GA

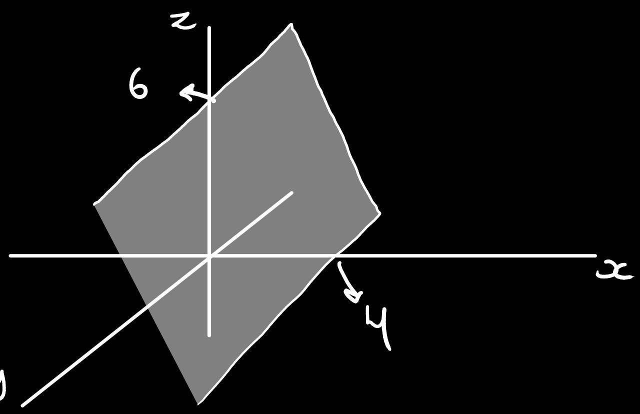
13/06

LISTA 8

1) Faça um desenho mostrando do plano $3x + 2z = 12$.

$x = 0 \Rightarrow z = 6$

$z = 0 \Rightarrow x = 4$



2) Sendo $A = (-1, 3, 0)$ e $B = (3, 1, 4)$ determine a equação do plano mediador do segmento AB.

$M = \dfrac{A+B}{2} \Rightarrow M = (1, 2, 2)$

$\overrightarrow{MA} = (-2, 1, -2) \rightarrow -2x + y - 2z = -4$

3) Determine a equação do plano que contém os pontos $(1, 0, 1)$, $(-1, -2, 3)$ e $(2, 3, 1)$.

$\vec{v} = (2, 2, -2) \qquad \vec{u} = (3, 5, -2)$

$\vec{v} \times \vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right)$

$v \times u = (6, -2, 4)$

$d = 6\cdot(-1) + (-2)(-2) + (3)\cdot 4$

$d = -\cancel{6} + 4 + \cancel{12} \Rightarrow 10$

PLANO $\Rightarrow$ $6x - 2y + 4z = 10$

4) Determine a equação do plano que contém os pontos $(1, -2, 1)$, $(2, 0, 3)$ e $(3, 2, 6)$.

A B C

$(2,0,3) - (1,-2,1) = (1,2,2) = \vec{u}$

$(3,2,6) - (1,-2,1) = (2,4,5) = \vec{v}$

$2+2=4$

$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right)$ $2 \cdot (1) + (-1) \cdot (-2)$

$u \times v = (2, -1, 0) \rightarrow$ PLANO $\Rightarrow$ $2x - y = 4$

5) São dados, $\alpha = \{(x,y,z)\ ;\ x - 2y + 4z = -1\}$ e $r = \{(-1+2t,\ 3t,\ 2-t)\,;\, t \in \mathrm{R}\}$. Determine $r \cap \alpha$.

$-1 + 2t - 6t + 8 - 4t = -1$

$-8t = -8 \Rightarrow t = 1$

$x = 1$
$y = 3$
$z = 1$

6) Determine k para que a reta $r = \{(-8+2t,\ 5+t,\ -2+kt)\,;\, t \in \mathrm{R}\}$ seja paralela ao plano $3x + 2y - z = 0$.

$\vec{v} = (2,1,k)$

$\vec{n} = (3,2,-1)$

$\Rightarrow 6 + 2 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 8}$

7) O plano $\underbrace{3x + 4y + 6z = 24}_{H}$ e os planos XY, YZ e ZX delimitam um tetraedro. Determine seu volume.

$H \cap XY \Rightarrow 3x + 4y = 24 \Rightarrow$ INTERSEÇÕES DA RETA COM $z=0$ $y=0$

$y = 6$, $x = 8$

$(0,6,0)$ $(8,0,0)$

INTERSECÇÃO DO PLANO COM EIXO Z.

$6z = 24 \Rightarrow z = 4$

$\Rightarrow$ BASE TRIANGULO:

$(0,6,0)(7,0,0)(0,0,0)$

$A = \frac{6 \cdot 8}{\cancel{2}} 4 \Rightarrow A = \frac{\cancel{24} \cdot 4 \cdot 1}{8 \cdot \cancel{3}} \Rightarrow \boxed{32}$

8) São dados os pontos $A=(1,\ 2,\ 0)$ e $B=(3,\ 1,\ 3)$. Determine o ponto onde a reta AB intersecta o plano $2x+4y-z=1$.

