Álgebra Linear 13/10/24

Determinante

DEF: Número associado a qualquer matriz quadrada

Notação: $\det A$ ou $|A|$

Se $A = \begin{bmatrix} - a_1 - \\ \vdots \\ - a_n - \end{bmatrix}$, vamos usar também $\det A = \det(a_1 \dots a_n)$

Definição por propriedades

Em vez de começar com uma fórmula enorme, vamos começar definindo-o como uma função com 3 propriedades

$$\det : M^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

1º: $\det I = 1$

2º: Troca de linhas troca o sinal do determinante

$$\det PA = -\det A$$

3º: Determinante é linear nas linhas

$$\det(\lambda a_1 + b, a_2, \dots, a_n) = \lambda \det A + \det(b, a_2, \dots, a_n)$$

Caso 2x2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a \cdot e_1 + b e_2 \\ c \cdot e_1 + d e_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= a\left(c \underbrace{\cancel{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}}_{0} + d \underbrace{\cancel{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}}_{1}\right) + b\left(c \underbrace{\cancel{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}}_{-1} + d \underbrace{\cancel{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}}_{0}\right)$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{0}$ $\quad \boxed{ac - bd}$

Propriedades

- $\det P = \pm 1$ (P matriz permutação)

DEM:

$$\det P = \det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = (-1)^k \cdot \det I$$

$\{i_1, \ldots, i_n\}$ = Permutação de $\{1, \ldots, n\}$

- Se A tem duas linhas iguais, $\det A = 0$

DEM

$$\det A = \det PA \Rightarrow \det A = -\det A \Rightarrow \underline{\underline{0}}$$

- Subtrair λ vezes a linha i da j não muda o det

DEM

$$\det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j - \lambda a_i, \ldots, a_n) =$$

$$\det A + \cancel{\lambda \det(a_1, \ldots, \underline{\underline{a_i}}, \ldots, \underline{\underline{a_i}}, \ldots, a_n)}_{0}$$

- Se A tem linha de 0, $\det A = 0$

DEM

$$\det(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, 0b, \ldots, a_n)$$

$$= 0 \cdot \det(a_1, \ldots, b, \ldots, a_n) = 0$$

- $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

DEM

$$\det(\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underbrace{\cancel{\det I}}_{1}$$

- $\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}}_{T} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

DEM

SE A DIAGONAL NÃO É NULA, PODEMOS FAZER ELIMINAÇÃO ATÉ CHEGAR EM $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = D$

$$\det T = \det B$$

SE $\exists \lambda_i = 0$, ENTÃO A ELIMINAÇÃO GERA UMA LINHA DE 0, LOGO $\det A = 0$

- $\det A = \prod_{i=1}^{n} d_i$, d_i SÃO PIVÔS DE A

DEM

$A = PLU \Leftrightarrow U = EP^T A$

$$\det U = \det(EP^T A) = \det(P^T A) = \pm \det A$$

$$\det U = \pm \det A$$

- SÓ EXISTE UMA FUNÇÃO QUE SATISFAZ 1, 2 E 3

PROPOSIÇÃO: $\det AB = \det A \cdot \det B$

DEM

$1^{\circ} \Rightarrow \det B \neq 0$

VAMOS DEFINIR $f(A) = \dfrac{\det AB}{\det B}$ E MOSTRAR QUE ELA SATISFAZ 1, 2, 3, LOGO $\det A = f(A)$.

1°: $f(I) = \dfrac{\det(\cancel{IB})}{\cancel{\det B}} = 1$ ✓

2^o: $f(PA) = \dfrac{\det PAB}{\det B} = \dfrac{\pm \det AB}{\det B} = \pm f(A)$ ✓

3^o: A e $A' = A$ com linha $i = a_i + \lambda c_i$

$f(A') = f(A) + \lambda f(a_1, \dots, c_i, \dots, a_n)$?

$$f(A') = \frac{\det A'B}{\det B} \Rightarrow \frac{\det(a_1 B, \dots, (a_i + \lambda c_i)B, \dots, a_n B)}{\det B}$$

$$\Rightarrow \frac{\det(a_1 B, \dots, a_n B) + \lambda \det(a_1 B, \dots, c_i B, \dots, a_n B)}{\det B}$$ ✓

$2^o \Rightarrow \det B = 0$

B não inversível $\therefore N(B) \neq \{0\} \therefore N(AB) \neq \{0\}$

$\Rightarrow \det AB = 0$

Logo $\det AB = \det A \cdot \det B$

- A não inversível $\Leftrightarrow \det A = 0$
- $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
- $\det A^T = \det A$
- $|\det Q| = 1$ (Q ortogonal)