GEOMETRIA ANALÍTICA

27/02/24

PLANO CARTESIANO

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y);\ x,y \in \mathbb{R}\}$ (REPRESENTAÇÃO DO PLANO)

OPERAÇÕES

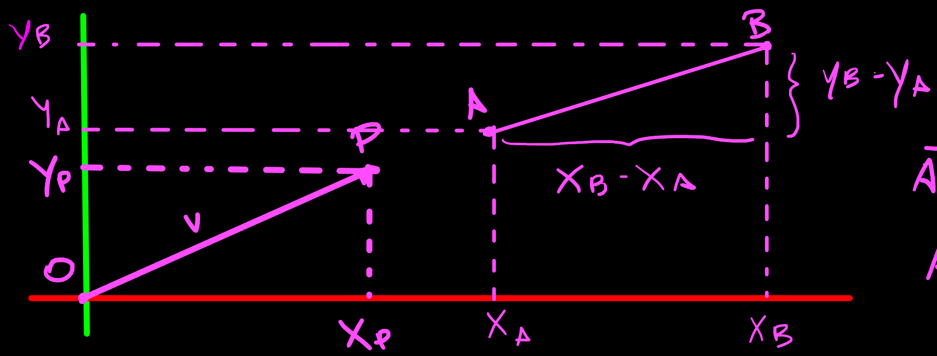
$(x,y) = (x',y') \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$ ADIÇÃO