$\vec{AB}=(2,-1,3)$ $\rightarrow$ $2+\cancel{4t}+8-\cancel{4t}-3t=1$

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=3t \end{cases}$$

$3t=9$ $\rightarrow$ $x=7$

$t=3$ $\quad y=-1$

$z=9$

9) Determine a equação do plano que contém o ponto $P=(4,-2,3)$ e a reta r definida pelas equações $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=4t-1 \\ z=t-2 \end{cases}$

$A\in r:\ A(1)\Rightarrow(1,3,-1)$ $\rightarrow$ $\vec{AP}=(3,-5,4)=\vec{u}$

$B\in r:\ B(2)\Rightarrow(3,7,0)$ $\quad \vec{BP}=(1,-9,3)=\vec{v}$

$$u\times v=\left(\begin{vmatrix}-5 & 4\\ -9 & 3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & -5\\ 1 & -9\end{vmatrix}\right)$$

$21 \qquad -5 \qquad -22$

PLANO $\qquad 21-15+22$

$21x-5y-22z=28$

10) Determine os pontos onde a reta $r=\{(3-2t,\ -1+t,\ 2+t);\ t\in\mathbb{R}\}$ intersecta a esfera de centro $(1,\ 3,\ 0)$ e raio $2\sqrt{6}$.

$(x-1)^2+(y-3)^2+z^2=24$

$(2-2t)^2+(t-4)^2+(2+t)^2=24$

$\cancel{4}-\cancel{8t}+\cancel{4t^2}+\cancel{t^2}-\cancel{8t}+\cancel{16+4}+\cancel{4t}+\cancel{t^2}=\cancel{24}$

$6t^2-12t=0$ $\rightarrow$ $t=2$

$6t-12=0$

$P_1=(3,-1,2)$

$P_2=(-1,\ 1,4)$

11) Determine o raio da esfera $x^2+y^2+z^2-4x-6y+10z-11=0$.

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+5)^2 = \underbrace{11+4}_{15}\cancel{+9}+\cancel{25}$$

$\cancel{15}$ $\cancel{10}$ 49 30

$$\boxed{\text{RAIO} = 7}$$

12) O ponto $P=(3,\ 4,\ k)$ pertence à esfera $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-8=0$. Determine k.

$$\cancel{9}+\cancel{16}+k^2\cancel{-6}\cancel{-8}-4k\cancel{-8}=0$$

3 $\cancel{-16}$

$$k^2-4k+3=0$$

$$\Delta = 16-4\cdot 3 \qquad k=\frac{4\pm 2}{2}$$

$$\Delta = 4$$

$$k_1 = 3 \qquad k_2 = 1$$

13) Para o menor valor de k encontrado no exercício anterior, determine a equação do plano tangente à esfera no ponto P.

ESFERA: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=r^2$ $\qquad A=(3,4,1)$

$C=(1,1,2)$ $\qquad \vec{u}=\overrightarrow{CA}$

$$\vec{u}=(2,3,-1)$$

PLANO

$$2x+3y-z=17$$

14) Determine dois pontos distintos que estejam na interseção dos planos $x+y+z=3$ e $2x-y-6z=0$.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-6z=0 \end{cases}$$

$$3x-5z=3$$

$z=3 \rightarrow x=6 \rightarrow y=-6$

$z=6 \rightarrow x=11 \rightarrow y=-14$

15) Encontre dois planos diferentes que passem pelos pontos $(-2,\ 1,\ 5)$ e $(4,\ 3,\ 1)$.

$\vec{u} = (6, 2, -4)$

$\vec{v} = (4, 3, 1)$

$\vec{w} = (3, 2, 0)$

$A = (0, 0, 0)$

$B = (1, 1, 1)$

PLANO COM $\vec{v}$:

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$14 \qquad -22 \qquad 10$$

$$14x - 22y + 10z = 0$$

PLANO COM $\vec{w}$

$$u \times w = \left(\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$8 \qquad -12 \qquad 6$$

$$8x - 12y + 6z = 2$$

16) Verifique se os vetores $u = (5, 7, 1)$, $v = (4, 2, -3)$ e $w = (-1, 1, 2)$ são coplanares ou não.

$$v \times w = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$7 \qquad -5 \qquad 6$$

$$v \times w \cdot u = 0 \rightarrow (7, -5, 6) \cdot (5, 7, 1) \Rightarrow \cancel{35 - 35} + 6$$

NÃO COPLANARES!

