Álgebra Linear

04/09/24

Teorema da Dimensão

- Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{u_1, \dots, u_k\}$ são bases de E, então $n = k$.

DEM

→ Suponha por absurdo que $k > n$ vamos provar que $\{u_1, \dots, u_k\}$ é LD.

$$u_i \in E \Rightarrow E = \text{span}(\{v_1, \dots, v_n\}) \Rightarrow u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

→ Assim temos uma matriz $A_{k \times n}$ com $k > n$

$\Rightarrow$ A tem mais linhas que colunas $\Rightarrow R$ terá linhas de 0

$\Rightarrow \exists y \neq 0 \in \mathbb{R}^k$ t.q $y^T A = 0$

→ Considere $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} y_i u_i = \sum_{i=1}^{k} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} v_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} y_i a_{ij}\right)}_{y^T A} = 0$

$\Rightarrow \{u_1, \dots, u_k\}$ é LD (ABSURDO)

- Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base de E, dizemos que a dimensão de E é n.

$$\dim E = n$$

Propriedades

- Se $\dim E = n$, $n+1$ vetores são LD

DEM

* Sem perda de generalidade, podemos supor que o conjunto de $n+1$ vetores é da forma $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ com $\{v_1, \dots, v_n\}$ sendo base de E.

$\Rightarrow v_{n+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$\Rightarrow 0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n - v_{n+1}$

• ACHAMOS UMA COMBINAÇÃO LINEAR = 0 SEM TODOS OS ELEMENTOS IGUAIS À 0. (LD)

• SEJA $\dim E = n$ E $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ UM CONJUNTO LI DE E, $\exists B = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ T.Q $\text{span}(A \cup B) = E$ ($A \cup B$ É BASE)

DEM

$A = \{v_1, \dots, v_k\}$ LI E $k < n \Rightarrow \text{span}(A)$ NÃO GERA E, $\exists v_{k+1} \in E$ T.Q $v_{k+1} \notin \text{span}(A)$, POR CONSEQUÊNCIA, $B = \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ É LI. SE $k+1 < n$, REPITA O PROCESSO DE ESCOLHER $v_{k+i} \notin \text{span}(\{v_1, \dots, v_{k+i-1}\})$ ATÉ QUE $k+i = n$

COLORÁRIO: SE $\dim E = n$, QUALQUER CONJUNTO DE n VETORES LI É BASE DE E.

• SEJA B INVERTÍVEL. SE $\{v_1, \dots, v_n\}$ É LI, O MESMO VALE PARA $\{Bv_1, Bv_2, \dots, Bv_n\}$

DEM

$$V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}_{m \times n} \Rightarrow \begin{cases} LI \Leftrightarrow N(V) = \{0\} \\ LD \Leftrightarrow \exists x \neq 0 \,/\, x \in N(V) \; (Vx = 0) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ Bv_1 & \cdots & Bv_k \\ | & & | \end{bmatrix} = BV$$ QUEREMOS ANALISAR O NÚCLEO DE BV

$N(V) \subseteq N(BV) \Rightarrow x \in N(V) \Leftrightarrow Vx = 0 \Rightarrow BVx = 0$

$N(BV) \subseteq N(V) \Rightarrow x \in N(BV) \Leftrightarrow \underbrace{BVx = 0}_{\exists B^{-1}} \Rightarrow IVx = 0 \Rightarrow Vx = 0$

$\hookrightarrow x \in N(V)$

LOGO $N(V) = N(BV)$

B PRECISA DE INVERSA À ESQUERDA

- PODEMOS TIRAR ALGUMAS CONCLUSÕES DESSE FATO.

  - O NÚCLEO DE A NÃO ALTERA COM ELIMINAÇÕES
    $N(A) = N(R)$

DEM

$$x \in N(A) \quad Ax = 0 \iff EAx = 0 \iff Rx = 0$$

- AS COLUNAS PIVÔ DA FORMA ESCALONADA R SÃO LI, LOGO AS MESMAS COLUNAS DE A TAMBÉM SÃO LI.

DEM

$$R = \begin{bmatrix} I_{r \times r} & F_{r \times n-r} \\ 0_{m-r \times r} & 0_{m-r \times n-r} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \rightarrow \text{SÃO LI EM } \mathbb{R}^m$$

$$EA = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Ea_1, & Ea_2, & \dots, & Ea_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = R$$

$$e_i = Ea_i$$
$$i = 1, \dots, n$$

$\hookrightarrow \{a_1, \dots, a_n\}$ É LI

- POR CONSEQUÊNCIA DA PROVA ANTERIOR, AS COLUNAS LIVRES DE A SÃO COMBINAÇÕES LINEARES DAS COLUNAS PIVÔ.