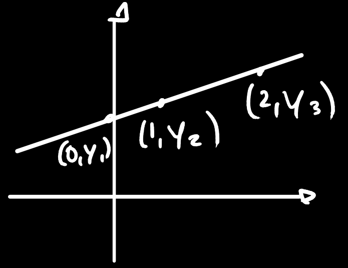
ÁLGEBRA LINEAR

14/08/24

LISTA 1

1. Quais condições para y_1, y_2 e y_3 fazem com que os pontos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ e $(2, y_3)$ caiam numa reta?

$(0, y_1)\ (1, y_2)\ (2, y_3)$



$$\begin{cases} y_1 = n \\ y_2 = x + n \\ y_3 = 2x + n \end{cases}$$

$\to y_2 = y_1 + x$

$\to y_3 = 2y_2 - 2y_1 + y_1$

$y_3 - 2y_2 + y_1 = 0$

2. Se (a, b) é um múltiplo de (c, d) e são todos não-zeros, mostre que (a, c) é um múltiplo de (b, d). O que isso nos diz sobre a matriz

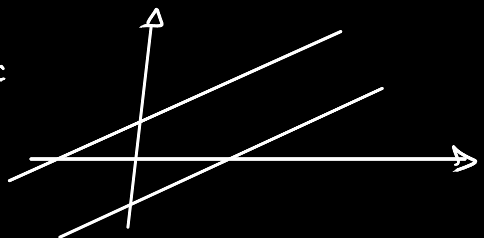
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}?$$

SE $a = \alpha c \wedge b = \alpha d \Rightarrow \alpha = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \alpha = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

OU SEJA, $a = \alpha b$ E $c = \alpha d$ $\therefore (a, c) = \alpha(b, d)$

ISSO INDICA QUE DADA $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, O SISTEMA $Ax = b$ NÃO TEM SOLUÇÃO!

VISUALIZAÇÃO GRÁFICA:



3. Se $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ são vetores unitários, calcule os produtos internos de (a) $\mathbf{v}$ e $-\mathbf{v}$; (b) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} - \mathbf{w}$; (c) $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ e $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$.

a) $\langle v, -v \rangle$

$\hookrightarrow \sum_{i=0}^{n} v_i(-v_i) \Rightarrow -\sum_{i=0}^{n} v_i^2 \Rightarrow -\|v\|^2$

b) $\langle v+w, v-w \rangle$

$\hookrightarrow \sum_{i=0}^{n} (v_i+w_i)(v_i-w_i) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} v_i^2 - w_i^2 \Rightarrow \|v\|^2 - \|w\|^2$

c) $\langle v-2w, v+2w \rangle$

$\hookrightarrow \sum_{i=0}^{n} (v_i-2w_i)(v_i+2w_i) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} v_i^2 - 4w_i^2 \Rightarrow \|v\|^2 - 4\|w\|^2$

4. Se $\|\mathbf{v}\| = 5$ e $\|\mathbf{w}\| = 3$, quais são o menor e maior valores possíveis para $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$? E para $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$?

$\|v\| + \|w\| \geq \|v+w\|$

$\|v\| - \|w\| \leq \|v-w\|$

$\|v\| \cdot \|w\| \geq |v \cdot w|$

$\Rightarrow$ DADO QUE

$\|v\| - \|w\| \leq \|v-w\|$

$5 - 3 \leq \|v-w\|$

$2 \leq \|v-w\|$

MENOR VALOR POSSÍVEL PARA $\|v-w\|$ É 2

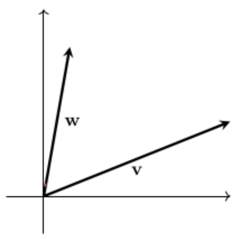
$\|v+(-w)\| \leq \|v\| + \|-w\|$

$\|v-w\| \leq \|v\| + \|-w\|$ $\Rightarrow$ $\|v-w\| \leq 8$

$\|v\| \cdot \|w\| \geq |v \cdot w|$

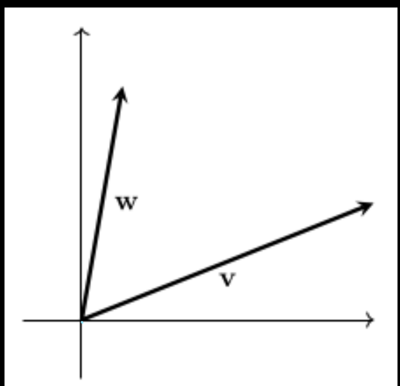
$15 \geq |v \cdot w|$ $\therefore$ MENOR VALOR PARA $v \cdot w = -15$

5. Considere o desenho dos vetores $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ abaixo. Hachure as regiões definidas pelas combinações lineares $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ considerando as seguintes restrições: $c + d = 1$ (não necessariamente positivos), $c, d \in [0, 1]$ e $c, d \geq 0$ (note que são três regiões distintas).