17) Determine o cosseno do ângulo entre os planos $x + y - z = 2$ e $2x + y + z = 0$.

$\vec{v} = (1, 1, -1) \qquad \vec{u} = (2, 1, 1)$

$$\cos\theta = \frac{v \cdot u}{|v||u|} \Rightarrow \frac{2 + 1 - 1}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{4+1+1}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

18) Determine o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ cujo valor de z é máximo.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

$\downarrow$

$4 \rightarrow (1, -2, 7)$

19) Determine a equação da esfera de centro $C = (1, 1, 1)$, tangente ao plano $x - 2y + 2z + 8 = 0$.

$$\frac{|1 - \cancel{2} + \cancel{2} + 8|}{\sqrt{1+4+4}} \Rightarrow \frac{9}{3} \Rightarrow 3 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$$

20) A reta r é a interseção dos planos $2x - y = 1$ e $3x - z = 2$. A reta s é definida por $x = y = z$. Essas retas possuem algum ponto comum?

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & \cdot 3 \\ 3x - z = 2 & \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{6x} - 3y = 3 \\ -\cancel{6x} + 2z = -4 \end{cases}$$

$$2z - 3y = -1$$

$$z = 1 \quad y = 1$$

$2x - 1 = 1$

$x = 1$

$x = 1$

$\boxed{\text{SIM}}$

21) Determine o simétrico do ponto $P = (-2, -3, 1)$ em relação ao plano $x + y + 2z = 3$.

H

PONTOS ARBITRÁRIOS

$A = (1, 2, 0) \in H$

$B = (2, 3, -1) \in H$

$C = (-1, 4, 0) \in H$

$\vec{AB} = (1, 1, -1) = \vec{u}$

$\vec{AC} = (-2, 2, 0) = \vec{v}$

$$\underbrace{u \times v}_{\text{VETOR DIRETOR}} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$2 \qquad 2 \qquad 4$$

$P=(-2,-3,1)$ $\quad \vec{w}=(2,2,4)$ $\quad x+y+2z=3$

$$r: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3+2t \\ z=1+4t \end{cases} \Rightarrow \cancel{-2}+2t-3+2t+\cancel{2}+8t=3$$

$$12t=6$$

$$t=\frac{1}{2} \quad \therefore$$

SIMÉTRICO

$$t=1$$

$x=0$ $\quad \underline{y=-1}$ $\quad z=5$

22) Seja $r=\{(2t+1,\ -2t+1,\ t+1)\,;\, t\in \mathrm{R}\}$. Determine a distância do ponto $P=(2,-1,1)$ à reta r.

$$d=(2t+\underbrace{\cancel{1-2}}_{-1})^2+(-2t+\underbrace{\cancel{1+1}}_{2})^2+(t+\cancel{1-1})^2$$

$$d=\cancel{4t^2}-\cancel{4t}+1+\cancel{4t^2}-\cancel{8t}+4+\cancel{t^2}$$

$$d(t)=9t^2-12t+5 \rightarrow d'(t)=18t-12 \Rightarrow 12=18t$$

$$t=\frac{2}{3}$$

$x=2\cdot\frac{2}{3}+1$ $\quad y=-2\cdot\frac{2}{3}+1$ $\quad z=\frac{2}{3}+1$

$$d\left(\frac{2}{3}\right)=\cancel{9}\cdot\frac{4}{\cancel{9}}-\overset{4}{\cancel{12}}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}+5$$

$$\boxed{d\left(\frac{2}{3}\right)=1}$$

23) Considere o quadrado *ABCD* de lado 2. De um mesmo lado do plano do quadrado considere os segmentos *AE*, *BF*, *CG* e *DH*, perpendiculares a esse plano. Sabe-se que $AE=2$, $BF=1$, $CG=4$ e que os quatro pontos *E*, *F*, *G* e *H* são coplanares. Calcule:

a) o comprimento de *DH*.

b) a área do quadrilátero *EFGH*.

c) o cosseno do ângulo entre os planos *ABCD* e *EFGH*.