

ÁLGEBRA LINEAR

03/09/24

LISTA 3

1. Ache a decomposição LU da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2-2L_1, L_3-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3-3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

E

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2+2L_1, L_3-4L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3+3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Ache a decomposição LU da matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Qual condição para a, b, c, d para que A ter quatro pivots?

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & b & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2-L_1, L_3-L_1, L_4-L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & c-a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & d-a & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3-L_2, L_4-L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & c-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & d-b & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_4-L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & c-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-c & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

U

E

ACHAR L

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2+L_1, L_3+L_2, L_4+L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}$$

PARA A TER 4 PIVÔS, TEMOS QUE:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq a \\ c \neq b \\ d \neq c \end{cases}$$

3. Ache a uma matriz de permutação P tal que:

(a) P é 3×3 , $P \neq I$ e $P^3 = I$.

(b) S é 4×4 e $S^4 \neq I$

(a) PRECISO TROCAR 2 OU 3 LINHAS, DE FORMA QUE EU REPETIR O PROCESSO 3 VEZES EU OBTENHO I .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{A MATRIZ } P^3 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^3 = I$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_2]{L_2 \leftrightarrow L_1, S} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_2]{L_2 \leftrightarrow L_1, 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_2]{L_2 \leftrightarrow L_1, 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{I}$$

$$I \cdot S = S \therefore S^4 = S \neq I$$

4. Seja A uma matriz 4×4 . Quantas entradas de A podem ser escolhidas independentemente caso A seja

(a) simétrica ($A^T = A$)?

(b) anti-simétrica ($A^T = -A$)?

$$(a) \begin{bmatrix} a & e & f & h \\ e & b & g & i \\ f & g & c & j \\ h & i & j & d \end{bmatrix} \Rightarrow 10 \text{ ELEMENTOS}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & -e & -f & -h \\ e & 0 & g & -i \\ f & g & 0 & -j \\ h & i & j & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 6 \text{ ELEMENTOS}$$

5. Suponha que A já é triangular inferior com 1's na diagonal. Mostre que $U = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{SABENDO DESSA PROPRIEDADE, NO PROCESSO DE ELIMINAÇÃO, USAMOS DO PIVÔ PARA ELIMINAR OS TERMOS ABAIXO. COMO HÁ APENAS 1 NA DIAGONAL, TODA ELIMINAÇÃO É FEITA COMO}$$

\rightarrow ELIMINAR TERMOS DA COLUNA K : $L_i + x_{ik} \cdot L_k$, ONDE i É CADA LINHA ABAIXO DA LINHA K , PORÉM, TODOS OS ELEMENTOS À DIREITA DO PIVÔ SÃO 0, OU SEJA, NOS ELEMENTOS À DIREITA A CONTA FICA $[\dots, 1, 0, \dots, 0] + x_{ik} [\dots, 1, 0, 0, 0]$ OU SEJA OS ELEMENTOS 0 CONTINUAM SEMPRE IGUAL A 0. CONTINUANDO TODAS AS ELIMINAÇÕES CHEGAMOS EM PIVÔS 1 E RESTO 0, OU SEJA, $\boxed{I = U}$

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Qual é o número c que leva o segundo pivô a ser 0? O que podemos fazer para resolver tal problema? Ainda é válido $A = LU$?
 (b) Qual é o número c que leva o terceiro pivô a ser 0? É possível resolver esse problema?

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2 \cdot L_1, L_3 - 3 \cdot L_1} \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 4-2c & 1 \\ 0 & 5-3c & 1 \end{bmatrix} \rightarrow 2^\circ \text{ PIVÔ} = 0 \rightarrow c = 2$$

\rightarrow SE $c = 2$, TROCAMOS $L_2 \leftrightarrow L_3$, ASSIM $A = LU$ NÃO VALE, MAS $PA = LU$

$$(b) L_3 - \frac{(5-3c)}{(4-2c)} L_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 4-2c & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{5-3c}{4-2c} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \frac{5-3c}{4-2c} &= 1 \\ 5-3c &= 4-2c \\ 1 &= c \end{aligned}$$

SE $c = 1$, NÃO HÁ 3º PIVÔ

NÃO, NÃO HÁ MANEIRA DE CONTORNAR ISSO, $\nexists A^{-1}$

7. Se A e B são simétricas, quais dessas matrizes são também simétricas:

- (a) $A^2 - B^2$;
- (b) $(A+B)(A-B)$;
- (c) ABA ;
- (d) $ABAB$.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\hookrightarrow \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{jk} = (BA)_{ij}$$

(a) $(A^2 - B^2)$
 $(A+B)(A-B)$ $\rightarrow ((A+B)(A-B))^T$
 $A^2 - \cancel{AB} + \cancel{BA} - B^2$
 (pode pois são simétricas)
 $(A-B)^T (A+B)^T$
 $(A^T - B^T)(A^T + B^T)$
 $(A-B)(A+B)$ ✓

(b) MESMO RESULTADO (SIMÉTRICA)

(c) \hookrightarrow COMO A E B SÃO SIMÉTRICAS, AMBAS COMUTAM:

$$(ABA)^T = (BA)^T \cdot A^T = A^T B^T A = ABA$$

É SIMÉTRICO

(d) $ABAB \rightarrow (AB)^T (AB)^T \rightarrow B^T A^T B^T A^T$

\rightarrow SE AB COMUTAREM, É SIMÉTRICA

8. Prove que é sempre possível escrever $A = B + C$, onde B é simétrica e C anti-simétrica. Dica: B e C são combinações simples de A e A^T .

$$B = \frac{A + A^T}{2} \quad C = \frac{A - A^T}{2}$$

9. Seja A uma matriz em blocos:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde cada A_{ii} é quadrada $n \times n$ com A_{11} invertível. Ache L e U em blocos tal que $A = LU$:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

onde L_{11}, L_{22} são triangulares inferiores com 1's na diagonal e U_{11}, U_{22} são triangulares superiores.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{21} - A_{21}(A_{11})^{-1}]{L_{11} = (A_{11})^{-1}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1} \cdot A_{12} \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}(A_{11})^{-1} & I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS JORDAN}} \begin{bmatrix} I & 0 & : & I & 0 \\ -A_{21}(A_{11})^{-1} & I & : & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 + A_{21}(A_{11})^{-1}L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} I & 0 & I & 0 \\ 0 & I & \underbrace{A_{21}(A_{11})^{-1}}_L & I \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}(A_{11})^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}(A_{11})^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$