Álgebra Linear

19/08/24

Fatorações

Fatoração LU

- Dada uma matriz A e uma de eliminação E, $\exists E^{-1}$ pois E tem n pivôs, podemos escrever A como:

$$E \cdot A = U \Rightarrow A = E^{-1} \cdot U \Rightarrow A = L \cdot U$$

Exemplo

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - \frac{2}{3}L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} = U$$

$$K = \underbrace{E_{21}^{-1} \cdot E_{32}^{-1}}_{L} \cdot U$$

- Generalizando $n \times n$:

$$E \cdot A = U \Rightarrow E = \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} E_{ij}$$

- Demonstração

Suponha que a decomposição seja verdadeira para $n-1$, vamos mostrar que vale para n.

$n = 1$

$$A = [a]_{1\times1} \quad L = [1]_{1\times1} \quad U = [a]_{1\times1}$$

$$A = LU \checkmark$$

Passo indutivo

$$A_{n\times n} = \left[\begin{array}{ccc|c} & B_{n-1\times n-1} & & a_{1n} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{n-1\,n} \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{array}\right]$$

Por indução

$\exists L_{n-1\times n-1} \wedge U_{n-1\times n-1}$ (ambas invertíveis)

t.q. $B = L_{n-1\times n-1} \cdot U_{n-1\times n-1}$

$$L = \begin{bmatrix} L_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ l_{n-1} & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad U = \begin{bmatrix} U_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 \; \cdots \; 0 & u_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$LU = \begin{bmatrix} L_{n-1} \cdot U_{n-1} = B & L_{n-1} \cdot u_{n-1} \\ l_{n-1} \cdot U_{n-1} & l_{n-1} u_{n-1} + u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} L_{n-1} \cdot u_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{1\,n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow u = L_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{1\,n-1} \end{bmatrix} \\ l_{n-1} \cdot U_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow l_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{bmatrix} \cdot U_{n-1}^{-1} \\ l_{n-1} \cdot u_{n-1} + u_{nn} = a_{nn} \Rightarrow u_{nn} = a_{nn} - l_{n-1} u_{n-1} \end{cases}$$

- Provando a unicidade

▷ Seja A inversível

$$A = LU = \tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow I = L^{-1}(LU)U^{-1} \Rightarrow I = L^{-1}\tilde{L} \cdot \tilde{U} \cdot U^{-1}$$

→ Para a sentença continuar verdadeira, $\tilde{L} = L$ e $\tilde{U} = U$

Fatoração LDU

- Quase igual à LU, porém, D é uma matriz com os pivôs na diagonal enquanto U tem apenas 1's.

Exemplo:

$$\begin{array}{cccc} A & L & D & U \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

• SE A FOR SIMÉTRICA $A^T = A$, ENTÃO $L = U^T$ E $U = L^T$

DEM $A = A^T = LDU = (LDU)^T \Rightarrow A = U^T D L^T$, LOGO, PELO TEOREMA DA UNICIDADE, $U^T = L$ E $U = L^T$.

FATORAÇÃO $A = P^{-1} L U$

• CASO EXISTA TROCA DE LINHA DURANTE O ESCALONAMENTO DE A, PODEMOS DEFINIR A MATRIZ P COMO A MULTIPLICAÇÃO DE TODAS AS PERMUTAÇÕES

$$PA = LU \Rightarrow \boxed{A = P^{-1} \cdot L \cdot U}$$