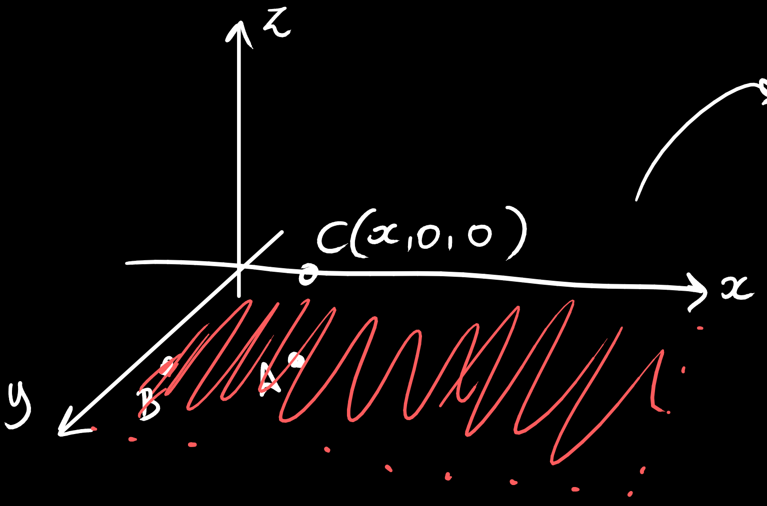
G.A

24/05

LISTA 7

1) Determine o ponto do eixo OX que tem mesma distância aos pontos $A = (2, 1, -1)$ e $B = (0, 3, -1)$.



$$|\vec{CB}| = |\vec{CA}|$$

$$\vec{CB} = (-x, 3, -1)$$

$$\vec{CA} = (2-x, 1, -1)$$

$$\sqrt{x^2+9+1} = \sqrt{x^2-4x+4+1+1}$$

$$\cancel{x^2} + 10 = \cancel{x^2} - 4x + 6$$

$$4x = -4$$

$$x = -1$$

$$C = (-1, 0, 0)$$

2) A reta r passa pelo ponto $(3, 4, -1)$ e é paralela ao vetor $v = (1, -1, 2)$. Determine o ponto dessa reta cuja soma das coordenadas é 16.

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow \cancel{3} + \cancel{t} + \overset{6}{\cancel{4}} - \cancel{t} - \cancel{1} + 2t = 16$$

$$2t = 10$$

$$t = 5$$

$$x = 8 \quad y = -1 \quad z = 9$$

$$(8, -1, 9)$$

3) São dados os vetores $u = (1, 1, 2)$ e $v = (-1, 3, 1)$.

a) Escreva $w = (7, -5, 5)$ como combinação linear de u e v.

b) Escreva $z = (3, 2, -1)$ como combinação linear de u e v.

$$\vec{\theta} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{u}$$

a) $(7, -5, 5) = \alpha(1, 1, 2) + \beta(-1, 3, 1)$

$$\begin{aligned} 7 &= \alpha - \beta \\ 5 &= -\alpha - 3\beta \\ \hline 12 &= -4\beta \\ \beta &= -3 \end{aligned}$$

$$7 = \alpha + 3 \qquad \alpha = 4$$

$$W = 4u - 3v$$

b) $(3,2,-1)=\alpha(1,1,2)+\beta(-1,3,1)$

$3=\alpha-\beta$
$2=\alpha+3\beta$ $\Rightarrow$ $-3=-\alpha+\beta$
$2=\alpha+3\beta$
$-\frac{1}{4}=\beta$

$3=\alpha+\frac{1}{4}$
$\alpha=\frac{11}{4}$

$-1=\frac{11\cdot 2+1}{4}$

POSITIVOS

NÃO É POSSÍVEL

4) Determine k para que os pontos $(k, 2, 4)$, $(3, k, 2)$ e $(7, -1, -2)$ sejam colineares.

$\alpha(7-k,-3,-6)=(7,-1,-2)-(3,k,2)$

$-6\alpha=-2-2$
$\alpha=\frac{2}{3}$

$-\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}=-1-k$
$-2=-1-k$
$k=1$

5) A reta r passa pelos pontos $A=(2, 2, 8)$ $B=(4, 1, 6)$. Determine os pontos onde a reta r corta os planos XY, YZ e XZ.

