# ÁLGEBRA LINEAR

30/10/24

## EDO's

- EQUAÇÕES TAIS QUE

$$\begin{cases} f'(t) = \lambda f(t) \Rightarrow f(t) = Ce^{\lambda t} \\ f(0) = f_0 \end{cases}$$

- QUEREMOS RESOLVER SISTEMAS DO TIPO:

$$\begin{cases} u_1'(t) = \lambda_1 u_1(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) = \lambda_n u_n(t) \end{cases}$$

- PODEMOS RESUMIR ISSO EM UM SISTEMA MATRICIAL

$$u'(t) = \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

$$u'(t) = \Lambda u(t)$$

- TAMBÉM TEMOS SISTEMAS MAIS COMPLEXOS ONDE UMA DERIVADA DEPENDE DAS OUTRAS FUNÇÕES

$$\begin{cases} u_1'(t) = a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t) + \dots + a_{1n}u_n(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) = a_{n1}u_1(t) + a_{n2}u_2(t) + \dots + a_{nn}u_n(t) \end{cases}$$

$$u'(t) = Au(t)$$

- PARA RESOLVER ESSE SISTEMA, VAMOS SUPOR $A$ DIAGONALIZÁVEL

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

DEFINA: $v(t) = S^{-1}u(t)$

$$\Rightarrow v'(t) = S^{-1}u'(t) \Rightarrow v'(t) = S^{-1}Au(t)$$

$$\Rightarrow v'(t) = \Lambda v(t)$$

$$\Rightarrow v_i(t) = v_i(0)e^{\lambda_i t}$$

- RESUMINDO O MODO DE RESOLUÇÃO

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) \text{ DADO} \end{cases}$$

- DIAGONALIZA $A$
- CALCULA $v(0) = S^{-1}u(0)$
- CALCULA $v_i(t) = v(0)\cdot e^{\lambda_i t}$
- $u(t) = Sv(t) = x_1v_1(t) + \dots + x_nv_n(t)$

$$S = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

- EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1'(t) = -u_1(t) + 2u_2(t) \\ u_2'(t) = u_1(t) - 2u_2(t) \end{cases}$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -3$

$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\to u(t) = Sv(t) = x_1v_1(t) + x_2v_2(t)$$

$$v_1(t) = v_1(0)\cdot e^{\lambda_1 t} = v_1(0)$$

$$v_2(t) = v_2(0)\cdot e^{\lambda_2 t} = v_2(0)\cdot e^{-3t}$$

LOGO
$$u_1(t) = 2v_1(0) + v_2(0)e^{-3t}$$
$$u_2(t) = v_1(0) - v_2(0)e^{-3t}$$

- A PARTIR DISSO PODEMOS DEFINIR $e^A$ $(A \in M^{n\times m})$

$$v'(t) = \Lambda v(t) \Rightarrow v(t) = e^{\Lambda t} \cdot C$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad e^{\Lambda} := \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v(t) = e^{\Lambda t} \cdot v(0) = e^{\Lambda t} \cdot S^{-1} \cdot u(0)$$

$$\Rightarrow u(t) = S e^{\Lambda t} S^{-1} u(0)$$

$$u'(t) = Au(t) \Rightarrow u'(t) = e^{At} u(t)$$

DEFINIMOS ENTÃO, SE $A$ É DIAGONALIZÁVEL

$$e^A = S e^{\Lambda} S^{-1} \quad \text{ONDE} \quad e^{\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

NOTA: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- OUTRA PROPOSTA SERIA

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = S \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n}{n!} \right) S^{-1}$$