G.A

DETERMINANTES

- DETERMINAM SE UM SISTEMA LINEAR POSSUI SOLUÇÃO OU NÃO.

$$\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} adx+bdy=md \\ cbx+dby=nb \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ad-bc)x = md-nb, \quad x = \frac{md-nb}{\boxed{ad-bc}} \rightarrow \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

- ESSE PADRÃO SE MANTÉM PARA SISTEMAS DE n DIMENSÕES.

▷ DESENVOLVIMENTO DE LAPLACE

- UMA DETERMINANTE DE ORDEM n PODE SER ESCRITA COMO SOMA DE DETERMINANTES DE ORDEM n.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

* APENAS O DE 3ª E 2ª ORDEM INTERESSAM.

▷ PROPRIEDADES

- ALTERAÇÃO DE SINAL

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

- $D \cdot \alpha$

$$\alpha \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha & b_1\alpha & c_1\alpha \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

- LINHAS MÚLTIPLAS

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 \cdot k & b_1 \cdot k & c_1 \cdot k \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \ k \in \mathbb{R}$$

NOTAÇÃO:

$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$
$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$
$\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$

$$\rightarrow \det[u, v, w] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

PRODUTO VETORIAL

- É USADO PARA ACHAR UM VETOR PERPENDICULAR A OUTROS DOIS VETORES

$$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1) \quad \vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$u \perp u \times v \ \wedge \ v \perp u \times v$$

- DEM

$\vec{w} = (x, y, z)$, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

$$\det[kv, u, v] = \begin{vmatrix} a_1k & b_1k & c_1k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \to a_1k \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + b_1k \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + c_1k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

ESSA DETERMINANTE MOSTRA QUE O VETOR DE COORDENADAS

$\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ É PERPENDICULAR A $u \cdot k$,

LOGO, É A u TAMBÉM, MESMA LÓGICA PARA v

▷ PROPRIEDADES

(i) $u \times v = -u \times v$

(ii) $(u + u') \times v = u \times v + u' \times v$

(iii) $(\alpha \cdot u \times v) = u \times (v \cdot \alpha) = \alpha (u \times v)$

(iv) $u \times v \cdot w = \det[u, v, w]$

(v) $u \times v = 0 \iff v = k \cdot u$, $k \in \mathbb{R}$

(vi) $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \operatorname{sen}\theta$

→ DEM

$u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$

$\cos\theta \cdot |u| \cdot |v| = xx' + yy' + zz' \to$ $|u|^2|v|^2\cos^2\theta = x^2x'^2 + y^2y'^2 + z^2z'^2 + 2xyx'y' + 2yzy'z' + 2xzx'z'$

$\to$ $|u|^2|v|^2\cos^2\theta = x^2x'^2 + y^2y'^2 + z^2z'^2 + 2xyx'y' + 2yzy'z' + 2xzx'z'$

$$|u|^2|v|^2\sin^2\theta = |u|^2|v|^2(1-\cos^2\theta) = |u|^2|v|^2 - |u|^2|v|^2\cos^2\theta =$$

$$= |u|^2|v|^2 - (u\cdot v)^2$$

$$= (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) - (xx'+yy'+zz')^2 =$$

$$= (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) - x^2x'^2 - y^2y'^2 - z^2z'^2 - 2xyx'y' - 2yzy'z' - 2xzx'z'$$

$$= (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) - x^2x'^2 - y^2y'^2 - z^2z'^2 - 2xyx'y' - 2yzy'z' - 2xzx'z'$$

Desenvolvendo e simplificando, (confira isso)

$$= x^2y'^2 + x^2z'^2 + y^2x'^2 + y^2z'^2 + z^2x'^2 + z^2y'^2 - 2xyx'y' - 2yzy'z' - 2xzx'z' =$$

$$= y^2z'^2 - 2yzy'z' + z^2y'^2 + x^2z'^2 - 2xzx'z' + z^2x'^2 + y^2x'^2 - 2xyx'y' + y^2x'^2 =$$

