Álgebra Linear

02/10/24

Autovalores e pivôs

- Vamos argumentar por que, em matrizes simétricas, temos autovalores e pivôs de mesmo sinal

DEM

Se A é simétrica, usamos sua decomposição LDU,

$$A = LDU \Leftrightarrow A^T = U^T D L^T \Leftrightarrow A = U^T D L^T \Leftrightarrow U = L^T$$

$$\Rightarrow A = LDL^T$$

Dado o teorema espectral, $\exists Q$ ortogonal e Λ diagonal t.q $A = Q \Lambda Q^T$

Sabendo que $A = LDL^T \rightarrow D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} \rightarrow$ Pivôs de A

Definimos

$$L(t) = (1-t)L + t \cdot I \rightarrow A(0) = LDL^T \rightarrow A(1) = D$$

$$A(t) = L(t) D L(t)^T$$

$\rightarrow \lambda_i(t) \rightarrow i \in \{1, \dots, n\}$ são os autovalores de $A(t)$, onde $\lambda_i(0) = \lambda_i$ e $\lambda_i(1) = d_i$

$\rightarrow$ Pivôs de $A(t) = d_1, \dots, d_n \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow \boxed{A(t) \text{ sempre inversível}}$

$\rightarrow$ Se $\lambda_i(0) = \lambda_i < 0$ e $\lambda_i(1) = d_i > 0$, pelo teorema do valor intermediário, $\exists t \in [0,1]$ t.q $\lambda_i(t) = 0 \Rightarrow A(t)$ singular (absurdo)

$\Rightarrow$ Autovalores e pivôs de mesmo sinal