VETOR DIRETOR: $\overrightarrow{AB} \Rightarrow (2,-1,-2)$

$\begin{cases} x=2+2t \\ y=2-t \\ z=8-2t \end{cases}$

Ⓘ $XY \Rightarrow z=0 \Rightarrow 8=2t \Rightarrow t=4$
$x=2+8 \Rightarrow x=10$
$y=2-4 \Rightarrow y=-2$
$\rightarrow (10,-2,0)$

Ⓘⓘ $XZ \Rightarrow y=0 \Rightarrow t=2$
$x=2+4 \Rightarrow x=6$
$z=8-4 \Rightarrow z=4$
$\rightarrow (6,0,4)$

Ⓘⓘⓘ $YZ \Rightarrow x=0 \Rightarrow t=-1$
$y=3$, $z=10$
$\rightarrow (0,3,10)$

6) Dados os pontos $A=(1,\ 2,\ 3)$, $B=(3,\ 4,\ 2)$ e $C=(1,\ 6,\ 6)$ determine o cosseno do ângulo BAC.

$$u = \vec{AB} = (2,2,-1) \rightarrow \cos\theta = \frac{u\cdot v}{|u|\cdot|v|}$$
$$v = \vec{AC} = (0,4,3)$$

$$\cos\theta = \frac{\cancel{2\cdot 0} + 4\cdot 2 - 3\cdot 1}{\underbrace{\sqrt{4+4+1}}_{3}\cdot\underbrace{\sqrt{16+9}}_{5}} \Rightarrow \frac{5}{15} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$$

7) Dados os pontos $A=(1,\ 0,\ 0)$, $B=(3,\ 1,\ -1)$ $C=(0,\ 2,\ 1)$ e $D=(-1,\ 1,\ 3)$ verifique se as retas AB e CD são paralelas, concorrentes ou reversas.

RETAS

$$\text{VETOR } \vec{AB} = (2,1,-1) \longrightarrow \overline{AB} = \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \qquad \overline{CD} \begin{cases} x = -t \\ y = 2-t \\ z = 1+2t \end{cases}$$
$$\text{VETOR } \vec{CD} = (-1,-1,2)$$

→ NÃO SÃO PARALELAS!

$$\rightarrow 1+2t = -t \rightarrow x(\overline{AB}) = x(\overline{CD}) \rightarrow t = 2-t \rightarrow y(\overline{AB}) = y(\overline{CD})$$
$$t = -\frac{1}{3} \qquad t = 1$$
$$t_x \neq t_y$$

REVERSAS

8) A reta r passa pelo ponto $A=(-1,\ 2,\ 4)$ e é paralela ao vetor $v=(2,\ 1,\ -1)$. Determine o ponto de r mais próximo da origem.

$$r: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2+t \\ z = 4-t \end{cases} \qquad (0,0,0)$$

$$d_{AO} \Rightarrow \sqrt{(-1+2t)^2 + (2+t)^2 + (4-t)^2}$$

$$d_{AO} = \sqrt{1 - \cancel{4t} + 4\cancel{t^2} + 4 + \cancel{4t} + \cancel{t^2} + 16 - 8t + \cancel{t^2}}$$

$$\sqrt{6t^2 - 8t + 21} \Rightarrow d^2 = 6t^2 - 8t + 21$$

$$t_v = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} \qquad y = \frac{8}{3} \qquad z = \frac{10}{3}$$

9) Com os pontos A, B e C do exercício 6 determine:

a) equações paramétricas para a reta BC.
b) o comprimento do segmento BC.
c) a distância de A até a reta BC.
d) a área do triângulo ABC.

(a) $\overrightarrow{BC} = (-2, 2, 4)$

$$\overline{BC} = \begin{cases} x = 3-2t \\ y = 4+2t \\ z = 2+4t \end{cases}$$

(b) $d^2 = 4+4+16$

$d = 2\sqrt{6}$

(c) $d_{A \to \overline{BC}}^2 = (2-2t)^2 + (2+2t)^2 + (4t-1)^2$

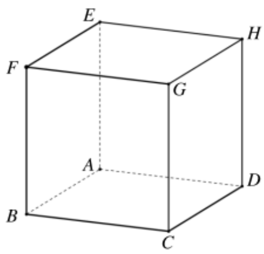
$d^2 = 4 - \cancel{8t} + 4t^2 + 4 + \cancel{8t} + 4t^2 + 16t^2 - 8t + 1$

