Álgebra Linear

22/09/24

Matrizes Ortogonais

- Uma matriz é **ortogonal** se suas colunas são ortonormais

- $Q_{m\times n}$ é ortogonal se $Q^TQ = I$ $(m \geq n)$

$$\underset{n\times m}{Q^T}\,\underset{m\times n}{Q} = \begin{bmatrix} - & q_1 & - \\ & \vdots & \\ - & q_n & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ elemento ij $\rightarrow$ se $i=j$, então $q_i \cdot q_i = 1$, se $i \neq j$ $\underline{q_i \cdot q_j = 0}$

- Se Q é quadrada: $Q^TQ = QQ^T = I \therefore Q^{-1} = Q^T$

$Q_{n\times n} \Rightarrow n$ pivôs $\Rightarrow C(Q) = \mathbb{R}^n$

$$Q^TQ = I \Rightarrow \overset{I}{Q^T\cancel{Q \cdot Q^{-1}}} = Q^{-1} \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$$

Exemplos

- Matriz de permutação

  colunas são e_i's

- Matrizes ortogonais no $\mathbb{R}^2$

  podemos escrever no círculo unitário

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$ matriz de rotação

PROPRIEDADES

- PRESERVAM COMPRIMENTO: $\|Qx\| = \|x\|$

$$\|Qx\|^2 = x^T \underbrace{\cancel{Q^T Q}}_{I} x = x^T x = \|x\|^2$$

- COLUNAS SÃO BOAS PARA PROJEÇÃO

$P_{C(A)} = A(A^TA)^{-1}A^T$, QUANDO A É ORTOGONAL ENTÃO

$$P_{C(A)} = AA^T$$