Álgebra Linear

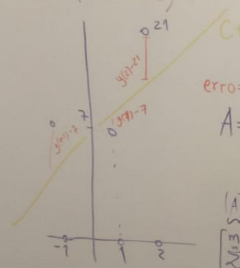
24/09

Lista 8

1. Escreva as 3 equações para a reta $b = C + Dt$ passar pelos pontos $(-1,7)$, $(1,7)$, $(2,21)$. Ache a solução de mínimos quadrados $\hat{x}$ e a projeção $p = A\hat{x}$.

1 $(-1,7)$ $(1,7)$ $(2,21)$

$b = C + Dt$



erro $= (y(2)-21)^2 + (y(1)-7)^2 + (y(-1)-7)^2$

$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$(A^TA)^{-1}A^Tb$

$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} b_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i b_i \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - \frac{2}{3}L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 14/3 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{L_1 - \frac{6}{14}L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 9/7 & -6/14 \\ 0 & 14/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \div 3 \\ \cdot \frac{3}{14} \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{array}\right]$

$\begin{bmatrix} 3/7 & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & 3/14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \therefore \boxed{9 + 4t}$

2. Dado o problema acima, quais dos quatro subespaços fundamentais contêm o vetor erro $e = b - p$? E o vetor p? E o vetor $\hat{x}$? Qual é o núcleo de A?

$Ax = b$

$3 = b - p$

$b = \underbrace{p}_{C(A)} + (b - p)$

Pela decomposição ortogonal, $(b-p) \perp p$, logo $b - p \in N(A^T)$

$\|Ax - b\|^2 = \|Ax - p\|^2 + \|b - p\|^2$

$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$

Como (A^TA) é inversível, tem posto completo logo span(I) gera tanto A^TA como $(A^TA)^{-1}$.

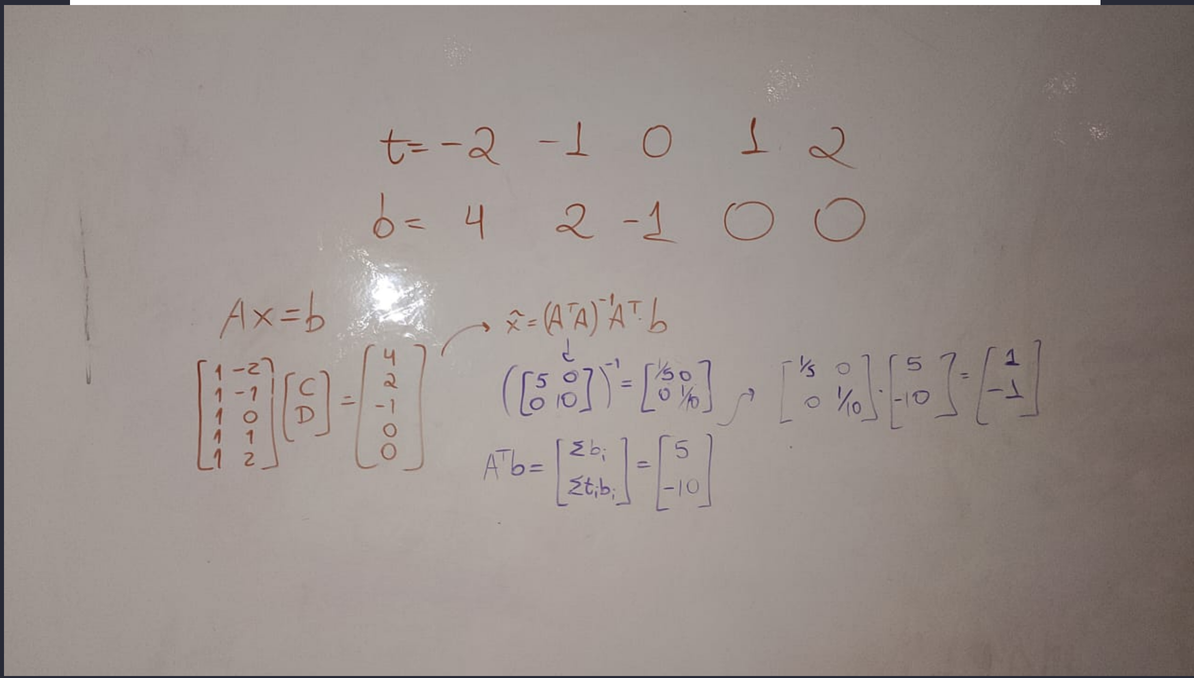
$C(A^TA) = C((A^TA)^{-1})$

$C(A^TA) = C(A^T)$

$\tilde{x} \in C(A^T)$

Como I gera $C(A^T)$, $\dim C(A^T) = \dim C(A)$, mas $A_{m \times n}$, $\dim C(A) = n$, logo $\dim N(A) = 0 \therefore N(A) = \{0\}$