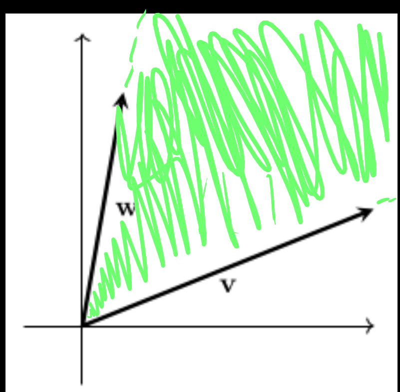
$h_i = (v_i \cdot c) + (w_i \cdot d)$

$c + d = 1$



$c, d \in [0, 1]$

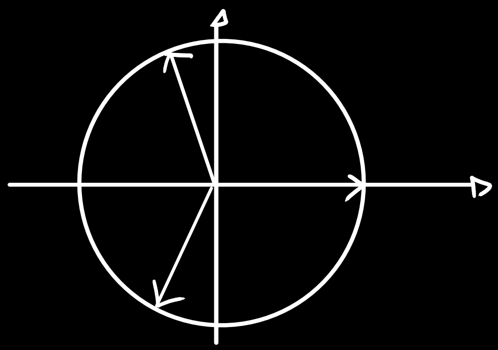
$c, d \geq 0$



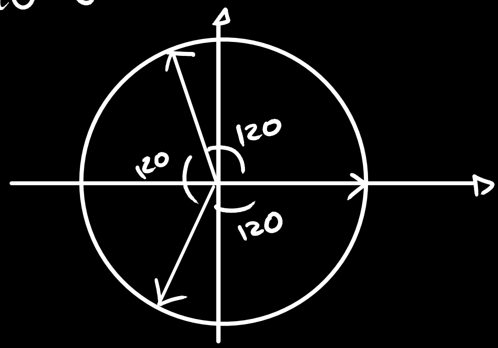
6. É possível que três vetores em $\mathbb{R}^2$ tenham $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}<0$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}<0$ e $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}<0$? Argumente.

SE $u \cdot v < 0$, ENTÃO $90° < \theta < 270°$

O MESMO VALE PARA V E W E U E W.



ENTÃO SIM É POSSÍVEL COMO ESSA CONFIGURAÇÃO $\Rightarrow$



7. Sejam x, y, z satisfazendo $x+y+z=0$. Calcule o ângulo entre os vetores (x,y,z) e (z,x,y).

$$\cos\theta = \frac{xz+yx+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$x^2+y^2+z^2+2xz+2xy+2zy=0$$

$$x^2+y^2+z^2=-2(xy+xz+zy)$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{xz+yx+yz}}{-2(\cancel{xy+yz+zx})} \Rightarrow -\frac{1}{2} \therefore 120°$$

$$x+y+z=0$$

$$x^2+yx+zx=0$$

$$xy+y^2+zy=0$$

$$xz+yz+z^2=0$$

8. Resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

Escreva a solução $\mathbf{x}$ como uma matriz A vezes o vetor $\mathbf{b}$.

$$\underset{E_{2\times1}(1)}{\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right] \Rightarrow \underset{E_{3\times1}(1)}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}}\cdot\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \underset{E_{3\times2}(1)}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&0\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Repita o problema acima para a matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(-1)\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{E_{1\times 2}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{1\times 3}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{2\times 3}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

10. Considere a equação de recorrência $-x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ com $x_0 = x_5 = 0$. Escreva essas equações em notação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e ache $\mathbf{x}$.

$x_0 = x_5 = i$

$i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$-x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = i$

$i = 1 \Rightarrow -x_2 + 2x_1 - \cancel{x_0} = 1$

$i = 2 \Rightarrow -x_3 + 2x_2 - x_1 = 2$

$i = 3 \Rightarrow -x_4 + 2x_3 - x_2 = 3$

$i = 4 \Rightarrow -\cancel{x_5} + 2x_4 - x_3 = 4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}^{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}^{b}$$

$2x_1 - 1 = x_2$

$x_3 = 2(2x_1 - 1) - x_1 - 2 \Rightarrow x_3 = 3x_1 - 4$

$x_4 = 2(3x_1 - 4) - 2x_1 + 1 - 3 \Rightarrow x_4 = 4x_1 - 10$

$2x_4 = 4 + x_3 \Rightarrow 8x_1 - 20 = \cancel{4} + 3x_1 - \cancel{4}$

$5x_1 = 20$

$x_1 = 4 \rightarrow$

$-x_2 + 2 \cdot 4 = 1$

$-x_2 = -7$

$x_2 = 7$

$x_3 = 3 \cdot 4 - 4$ $\quad$ $x_4 = 4 \cdot 4 - 10$

$x_3 = 8$ $\quad$ $x_4 = 6$

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$