Álgebra Linear Numérica

24/03/25

Solução de sistemas lineares por métodos iterativos

Método de Jacobi

- Vamos considerar o sistema inicial:

$$7x_1 - x_2 = 5$$
$$3x_1 - 5x_2 = -7$$

- Resolvemos isolando x_1 na primeira equação e x_2 na segunda

$$x_1 = \frac{5 + x_2}{7} \qquad x_2 = \frac{7 + 3x_1}{5}$$

- Agora queremos uma aproximação inicial, ela não importa, vamos então usar $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

$$x_1 = \frac{5}{7} \qquad x_2 = \frac{7}{5}$$

- Agora usamos esses valores para substituir novamente:

$$x_1 = \frac{5 + 1.4}{7} \approx 0{,}914 \qquad x_2 = \frac{7 + 3 \cdot \frac{5}{7}}{5} \approx 1{,}829$$

- E fazemos isso repetidas vezes

Table 2.12

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0.714	0.914	0.976	0.993	0.998	0.999
x_2	0	1.400	1.829	1.949	1.985	1.996	1.999

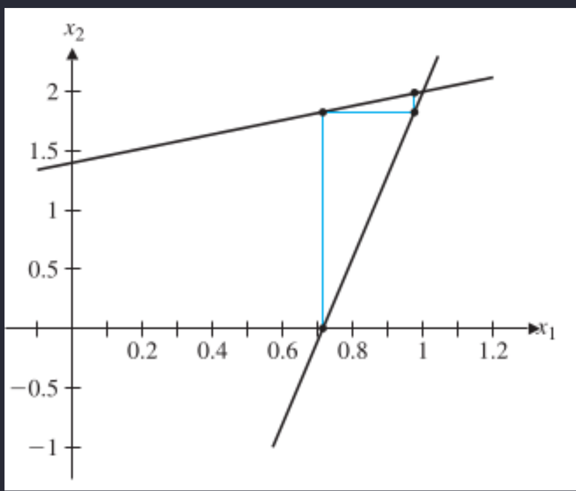
Método de Gauss-Seidel

- Muito parecido com o de Jacob, porém, assim que calculamos x_1, usamos ele para achar x_2, então usamos esse valor para calcular x_1 e assim por diante:

Table 2.14

n	0	1	2	3	4	5
x_1	0	0.714	0.976	0.998	1.000	1.000
x_2	0	1.829	1.985	1.999	2.000	2.000

- Esse método tem uma ótima vista geométrica. Se fizermos o gráfico de ambas equações no plano x_1x_2, então a intersecção é a solução. O método descrito pega um valor em uma reta e joga na outra, fazendo com que, progressivamente, a solução converja para a correta.



Generalização

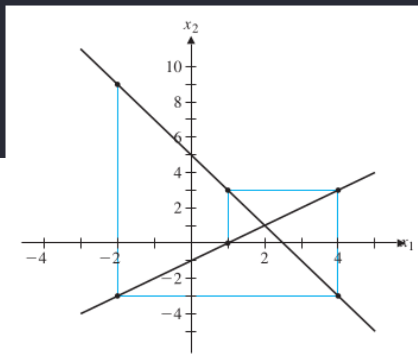
- Dado um sistema com n variáveis e n equações, resolvemos a i-ésima equação para a i-ésima variável, então chutamos uma aproximação inicial, e usamos os valores para ir atualizando seus valores
  - Jacobi
    - Usa todas as variáveis calculadas na k-ésima iteração para calcular a (k+1)-ésima iteração
  - Gauss-Seidel
    - Usa o valor mais recente para computar as próximas saídas

- PORÉM, ESSES MÉTODOS CONVERGEM? QUANDO CONVERGEM? CONVERGEM PARA A SOLUÇÃO? NA VERDADE NÃO.

$$x_1 - x_2 = 1$$
$$2x_1 + x_2 = 5$$

Table 2.16

n	0	1	2	3	4	5
x_1	0	1	4	−2	10	−14
x_2	0	3	−3	9	−15	33



- POR ENQUANTO, SERÁ UMA JUSTIFICATIVA SEM PROVA

DEFINIÇÃO

SEJA A UMA MATRIZ $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \cdots & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

