Álgebra Linear

04/10/24

Matrizes Positivas Definidas

- DEF: Se a forma quadrática de A é >0, ela é positiva definida, ou seja, $xAx^T > 0$.
- Se $xAx^T \geq 0$, é positiva indefinida.
- Matrizes negativas são definidas analogamente

TEOREMA

A é positiva definida $\Leftrightarrow$ Seus autovalores são todos maiores que 0

DEM:

$\Rightarrow$) $A = Q\Lambda Q^T \Rightarrow x^TAx \Rightarrow \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$

$\Leftarrow$) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 \Rightarrow x^TAx = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \geq 0$

SE $=0 \Rightarrow y_1 = \ldots = y_n = 0 \Rightarrow y = Q^Tx \Rightarrow x = 0$

Logo $\rightarrow x \neq 0$, $x^TAx > 0$

TEOREMA

As afirmações são equivalentes:

(i) A é positiva definida

(ii) $\forall \lambda_i \,/\, \exists x \neq 0 \Rightarrow Ax = \lambda_i x$, $\lambda_i > 0$

(iii) d_i pivô de A, $d_i > 0$

(iv) $\det A_k > 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{bmatrix} A_k & \vdots \\ \cdots & \end{bmatrix} = A$$

PROPRIEDADE

SE A E B SÃO POSITIVAS DEFINIDAS, A+B TAMBÉM É

DEM

$$x^T(A+B)x = \underbrace{x^TAx}_{>0} + \underbrace{x^TBx}_{>0} > 0$$

$\Rightarrow$ autovalores de A+B são positivos

RAIZ QUADRADA DE MATRIZES

- DIZEMOS QUE $\sqrt{A} = R$ SE $R^TR = A$

$\triangleright$ A É SIMÉTRICA

$$A = R^TR \Leftrightarrow A^T = (R^TR)^T \Leftrightarrow A^T = R^T(R^T)^T = RR^T = A$$

$\triangleright$ A É POSITIVA DEFINIDA $\Leftrightarrow N(R) = \{0\}$

$x^TAx > 0 \quad \forall x$

$x^TR^TRx > 0 \rightarrow (Rx)^TRx > 0 \Rightarrow \|Rx\|^2 > 0$

Verdade se $Rx \neq 0$

- EXISTEM DUAS POSSIBILIDADES PARA A MATRIZ R

$\triangleright R = \sqrt{D}L^T$ ONDE $D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$ E $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}$

VEM DA DECOMPOSIÇÃO $A = LDL^T$ $\rightarrow$ $R^TR = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = LDL^T = A$

$\triangleright R = \sqrt{\Lambda}Q^T$ ONDE $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ E $\sqrt{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$

TEOREMA ESPECTRAL $\rightarrow$ $R^TR = Q\sqrt{\Lambda}\sqrt{\Lambda}Q^T = Q\Lambda Q^T = A$

- DECOMPOSIÇÃO DE CHOLASKY: A MATRIZ C TRIANGULAR INFERIOR TAL QUE $A = CC^T$.

▷ $C = L\sqrt{D}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \quad \sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix} \Rightarrow L\sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}$$

▷ A DECOMPOSIÇÃO É ÚNICA

$$A = CC^T = BB^T$$

$$* \; I = C^{-1}CC^T(C^T)^{-1} = C^{-1}BB^T(C^T)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \; C^{-1}B = ((C^{-1}B)^T)^{-1}$$

- B É TRIANG. INF. $\Rightarrow$ $C^{-1}B$ É TRIANG. INF. *
- C^{-1} É //

$$\Downarrow$$

$(C^{-1}B)^T$ É TRIANG. SUP *

$\Rightarrow C^{-1}B$ É DIAGONAL Λ

$$\Rightarrow \; C^{-1}B(C^{-1}B)^T = \Lambda^2 = I \; \Rightarrow \; \Lambda = I \Rightarrow C = B$$