Álgebra Linear

4/11/24

Formas Quadráticas

- DEF: Equação da forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

- Podemos usar os autovalores da matriz que representa essa curva e classificá-la.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 \iff \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

- Uma forma quadrática pode ser definida como

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; q(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

- Note que:

$$x^T A x = x^T A^T x$$

- Além disso, $\forall A \in \mathbb{M}^{2\times 2}$, temos

$$x^T A x = x^T B x \quad \text{onde} \quad B = \frac{A^T + A}{2}$$

DEM

$$x^T \left(\frac{A + A^T}{2} \right) x = \frac{x^T A x}{2} + \frac{x^T A^T x}{2} = x^T A x$$

- Podemos supor então que A é simétrica

$$A = Q \Lambda Q^T \Rightarrow x^T Q \Lambda Q^T x \iff \underbrace{(Q^T x)^T}_{y^T} \Lambda \underbrace{Q^T x}_{y}$$

$$y^T \Lambda y \quad \text{onde} \quad y_i = q_i^T x$$

$$x = Qy \Rightarrow x = q_1 y + q_2 y + \dots + q_n y$$ → q_i é autovetor de A

- NO $\mathbb{R}^2$, TEMOS QUE:

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \rightarrow$ ELIPSE

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \rightarrow$ PARÁBOLA

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \rightarrow$ HIPÉRBOLE