Álgebra Linear

25/10/24

Equações de Diferença

- Dado um sistema

$$\begin{cases} u_{k+1} = A u_k \\ u_0 \text{ dado} \end{cases}$$

- Podemos achar qualquer u_k fazendo a seguinte fórmula:

$$u_k = A^k u_0$$

- Se A for diagonalizável

$$u_k = S \Lambda^k S^{-1} u_0$$

- Definindo $v_k = S^{-1} u_k$ temos que:

$$v_k = \Lambda^k v_0$$

Fibonacci

- A sequência $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ com $F_0 = 0$, $F_1 = 1$

Podemos generalizar usando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} \end{bmatrix}$$

- Calculando os autovalores de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ temos

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$$

- ACHANDO OS AUTOVALORES, TEMOS

$$x_1 = \begin{bmatrix} \varphi \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1/\varphi \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ASSIM OBTEMOS S

$$S = \begin{bmatrix} \varphi & -1/\varphi \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- SABEMOS QUE $S v_0 = u_0$ E DENOTE $v_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow u_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

- O TERMO GERAL DA EQUAÇÃO DE DIFERENÇA SERÁ

$$u_k = A^k u_0 \Rightarrow u_k = c_1 A^k x_1 + c_2 A^k x_2$$

$$\begin{cases} c_1 \varphi + c_2 \left(-\frac{1}{\varphi}\right) = 1 \Rightarrow c_1 \left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = 1 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

- APLICANDO C_1 E C_2 NO TERMO GERAL

$$u_k = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^k \cdot \begin{bmatrix} \varphi \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^k \begin{bmatrix} -1/\varphi \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^k = \frac{\varphi^k - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^k}{\sqrt{5}}$$

TERMO GERAL DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI