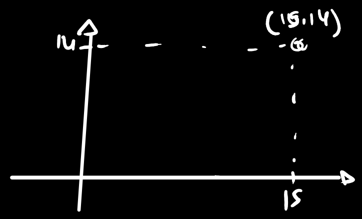
G.A

14/05

1) Seja $P=(22,\ 17)$. Se os eixos do sistema de coordenadas forem transladados de forma que a origem vá para $(15,\ 14)$, quais são as novas coordenadas de P?

ORIGEM

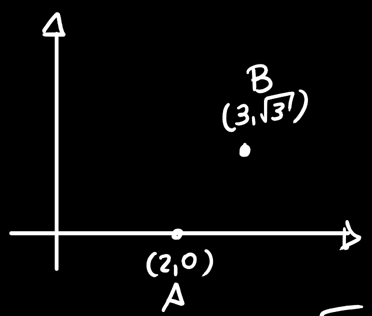


$\Rightarrow$ $x' = x - a \Rightarrow x' = 22 - 15$

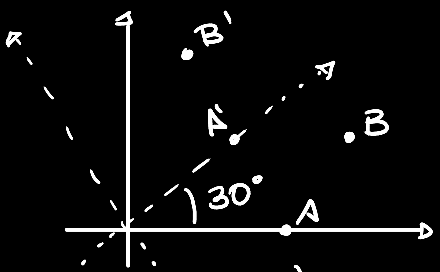
$y' = y - a \Rightarrow y' = 17 - 14$

$P' = (7, 3)$

2) São dados $A=(2,\ 0)$ e $B=(3,\ \sqrt{3})$. Fazendo uma rotação de 30° nos eixos quais são as novas coordenadas de A e B? Faça uma figura para entender bem o que aconteceu.



$\Rightarrow$



$\Rightarrow x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \operatorname{sen}\theta$

$y' = y \cdot \cos\theta + x \cdot \operatorname{sen}\theta$

$B' = (\sqrt{3}, 3)$

$B' \Rightarrow x' = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$

$x' = \sqrt{3}$

$y' = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2}$

$y' = 3$

$\rightarrow A' \Rightarrow$ $x' = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow A' = (\sqrt{3}, 1)$

$y' = 2 \cdot \frac{1}{2}$

3) Dadas as equações abaixo, faça uma translação dos eixos de forma que a nova origem seja $O_1 = (4, 1)$ e determine as novas equações neste sistema.

a) $3x + 5y = 7$

b) $y = x^2 - 3$

a) $3(x-4) + 5(y-1) = 7$

$3x + 5y = 24$

b) $y - 1 = (x-4)^2 - 3$

$y = x^2 - 8x + 16 - 2$

$y = x^2 - 8x + 14$

4) Elimine os termos do primeiro grau e diga o que representa a equação $x^2+y^2-5x-y+\frac{11}{2}=0$.

$2\cdot\sqrt{2}\cdot x=10$

$x=\frac{5}{\sqrt{2}}$

$2x^2+2y^2-10x-2y=-11$

$\left(2x^2-10x+\frac{25}{2}\right)+\left(2y^2-2y+\frac{1}{2}\right)=-11+\overset{13}{\cancel{\frac{25}{2}+\frac{1}{2}}}$

$\left(\sqrt{2}\cdot x-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(2x-5)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2y-1)^2=2$

$\left(\frac{2x-5}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2y-1}{\sqrt{2}}\right)^2=2$

$(2x-5)^2+(2y-1)^2=4$

$\left(2\left(x-\frac{5}{2}\right)\right)^2+\left(2\left(y-\frac{1}{2}\right)\right)^2=4$

$\rightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$

CIRCUNFERENCIA DE CENTRO $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ E RAIO 1

5) Elimine os termos de primeiro grau de $2x^2+5y^2-12x+10y-17=0$ e dê os comprimentos dos eixos desta cônica.

$12=2\cdot\sqrt{2}\cdot a$

$a=\frac{6}{\sqrt{2}}$

$a=3\sqrt{2}$

$2\sqrt{5}\cdot b=10 \Rightarrow \frac{10}{2\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{5}{\sqrt{5}}\Rightarrow\sqrt{5}$

$b=\sqrt{5}$

$(x\sqrt{2}-3\sqrt{2})$

$(2x^2-12x+18)+(5y^2+10y+5)=17+18+5$

$(x\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2+(y\sqrt{5}+\sqrt{5})^2=40$

$\frac{2(x-3)^2+5(y+1)^2=40}{40}$

$\frac{(x-3)^2}{20}+\frac{(y+1)^2}{8}=1$

$a^2=20$

$b^2=8$

$a=2\sqrt{5}$

$b=2\sqrt{2}$ $\rightarrow$ EIXO MAIOR $=4\sqrt{5}$

EIXO MENOR $=4\sqrt{2}$

6) Determine o parâmetro e o foco da parábola $y^2-6x-4y+5=0$.

$y^2=2px$

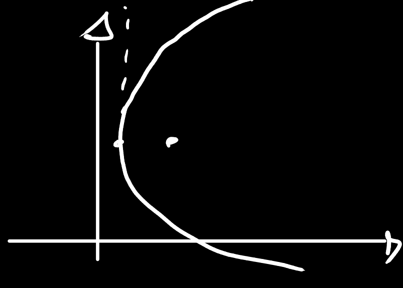
$(y^2-4y+4)+5=6x+4$

$V=\left(\frac{1}{6},2\right)$

$(y-2)^2=6x-1 \longrightarrow (y-2)^2=2\cdot\underbrace{3}_{p}\left(x-\frac{1}{6}\right)$

$O'=\left(2,\frac{1}{6}\right)$

$y'^2=2\cdot3\cdot x'$



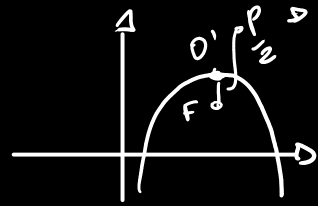
$\frac{1}{6}+\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{10}{6}\Rightarrow\frac{5}{3}$

$F=\left(\frac{5}{3},2\right)$

7) Faça um esboço do gráfico da curva dada ela equação $x^2-6x+4y=3$.

$x^2-6x=3-4y \quad \to \quad (x-3)^2=-4(y-3) \qquad O'=(3,3)$

$x^2-6x+9=12-4y \qquad x^2=-4y$



$\frac{p}{2} \Rightarrow F=(3,2)$

8) Determine o comprimento do eixo maior da elipse $x^2+2y^2-3x+4y-2=0$.

$$\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\left(2y^2+4y+2\right)=2+\frac{9}{4}+2 \to \frac{8}{4}+\frac{9}{4}+\frac{8}{4} \qquad \begin{array}{r}1\\16\\+9\\\hline 25\end{array}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2=\frac{25}{4} \Rightarrow 4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+8(y+1)^2=25$$

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{25}{8}}=1 \Rightarrow a^2=\frac{25}{4} \to \boxed{2a=5}$$

$$a=\frac{5}{2}$$

9) Elimine os termos de primeiro grau da equação $2xy-x-y+4=0$.

$$2xy-x-y+4=0$$

$$2(x'+a)(y'+b)-x'-a-y'-b+4=0$$

$$2x'y'+2x'b+2y'a+2ab-x'-a-y'-b+4=0$$

$$2x'y'+x'(2b-1)+y'(2a-1)+2ab-a-b+4=$$

$$b=a=\frac{1}{2} \qquad \boxed{2x'y'=\frac{-7}{2}}$$

10) Algum professor de Cálculo disse que $xy = 1$ é a equação de uma hipérbole. Faça uma rotação de 45° nos eixos para verificar isso e determine os focos dessa hipérbole (no novo sistema e no sistema original).

$$xy = 1 \Rightarrow (x \cdot \cos 315^{\circ} - y \cdot \text{sen } 315^{\circ}) = \frac{1}{x \cdot \text{sen } 315^{\circ} + y \cdot \cos 315^{\circ}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{(x-y)} \Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{2} = 1$$

$$a^2 = \sqrt{2} \quad b^2 = \sqrt{2} \Rightarrow$$ NO EIXO ROTACIONADO $(2,0)$ $(-2,0)$ $\Rightarrow$

$$x = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$y = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\quad y = \sqrt{2}$$

focos $\Rightarrow \{(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

11) Dada a equação . $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$, faça uma rotação adequada dos eixos para eliminar o termo xy. Identifique a cônica e dê sua nova equação.

$$tg\, 2\theta = \frac{-6\sqrt{3}}{7-13} \quad\quad \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{aligned} x &= x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \cdot \frac{1}{2} \\ y &= x' \cdot \frac{1}{2} + y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$tg\, 2\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 30^{\circ}$$

$$\Rightarrow 7\left(\frac{x'\sqrt{2} - y'}{2}\right)^2 - 6\sqrt{3}\left(\frac{x'\sqrt{2} - y'}{2}\right)\left(\frac{x' + y'\sqrt{2}}{2}\right) + 13\left(\frac{x' + y'\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 16$$

$$\cancel{21x'^2} - \cancel{14\sqrt{3}x'y'} + \cancel{17y'^2} - \cancel{18\sqrt{3}x'y'} - \cancel{18x'^2} + \cancel{18y'^2} + \cancel{6\sqrt{3}x'y'} + \cancel{39y'^2} + \cancel{26x'y'\sqrt{3}} + \cancel{13x'^2} = 64$$

$$16x'^2 + 64y'^2 = 64 \Rightarrow \frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$$

