Álgebra Linear 30/10/24

Teorema Espectral

Teorema

Se A é simétrica, então A pode ser decomposta em $Q\Lambda Q^T$ onde Λ é uma matriz real e Q é ortogonal

- Para provar, tenho de provar duas proposições

Proposição

Se A é simétrica, seus autovalores são reais

DEM

Seja λ um autovalor de A

$\exists x \neq 0 \,/\, Ax = \lambda x$

$\Rightarrow \overline{Ax} = \overline{\lambda x} \iff \bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \iff A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$

Note que: $\bar{x}^T A x = \lambda \underbrace{\bar{x}^T x}$ $\rightarrow$ $\bar{x}^T x = \|x\|^2$

se x permite entradas complexas

$(A^T\bar{x})^T x = (A\bar{x})^T = \lambda \bar{x}^T x \iff \bar{\lambda}\bar{x}^T x = \lambda \bar{x} x^T$

$\Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Proposição

Se A é simétrica, seus autovetores são ortogonais entre si

DEM $\quad Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$x_1^T A x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2$

$\iff (A^T x_1)^T x_2 \iff (A x_1)^T x_2 \iff \lambda_1 x_1^T x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2$

$\Rightarrow x_1^T x_2 = 0$

DEMONSTRAÇÃO

VAMOS USAR INDUÇÃO NO TAMANHO DA MATRIZ, MAS VAMOS PREPARAR O TERRENO DA INDUÇÃO

SABEMOS QUE A TEM AUTOVALORES REAIS

$\Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}$ E q_1 COM $\|q_1\| = 1$; $Aq_1 = \lambda_1 q_1$

DEFINA $Q_1 = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & \tilde{q}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ UMA MATRIZ ORTOGONAL,

TEMOS:

$$Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} - & q_1 & - \\ - & \tilde{q}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \tilde{q}_n & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ Aq_1 & \cdots & A\tilde{q}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} q_1^T \lambda_1 q_1 & q_1^T A \tilde{q}_2 & \cdots & q_1^T A \tilde{q}_n \\ \hline \lambda_1 \cancel{\tilde{q}_2^T q_1}^{\,0} & & & \\ \vdots & & * & \\ \lambda_1 \cancel{\tilde{q}_n^T q_1}^{\,0} & & & \end{array}\right]$$

VAMOS MOSTRAR QUE $q_1^T A \tilde{q}_i = 0$:

$$q_1^T A \tilde{q}_i = (A^T q_1)^T \tilde{q}_i = (A q_1)^T \tilde{q}_i = (\lambda_1 q_1)^T \tilde{q}_i = \lambda_1 q_1^T \tilde{q}_i = 0$$

PERCEBA QUE O BLOCO $*$ É SIMÉTRICO E $n-1 \times n-1$, ENTÃO VAMOS REALIZAR A INDUÇÃO

Indução em n:

$n=1 \rightarrow$ Trivial $\Rightarrow A = a$, $Q = 1$

Hipótese: $n-1$ é válida a hipótese

Seja $A_{n\times n}$ simétrica, sabemos que $\exists\, Q_1$ ortogonal e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q_1^T A Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \quad \text{com } * \text{ simétrico}$$

Pela hipótese, sabemos que $* = Q_* \Lambda_* Q_*^T$

Seja $\Lambda = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_* \end{array}\right]$ e $Q = Q_1 \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_* \end{array}\right]$

* Q é ortogonal?

$$\underbrace{\cancel{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_*^T \end{array}\right]} \underbrace{\cancel{Q_1^T Q_1}}_{I} \cancel{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_* \end{array}\right]}}_{I} \Rightarrow Q \text{ ortogonal}$$

* $Q^T A Q = \Lambda$?

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_*^T \end{array}\right] \underbrace{\cancel{Q_1^T A Q_1}}_{\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right]} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_* \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & Q_*^T \cdot * \cdot Q_* \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda_* \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \underline{A = Q \Lambda Q^T}$$