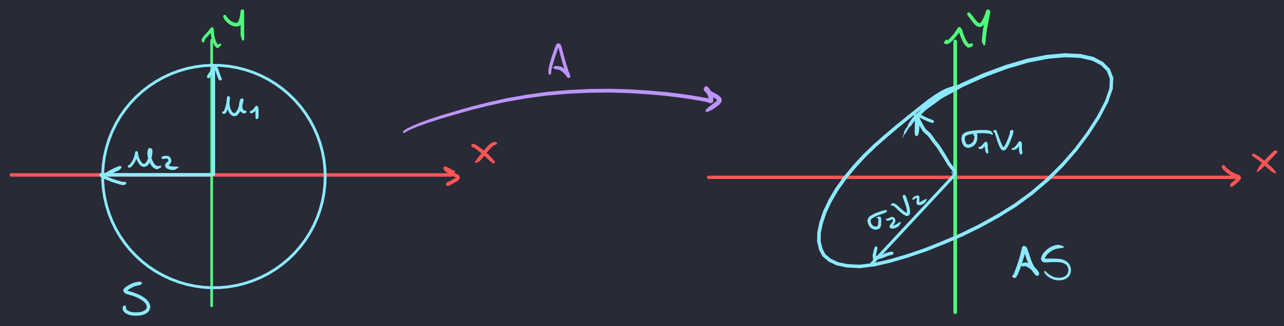
Álgebra Linear Numérica

24/02/25

S.V.D

Visão Geométrica

- A S.V.D, numa representação geométrica, representa uma n-esfera representada por k vetores ortogonais $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$ sendo esticada para uma hiperelípse



- A partir da ideia, definimos a noção base:

$$\text{I} \quad A v_j = \sigma_j u_j$$

▷ $\sigma_j \Rightarrow j$-ésimo valor singular, o tamanho do eixo j da hiperelipse. (Por convenção, anotamos $\sigma_n \geq \sigma_{n-1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0$)

S.V.D reduzida

- Podemos escrever I como uma operação de matrizes

$$A \cdot \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$A \underbrace{V}_{\text{unitária}} = \hat{U} \hat{\Sigma}$$

$$\Rightarrow A = \hat{U} \hat{\Sigma} V^T$$

S.V.D completa

- As colunas de U são n vetores em $\mathbb{C}^m$, que não formam uma base para $\mathbb{C}^m$. Pegamos então $m-n$ vetores unitários e ortogonais entre si, fazendo que U seja unitário, e para completar o produto, adicionamos linhas de 0 em $\hat{\Sigma}$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{bmatrix}}_{m \times m} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \hat{\Sigma} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]}_{m \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{bmatrix}}_{n \times n}$$

Definição Formal

- Seja $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, não-necessariamente de posto-completo, a decomposição S.V.D de A é a fatoração

$$A = U \Sigma V^T$$

$\rightarrow U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é unitária

$\rightarrow \Sigma \in \mathbb{C}^{m \times n}$ é diagonal

$\rightarrow V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é unitária

- É covencional também dizer que as entradas das diagonais σ_j de Σ são em ordem não-crescente, i.e

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_p \geq 0$$

$$p = \min(m, n)$$

Teorema

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ possui uma decomposição S.V.D. Além disso, os valores singulares $\{\sigma_j\}$ são determinados exclusivamente e, se A é quadrada e σ_j são distintos, u_j e v_j são determinados exclusivamen-

TE POR FATORES ESCALARES COMPLEXOS DE VALOR ABSOLUTO 1.

DEM

Seja $\sigma_1 = \|A\|_2$, podemos dizer que existe $v_1 \in \mathbb{C}^n$ e $u_1 \in \mathbb{C}^m$ tais que $\|v_1\|_2 = \|u_1\|_2 = 1$ e $Av_1 = \sigma_1 u_1$. Considere uma extensão qualquer de v_1 para uma base ortonormal $\{v_j\}$ de $\mathbb{C}^n$ e u_1 para uma base ortonormal $\{u_j\}$ de $\mathbb{C}^m$. Deixe V_1 e U_1 serem matrizes unitárias de colunas v_j e u_j respectivamente.

$$\overline{U}_1^T A V_1 = \left.\begin{array}{c}\begin{array}{cc} 1\times 1 & 1\times(n-1) \end{array}\\ \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 & \overline{w}^T \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} (m-1)\times 1 & (m-1)\times(n-1) \end{array}\end{array}\right\} S$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 & \overline{w}^T \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ w \end{bmatrix} \right\|_2 \geq \sigma_1^2 + \overline{w}^T w = (\sigma_1^2 + \overline{w}^T w)^{1/2} \cdot \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ w \end{bmatrix} \right\|$$

$$\Rightarrow \|S\|_2 \geq \sigma_1^2 + \overline{w}^T w$$

Como U_1 e V_1 são unitárias, $\|A\|_2 = \|S\|_2 = \sigma_1$

$$\Rightarrow \|S\|_2 \geq \sigma_1^2 + \overline{w}^T w \Rightarrow \overline{w}^T w = 0 \Rightarrow \boxed{w = 0}$$

Por hipótese indutiva, B tem uma SVD tal que $B = U_2 \Sigma_2 \overline{V}_2^T$, então verificamos que

$$A = U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}}^T \overline{V}_1^T$$

é uma S.V.D de A, concluindo a prova de existência