ÁLGEBRA LINEAR

05/09/24

LISTA 4

1. Sejam S e T dois subespaços de um espaço vetorial V.

(a) Defina $S+T=\{s+t\ ;\ s\in S \text{ e } t\in T\}$. Mostre que $S+T$ é um subespaço vetorial.

$\alpha(s_1+t_1)+\beta(s_2+t_2)$

$\alpha s_1+\alpha t_1+\beta s_2+\beta t_2$

$\underbrace{\boxed{\alpha s_1+\beta s_2}}_{\in S}+\underbrace{\boxed{\alpha t_1+\beta t_2}}_{\in T}\ \therefore \in S+T$

(b) Defina $S\cup T=\{x\ ;\ x\in S \text{ ou } x\in T\}$. Argumente que $S\cup T$ não é necessariamente um subespaço vetorial.

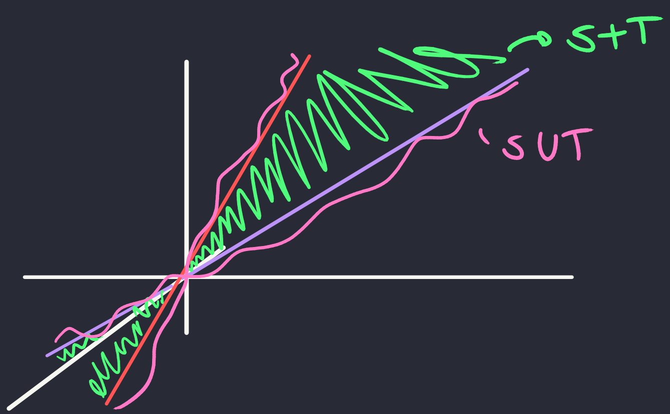
$s_1\in S$
$t_1\in T$ $\longrightarrow \alpha s_1+\beta t_1$

SE $\alpha=\beta=1$, NÃO HÁ UMA REGRA QUE GARANTE QUE s_1+t_1 PERTENCE A S_1 OU A t_1, POIS, NO CASO ILUSTRADO, s_1+t_1 PERTENCEM A SUBESPAÇOS DIFERENTES

(c) Se S e T são retas no $\mathbb{R}^3$, o que é $S+T$ e $S\cup T$?

S+T É UM PLANO

S∪T É A UNIÃO DE DUAS RETAS



2. Como o núcleo $N(C)$ é relacionado aos núcleos $N(A)$ e $N(B)$, onde $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$?

$x\in N(C)\iff Cx=0 \longrightarrow Cx=0 \rightarrow \begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}x=0$

$y\in N(A)\iff Ax=0$

$z\in N(B)\iff Bz=0$

$\begin{bmatrix}Ax\\Bx\end{bmatrix}=0 \rightarrow$ ELEMENTOS QUE ZERAM A E B $\Rightarrow N(A)\cap N(B)$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Ache a sua forma escalonada reduzida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -12 & -3 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \div 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - 5L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 23/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Qual é o posto dessa matriz? POSTO 2

(c) Ache uma solução especial para a equação $Ax = 0$.

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{23}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow S = \text{span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} -23/4 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/4 \\ -7/4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\right)$$

4. Ache a matrizes A_1 e A_2 (não triviais) tais que posto$(A_1 B) = 1$ e posto$(A_2 B) = 0$ para $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$A_1 \quad A_2$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A_1 = \boxed{\text{QUALQUER MATRIZ DE POSTO 1}}$

posto$(A_1 B) = 1$

posto$(A_2 B) = 0$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ \alpha(a+b) & \alpha(a+b) \end{bmatrix} \quad \boxed{\text{POSTO 1}}$$

SE $c+d = \alpha(a+b)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a+b=0 \\ c+d=0 \end{matrix}$$

$\hookrightarrow A_2$ É QUALQUER MATRIZ $A_{n\times 2} = (a_{ij})$ TAL QUE $a_{12} = -a_{11}$

5. Verdadeiro ou Falso:

(a) O espaço das matrizes simétricas é subespaço. V

(b) O espaço das matrizes anti-simétricas é um subespaço. V

(c) O espaço das matrizes não-simétricas ($A^T \neq A$) é um subespaço. F

6. Se A é 4×4 e inversível, descreva todos os vetores no núcleo da matriz $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ (que é 4×8).

$N(A) \subseteq \mathbb{R}^4 \quad N(B) \subseteq \mathbb{R}^8$

$v \in N(B)$ T.Q $\quad v = [v_1 \vdots v_2]^T, \; v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$

$$Bv = [A \vdots A] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \overset{0}{\cancel{Bv}} = Av_1 + Av_2$$

$Av_1 = -Av_2 \longrightarrow$ SE A INVERTÍVEL

$\boxed{v_1 = -v_2}$

$$N(B) = \left\{ \begin{bmatrix} v \\ -v \end{bmatrix} ; v \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

7. Mostre por contra-exemplos que as seguintes afirmações são falsas em geral:

(a) A e A^T tem os mesmo núcleos.

SE $A_{m \times n}$ ENTÃO $A^T_{n \times m}$ LOGO $N(A) \subset \mathbb{R}^n$, E $N(A^T) \subset \mathbb{R}^m$

SE $A_{n \times n} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) A e A^T tem as mesmas variáveis livres.

SE $A_{m \times n}$, com $m < n$

$\rightarrow$ posto$(A) = m$, ENTÃO $A^T_{n \times m}$, TODAS AS COLUNAS SÃO PIVÔ.

(c) Se R é a forma escalonada de A, então R^T é a forma escalonada de A.

$R = EA \quad R^T = A^T E^T \rightarrow$ PARA R^T SER A FORMA ESCALONADA DE A, $E^T = A$ E $A^T = E$, O QUE NEM SEMPRE É VERDADE:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

8. Construa uma matriz cujo espaço coluna contenha $(1,1,5)$ e $(0,3,1)$ e cujo núcleo contenha $(1,1,2)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 3 & y \\ 5 & 1 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 1+0+x &= 0 \rightarrow x = -1 \\ 1+3+2y &= 0 \rightarrow y = -2 \\ 5+1+2z &= 0 \rightarrow z = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

9. Construa uma matriz cujo núcleo contenha todos os múltiplos de $(4,3,2,1)$.

$$Ax = 0 \rightarrow A\alpha\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$N(A) = \left\{ x = \alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$A_{n\times 4} \cdot \alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V, definimos o conjunto

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}$$

Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e $\mathbb{R}$. Relembramos que uma função $f : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V.

(a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.

PARA V^* SER ESPAÇO VETORIAL, TODO $h \in V^*$ PODE SER ESCRITO COMO $h(a) = f(a) + g(a)$, SE TODO a PODE SER ESCRITO COMO $\alpha v + \beta w$, TEMOS QUE

$$h(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) + \alpha g(v) + \beta g(w)$$

$$h(\alpha v + \beta w) = \alpha(f(v) + g(v)) + \beta(f(w) + g(w))$$

$$h(\alpha v + \beta w) = \alpha h(v) + \beta h(w) \longrightarrow V^* \text{ É ESPAÇO VETORIAL}$$

(b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \to V$ tal que , para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos

$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.$$

Dica: Utilize a dimensão finita de $\mathbb{R}^n$ para expandir $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f.

$$\varphi : V^* \rightarrow V$$

INJETIVIDADE $\Rightarrow \varphi(f_1) = \varphi(f_2) \therefore f_1 = f_2$

SOBREJETIVIDADE $\Rightarrow \forall f \in V^*, \exists g \;;\; \varphi(f) = g$