Álgebra Linear Numérica

12/04

Estabilidade

Definição

Deixe um problema $f: X \to Y$, um computador cujo sistema de ponto flutuante satisfaz $x \circledast y = (x * y)(1+\epsilon)$, um algoritmo para o problema f e a implementação desse algoritmo na forma de um programa de computador serem FIXOS. Dado um dado $x \in X$, arredonde-o para um sistema floating point ($fl(x) = x(1+\epsilon)$) e o passe como input para o programa descrito antes.

O resultado é um conjunto de números no sistema floating point que pertencem a Y. Chame esse conjunto de pontos de $\tilde{f}(x)$

- O resultado $\tilde{f}(x)$ do algoritmo pode ser afetado por erros de arredondamento
- $\tilde{f}(x)$ também pode ter vários valores possíveis, mesmo após passar o mesmo x por diversos fatores da máquina ou do problema em si (como achar as raízes quadradas de um complexo)

- Na maioria das vezes, $\tilde{f}$ não é contínua, mas um bom algoritmo deve aproximar o problema f associado

Definição

Um algoritmo $\tilde{f}$ é preciso se

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} = O(\epsilon_{mac})$$

- Se $\tilde{f}$ é um bom algoritmo, esperamos que seu erro relativo seja pequeno.
- $O(\epsilon_{mac})$ indica que o algoritmo tem um erro de precisão que não passa de ϵ_{mac} (definição formal depois)

○ Em algoritmos mal condicionados, temos que a estabilidade dita acima é muito ambiciosa, pois o arredondamento dos dados é inevitável e só isso já pode levar a grandes imprecisões, devemos mirar numa estabilidade geral

DEFINIÇÃO

Um algoritmo $\tilde{f}$ para um problema f é estável quando,

$$\forall x \in X \text{ vale } \frac{\|\tilde{f}(x) - f(\tilde{x})\|}{\|f(\tilde{x})\|} = O(\epsilon_{mac})$$

$$\text{para um } \tilde{x} \text{ com } \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(\epsilon_{mac})$$

Ou seja, se eu passo dados muito próximos do original para um algoritmo estável, ele me retorna algo muito próximo da solução.

DEFINIÇÃO

Um algoritmo $\tilde{f}$ para um problema f é retroativamente estável se:

$$\forall x \in X \text{ vale que } \exists \tilde{x} \text{ com } \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(\epsilon_{mac}) \text{ tal que } \tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$$

Ou seja, ao fornecer um dado levemente diferente para o problema, eu obtenho o mesmo resultado ao fornecer os dados originais para o algoritmo

Significado de $O(\epsilon_{mac})$

DEFINIÇÃO

Dada as função $\psi(t)$, a sentença

$$\varphi(t) = O(\psi(t))$$

Garante que $\exists C > 0$, tal que, $\forall t$ suficientemente perto de um limite conhecido (e.g $t \to 0$, $t \to \infty$), vale

$$|\varphi(t)| \leq C\,\psi(t)$$

- O QUE ISSO SIGNIFICA? SIGNIFICA QUE, DADA AS DUAS FUNÇÕES, EXISTE UMA CONSTANTE C QUE, AO MULTIPLICAR POR $\psi(t)$, O VALOR DE $\varphi(t)$ NUNCA VAI ULTRAPASSAR O DE $C\psi(t)$ PARA QUALQUER VALOR DE UM LIMITE CONHECIDO DE t.

EXEMPLO 1:

$$\varphi(t) = 5t^2 + 3t + 7 \Rightarrow 5t^2 + 3t + 7 \leq Ct^2$$

$\psi(t) = t^2$ QUANDO $t \to \infty$

$t \to \infty$

EXISTE ALGUMA CONSTANTE C QUE ME GARANTE ISSO

EXEMPLO 2:

$$\text{sen}^2(t) = O(t^2) \text{ QUANDO } t \to 0 \Rightarrow |\text{sen}^2 t| \leq Ct^2$$

DEFINIÇÃO

DADO $\varphi(s,t)$, TEMOS QUE

$$\varphi(s,t) = O(\psi(t)) \text{ UNIFORMEMENTE EM } s$$

GARANTE QUE $\exists! C > 0$ TAL QUE

$$|\varphi(s,t)| \leq C\psi(t)$$

E ISSO VALE PARA QUALQUER s QUE EU ESCOLHER

- AQUI ESTAMOS USANDO

$$O(\epsilon_{machine}) = \|\text{QUANTIDADE PROCESSADA}\|$$

ONDE "QUANTIDADE PROCESSADA" É A NORMA DO RESULTADO DE UM ALGORITMO $\tilde{f}$ PARA UM PROBLEMA f, DEPENDENDO TANTO EM $x \in X$ (DADOS) E NO ϵ_{mac}. O PROCESSO IMPLÍCITO AQUI É $\epsilon_{mac} \to 0$. "O" SE APLICA UNIFORMEMENTE A TODO x.

