G.A Lista 1

1) São dados dois pontos A e B. Os pontos P e Q do segmento AB são tais que $AP = PQ = QB$. Determine P e Q em função de A e B.

$$\vec{AP} = \vec{PQ} = \vec{QB} = \frac{\vec{AB}}{3}$$

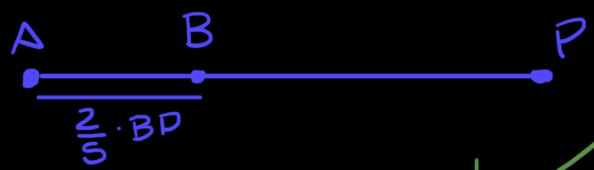
(I) $P - A = \dfrac{B-A}{3} \Rightarrow P = \dfrac{2A+B}{3}$

(II) $B - Q = \dfrac{B-A}{3}$

$Q = B - \dfrac{B+A}{3} \Rightarrow Q = \dfrac{2B+A}{3}$

2) São dados dois pontos A e B. O ponto P da reta AB é tal que B está entre A e P, e de forma que $BP = 2{,}5AB$. Determine P em função de A e B.

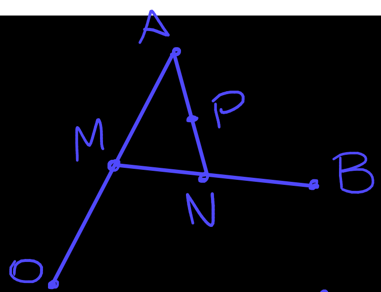
$$\vec{BP} = \frac{5}{2} \cdot \vec{AB}$$



$P - B = \dfrac{5B-5A}{2}$

$P = B + \dfrac{5B-5A}{2} \Rightarrow P = \dfrac{7B-5A}{2}$

3) São dados dois pontos A e B. O ponto M é médio de OA, o ponto N é médio de BM, e ponto P é médio de NA. Determine P em função de A e B.

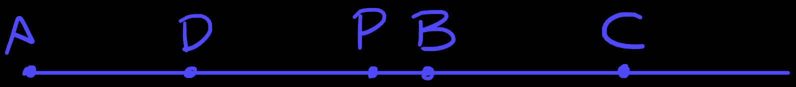


$M = \dfrac{A}{2}$ $\quad N = \dfrac{B+M}{2}$ $\quad P = \dfrac{A+N}{2}$

$$P = \frac{A + \frac{B+M}{2}}{2} \Rightarrow P = \frac{A + \frac{B + \frac{A}{2}}{2}}{2}$$

$$\rightarrow P = \frac{A + \frac{2B+A}{4}}{2} \Rightarrow P = \frac{2B+5A}{8}$$

4) São dados os pontos A, B e C. O ponto D do lado AB é tal que $AD = \frac{1}{3}AB$ e o ponto P é médio do segmento CD. Determine P em função de A, B e C.



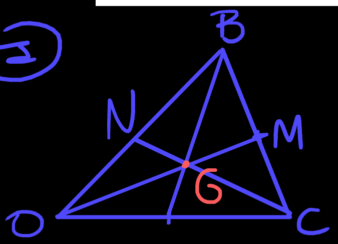
$P = \frac{\overrightarrow{CD}}{2}$

$D - A = \frac{B-A}{3} \Rightarrow D = \frac{B+2A}{3} \quad \therefore \quad P = \frac{C + \frac{B+2A}{3}}{2} \Rightarrow P = \frac{B+2A+3C}{6}$

5) Seja G o baricentro do triângulo ABC. Se M é o ponto médio do lado BC demonstre que $GA = 2 \cdot MG$. Use esta propriedade e mostre que:

a) $G = \frac{A+B+C}{3}$ b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$

I



$\overrightarrow{GA} = 2 \cdot \overrightarrow{MG}$

$G = \alpha \cdot M \Rightarrow G = \frac{\alpha}{2}B + \frac{\alpha}{2}C$ → ÚNICO

$\vec{M} = \frac{B+C}{2}$

$\vec{N} = \frac{B}{2}$

$\overrightarrow{CG} = \beta \overrightarrow{CN}$

$G - C = \beta N - \beta C$

$G = \frac{\beta B}{2} - \beta C + C$

$\begin{cases} \beta = \alpha \\ \frac{\alpha}{2} = 1 - \beta \end{cases}$

$\frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$

$\frac{\alpha}{2} + \alpha = 1$

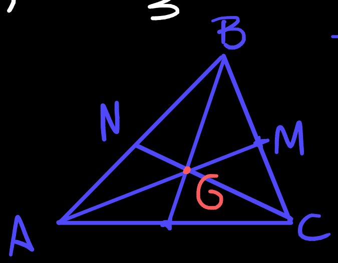
$\frac{3\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$

II

SE $G = \frac{2}{3} \cdot M$, ENTÃO $MG = \frac{1}{3}M$

$\therefore$ $G = 2 \cdot MG$

A) $\frac{A+B+C}{3} = G$



$M = \frac{B+C}{2}$

→ $GA = 2MG$

$A - G = 2G - 2M$

$3G = A + 2M$

$3G = A + B + C$

→ $G = \frac{A+B+C}{3}$

B) $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=0$

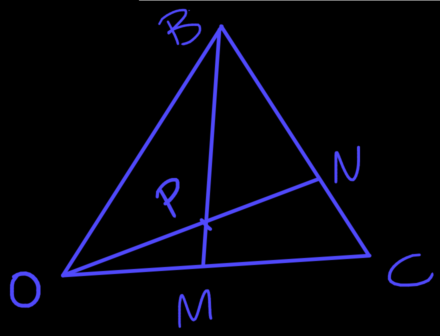
$A-G+B-G+C-G \to A+B+C-\cancel{3}\cdot\left(\frac{A+B+C}{\cancel{3}}\right)$

$\cancel{A}+\cancel{B}+\cancel{C}-\cancel{A}-\cancel{B}-\cancel{C}\to 0$

6) Dado o triângulo ABC seja M o ponto médio de AC e seja N o ponto do lado BC tal que $CN=\frac{CB}{3}$. Os segmentos AN e BM cortam-se em P. Calcule as razões:

a) $\frac{AP}{AN}=\frac{3}{5}$ b) $\frac{BP}{BM}=\frac{4}{5}$

Sugestão: adote um dos vértices do triângulo como origem dos vetores.



