

## Projeto 2

### Álgebra Linear Numérica

para 8 de Maio de 2025

**Instruções:** Justifique seu raciocínio e escreva respostas completas. Os resultados de questões anteriores podem ser usados nas questões seguintes.

Explique seu código e comente os gráficos: um gráfico sem referência no texto está “perdido”.

#### Questão 1. Mínimos quadrados para aproximar funções.

Considere um conjunto de pontos igualmente espaçados  $t_i = i/m$  para  $i = 0, \dots, m$ .

- a) **Regressão linear.** Formule o problema de encontrar  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $f(t) = \alpha + \beta t$  seja a melhor aproximação em mínimos quadrados para os pontos  $(t_i, b_i)$ . Ou seja, dê, em função de  $t_i$ ,  $b_i$  e  $m$ , o sistema de equações que devemos resolver para encontrar  $\alpha$  e  $\beta$ .
- b) Calcule (numericamente), para vários valores de  $m$ , o condicionamento da matriz  $A$  correspondente. O que parece acontecer?
- c) **Mais regressores.** Suponha que, além de funções afins, podemos usar polinômios de grau até  $n$ , ou seja, funções da forma  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ . Qual é o sistema que devemos resolver (novamente, em mínimos quadrados) para encontrar os coeficientes  $\alpha_i$ ?
- d) Escreva uma função `poly_ls(m,n)` que calcula a matriz  $A$  correspondente.
- e) Fixe  $m = 100$  e faça  $n$  crescer até 20. O que acontece com o condicionamento de  $A$ ?
- f) **Centralizando.** Use agora  $t_i = i/m - 1/2$ . Modifique a função `poly_ls` e compare graficamente os números de condicionamento.

#### Questão 2. Três algoritmos para mínimos quadrados.

- a) Escreva três funções: `ls_qr(A,b)`, `ls_svd(A,b)` e `ls_normal(A,b)` que resolvem o problema de mínimos quadrados  $Ax = b$  usando, respectivamente, a fatoração QR de  $A$ , a SVD de  $A$ , e o sistema de equações normais. As funções devem retornar o vetor dos coeficientes  $x$  e o ajuste  $y = Ax$ .
- b) Teste os três algoritmos acima para calcular a regressão linear das funções  $f(t) = \sin t$ ,  $g(t) = e^t$ , e  $h(t) = \cos 3t$ , usando 100 pontos igualmente espaçados em  $[0, 1]$ , e usando a sua função `poly_ls`. Faça gráficos das funções e das aproximações obtidas. O que você observa?
- c) Agora, ajuste as mesmas funções, mas usando polinômios de grau até  $n = 15$ . O que acontece conforme o grau aumenta? Todos os três algoritmos dão bons resultados?