$d^2 = 24t^2 - 8t + 9 \Rightarrow t_v = \frac{8}{48} = \frac{1}{6} \rightarrow d^2 = 24 \cdot \frac{1}{36} - 8 \cdot \frac{1}{6} + 9$

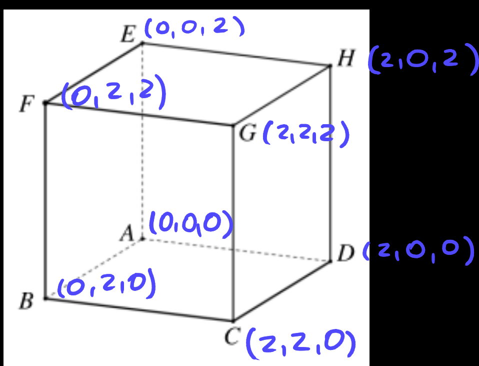
$d^2 = \frac{-11}{6} + 9 \Rightarrow d = \frac{5}{\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{\frac{5}{\cancel{\sqrt{3}}} \cdot \cancel{2\sqrt{6}}^{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{5\sqrt{2}}$

10) É dado um cubo de aresta 2. Estabeleça um sistema de coordenadas e determine os oito vértices nesse sistema.



a) Calcule o comprimento de uma diagonal.
b) Calcule a distância entre os pontos médios de duas arestas reversas.
c) Seja AG uma diagonal. Determine os pontos médios das seis arestas que não concorrem nem em A, nem em G. Unindo cada um desses pontos ao mais próximo, que figura ficou formada?



(a) $\overline{FD} \Rightarrow$ VETOR $\overrightarrow{DF} = (-2, 2, 2)$

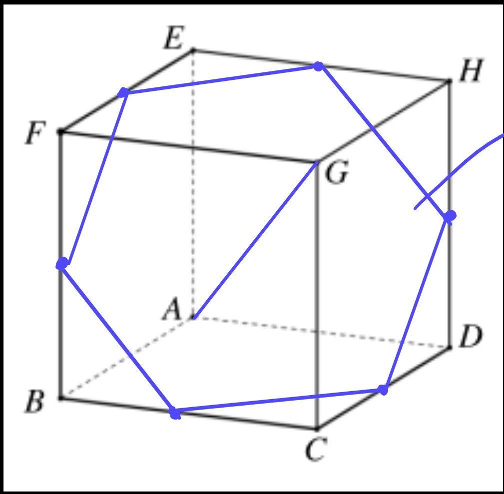
$|\overrightarrow{DF}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} \Rightarrow \boxed{2\sqrt{3}}$

(b) $\frac{F+G}{2} = (1, 2, 2)\, M$ VETOR MN

$\frac{H+D}{2} = (2, 0, 1)\, N$ $\Rightarrow (1, -2, -1)$

$\Rightarrow 1+4+1 = \sqrt{6} = d$

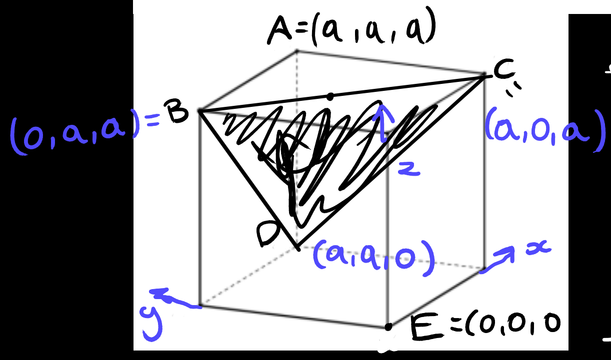
(c)



HEXÁGONO

11) Sejam AB, AC e AD arestas de um cubo. Mostre que a diagonal do cubo que passa por A é perpendicular ao plano BCD.

Obs: Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano ela é perpendicular a esse plano.



→ PROVAR QUE $AE \perp BCD$

$\vec{EA} \cdot \vec{BC} \Rightarrow (a,a,a)\cdot(-a,0,a)$

$-a^2 + 0 + a^2 = 0$

$\vec{EA}$ E $\vec{BC}$ ORTOGONAIS, $\underline{\vec{EA} \perp \vec{BC}}$

12) Dados os pontos $A=(2,\ -1,\ 1)$ e $B=(3,\ 4,\ 4)$ determine o ponto do eixo Z de forma que o ângulo APB seja reto.