DIZEMOS QUE A É ESTRITAMENTE DOMINANTE NA DIAGONAL SE:

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \dots + |a_{2n}|$$
$$\vdots$$
$$|a_{nn}| > |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{n\,n-1}|$$

TEOREMA

SE UM SISTEMA DE n EQUAÇÕES LINEARES COM n VARIÁVEIS TEM DIAGONAL ESTRITAMENTE DOMINANTE, ENTÃO TEM SOLUÇÃO ÚNICA E OS ALGORITMOS DE GAUSS E JACOBI CONVERGEM

(Não vale a volta)

DEM

Vamos pegar o exemplo:

$$7x_1 = x_2 + 5$$
$$-5x_2 = -3x_1 - 7$$

Reescrevemos então em forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}}_{b}$$

Decompondo A:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}} + \underset{D}{\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}} + \underset{U}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Logo escrevemos o sistema

$$Dx = -(L+U)x + b$$

Equivalente

$$x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

Vamos definir $M = -D^{-1}(L+U)$ e $c = D^{-1}b$, então

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Mx + c$$

Lembrando o algoritmo, escolhemos x_0 para gerar x_1:

$$x_1 = Mx_0 + c \quad , \text{ no geral: } \quad x_{k+1} = Mx_k + c$$

Queremos mostrar que x_{k+1} converge para próximo de x, então mostramos que $x_{k+1} - x$ vai para 0.

$$x_{k+1} - x = Mx_k + c - (Mx + c)$$

$$x_{k+1} - x = M(x_k - x)$$

Tiramos a norma em ambos os lados

$$\|x_{k+1} - x\| = \|M(x_k - x)\| \leq \|M\| \cdot \|x_k - x\|$$

Se conseguirmos mostrar que $\|M\| < 1$, então teríamos

$\|x_{k+1}-x\| < \|x_k - x\| \quad \forall k \geq 0$, então segue que $\|x_k - x\| \to 0$

logo $x_k - x \to 0$

Se $A = [a_{ij}]$ então

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

→ Sabemos que $\|M\|_\infty$ é o maior valor absoluto de uma soma de linhas. Suponha que isso ocorre na linha k.

$$\|M\|_\infty = \left|\frac{-a_{k1}}{a_{kk}}\right| + \left|\frac{-a_{k2}}{a_{kk}}\right| + \cdots + \left|\frac{-a_{kn}}{a_{kk}}\right|$$

$$= \frac{\sum_{i \neq k}^{n} |a_{ki}|}{|a_{kk}|}$$

→ Como M é estritamente dominante na diagonal, então

$$\boxed{\|M\|_\infty < 1} \Rightarrow \underbrace{\|x_k - x\| \to 0}$$

Agora, para o método de Gauss-Seidel

$$x_j^{(i+1)} = \frac{b_j - \sum_{k<j} a_{jk} x_k^{(i+1)} - \sum_{k>j} a_{jk} x_k^{(i)}}{a_{jj}}$$

$$= Dx^{(i+1)} = b - Lx^{(i+1)} - Ux^{(i)}$$

$$x^{(i+1)} = \underbrace{(D+L)^{-1} b}_{d} - \underbrace{(D+L)^{-1} U}_{M} x^{(i)}$$

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + d$$

A demonstração se segue de forma parecida

TEOREMA

SE OS ALGORITMOS DE GAUSS E JACOBI CONVERGEM PARA UM SISTEMA DE n EQUAÇÕES E n VARIÁVEIS, ENTÃO CONVERGEM PARA A SOLUÇÃO DO SISTEMA

DEM

Mostrado anteriormente quando $\|x_k - x\| \to 0$

TEOREMA

MÉTODOS DE GAUSS-SEIDEL E JACOB CONVERGEM $\Leftrightarrow |\lambda(M)| < 1$ ONDE $\lambda(A)$ REPRESENTA TODOS OS AUTOVALORES DE A E A MATRIZ $M = D^{-1}(L+U)$.