$(x,y) - (x',y') = (x+x', y-y')$ SUBTRAÇÃO

$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$ MULTIPLICAÇÃO

VETORES COMO COORDENADAS



$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

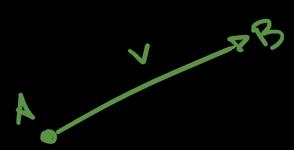
$\vec{AB} = B - A$

$(x_P, y_P) = v = \vec{P}$

DISTÂNCIA ENTRE 2 PONTOS

MÓDULO DE UM VETOR É SEU COMPRIMENTO

$v = (x,y) \rightarrow |v| = \sqrt{x^2+y^2}$



$A = (x_A, y_A)$

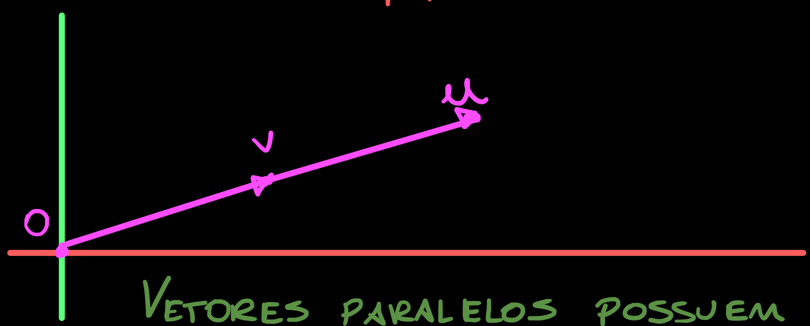
$B = (x_B, y_B)$

$\vec{AB} = (x_A - x_B, y_A - y_B)$

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

VETORES COLINEARES

$v = (x,y)$, $u = (x',y')$ SÃO COLINEARES, SUPONHA $x \neq 0 \neq y$



$v = \alpha u$ PARA ALGUM $\alpha \in \mathbb{R}$

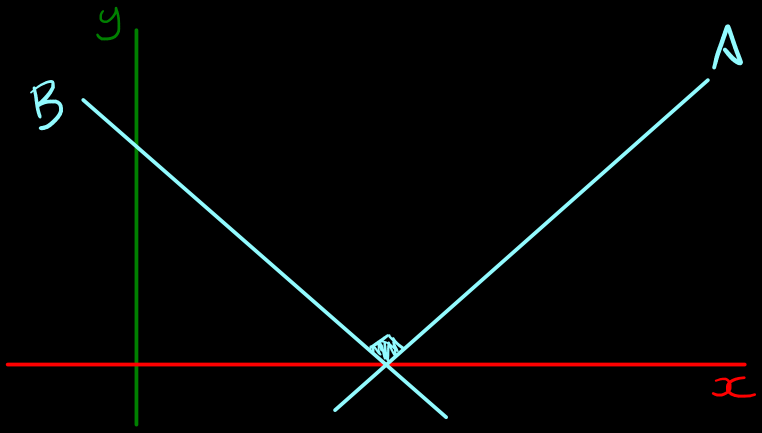
$(x,y) = \alpha(x',y')$

$\begin{cases} x = \alpha x' \\ y = \alpha y' \end{cases}$

$\boxed{\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}}$

VETORES PARALELOS POSSUEM COORDENADAS PROPORCIONAIS.

PERPENDICULARISMO



$A=(x,y) \quad B=(x',y')$

$\overrightarrow{BA} = A-B = (x-x', y-y')$

$|\overrightarrow{BA}|^2 = |0A|^2 + |0B|^2$

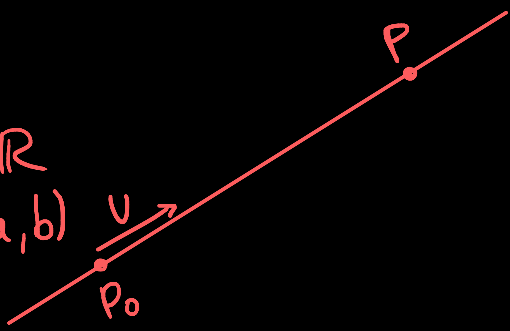
$(x-x')^2 + (y-y')^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$

$-2xx' - 2yy' = 0$

$xx' + yy' = 0$

EQUAÇÃO DA RETA

DADOS $P_0=(x_0,y_0)$ E $v=(a,b)$, A RETA r PASSA POR P_0 E É PARALELA A v (VETOR DIRETOR)



$P=(x,y) \in r$

$\overrightarrow{P_0P} \,//\, v \rightarrow \overrightarrow{P_0P} = t \cdot v, \ t \in \mathbb{R}$

$P - P_0 = t \cdot v$

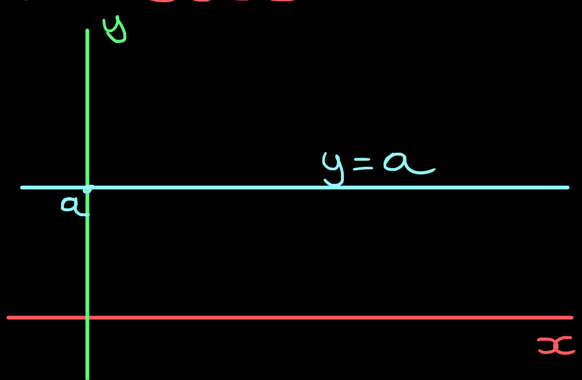
$P = P_0 + t \cdot v \rightarrow (x,y) = (x_0,y_0) + t(a,b)$

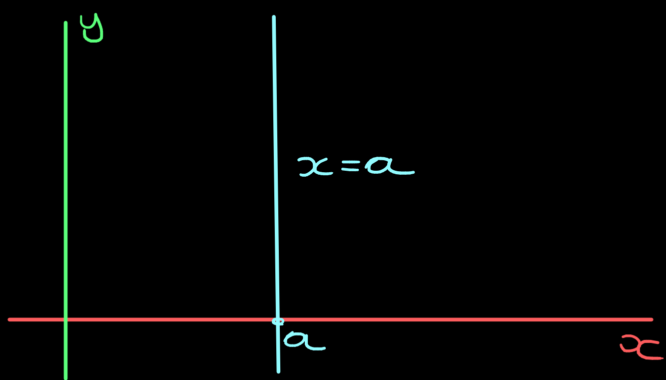
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

EQUAÇÃO GERAL DA RETA

↳ $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

EXCESSÕES





Vetor normal

$r: ax + by + c = 0$

A $\longrightarrow$ B

$r \rightarrow A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

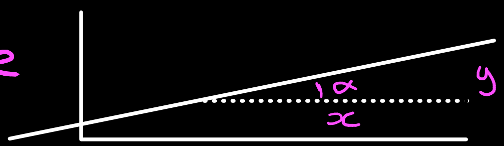
$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