ELIPSE DE EIXO MAIOR = 4

EIXO MENOR = 2

12) Dada a equação $x^2 + 6xy + y^2 = 4$, faça uma rotação adequada dos eixos para eliminar o termo xy. Identifique a cônica e dê sua nova equação.

ROTAÇÃO DE 45°

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4$$

$$x'^2 - \cancel{2x'y'} + y'^2 + 6x'^2 - 6y'^2 + x'^2 + \cancel{2y'x'} + y'^2 = 8$$

$$8x'^2 - 4y'^2 = 8 \Rightarrow x'^2 - \frac{y'^2}{2} = 1$$

HIPÉRBOLE

13) Mostre que a equação $x^2 + 6xy + y^2 = 0$ representa um par de retas concorrentes.

$$x'^2 + 6x'y' + 9y'^2 = 8y'^2 \Rightarrow (x' + 3y')^2 = 8y'^2$$

$$\Rightarrow x' + 3y' = 2y'\sqrt{2} \Rightarrow x + y'(3 - 2\sqrt{2}) = 0$$

14) Simplifique a equação $x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$.

$A = C \Rightarrow 45°$

ROTAÇÃO 45°

$$x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x' \cdot \operatorname{sen}\theta + y' \cdot \cos\theta$$

TRANSLAÇÃO

$$x = x' + a$$
$$y = y' + b$$

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) - 6 = 0$$

$$\frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{\cancel{2}} + \frac{x'^2 - y'^2}{\cancel{2}} + \frac{x'^2 + 2x'y' + y'^2}{\cancel{2}} - \frac{3\sqrt{2}x' + 3\sqrt{2}y'}{\cancel{2}} - \frac{12}{\cancel{2}} = 0$$

$$x'^2 - \cancel{2x'y'} + \cancel{y'^2} + x'^2 - \cancel{y'^2} + x'^2 + \cancel{2x'y'} + y'^2 - x'3\sqrt{2} - y'3\sqrt{2} - 12 = 0$$

$$3x'^2 + y'^2 - x'3\sqrt{2} - y'3\sqrt{2} - 12 = 0$$

$x'' = x' + a$

$y'' = y' + b$

$\hookrightarrow 3(x''+a)^2 + (y''+b)^2 - (x''+a)3\sqrt{2} - (y''+b)3\sqrt{2} - 12 = 0$

$\rightarrow 3x''^2 + 6x''a + 3a^2 + y''^2 + 2y''b + b^2 - 3x''\sqrt{2} - 3a\sqrt{2} - 3y''\sqrt{2} - 3b\sqrt{2} = 12$

$3x''^2 + y''^2 + x''(6a - 3\sqrt{2}) + y''(2b - 3\sqrt{2}) = 12 - 3a^2 - b^2 + 3\sqrt{2}\cdot a + 3\sqrt{2}\cdot b$

$6a - 3\sqrt{2} = 0$ $\qquad$ $2b = 3\sqrt{2}$

$a = \frac{3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $b = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$3x''^2 + y''^2 = 12 - \frac{3}{2} - \frac{9}{2} + 3\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} + 3\cancel{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}$

$\cancel{12} - \cancel{\frac{12}{6}} = 6$

$\rightarrow 3x''^2 + y''^2 = 18$

15) O que representa a equação $x^2 - 4xy + 4y^2 = 4$?

$\rightarrow (x - 2y)^2 = 4 \Rightarrow x - 2y = \pm 2$

2 RETAS

16) Complete quadrados para determinar o que significa cada uma das equações abaixo:

a) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 5x - 15y + 6 = 0$

b) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$

c) $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 3y + 2 = 0$

(a) $(x - 3y)^2 + 5(x - 3y) = -6$

$(x - 3y)(x - 3y + 5) = -6 \Rightarrow$ DUAS RETAS

(b) $x^2-6xy+9y^2+4x-12y+4=0$

$\underbrace{(x-3y)^2}_{z^2}+4\underbrace{(x-3y)}_{z}+2=0$

$\boxed{(x-3y+2)^2}=0$ → UMA SÓ RETA

(c) $x^2-6xy+9y^2+x-3y+2=0$

$\underbrace{(x-3y)}_{a}{}^2+\underbrace{x-3y}_{a}+2=0 \Rightarrow a^2+a+2=0$

$\Delta=1-8$

$\Delta=-7$

17) Elimine os termos de primeiro grau da equação $2x^2+xy-y^2-6x+3y=0$.