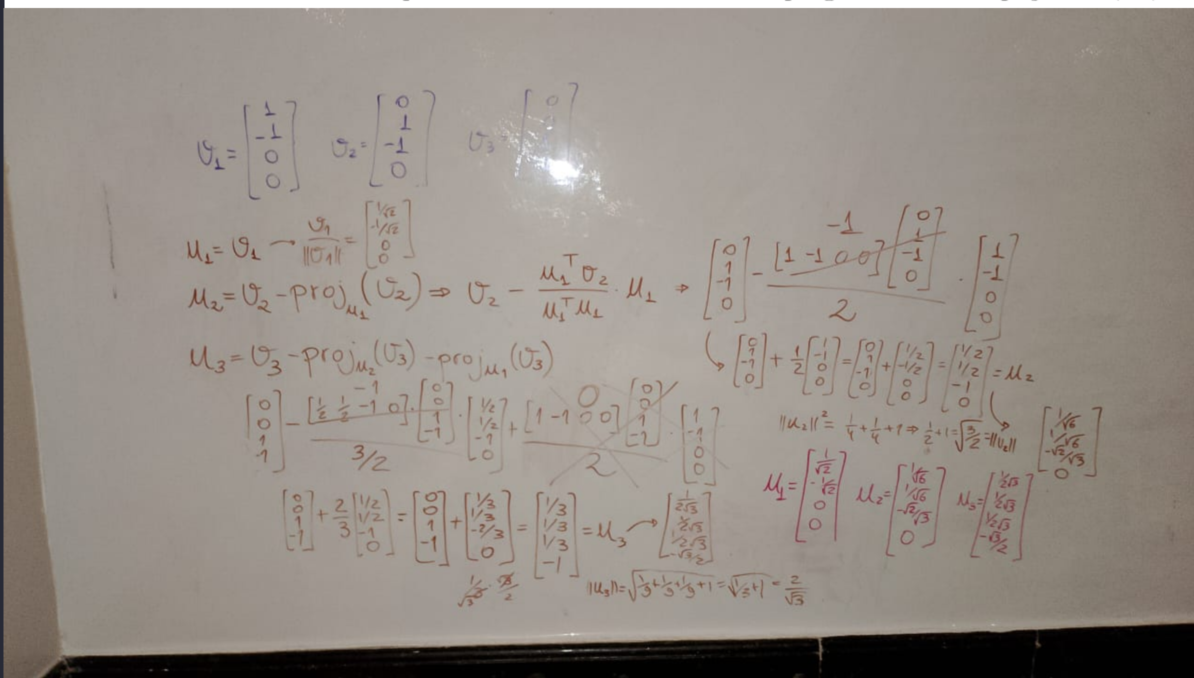
3. Ache a melhor reta que se ajusta aos pontos $t = -2, -1, 0, 1, 2$ e $b = 4, 2, -1, 0, 0$.



4. Dados os vetores

$$v_1 = [1\ \ -1\ 0\ 0],\ v_2 = [0\ 1\ \ -1\ 0] \text{ e } v_3 = [0\ 0\ 1\ \ -1],$$

use o método de Gram-Schmidt para achar uma base ortornormal que gera o mesmo espaço de v_1, v_2, v_3.



5. Se os elementos de cada linha de uma matriz A somam zero, ache uma solução para $Ax = 0$ e conclua que $\det A = 0$. Se esses elementos somam 1, conclua que $\det(A - I) = 0$.

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ Como cada linha de A soma 0.

elemento i de $Ax = \sum$ elementos da linha i

Logo $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in N(A)$, logo $N(A) \neq \{0\}$, ou seja, $\det(A) = 0$

Se a soma de A é 1, temos $(A - I)\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

vai ser $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow$ Logo $N(A-I) \neq \{0\} \Rightarrow \det(A - I) = 0$

6. Use as propriedades do determinante (e não suas fórmulas) para mostrar que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

$$(c-a) - \frac{(c-a)(b-a)}{(b-a)}$$

$$(c^2-a^2) - \frac{(c-a)}{\cancel{(b-a)}} \cdot \cancel{(b-a)}(b+a)$$

$$c^2 - a^2 - (cb + ac - ab - a^2)$$

$$c^2 - \cancel{a^2} - cb - ac + ab + \cancel{a^2}$$

$$c^2 - cb - ac + ab$$

$$c(c-b) - a(c-b)$$

$$(c-b)(c-a)$$

$$\xrightarrow{L_3 - \left(\frac{c-a}{b-a}\right)L_2} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \det = \prod_{i=1}^{n} d_i$, d_i são os pivôs, logo

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}\right) = (b-a)(c-b)(c-a)$$

7. Calcule

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

→ Matriz de permutação

última linha troca com todas, logo há 3 trocas, logo $\underline{\det = -1}$

8. Use o fato de que

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}}_{A} = 1$$

para mostrar que

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & \mathbf{19} \end{bmatrix}}_{B} = 0.$$

→ Reduzindo A, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 - 3L_2]{L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 - 3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1$$

Porém se a_{44} for uma unidade a menos, a redução vai gerar uma linha de 0, logo, $\underline{\det B = 0}$

9. Ache o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

usando cofatores. O que acontece quando mudamos o valor 4 para 100?

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}^{\,0}$$

$$\cancel{10} - \cancel{4}^{\,1} - \cancel{5}^{\,0} + \cancel{2} = \boxed{3}$$

↳ o resultado do determinante não se altera.