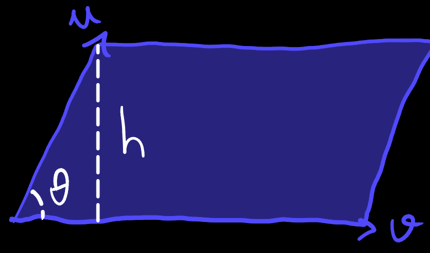
$$= (yz'-zy')^2 + (zx'-xz')^2 + (xy'-yx')^2 =$$

$$= |u\times v|^2$$

Temos, portanto

$$|u\times v| = |u||v|\sin\theta$$

ÁREA DO PARALELOGRAMO E DO TRIÂNGULO

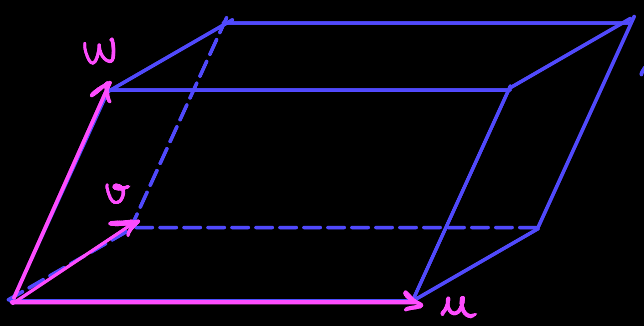


ÁREA = BASE · ALTURA

$|v|\cdot h \Rightarrow |v|\cdot|u|\cdot \text{sen}\,\theta$

$\text{ÁREA}_{\square} = |u\times v|$, $\text{ÁREA}_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot|u\times v|$

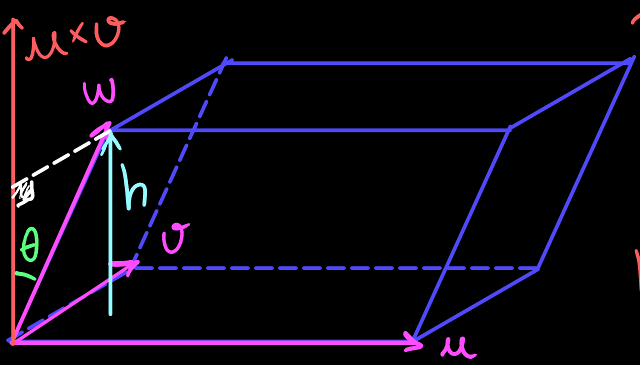
VOLUME DE UM PARALELEPÍPEDO



FIGURAS COM FACES EM PLANOS PARALELOS.

$\text{VOLUME} = |(u\times v)\cdot w|$

DEM



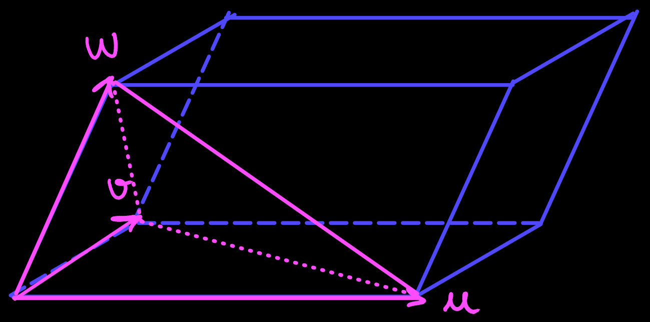
$h = |w|\cdot\cos\theta$

$\text{Vol} = |u\times v|\cdot|w|\cdot|\cos\theta|$

$\text{Vol} = \big|\,|u\times v|\cdot|w|\cdot\cos\theta\,\big|$

$\text{Vol} = |(u\times v)\cdot w|$

VOLUME DO TETRAEDRO



$\to V = \frac{1}{6} |u \times v| \cdot w$

DEM

$BASE = \frac{|u \times v|}{2}.$ $\to$ $\frac{1}{3} \cdot \frac{|u \times v|}{2} \cdot |w| \cdot \cos\theta$

$\downarrow$

$ALTURA = |w| \cdot \cos\theta$

$\frac{1}{6} \cdot |u \times v \cdot w|$