$x=x'+a$
$y=y'+b$

$2(x'+a)^2+(x'+a)(y'+b)-(y'+b)^2-6(x'+a)+3(y'+b)=0$

$2x'^2+4x'a+2a^2+x'y'+x'b+ay'+ab-y'^2-2y'b-b^2$
$-6x'-6a+3y'+3b=0$

$2x'^2+x'y'-y'^2+x'(4a+b-6)+y'(-2b+a+3)+2a^2+ab-b^2-6a+3b$

$4a+b=6\ (\cdot 2) \Rightarrow 8a+2b=12$
$a-2b=-3 \qquad\quad a-2b=-3$

$9a=9 \Rightarrow a=1$

$1-2b=-3$
$b=2$

→ $x=x'+1$
$y=y'-2$

$2x'^2+x'y'-y'^2+\cancel{2+2-4-6+6} \Rightarrow 2x'^2+x'y'-y'^2=0$

CENTRO EM $(1,-2)$

18) A equação $2x'^2 + x'y' - y'^2 = 0$ é a resposta do exercício anterior. Mostre que ela representa duas retas concorrentes. Dê as equações dessas retas após a translação e antes da translação.

$$2x'^2 + x'y' - y'^2 = 0$$

$$\Delta = y'^2 + 8 \cdot y'^2 \Rightarrow \Delta = 9y'^2$$

$$x' = \frac{-y' \pm 3y'}{4}$$

$$x' = -y' \Rightarrow x' = \frac{y'}{2}$$

$$2(x'+y')\left(x' - \frac{y'}{2}\right) = 0$$

$$x' + y' = 0$$

$$x - 1 + y - 2 = 0$$

$$x + y = 3$$

$$x' - \frac{y'}{2} = 0$$

$$x - 1 - \frac{y+2}{2} = 0$$

$$x - \frac{y}{2} = 0$$

19) Determine o centro e o comprimento do eixo maior da elipse definida pela equação $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 120x + 10y = 0$.

$$tg\, 2\theta = \frac{24}{36 - 29}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ -29 \\ \hline 07 \end{array}$$

$$tg\, 2\theta = \frac{24}{7}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{576}{49}}} \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{625}{49}}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{7}{25}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ +7 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{32}}{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$sen\,\theta = \frac{3}{5}$$

$$x = x' \cdot \cos\theta - y' \cdot sen\,\theta$$

$$y = x' \cdot sen\,\theta + y' \cdot \cos\theta$$

$$\cos = \frac{4}{5} \quad sen = \frac{3}{5}$$

$36x^2+24xy+29y^2-120x+10y=0.$

$$36\left(\frac{x'\cdot4-y'\cdot3}{5}\right)^2+24\left(\frac{x'\cdot4-y'\cdot3}{5}\right)\left(\frac{x'\cdot3+y'\cdot4}{5}\right)+29\left(\frac{3x'+4y'}{5}\right)^2$$

$$-120\left(\frac{x'\cdot4-y'\cdot3}{5}\right)+10\left(\frac{x'\cdot3+y'\cdot4}{5}\right)=0$$

$7x'y'$

$$36(16x'^2-24x'y'+9y'^2)+24(12x'^2+\cancel{16x'y'}-\cancel{9x'y'}-12y'^2)$$

$$+29(9x'^2+24x'y'+16y'^2)-600(x'\cdot4-y'\cdot3)+50(x'\cdot3+y'4)=0$$

$$576x'^2-\cancel{864x'y'}+324y'^2\ldots$$

$$288x'^2+\cancel{168x'y'}-288y'^2\ldots$$

$$261x'^2+\cancel{696x'y'}+464y'^2\ldots$$

$$-2400x'+1800y'+150x'+200y'=0$$

$$\to 1125x'^2+500y'^2-2250x'+2000y'=0$$

225	100	450	400
45	20	90	80
9	4	18	16

$$9x'^2+4y'^2-18x'+16y'=0$$

$$9x'^2-18x'+9+4y'^2+16y'+16=9+16$$

$$(3x'-3)^2+(2y'+4)^2=25$$

$$9(x'-1)^2+4(y'+2)^2=25$$

$$\frac{(x'-1)^2}{\frac{25}{9}}+\frac{(y'+2)^2}{\frac{25}{4}}=1$$

MAJOR

$b=\frac{5}{2}$ $2b=5$