Álgebra Linear

22/08/24

Espaços Vetoriais

- Um conjunto E é espaço vetorial se
  (i) $\forall x, y \in E \Rightarrow x + y \in E$
  (ii) $\forall x \in E, \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha x \in E$

→ fechado para combinações lineares ⇒ $x\alpha + \beta y \in E$

Exemplos

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ $\quad \mathbb{C}^n = \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} ; u_i \in \mathbb{C} \right\}$

$$\mathbb{M}^{m\times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} ; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$E = \{\text{todas as funções } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

↳ $f, g \in E, \alpha \in \mathbb{R}$

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) + g(x)$$

$$\alpha f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \alpha \cdot f(x)$$

Subespaço Vetorial

- Se um conjunto $F \subseteq E$ é fechado para combinações lineares, ele é um subespaço vetorial de E

Exemplos

$$\mathbb{R}^n \begin{cases} F = \{0\} \to \text{origem} \\ F = \{\alpha u ; \alpha \in \mathbb{R}\} \to \text{reta} \\ F = \{\alpha u + \beta v ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \to \text{plano} \end{cases}$$

TRANSFORMAÇÃO LINEAR

- DADA $T: E \to F$, ONDE E E F SÃO ESPAÇOS VETORIAIS,

T É UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR SE:

1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$
2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

PROPRIEDADES

- TODO ESPAÇO VETORIAL CONTÉM 0

DEM

$u \in E \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot u \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \alpha = 0 \Rightarrow 0 \cdot u = 0 \quad \therefore \quad 0 \in E$

- SE E E W SÃO ESPAÇOS VETORIAIS, $E \cap W$ É UM ESPAÇO VETORIAL

DEM

$$\begin{array}{c} u, v \in E \cap W \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} u \in E \wedge u \in W \\ v \in E \wedge v \in W \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha u + \beta v \in E \\ \alpha u + \beta v \in W \end{array}$$

- SE $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ É UM CONJUNTO DE ELEMENTOS DE V, DEFINIMOS

$$\text{span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k \,;\, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

- Span(S) É O MENOR ESPAÇO VETORIAL CONTENDO S.

DEM SEJA V UM ESPAÇO VETORIAL TAL QUE $S \subseteq V$. PRECISAMOS MOSTRAR QUE $\text{span}(S) \subseteq V$

$$\to S \subseteq V \Rightarrow v_1, \ldots, v_k \in V \underset{\text{V é e.v}}{\Rightarrow} \underbrace{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k}_{\text{span}(S)} \in V \quad \therefore \quad \text{span}(S) \subseteq V$$