$P=\alpha N \Rightarrow P=\frac{\alpha}{3}\cdot B+\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\cdot C$

$BP=\beta BM$

$P-B=\beta M-\beta B \to -\beta\cdot B+B$ $B(1-\beta)$

$P=\frac{\beta}{2}\cdot C+(1-\beta)B$

$M=\frac{C}{2}$ $CN=\frac{CB}{3}$

$N=\frac{B}{3}-\frac{C}{3}+C$

$N=\frac{B}{3}+\frac{2C}{3}$

$$\begin{cases}\frac{\beta}{4}=\frac{\alpha}{3} \Rightarrow \beta=\frac{4\alpha}{3}\\ 1-\beta=\frac{\alpha}{3}\end{cases}$$

$1-\frac{4\alpha}{3}=\frac{\alpha}{3} \to 1=\frac{5\alpha}{3}$ $\alpha=\frac{3}{5}$

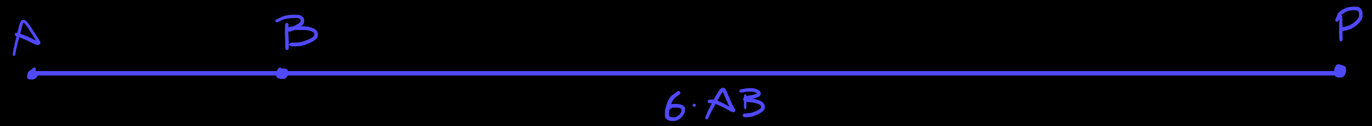
$\to \frac{AP}{AN}=\frac{3}{5}$ A

$\to \frac{BP}{BN}=\frac{4}{5}$ B

$1-\beta=\frac{\beta}{4}\Rightarrow 1=\frac{\beta}{4}+\beta \to \frac{5\beta}{4}$

$\beta=\frac{4}{5}$

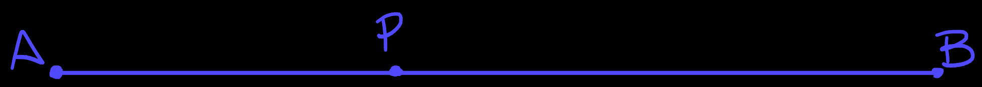
7) Sejam $A=(-2,1)$ e $B=(1,3)$. Prolongue o segmento AB de um comprimento $BP=6AB$. Determine o ponto P.



$P-B=6B-6A$

$P=7B-6A \Rightarrow P=(7,21)-(-12,6) \to P=(19,15)$

8) Sejam $A=(1,2)$ e $B=(9,6)$. Determine o ponto P do segmento $\overline{AB}$ tal que $\frac{AP}{2}=\frac{PB}{3}$.



$$\frac{P}{2}-\frac{A}{2}=\frac{B}{3}-\frac{P}{3} \Rightarrow \frac{P}{2}+\frac{P}{3}=\frac{B}{3}+\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{5P}{6}=\frac{(9,6)}{3}+\frac{(1,2)}{2}$$

$$\frac{5P}{6}=(3,2)+\left(\frac{1}{2},1\right) \Rightarrow 5P=(18,12)+(3,6) \Rightarrow P=\left(\frac{18}{5},\frac{12}{5}\right)+\left(\frac{3}{5},\frac{6}{5}\right)$$

$$\longrightarrow P=\left(\frac{21}{5},\frac{18}{5}\right)$$

9) Dados os pontos $A=(1,2)$, $B=(10,-1)$ e $C=(4,8)$ determine:

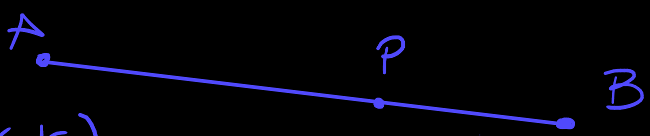
a) o baricentro G do triângulo ABC.

b) os vetores $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ e $\overrightarrow{GC}$.

A) $$\frac{(1,2)+(10,-1)+(4,8)}{3} \Rightarrow \frac{(15,9)}{3} \Rightarrow G=(5,3)$$

B) $$\overrightarrow{GA}=(1,2)-(5,3)=(-4,-1)$$
$$\overrightarrow{GB}=(10,-1)-(5,3)=(5,-4)$$

10) Dados os pontos $A=(-1,\ 6)$ e $B=(5,\ 4)$, determine o ponto P da reta AB que tem coordenadas iguais.



$PB=\alpha AB$

$P=(K,K)$

$$B-P=\alpha B-\alpha A$$
$$-P=\alpha B-B-\alpha A$$
$$P=\alpha A-\alpha B+B$$
$$P=\alpha A+B(1-\alpha)$$

$$P=(-\alpha,6\alpha)+(5-5\alpha,4-4\alpha)$$

$$P=(5-6\alpha,4+2\alpha)$$

$$\begin{cases} K=5-6\alpha \\ 3K=12+6\alpha \quad (3) \end{cases}$$

$$4K=17$$

$$K=\frac{17}{4}$$