D T 2 3 2 9	F I N 5 0 2 8
O E S 3 9 2 6	B D T 2 3 2 9	B D T 2 3 2 9	B A Y 7 2 1 8	L I T 1 2 3 4	D E M 2 2 0 1	L A Y 5 0 2 1
F I N 5 0 2 8	L I T 1 2 3 4	C A L 8 8 5 4	C A L 8 8 5 4	B D T 2 3 2 9	O E S 3 9 2 6	L I T 1 2 3 4
B A Y 7 2 1 8	C A L 8 8 5 4	O E S 3 9 2 6	B A N 9 3 2 3	L A Y 5 0 2 1	F I N 5 0 2 8	O D S 9 9 8 3
B D T 2 3 2 9	O D S 9 9 8 3	O D S 9 9 8 3	O D S 9 9 8 3	B A Y 7 2 1 8	L I T 1 2 3 4	O E S 3 9 2 6

Figura 33: Radix Sort exemplo

IMPLEMENTAÇÃO

C++

```

1 void radixSort(unsigned char * v[], int n, int W, int K) {
2     int fp [K + 1];
3     unsigned char* aux[n];
4     for (int w = W - 1; w >= 0; w--) {
5         for (int j = 0; j <= K; j++) { fp[j] = 0; }
6         for (int i = 0; i < n; i++) {
7             fp[v[i][w] + 1] += 1;
8         }
9         for (int j = 1; j <= K; j++) { fp[j] += fp[j - 1]; }
10        for (int i = 0; i < n; i++) {
11            int j = v[i][w];
12            aux[fp[j]] = v[i];

```

```

13     fp[j]++;
14 }
15 for (int i = 0; i < n; i++) { v[i] = aux[i]; }
16 }
17 }

```

Podemos avaliar o desempenho do algoritmo Radix Sort através da seguinte função:

$$\begin{aligned}
 f(n, k, w) &= w(c_1 k + c_2 n + c_3 k + c_4 n + c_5 n) \\
 &= w((c_1 + c_3)k + (c_2 + c_4 + c_5)n) \\
 &= \Theta(w(k + n))
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Exige $O(n + k)$ de espaço adicional. Se k e w forem pequenos a complexidade pode ser avaliada como $\Theta(n)$.

5.9 Bucket Sort

Esse algoritmo vai utilizar de hash tables para fazer ordenação de números **fracionários**. Vamos pegar uma sequência v com n elementos e dividi-la em n grupos (baldes)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.75	0.12	0.91	0.31	0.80	0.20	0.37	0.73	0.54	0.32

Figura 34: Lista de valores em $[0, 1)$

Vamos pressupor que os valores estão **todos** entre $[0, 1]$

- Criar um vetor b com tamanho n
 - Cada elemento de b é uma lista encadeada
- Para cada elemento $v[i]$
 - Inserir em b na posição $\lfloor n \cdot v[i] \rfloor$
- Para cada lista $b[i]$
 - Ordenar os seus elementos utilizando algum algoritmo conhecido
 - Ex: Insertion Sort
- Para cada lista $b[i]$
 - Para cada elemento j de $b[i]$
 - Inserir na lista original v

```

1 void bucketSort(float v[], int n) {
2     vector<float> b[n];
3     for (int i = 0; i < n; i++) {
4         int inx = n * v[i];
5         b[inx].push_back(v[i]);
6     }
7     for (int i = 0; i < n; i++) {
8         insertionSort(b[i]);
9     }
10    int index = 0;
11    for (int i = 0; i < n; i++) {
12        for (int j = 0; j < b[i].size(); j++) {
13            v[index++] = b[i][j];
14        }

```

15	}
16	}

Podemos avaliar o desempenho do algoritmo através da seguinte função:

$$T(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} n_i^2 \quad (42)$$

Portanto, temos que:

- O melhor caso é $\Theta(n)$ - cada balde recebe exatamente um elemento.
- O pior caso é $\Theta(n^2)$ - um único balde recebe n elementos.
- O caso médio é $\Theta(n)$ - considerando a distribuição uniforme esperada, poucos elementos caem no mesmo balde.
- Exige $O(n)$ de espaço adicional.