ÁLGEBRA LINEAR NUMÉRICA

18/02/25

NORMAS

NORMAS P DE VETORES

- DADO UM VETOR $x \in \mathbb{R}^n$, DEFINIMOS A "NORMA P" COMO:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1 \cdots n} |x_i|$$

- TAMBÉM TEMOS A NORMA P PONDERADA, ONDE CADA COORDENADA DO VETOR TEM SEU PESO:

$$\|x\|_W = \|Wx\|$$ → W É A MATRIZ DIAGONAL ONDE CADA ENTRADA É UM PESO

NORMAS DE MATRIZES INDUZIDAS POR NORMAS VETORIAIS

- PODEMOS VER UMA MATRIZ $m \times n$ COMO UM VETOR NUM ESPAÇO mn-DIMENSIONAL E CADA UMA DAS mn ENTRADAS DA MATRIZ É UMA COORDENADA INDEPENDENTE.

- DADAS AS NORMAS $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ E $C(A)$ COM $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, A NORMA INDUZIDA DE A DE P PRA Q ($\|A\|_{p\to q}$) É O MENOR NÚMERO C DO QUAL A DESIGUALDADE SE MANTÉM

$$\|Ax\|_p \leq C\|x\|_q$$

- OU SEJA, É A MAIOR DAS RAZÕES $\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_q}$ DE TODO $x \in \mathbb{C}^n$, OU SEJA, O MAIOR VALOR NO QUAL A MATRIZ A PODE ESTICAR UM VETOR DO $\mathbb{C}^n$. ENTÃO PODEMOS DEFINIR A NORMA DA MATRIZ COMO

$$\|A\|_{p\to q} := \sup \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_q} \quad \text{com } \|x\|_q = 1 \quad = \sup \|Ax\|_p$$

TEOREMA

$$\sup\{\|Ax\|_q \;/\; \|x\|_p = 1\} = \sup\{\|Ay\|_q \;/\; \|y\|_p \le 1\} = N$$

(I)

DEM

SEJA $x = \dfrac{y}{\|y\|_p} \cdot \|x\|_p = \left|\dfrac{1}{\|y\|_p}\right| \cdot \|y_p\| = 1$ $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow Ay = 0 \text{ e } \|Ay\|_q = 0 \\ y \neq 0 \Rightarrow \ldots \end{cases}$

(I)

$$\|Ax\|_q \le N \Rightarrow \|Ay\|_q = \|A \cdot \|y\|_p \cdot x\|_q = \underbrace{\|y\|_p}_{\le 1} \cdot \underbrace{\|Ax\|_q}_{\le N} \le 1 \cdot N$$

DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ E HÖLDER

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad \text{PARA} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

DELIMITANDO A NORMA INDUZIDA

- SEJA $\|\cdot\|_\ell$, $\|\cdot\|_m$ E $\|\cdot\|_n$ NORMAS DO ESPAÇO $\mathbb{C}^\ell$, $\mathbb{C}^m$ E $\mathbb{C}^n$ E SEJA $A \in \mathbb{C}^{\ell \times m}$ E $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. PARA TODO $x \in \mathbb{C}^n$ TEMOS:

$$\|ABx\|_\ell \le \|A\|_{\ell \to m} \|Bx\|_m \le \|A\|_{\ell \to m} \|B\|_{m \to n} \|x\|_n$$

- LOGO A NORMA INDUZIDA DE AB DEVE SATISFAZER

$$\|AB\|_{\ell \to n} \le \|A\|_{\ell \to m} \cdot \|B\|_{m \to n}$$

NORMA GERAL DE MATRIZES

- AS NORMAS DE MATRIZES NÃO PRECISAM SER INDUZIDAS POR NORMAS DE VETORES. BASTA QUE ELAS SATISFAÇAM AS SEGUINTES CONDIÇÕES:

1º) $\|A\| \ge 0$ E $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2º) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

3º) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

- Uma norma importante é a norma de Frobenius

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{tr(AA^H)} = \sqrt{tr(A^H A)}$$

Invariância na multiplicação por ortogonal

- Propriedade da norma 2 de matrizes, onde assim como $\|Qx\| = \|x\|$, $\|QA\|_2 = \|A\|_2$

Teorema

$$\|QA\|_2 = \|A\|_2 \quad , \quad \|QA\|_F = \|A\|_F$$

Dem

Como $\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$

$$\|QA\|_{2\to 2} = \sup\left\{\frac{\|QAx\|_2}{\|x\|_2} \;/\; \|x\|_2 = 1\right\}, \text{ porém } \|QAx\|_2 = \|Ax\|_2$$

logo $\|QA\|_2 = \|A\|_2$

Para $\|QA\|_F = \|A\|_F \rightarrow \sqrt{tr(A^H \cancel{Q^H Q} A)} = \sqrt{tr(A^H A)} = \|A\|_F$