Álgebra Linear

09/09

Transformação Linear

DEF: Sejam U e V espaços vetoriais $T: U \to V$ é uma transformação linear se:

(Função Vetorial)

$$\begin{cases} T(u+w) = T(u) + T(w) & \forall u, w \in U \\ T(\alpha u) = \alpha T(u) & \forall u \in U, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

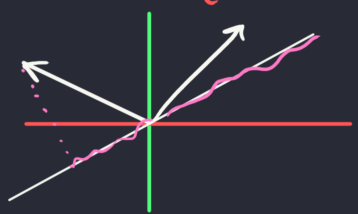
- Propriedades

  - $T(0) = 0$

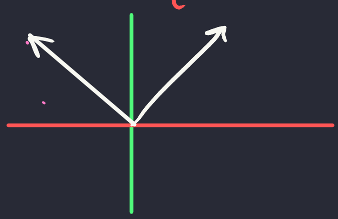
    $T(0) = T(0 \cdot u) = 0 \cdot T(u) = 0$

- Exemplos:

  - Projeção:



  - Rotação



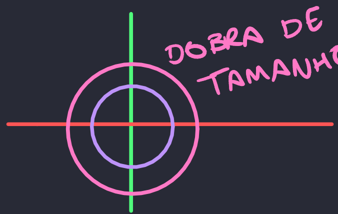
  - Derivação

    $D: P^n \to P^n$ → espaço dos polinômios

    $D(p) = \dfrac{\partial p}{\partial x}$

- Realizando transformações, podemos visualizar o que acontece com os elementos do espaço:

  - $T(v) = 2 \cdot v$



DOBRA DE TAMANHO

- Uma transformação linear muito importante é:

$$\underset{m\times n}{T(v) = A}\ \underset{n\times 1}{v} \quad \begin{cases} T(u+v) = A(u+v) = Au + Av \ \checkmark \\ T(cu) = A \cdot c \cdot u = c \cdot Au \ \checkmark \end{cases}$$

- Isso mostra que multiplicações de matrizes são transformações lineares. A ideia então é associar toda transformação linear a uma matriz.

  - Dada $T: U \to V$, tal que U tem base

    $\{u_1, \dots, u_n\}$

  - Se você conhece todos os elementos da base de u, você também conhece todos de V

DEM:

Se base de $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ então $\forall u \in U$,

$u = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$. Logo, $\forall v \in V$; $v = T(\sum_{k=1}^{n} x_k u_k)$

$V = T(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n)$ logo $V = x_1 T(u_1) + \dots + x_n T(u_n)$

Consequentemente, base de $V = \{T(u_1) \dots T(u_n)\}$

- Ok, se sabemos o que a transformação faz com a base, sabemos todos os elementos de V.

- Porém, podemos, também, escrever os vetores de entrada a partir da base do espaço V:

Dada $T: U \to V$ com $T(u) = Au$ e base de $v = \{v_1, \dots, v_m\}$

Temos que

$$T(u_j) = a_{1j} v_1 + \dots + a_{mj} v_m$$

Logo:

$$T(u_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(u_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j v_i = \sum_{i=1}^{m} (Ax)_i v_i$$

Composição de Transformações

- Seja $T_1: \overset{m}{V} \longrightarrow \overset{p}{W}$ e $T_2: \overset{n}{U} \longrightarrow \overset{m}{V}$ duas transformações lineares com matrizes A e B.

- Então

$$T_1 \circ T_2 (u) = T_1(T_2(u)) = ABu$$

DEM

$$\left.\begin{array}{l} V \to \text{span}(\{v_1, \dots, v_m\}) \\ W \to \text{span}(\{w_1, \dots, w_p\}) \\ U \to \text{span}(\{u_1, \dots, u_n\}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} T_2(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_j v_i \Rightarrow u = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \\ T_1(v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} a_{ki} y_i w_i \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i \end{array}$$

Denote C a matriz $T_1 \circ T_2 : U \longrightarrow W$

Queremos mostrar que $C = AB$

$$(T_1 \circ T_2)(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{kj} x_j w_k \quad \text{onde } u = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j$$

$$\|$$

$$T_1(T_2(u)) \qquad T_2(u) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\boxed{\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j}}_{y_i} v_i$$

$$T_1(T_2(u)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} a_{ki} y_i w_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} a_{ki} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \right) w_k$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p}} \boxed{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ki} b_{ij} \right)} \boxed{x_j w_k}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p}} \boxed{c_{kj}} \boxed{x_j w_k}$$

Logo, $\boxed{C = AB}$