Álgebra Linear

23/08/24

- Podemos definir uma matriz $A_{m \times n}$ como

$$A_{m\times n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Espaço Coluna

- $C(A) = \underbrace{\{Ax \in \mathbb{R}^m ; x \in \mathbb{R}^n\}}_{\text{SUBESPAÇO VETORIAL}}$

MOSTRANDO QUE $C(A)$ É ESPAÇO VETORIAL

$u, v \in C(A)$?
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \alpha u + \beta v \in C(A) \leftarrow$ O QUE SIGNIFICA?

↳ $u \in C(A) \Rightarrow \exists x \,/\, Ax = u$
$v \in C(A) \Rightarrow \exists y \,/\, Ay = v$

✓

$\Updownarrow$

$\exists x, y \in \mathbb{R}^n$ T.Q $\begin{matrix} u = Ax \\ v = Ay \end{matrix}$, LOGO $\alpha u + \beta v = \alpha Ax + \beta Ay = A(\underbrace{\alpha x + \beta y}_{\in \mathbb{R}^n})$

↳ PROVA QUE N(A) É ESPAÇO VETORIAL

- Propriedades

▷ $C(A)$ É O ESPAÇO VETORIAL CRIADO COM AS COMBINAÇÕES LINEARES DE A: $\text{span}(\{a_1, \dots, a_n\})$

$Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \longrightarrow$ COMBINAÇÃO LINEAR DAS COLUNAS DE A
$a_i \in \mathbb{R}^m$

DEFINIÇÃO DO span(A)

▷ $\underbrace{Ax = b}_{\exists x \in \mathbb{R}^m / Ax = b} \Leftrightarrow b \in C(A)$

$\exists x \in \mathbb{R}^m / Ax = b \Longleftrightarrow b \in C(A)$

▷ $\{x ; Ax = b\}$ NÃO É SUBESPAÇO PARA $b \neq 0$

↳ $0 \notin \{x ; Ax = b \wedge b \neq 0\}$

$A0 = 0 \neq b \Rightarrow \underbrace{Ax}_{b} + \underbrace{Ay}_{b} = b \Rightarrow 2b = b$
ABSURDO

Núcleo

- Conjunto dos vetores x que zeram o sistema Ax
- $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow 0 \in N(A)$

$|N(A)| = 1 \Rightarrow \exists B / B \cdot A = I$

MOSTRANDO QUE N(A) É ESPAÇO VETORIAL

$x, y \in N(A)$? $\Rightarrow \alpha x + \beta y \in N(A)$ ✓ → PROVA QUE NÚCLEO É ESPAÇO VETORIAL

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Downarrow \qquad \qquad \Updownarrow$

$Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad A(\alpha x + \beta y) = 0$

$Ay = 0 \qquad \qquad \alpha Ax + \beta Ay = 0$

- Exemplos

1º) $x + 2y + 3z = 0$

$[1, 2, 3]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ → NÚCLEO DE $[1, 2, 3]$

2º) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

→ $x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} \Rightarrow$ RETA

$N(A) = \{(x, -\frac{x}{2}); x \in \mathbb{R}\} \vee \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2y + x = 0\}$

- Propriedades

▷ $A = LU$, $N(A) = N(U)$

$Ax = 0 \Rightarrow LUx = 0 \Rightarrow Ux = L^{-1} \cdot 0 \Rightarrow Ux = 0$

- Calculando o núcleo da matriz

→ DEVE SABER QUE ELIMINAÇÃO NÃO MUDA O NÚCLEO

$N(A) = N(U)$

EXEMPLO

$$A=\begin{bmatrix}1&3&0&2&-1\\0&0&1&4&-3\\1&3&1&6&-4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&3&0&2&-1\\0&0&1&4&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

col 2 $\leftrightarrow$ col 3

$$\begin{bmatrix}\overbrace{\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}}^{I}&\overbrace{\boxed{\begin{matrix}3&2&-1\\0&4&-3\end{matrix}}}^{F}\\\begin{matrix}0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0&0&0\end{matrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow \underset{2\times 2}{I}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\underset{2\times 3}{F}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+F\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=0}_{\text{NÚCLEO}}$$

- PARA ACHAR OS VETORES DO NÚCLEO, TROCAMOS UMA DAS VARIÁVEIS LIVRES POR 1 E AS OUTRAS POR 0.

$$\begin{bmatrix}\underset{\text{PIVÔ}}{1}&3&0&2&-1\\0&0&\underset{\text{PIVÔ}}{1}&4&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

SEM PIVÔ (LIVRES)

$x_2=1 \quad x_4, x_5=0$

$x_1+3+0x_3+2\cdot 0-1\cdot 0=0 \Rightarrow x_1=-3$

$x_3+0+0=0 \quad x_3=0$

$$\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\in N(A)$$

$x_4=1 \quad x_2, x_5=0$

$x_1+2=0$

$x_3+4=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-2\\0\\4\\0\\0\end{bmatrix}$

COMO $N(A)$ É UM SUBESPAÇO

$$\alpha_1\begin{bmatrix}-2\\0\\4\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=0,\ \forall \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$$

DESCREVE TODOS OS ELEMENTOS DO NÚCLEO

- SUPONHA $R=\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix}$ ENTÃO $N=\begin{bmatrix}-F\\I\end{bmatrix}$