O vetor (a, b) é normal ao vetor $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Forma Reduzida

$$ax + by + c = 0 \longrightarrow y = \frac{-ax}{b} - \frac{c}{b} \Rightarrow \underline{y = mx + n}$$

$m =$ coeficiente angular



$\underline{m = tg\,\alpha}$

Retas Paralelas

$r \parallel s$

$r: mx + n$

$s: mx + n'$

Retas Perpendiculares

$r \perp s$

$r: mx + n$

$s: -\frac{1}{m} \cdot x + n'$

Equação do segmento de reta

Dados 2 pontos A e B, para todo ponto P da reta AB, os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares. Então $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ para $t \in \mathbb{R}$, entretanto $P \in \overline{AB} \iff t \in [0,1]$, de fato, quando $t = 0 \therefore P = A$ e $t = 1 \therefore P = B$

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}, \; t \in [0,1]$$

$$P - A = t(B - A)$$

$$\boxed{P = (t-1) \cdot A + t \cdot B}$$

PRODUTO ESCALAR

$u = (x, y) \quad v = (x', y')$

DEFINE-SE

$u \cdot v = xx' + yy' \Rightarrow$ PRODUTO ESCALAR

PROPRIEDADES

I) $u \cdot v = v \cdot u$

II) $u(v + v') = uv + uv'$

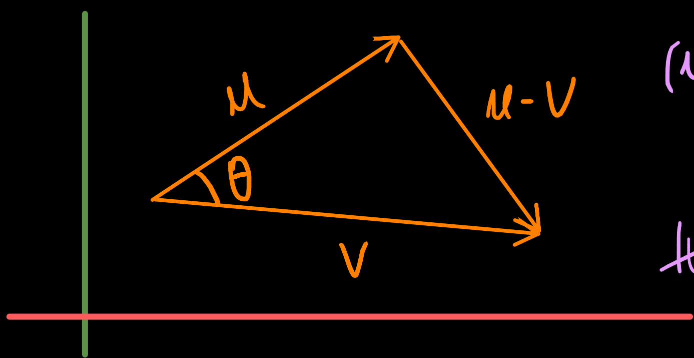
$v(u, u') = uv + u'v$

III) $\alpha \in \mathbb{R}, \ (\alpha \cdot u) \cdot v = \alpha(u \cdot v)$

IV) $u, v \neq 0, \ u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$

V) $u \cdot u = |u|^2$

ÂNGULO ENTRE 2 VETORES



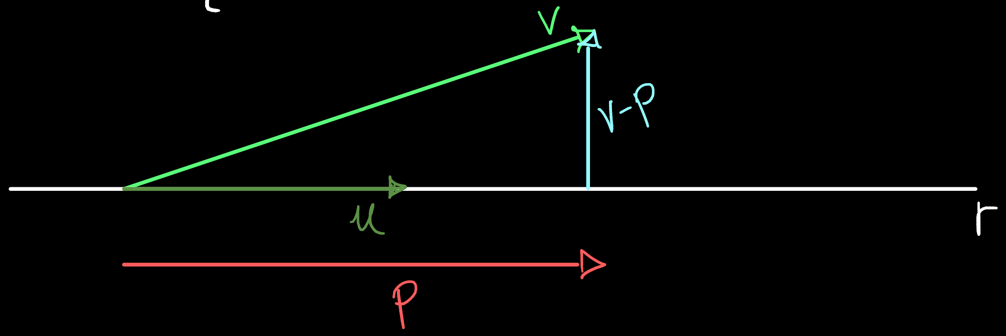
$(u - v)^2 = (u - v) \cdot (u - v)$

$|u|^2 - 2 \cdot u \cdot v + |v|^2$

$\cancel{|u|^2} - \cancel{2} u \cdot v + \cancel{|v|^2} = \cancel{|u|^2} + \cancel{|v|^2} - \cancel{2} |u| |v| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

