Álgebra Linear 11/08/24

Operações com Matrizes

Eliminação

- Para eliminar termos de uma linha da matriz, usamos uma matriz especial:

$$E_{i,j}(\ell) := \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & -\ell & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

→ subtrai ℓ vezes a linha j da linha i

- Assim, quando fazemos a operação $E_{ij}(\ell) \cdot A$ temos:

$$E_{21}(\ell) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\ell & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - \ell \cdot a_{11} & a_{22} - \ell a_{12} & a_{23} - \ell a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

INVERSAS

- ACHAR MATRIZES INVERSAS ENVOLVE RESOLVER VÁRIOS SISTEMAS LINEARES

- SE DENOTARMOS AS COLUNAS DE A^{-1} POR $x_1 \dots x_n$, QUEREMOS RESOLVER:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{bmatrix} \to \text{SABEMOS QUE } AA^{-1} = I$$

$$\Updownarrow$$

$e_j = (\underset{1}{0}, \dots, \underset{j}{1}, \dots \underset{n}{0})$

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | & & | \\ e_1 & \dots & e_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x_i = e_i$$

- ISSO NOS LEVA AO PROCESSO DE GAUSS-JORDAN

$$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}]$$

- PROPRIEDADES
  - ▷ A INVERSA É ÚNICA

DEM

SEJAM B E C INVERSAS DE A

$\Rightarrow BA = I = AC \Rightarrow B \cdot A \cdot C = I \cdot C \Rightarrow A \cdot C = I \therefore B = C$

  - ▷ $\to \exists x \neq 0 / Ax = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$

DEM

$\to \exists A^{-1} \wedge Ax = 0 \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot x = A^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ (ABSURDO!)

  - ▷ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ SE $ad - bc \neq 0$

▷ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

DEM

$$(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) \Rightarrow A(\underbrace{\cancel{BB^{-1}}}_{I})A^{-1} = A\cdot A^{-1} = \boxed{I}$$

▷ $A=(a_{i,j})_{n\times n} \;/\; \to i\neq j \Rightarrow a_{i,j}=0,\quad A^{-1}=(b_{i,j})_{n\times n} \;/\; \to i=j,\; b_{i,j}=\frac{1}{a_{i,j}}$

▷ $\to \exists A^{-1}$, A SOLUÇÃO DE TODO SISTEMA LINEAR É DADA POR $x = A^{-1}\cdot b$

DEM

$$Ax=b \Rightarrow \underbrace{\cancel{A^{-1}\cdot A}}_{I}\cdot x = A^{-1}\cdot b \Rightarrow x = A^{-1}\cdot b$$

▷ SE L É TRIANGULAR INFERIOR COM DIAGONAL NÃO-ZERO, O MESMO VALE PARA L^{-1}, SE A DIAGONAL FOR DE 1'S, O MESMO VALE PARA L^{-1} (MESMO VALE PARA SUPERIOR)

▷ A^{-1} EXISTE QUANDO TEM EXATAMENTE n PIVÔS

DEM

n PIVÔS $\Rightarrow$ EXISTE UMA MATRIZ DE ELIMINAÇÃO E TAL QUE $EA = U$ COM DIAG. NÃO-ZERO

MATRIZ E É TRIANGULAR INFERIOR COM 1'S NA DIAGONAL

SE A TEM INVERSA, $AA^{-1} = I \Rightarrow EA(A^{-1}) = E$

LINHA i DE EAA^{-1} = $\underbrace{(\text{LINHA } i \text{ DE } EA)}_{\text{SE HOUVER ALGUMA LINHA NULA, HAVERÁ PROBLEMAS}}\cdot A^{-1} = \underbrace{\text{LINHA } i \text{ DE } E}_{\text{NÃO-NULA}}$

MATRIZ TRANSPOSTA

DADA $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $A^T := (a_{ji})_{n\times m}$ (TRANSPOSTA DE A)

- PROPRIEDADES

(i) $\underset{m\times n}{(A}\underset{n\times p}{B)}^T = \underset{p\times n}{B^T}\cdot \underset{n\times m}{A^T}$

PROVA:

$$C = AB$$

$$(C^T)_{ij} = C_{ji} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\cdot b_{ki}$$

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik}(A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\, a_{jk}$$

(ii) SE A É INVERSÍVEL, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

PROVA $(A^T)\cdot(A^{-1})^T = (\underbrace{\cancel{A^{-1}A}}_{I})^T = I$

(iii) L É TRIANGULAR INF., L^T É " SUP. E VICE-VERSA

(iv) $(A+B)^T = A^T + B^T$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots \\ a_{12} & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots \\ b_{12} & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots \end{bmatrix}$$

(v) SE x, y SÃO VETORES COLUNA $n\times 1$, ENTÃO $x^T y$ É O PRODUTO INTERNO E xy^T CUJAS COLUNAS SÃO MÚLTIPLAS DE x

$$x^T y = [x_1 \dots x_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x\cdot y$$

$$(\underset{n\times 1}{x}\ \underset{1\times n}{y^T})_{ij} = \sum_{k=1}^{1} x_{ik}(y^T)_{kj} = x_{i1}\cdot y_{1j}$$

(PRODUTO EXTERNO)

(vi) $\underset{1\times m}{x^T}\underset{m\times}{A}$ É UMA COMBINAÇÃO LINEAR DAS LINHAS DE A

(Ax É COMBINAÇÃO LINEAR DAS COLUNAS DE A)

$$x^TA = \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

x_1 SEMPRE MULTIPLICA OS VALORES DA 1ª LINHA, E ASSIM POR DIANTE.

→ ELEMENTO $(x^TA)_{1j} = x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + x_3 a_{3j} + \dots + x_n a_{nj}$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k a_{kj}$$

PERMUTAÇÃO

- É QUANDO TROCAMOS DUAS LINHAS DE UMA MATRIZ, PARA ISSO USAMOS A MATRIZ ESPECIAL P

$P_{i,j}$:= MATRIZ IDENTIDADE COM AS LINHAS i E j TROCADAS

$P_{i,j} \cdot A = A$ COM LINHAS i E j TROCADAS

$A \cdot P_{i,j} = A$ COM COLUNAS i e j TROCADAS

BASE CANÔNICA (e_i) = VETOR LINHA OU COLUNA COM 0 EM TODAS AS CASAS, MENOS NA i

- INVERSA

▷ DADA UMA MATRIZ DE PERMUTAÇÃO P, COM APENAS UMA TROCA DE LINHA, SUA INVERSA É SUA TRANSPOSTA

DEM

$$\underset{n\times m}{P} = \begin{bmatrix} - e_1^T - \\ - e_2^T - \\ \vdots \\ - e_n^T - \end{bmatrix}, \quad \underset{m\times n}{P^T} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$(\underset{n\times 1}{P}\underset{1\times n}{P^T})_{ij} = e_{pi}^T \cdot e_{pj} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$