$P = (0,0,z)$

$\vec{PA} = (2,-1,1-z)$

$\vec{PB} = (3,4,4-z)$

$(1-z)(4-z)$

$\vec{PA}\cdot\vec{PB} = 6 \cancel{-4} \cancel{+4} - z - 4z + z^2$

$0 = z^2 - 5z + 6 \Rightarrow 25 - 24 \Rightarrow \Delta = 1$

$\rightarrow z = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} \rightarrow z = 3 \\ \rightarrow z = 2 \end{cases}$

13) Considere as retas

$r_1 = \{(1+3t, -1+4t, 2)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{(4-3s, -2+6s, -1+2s)\,;\, s \in \mathbb{R}\}$.

a) Verifique se elas são concorrentes ou reversas.

b) Calcule o cosseno do ângulo entre elas.

c) Modifique apenas um dos coeficientes da reta r_2 para torná-las concorrentes.

(a) $1+3t = 4-3s, \quad -1+4t = -2+6s$

$\begin{cases} 1 = t+s \cdot (4) \\ 1 = 6s - 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4t + 4s \\ \underline{1 = -4t + 6s} \\ 5 = 10s \\ s = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow t = \frac{1}{2}$

$x = 1 + \frac{3}{2}$

$x = \frac{5}{2}$

$y = -1 + 4\cdot\frac{1}{2}$

$y = 1$

$z = 2$

$x = 4 - 3\cdot\frac{1}{2}$

$x = \frac{5}{2}$

$y = -2 + 6\cdot\frac{1}{2}$

$y = 1$

$z = -1 + 2\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow z = 0$

REVERSAS

(b) $r_1: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+4t \\ z = 2+0t \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} x = 4-3s \\ y = -2+6s \\ z = -1+2s \end{cases}$

DIRETOR DE r_1

$(3,4,0)$

DIRETOR DE r_2

$(-3,6,2)$

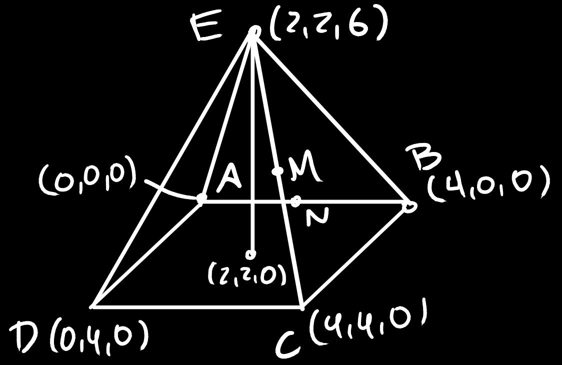
$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} \Rightarrow \frac{-9+24+0}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{9+36+4}} \Rightarrow \frac{15}{5 \cdot 7} \Rightarrow \underline{\cos\theta = \frac{3}{7}}$$

(c) $-1+2s \Rightarrow -1+6s$, VETOR DIRETOR VIRA $(-3,6,6)$

14) A pirâmide regular *ABCDE* tem na base o quadrado *ABCD* de lado 4 e sua altura é igual a 6. Estabeleça um sistema de coordenadas e determine os cinco vértices nesse sistema.

a) Calcule a distância entre os pontos médios das arestas *AB* e *CE*.

b) Calcule o cosseno do ângulo entre as retas *AD* e *BE*.



(a) $M = \frac{E+C}{2} \Rightarrow M = (3,3,3)$

$N = \frac{A+B}{2} \Rightarrow N = (2,0,0)$

VETOR $\overrightarrow{NM} = (1,3,3)$

$\sqrt{1+9+9} \Rightarrow \sqrt{19}$

(b) VETOR $\overrightarrow{AD} = (0,4,0)$

VETOR $\overrightarrow{BE} = (-2,2,6)$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{8}{4 \cdot \sqrt{4+4+36}} \Rightarrow \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{11}}$$

15) Encontre pelo menos três vetores (dois quaisquer não colineares) perpendiculares ao vetor $v = (1, 2, 3)$.