Projeção de um vetor em uma reta



(I) $p = \alpha \cdot u,\ \alpha \in \mathbb{R}$

(II) $v - p \perp u$ $\longrightarrow$

$$(v-p)\cdot u = 0$$
$$v\cdot u - p\cdot u = 0$$
$$v\cdot u = p\cdot u$$

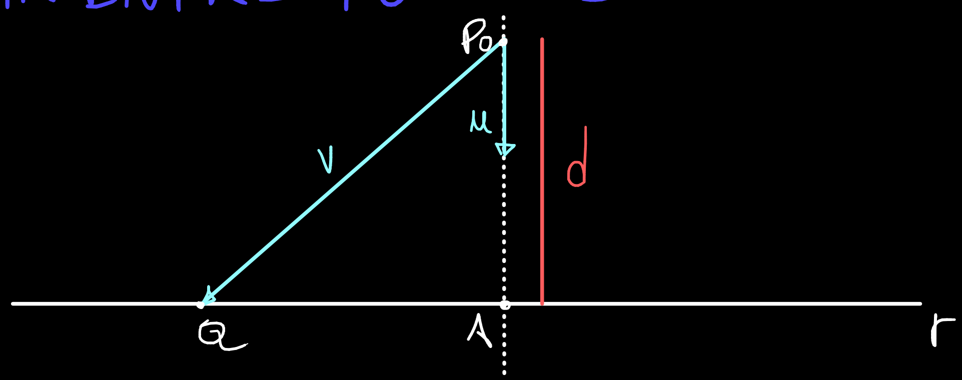
$\longrightarrow$ $v\cdot u = \alpha \cdot u \cdot u$

$$\alpha = \frac{v\cdot u}{u\cdot u}$$

*NÃO EXISTE DIVISÃO DE VETORES

$$\boxed{p = \frac{v\cdot u}{u\cdot u}\cdot u}$$

Distância entre ponto e reta



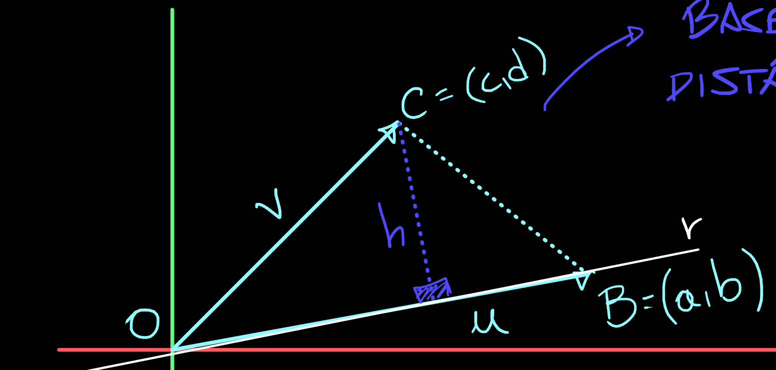
(I) $r: ax+by+c=0$ (II) $Q=(x,y)$ (III) $v=\overrightarrow{P_0Q}$ $\therefore$ $v=(x-x_0, y-y_0)$

(IV) $u \perp r,\ u=(a,b)$

$$d = \left|\frac{v\cdot u}{u\cdot u}\cdot u\right| \Rightarrow d = \left|\frac{v\cdot u}{u}\right| \longrightarrow d = \left|\frac{(a,b)\cdot(x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \longrightarrow$$

$\rightarrow$ $Q \in r$ $\therefore$ $ax+by=-c$ $\longrightarrow$ $d = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ÁREA DO Δ



$(0,0) \in r \therefore -bx+ay=0$

BASE DO Δ É $|u|$ E A ALTURA É A DISTÂNCIA DE C A r.

$$h = \frac{|-bc+ad|}{\sqrt{a^2+b^2}} \rightarrow |u|$$

$$\text{ÁREA } \Delta = \frac{1}{2}\cdot|u|\cdot h$$

$$\frac{1}{2}\cdot\cancel{|u|}\cdot\frac{|-bc+ad|}{\cancel{|u|}}$$

$$\text{ÁREA } \Delta = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right|\right)$$