- EM COMPUTADORES DE VERDADE, ϵ_{mac} É UM NÚMERO FIXO, ENTÃO AO DIZERMOS $\epsilon_{mac} \to 0$, ESTAMOS CONSIDERANDO UMA FAMÍLIA IDEAL DE COMPUTADORES E A EQUAÇÃO DITA ANTES NOS GARANTE QUE $\|$QUANTIDADE PROCESSADA$\|$ É DIMINUI MAIS RÁPIDO QUE ϵ_{mac} QUANDO $\epsilon_{mac} \to 0$

Dependência em m e n, não em A e b

- Podemos ilustrar a uniformidade da constante implícita em "O" com a seguinte situação

- Suponha que temos um algoritmo para resolver um sistema não-singular $m\times m$ $Ax=b$ para x e nós garantimos que o resultado $\tilde{x}$ do algoritmo satisfaz:

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} = O(K(A)\epsilon_{mac})$$

isso significa que

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} \leq C\cdot K(A)\epsilon_{mac}$$

vale para uma constante C independente da matriz A ou do vetor b para todo ϵ_{mac} suficientemente pequeno. Se o denominador for 0, trocamos para outra definição

$$\|\tilde{x}-x\| \leq C\cdot K(A)\epsilon_{mac}\cdot\|x\|$$

- Mesmo que C não dependa de A e b, acaba por depender das dimensões, pois, ao mudar m, mudamos os dados passados, o que resulta em um novo problema (definição). Na prática, os erros de arredondamento aumentam conforme aumentamos m e n ($A\in\mathbb{C}^{m\times n}$), mas os erros crescem muito devagar (pode-se ignorar)

Independência da norma

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

Para problemas f e algoritmos $\tilde{f}$ em espaços finitos e dimensionais X e Y, as propriedades de precisão, estabilidade e estabilidade retroativa todas se mantém ou falham de manter independência na escolha das normas em X e Y

<u>DEM</u>

É fácil provar que em um espaço vetorial finito e dimensional, se $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ são duas normas no mesmo espaço, então $\exists C_1, C_2$ t.q $C_1\|x\| \leq \|x\|' \leq C_2\|x\|$ $\forall x$. Logo mudar a norma afeta o C, mas não a sua existência.

ESTABILIDADE DA ARITMÉTICA DE PONTO FLUTUANTE

TEOREMA

AS OPERAÇÕES $\oplus$, $\ominus$, $\otimes$, $\div$ SÃO RETROATIVAMENTE ESTÁVEIS

DEM

Vamos mostrar para $\ominus$, já que é a mais arriscada

Para dados $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in X$, o problema de subtração é:

$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ e o algoritmo é: $\tilde{f}(x_1, x_2) = fl(x_1) \ominus fl(x_2)$

Temos então

$fl(x_1) = x_1(1+\epsilon_1)$ $\quad fl(x_2) = x_2(1+\epsilon_2)$ para algum $|\epsilon_1|, |\epsilon_2| \leq \epsilon_{mac}$

e temos também:

$$fl(x_1) \ominus fl(x_2) = (fl(x_1) - fl(x_2))(1+\epsilon_3) \quad \text{para } |\epsilon_3| \leq \epsilon_{mac}$$

Combinando, temos:

$$fl(x_1) \ominus fl(x_2) = [x_1(1+\epsilon_1) + x_2(1+\epsilon_2)](1+\epsilon_3)$$

$$= x_1(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3) + x_2(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3)$$

$$= x_1(1+\epsilon_4) + x_2(1+\epsilon_5)$$

para algum $|\epsilon_4|, |\epsilon_5| \leq 2\epsilon_{mac} + O(\epsilon_{mac}^2)$

Ou seja, $\tilde{f}(x) = fl(x_1) \ominus fl(x_2)$ é igual a diferença $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$ onde $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$ satisfazem

$$\frac{|\tilde{x}_1 - x_1|}{|x_1|} = O(\epsilon_{mac}) \qquad \frac{|\tilde{x}_2 - x_2|}{|x_2|} = O(\epsilon_{mac})$$

PRECISÃO DE UM ALGORITMO RETROATIVAMENTE ESTÁVEL

TEOREMA

SUPONHA QUE UM ALGORITMO RETROATIVAMENTE $\tilde{f}$ ESTÁVEL É APLICADO A UM PROBLEMA $f: X \to Y$ COM NÚMERO DE CONDICIONAMENTO K EM UM COMPUTADOR QUE SATISFAZ $fl(x) = x(1+\epsilon)$ E $x \circledast y = (x * y)(1+\epsilon)$, ENTÃO O ERRO RELATIVO SATISFAZ

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} = O(\kappa(x)\,\epsilon_{mac})$$

DEM

Por definição, temos $\tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$ com $\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(\epsilon_{mac})$

Pela definição de número de condicionamento, temos

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq (\kappa(x) + o(1))\,\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$$

onde $o(1)$ é um termo que converge a 0 quando $\epsilon_{mac} \to 0$