$(1,2,3) \cdot (x,y,z) \Rightarrow x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow 1 + 2 - 3 = 0$ ✓

$\rightarrow (1,1,-1)$

$$(1,2,3) \times (1,1,-1) = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$x \Rightarrow -2-3 \Rightarrow -5$ $y = 3+1 \Rightarrow 4$ $z = 1-2 \Rightarrow -1$

1º VETOR: $(1,1,-1)$

2º VETOR: $(-5,4,-1)$

16) Dados os vetores $u=(3,\ 2,\ 4)$, $v=(1,\ 0,\ 1)$ determine um vetor de módulo 10 perpendicular a u e a v.

$a_1\ b_1\ c_1 \quad a_2\ b_2\ c_2$

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$x = 2-0 = 2$

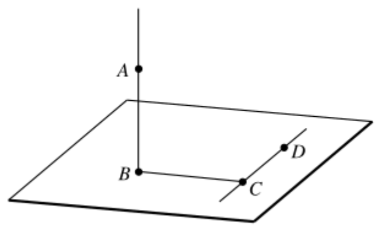
$y = 4-3 = 1 \Rightarrow (2,1,-2) \Rightarrow \sqrt{4+4+1} = \boxed{3} \Rightarrow |u \times v|$

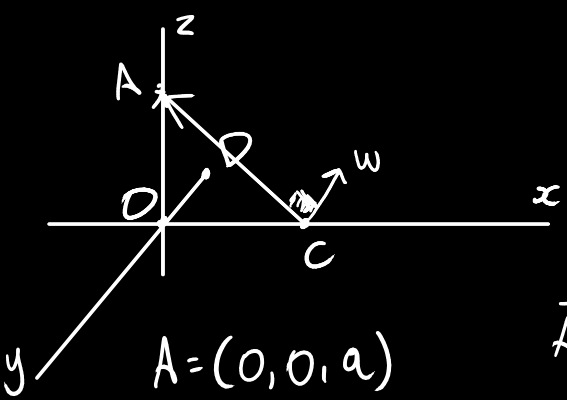
$z = -2$

$3 \cdot \frac{10}{3} = \boxed{10} \Rightarrow \underline{\left(\frac{20}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{20}{3}\right)}$

17) Na figura abaixo, AB é perpendicular ao plano BCD e BC é perpendicular a CD. Prove que AC é perpendicular a CD.

Obs: este resultado é conhecido como o Teorema das três perpendiculares.





$u = (0,0,a) \quad (u = \vec{A})$

$v = (a,0,0) \quad (v = \vec{C})$

$w = (0,a,0) \quad (w = \vec{D})$

$A = (0,0,a)$

$C = (a,0,0)$

$D = (0,a,0)$

$\vec{AC} = (a, 0, -a)$

$\vec{AC} \cdot w \Rightarrow 0+0+0 = \boxed{0}$

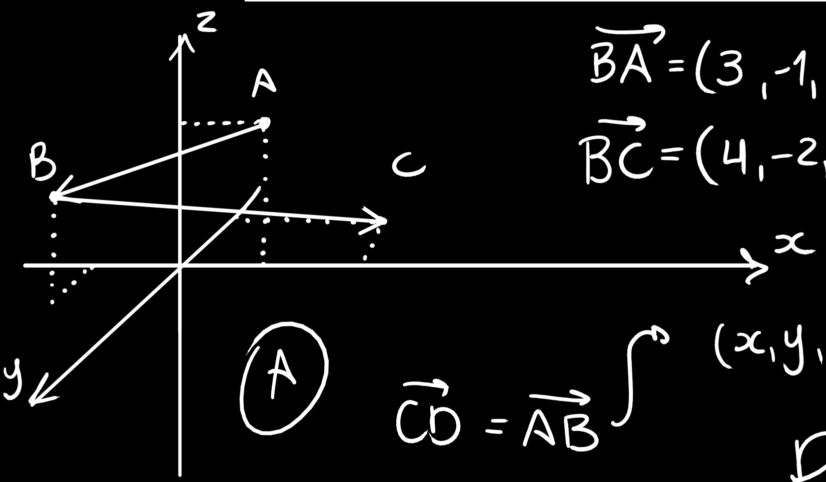
O É PERPENDICULAR

18) Dados $A = (1, 0, 3)$ $B = (-2, 1, 1)$ e $C = (2, -1, 0)$ seja $ABCD$ um paralelogramo.

a) Determine o vértice D.

b) Determine o cosseno do ângulo ABC.

c) Encontre um vetor perpendicular ao plano do paralelogramo.



