ÁLGEBRA LINEAR

30/08/24

SOLUÇÃO COMPLETA DE $Ax=b$

- CRIAMOS A MATRIZ AUMENTADA $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$
- ELIMINAMOS ATÉ FORMAR $\begin{bmatrix} R & c \end{bmatrix}$
- AS CONDIÇÕES APARECEM AO ZERARMOS OS ELEMENTOS DE C, QUE CORRESPONDEM ÀS LINHAS DE ZEROS DE R

EXEMPLO

$$Ax=b$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right]$$

L_2-2L_1
L_3-3L_1
L_3-L_2
L_1-L_2

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & -2 & 3b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-b_2-b_1 \end{array}\right]$$

TEMOS A MATRIZ $\left[\begin{array}{c|c} \underset{m\times n}{A} & \underset{n\times 1}{b} \end{array}\right]$ E TRANSFORMAMOS

EM $\left[\begin{array}{c|c} R & c \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \\ r \\ m-r \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} I & F \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} x_r \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_r \\ c_{n-r} \end{bmatrix}$

r = POSTO DA MATRIZ A

$r=n$
1 ÚNICA SOLUÇÃO
↳ FOXO

$$\left[\begin{array}{c} x_r+Fx_{n-r} \\ \hdashline 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} c_r \\ c_{n-r} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_m = x_r + Fx_{n-r} \\ c_{n-r} = 0 \end{cases}$$

ESSA MANIPULAÇÃO MOSTRA QUE SE ESCOLHERMOS $x_{n-r}=0$ TEMOS UMA SOLUÇÃO PARTICULAR $x_r=c_r$.

VOLTANDO AO EXEMPLO

$$\begin{array}{c} \\ \div 2 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 3b_1-b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-b_2-b_1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} I & & R & F & C \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & & \begin{matrix} 3b_1-b_2 \\ \frac{b_2}{2}-b_1 \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & & 0 \quad 0 & & b_3-b_2-b_1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3b_1-b_2 \\ \frac{b_2}{2}-b_1 \\ \hline b_3-b_2-b_1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow b_3-b_2-b_1=0$

$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 3b_1-b_2 \\ \frac{b_2}{2}-b_1 \end{bmatrix}$

* PARA EXISTIR $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ TAL QUE $Ax=b$, O SISTEMA MOSTRADO ACIMA DEVE PODER SER RESOLVIDO TAMBÉM.

EXEMPLO

$b_3-b_2-b_1=0 \Rightarrow \begin{matrix} b_3=3 \\ b_2=2 \\ b_1=1 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ FAZEMOS $x_3=0$ PARA UMA SOLUÇÃO PARTICULAR

$x_1=1 \quad x_2=0 \quad x_3=0$

∘ SEJA x_p UMA SOLUÇÃO PARTICULAR DE $Ax=b$, TODA SOLUÇÃO DE $Ax=b$ PODE SER ESCRITA COMO $x=x_p+x_n$, $x_n \in N(A)$

DEM

$Ax=b \quad Ax_p=b \rightarrow \begin{matrix} Ax-Ax_p=b-b \\ A(x-x_p)=0 \end{matrix} \therefore \boxed{x-x_p \in N(A)}$

∘ SEJA $n_1,\dots,n_{n-r}$ AS COLUNAS DE $N(A)$, TODA SOLUÇÃO DE $Ax=b$ PODE SER ESCRITA COMO $x=x_p+\alpha_1 n_1+\dots+\alpha_n n_{n-r}$

* NÚCLEO TRIVIAL = 1 SOLUÇÃO * $\nexists x_p$ = NENHUMA SOLUÇÃO * $|N(A)|>1 = \infty$ SOLUÇÕES