Álgebra Linear

06/11/24

Lista 11

1. Verdadeiro ou falso (prove ou dê um contra-exemplo):

   (a) Se A é singular, então AB também é singular.
   (b) O determinante de A é sempre o produto de seus pivôs.
   (c) O determinante de $A - B$ é $\det A - \det B$.
   (d) AB e BA tem o mesmo determinante.

a) Verdade, A singular $\Leftrightarrow \det A = 0$

$$\det AB = \underbrace{\det A}_{0} \cdot \det B = 0 \Rightarrow AB \text{ singular}$$

b) Verdade, pois eliminação não altera o determinante $\Rightarrow A$ não triangular $\Rightarrow EA$ triangular $\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

c) Falso

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{1} - \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{9} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{4} \Rightarrow \cancel{-8 = 4}$$

d) Verdade: $\det AB = \det A \cdot \det B = \det BA$

2. Sejam u e v vetores ortonormais em $\mathbb{R}^2$ e defina $A = uv^T$. Calcule A^2 para descobrir os autovalores de A. Verifique que o traço de A é $\lambda_1 + \lambda_2$.

$u\underbrace{v^T u}_{0} v^T \Rightarrow A = 0 \rightarrow A$ é nula.

Autovalores de $A = 0$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ u_nv_1 & \cdots & \cdots & u_nv_n \end{bmatrix} \rightarrow tr(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i}$$

$u^T v = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = tr A = 0$

3. A matriz B tem autovalores 1 e 2, C tem autovalores 3 e 4 e D tem autovalores 5 e 7 (todas são matrizes 2×2). Ache os autovalores de A:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Sabemos que $\det A = \det B \cdot \det D$

$\Rightarrow \det A = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$

Como essa multiplicação já está fatorada como números primos, podemos afirmar com certeza que 1, 2, 5 e 7 são os autovalores de A.

4. Seja D uma matriz $n \times n$ só com 1's em suas entradas. Procure a inversa da matriz $A = I + D$ dentre as matrizes $I + cD$ e ache o número c correto.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (I+D)(I+cD) \stackrel{?}{=} I$$

$$\cancel{I} + cD + D + cD^2 = \cancel{I}\ 0$$

$$\underbrace{cD^2}_{n \times n} + D + cD = 0 \rightarrow c \cdot n + 1 + c = 0$$

$n \times n$

$$c(n+1) + 1 = 0$$

$$c = \frac{-1}{n+1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ \vdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \cdots & n \\ n & \cdots & n \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} n & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & n \end{bmatrix}$$

Conferindo

$$(I+D)\left(I - \frac{D}{n+1}\right) \rightarrow I \underbrace{- \frac{D}{n+1} + D - \frac{D^2}{n+1}} = \boxed{I}$$

$$-\frac{1}{n+1}(D + D^2) = -D$$

$$I - \frac{1}{n+1}(D + \underbrace{D^2}) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} n+1 & 0 \\ 0 & n+1 \end{bmatrix}$$

5. Vamos resolver uma EDO de segunda ordem usando o que aprendemos. Considere $y'' = 5y' + 4y$ com $y(0) = C_1$ e $y'(0) = C_2$. Defina $u_1 = y$ e $u_2 = y'$. Escreva $\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t)$ e ache a solução da equação.

$$\begin{cases} y'' = 5y' + 4y \\ y(0) = C_1 \quad y'(0) = C_2 \end{cases} \longrightarrow u_1 = y \quad u_2 = y' \rightarrow u_1' = u_2$$

$$u'(t) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2'(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

6. Se A é simétrica e todos seus autovalores são iguais a λ. O que podemos dizer sobre A?

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & q_1 & - \\ & \vdots & \\ - & q_n & - \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda q_1 & \cdots & \lambda q_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & q_1 & - \\ & \vdots & \\ - & q_n & - \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A = \lambda \cdot I$$

7. Suponha que C é positiva definida e que A tenha as colunas LI. Mostre que $A^T CA$ é positiva definida.

$x^T \underset{n\times n}{C} x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Se A tem colunas L.I, $\det A \neq 0$

$$x^T A^T C A x = \underbrace{(Ax)^T}_{y^T} C \underbrace{(Ax)}_{y} \Rightarrow \boxed{y^T C y} > 0$$

8. Quais são os autovalores de A se ela for similar a A^{-1}?

$$A = MA^{-1}M^{-1} \Rightarrow \det A = \det A^{-1} \Leftrightarrow \det A = \frac{1}{\det A} \Leftrightarrow (\det A)^2 = 1$$

$\Rightarrow \det A = \pm 1 \Rightarrow A = I$ ou $A = -I$, logo

Autovalores de A são 1 ou -1.

9. Suponha que A é quadrada, mostre que $\sigma_1 \geq |\lambda|$, para qualquer autovalor λ de A, onde σ_1 é o primeiro valor singular de A.

$$\underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{U}\ \underset{n\times n}{\Sigma}\ \underset{n\times n}{V^T}$$

10. Ache a decomposição SVD da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\rightarrow A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores de A^TA

olhando na net $\Rightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 \quad \lambda_3 = 2 = \lambda_4$

$\Rightarrow \sigma_1 = 0 = \sigma_2 \quad \sigma_3 = \sqrt{2} = \sigma_4$

$$N(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\underset{2\times 4}{A} = \underset{2\times 2}{U}\ \underset{2\times 4}{\Sigma}\ \underset{4\times 4}{V^T} \longrightarrow \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc:c} \sigma_1 & 0 & \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_4^T \end{bmatrix}$$

$v_1, v_2 \rightarrow$ base ortonormal de $C(A)^T$

$u_1, u_2 \rightarrow$ // $C(A)$

$u_3, u_4 \rightarrow$ // $N(A^T)$

$v_3, v_4 \rightarrow$ // $N(A)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc:c} \sqrt{2} & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = A$$