$\vec{BA} = (3, -1, 2) \Rightarrow u$

$\vec{BC} = (4, -2, -1) \Rightarrow v$

A

$\vec{CD} = \vec{AB}$ $\rightarrow$ $(x, y, z) = (3, 1, -2) + (2, -1, 0)$

$D = (5, 0, -2)$

B

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} \Rightarrow \frac{12 - 2 + 2}{\sqrt{\underbrace{9+1+4}_{14}} \cdot \sqrt{\underbrace{16+4+1}_{21}}} \rightarrow \sqrt{7}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{12}{7\sqrt{10}}$$

C

$\vec{BA} \times \vec{BC} \Rightarrow (3, -1, 2) \times (4, -2, -1)$

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \right) \rightarrow (5, 11, -2)$$

$x = 1 + 4 = 5$ $\quad y = 8 + 3 = 11$ $\quad z = -6 + 4 = -2$

19) Encontre um vetor unitário que esteja na bissetriz do ângulo formado pelos vetores $u = (1, -3, -5)$ e $v = (3, 5, 1)$.

$|u| = |v| \therefore u + v = w \Rightarrow w = (4, 2, -4)$

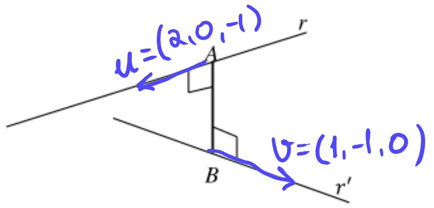
$|w| = \sqrt{16+4+16} \Rightarrow |w| = \sqrt{36} \Rightarrow |w| = 6 \Rightarrow \dfrac{w}{6} \Rightarrow \left(\dfrac{4}{6}, \dfrac{2}{6}, -\dfrac{4}{6}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{w}{6} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$

24) Considere as retas reversas:

$r = \{(-3+2t, 2, 1-t); t \in \mathbb{R}\}$ e $r' = \{(-1+s, 2-s, -3); s \in \mathbb{R}\}$

Sejam $A \in r$ e $B \in r'$ tais que AB seja perpendicular a r e a r'.



a) Determine os pontos A e B.

b) Determine a distância entre as retas r e r'.

$$r: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = 2 \\ z = 1-t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = -1+s \\ y = 2-s \\ z = -3 \end{cases}$$

$$u = (2, 0, -1) \qquad v = (1, -1, 0)$$

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

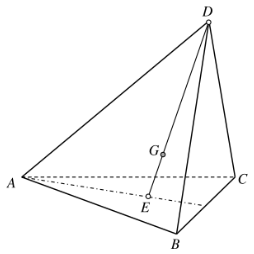
$$u \times v = (-1, -1, -2)$$

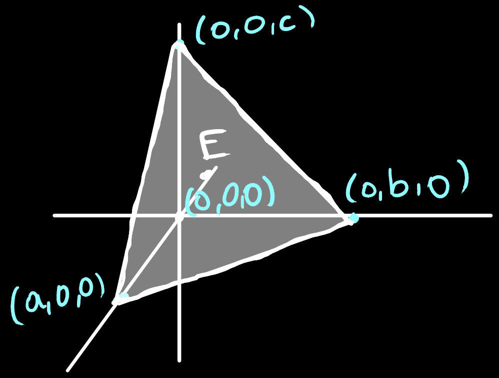
25) No espaço com origem, o baricentro do tetraedro $ABCD$ é o ponto G definido por

$$G = \frac{A+B+C+D}{4}.$$

Mostre que G está no segmento que une um vértice, ao baricentro da face oposta.

Mostre que a distância de G a um vértice é o triplo da sua distância ao baricentro da face oposta.





$E = \frac{1}{3}(a,b,c)$ $\qquad$ $G = \frac{1}{4}(a,b,c)$

VETOR DIRETOR DA RETA $\overline{OE} = \frac{1}{3}(a,b,c)$

$$\overline{OE}: \begin{cases} x = \dfrac{at}{3} \\ y = \dfrac{bt}{3} \\ z = \dfrac{ct}{3} \end{cases} \longrightarrow G = \frac{3}{4}\,\overline{DE}$$