ÁLGEBRA LINEAR

19/09/24

COMPLEMENTO ORTOGONAL

∘ DEF: DADO UM ESPAÇO VETORIAL E E UM SUBESPAÇO VETORIAL V DE E, E W UM VETOR $v \in W$, DEFINIMOS

$$V^{\perp} = \{ w \in V \ ; \ \langle v, w \rangle = 0 \}$$

PROPRIEDADES

∘ $W^{\perp}$ É SUBESPAÇO VETORIAL DE V

DEF:

$$w_1, w_2 \in V^{\perp} \Rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \in V^{\perp} \Leftrightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \perp V$$

$$\Leftrightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \perp v, \ \forall v \in V \Leftrightarrow \alpha \underbrace{v^T w_1}_{0} + \beta \underbrace{v^T w_2}_{0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 = 0},$$

(SEJA $\{v_1 \dots v_k\}$ UMA BASE DE V)

∘ $w \in V^{\perp} \Leftrightarrow w \perp v_i \ , \forall i \in \{1, \dots, k\}$

$(\Leftarrow)$ $w \perp v_i \Rightarrow w \in V^{\perp}$

$\rightarrow w \perp v_i \Rightarrow w \perp \text{span}(\{v_1, \dots, v_k\})$

$\rightarrow w^T \cdot (x_1 v_1 + \dots + x_k v_k) = 0 \rightarrow x_1 \overset{0}{\cancel{w^T v_1}} + \dots + x_k \overset{0}{\cancel{w^T v_k}} = 0$

$(\Rightarrow)$ $w \in V^{\perp} \Rightarrow w \perp v_i$

↳ W É PERPENDICULAR A TODO VETOR DE V, LOGO $w \perp v_i$

- DEFINA $A = \begin{bmatrix} - v_1^T - \\ \vdots \\ - v_k^T - \end{bmatrix}$, ENTÃO $V^\perp = N(A)$ E PODEMOS ACHAR UMA BASE PARA $N(A)$.

DEM

$$C(A^T) = \text{span}(\{v_1, \dots, v_k\}) = V$$

$$C(A^T) \perp N(A) \Rightarrow V \perp V^\perp \Rightarrow C(A^T) \perp V^\perp \Rightarrow N(A) = V^\perp$$

OU

$$x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} - v_1^T - \\ \vdots \\ - v_k^T - \end{bmatrix} \cdot x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} - v_1^T x - \\ \vdots \\ - v_k^T \cdot x - \end{bmatrix} = 0$$

LOGO $v_i^T \cdot x = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, k\}$, LOGO, $x \in V^\perp$

- $V \cap V^T = \{0\}$

$$w \in V \cap V^\perp \Leftrightarrow w \in V \wedge w \in V^\perp \Rightarrow w^T w = 0 \Rightarrow \|w\| = 0$$

- $\dim V + \dim V^\perp = \dim E$

$V = C(A^T) \wedge V^\perp = N(A) \longrightarrow$ $\dim C(A^T) = r$ $\Rightarrow \dim V + \dim V^\perp = n$
$\dim N(A) = n - r$

- $V = (V^\perp)^\perp$ (DIMENSÃO FINITA)

1º $V \subseteq (V^\perp)^\perp$: $u \in (V^\perp)^\perp \Leftrightarrow u \perp w, \ \underbrace{\forall w \in V^\perp}_{w \perp v \ \forall v \in V}$

2º $\dim V + \dim V^\perp = n$
$\dim V^\perp + \dim (V^\perp)^\perp = n$ $\Rightarrow \dim V = \dim (V^\perp)^\perp \Rightarrow V = (V^\perp)^\perp$

JUNTO DE $V \subseteq (V^\perp)^\perp$

TEOREMA

TODO VETOR $u \in E$ PODE SER DECOMPOSTO COMO $u = v + v^\perp$ ONDE $v \in V$ E $v^\perp \in V^\perp$. ESSA DECOMPOSIÇÃO É ÚNICA.

DEM

(i) DECOMPOSIÇÃO

$V = \text{span}\{v_1 \dots v_k\} \Rightarrow \dim V = k$

$V^\perp = \text{span}\{w_1 \dots w_{n-k}\} \Rightarrow \dim V^\perp = n-k$

$\{v_1 \dots v_k, w_1 \dots w_{n-k}\}$ É LI

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} w_1 + \dots + \alpha_n w_{n-k}$

$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k}_{\in V} = -(\underbrace{\alpha_{k+1} w_1 + \dots + \alpha_n w_{n-k}}_{\in V^\perp})$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in V \cap V^\perp = \{0\} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$

$\Rightarrow \alpha_{k+1} w_1 + \dots + \alpha_n w_{n-k} \in V \cap V^\perp = \{0\} \Rightarrow \alpha_{k+1} w_1 + \dots + \alpha_n w_{n-k} \Rightarrow \alpha_i = 0$

JÁ QUE $\dim E = n$ E $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$ É UM CONJUNTO DE VETORES LI, ENTÃO É BASE.

LOGO, $\forall x \in E \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ TAIS QUE

$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} w_1 + \dots + \alpha_n w_{n-k} \therefore V + V^\perp$

(ii) UNICIDADE

$x = v_1 + v_1^\perp = v_2 + v_2^\perp \rightarrow \underbrace{v_1 - v_2}_{\in V} = \underbrace{v_2^\perp - v_1^\perp}_{\in V^\perp} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 - v_2 = 0 \\ v_2^\perp - v_1^\perp = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = v_2 \\ v_2^\perp = v_1^\perp \end{matrix}$