Álgebra Linear

22/09

Mínimos Quadrados

- São meios de mensurar os erros na projeção de b em $C(A)$. Muitas vezes temos um sistema sem solução, mas queremos a solução que gera o menor erro.

Se $Ax=b$, então o erro é $Ax-b=0$, porém se $Ax \neq b$, $Ax-b \neq 0$. Para mensurar os erros das equações, elevamos o erro de todas ao quadrado e somamos

$$\min_{x} \|Ax-b\|^2$$

$$\|Ax-b\|^2 = (Ax-b)^T(Ax-b) = \sum_{i=1}^{m} \left((Ax)_i - b_i\right)^2$$

- Por ortogonalidade, temos $b = p + (b-p)$, como $p \in C(A)$, $b-p \in N(A^T)$, logo, por Pitágoras

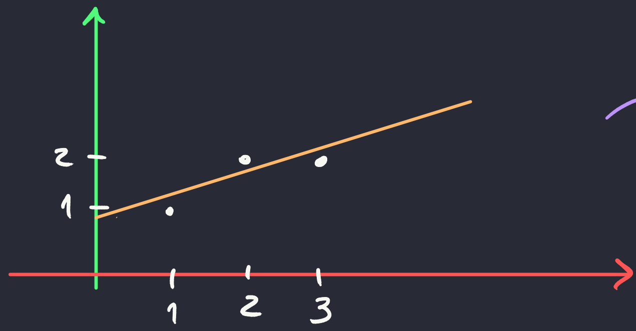
$$\|b\|^2 = \|p\|^2 + \|b-p\|^2$$

$$Ax-b = \underbrace{Ax-p}_{\in C(A)} - \underbrace{(b-p)}_{\in N(A^T)}$$

$$\|Ax-b\|^2 = \|Ax-p\|^2 - \|\underbrace{\varepsilon}_{b-p}\|^2$$

Temos de escolher o x que faz essa soma a menor possível $\longrightarrow$ $x = (A^TA)^{-1}A^Tb$

EXEMPLO (REGRESSÃO LINEAR)



RETA $y = C + Dt$

DE MODO QUE O ERRO COMETIDO É O MENOR POSSÍVEL

$$\text{erro} = (y(1)-1)^2 + (y(2)-2)^2 + (y(3)-2)^2$$

$$y(t) = C + Dt = \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$\text{erro} = \|Ax - b\|^2$

SOLUÇÃO DE MÍNIMOS QUAD.

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

◦ REGRESSÃO LINEAR CASO GERAL

▷ NOTE QUE $x = (A^T A)^{-1} A^T \cdot b$ ONDE $A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \sum^m t_i \\ \sum^m t_i & \sum^m t_i^2 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum^m b_i \\ \sum^m t_i b_i \end{bmatrix}$$

▷ SE TOMARMOS $s_i = t_i - \bar{t}$ com $\bar{t} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} t_i$ (PONTO MÉDIO), TRANSFORMAMOS $A^T A$ EM UMA MATRIZ DIAGONAL

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ s_1 & \cdots & s_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \sum s_i \\ \sum s_i & \sum s_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \sum s_i^2 \end{bmatrix}$$

DEMONSTREI NO EX. 14 DO CAP. 3 DE AEDV.

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \sum s_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum b_i \\ \sum s_i b_i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} mC &= \sum^m b_i \\ D \cdot \sum^m s_i^2 &= \sum^m s_i b_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{C} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i = \bar{b}$$

$$\tilde{D} = \frac{\sum^m s_i b_i}{\sum^m s_i^2} = \frac{\frac{1}{m} \cdot \sum^m (t_i - \bar{t}) \cdot b_i}{\frac{1}{m} \cdot \sum^m (t_i - \bar{t})^2}$$