Álgebra Linear Numérica — 11/03/25

Projeções

Projetores

$\boxed{\text{Definição}}$

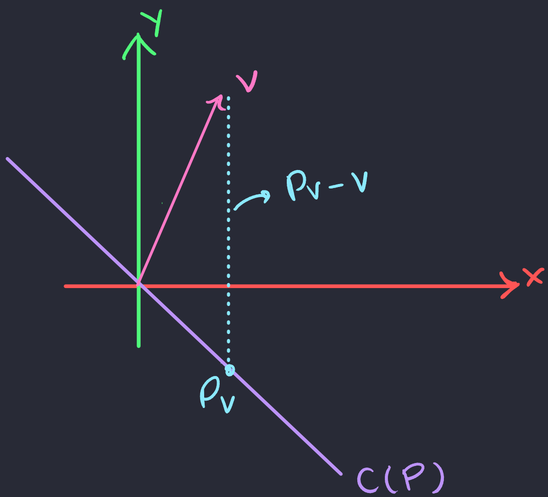
Um projetor é uma matriz quadrada tal que

$$P^2 = P$$

- São matrizes que pegam a "sombra" de um vetor em um espaço vetorial, tal que:

$$x \in \mathbb{R}^n,\ Px = v \text{ t.q. } v \in \mathbb{R}^m \ (m \leq n),\ P(Pv) = P^2 v = Pv = v$$

- Conseguimos deduzir a "direção da luz" que projeta a sombra em $C(P)$



Aplicando P em $Pv - v$:

$$P(Pv - v) = P^2 v - Pv = Pv - Pv = 0$$

$$\Rightarrow Pv - v \in N(P)$$

- Ou seja, o vetor $Pv - v$ indica a direção onde o projetor P projeta o vetor v.

Projetores Complementares

- Se P é um projetor, $I - P$ também é:

$$(I-P)(I-P) = I - P - P + P^2 = I - P$$

- A matriz $I - P$ é a matriz complementar de P

TEOREMA

$$C(I-P) = N(P)$$

DEM

$$(I-P)v = v - Pv \Rightarrow v - Pv \in C(I-P)$$

$$P(v-Pv) = Pv - P^2 v = Pv - Pv = 0 \Rightarrow \boxed{C(I-P) = N(P)}$$

TEOREMA

$$N(I-P) = C(P)$$

DEM

Seja $v \in C(P)$, ou seja, $Pv = v$

$$(I-P)v = v - Pv = v - v = 0$$

PROJETORES ORTOGONAIS

DEFINIÇÃO

UM PROJETOR P É ORTOGONAL SE ELE PROJETA UM SUBESPAÇO S_1 EM OUTRO S_2 ONDE $S_1 \perp S_2$

TEOREMA

UM PROJETOR P É ORTOGONAL $\Leftrightarrow P = \overline{P}^T$

DEM

$\Leftarrow$) $v \in S_1$, $Pv \in C(P) \wedge Pv - v \in N(I-P)$

$$\overline{(Pv-v)}^T(Pv) = \bar{v}^T\bar{P}^T P v - \bar{v}^T P v = \bar{v}^T P^2 v - \bar{v}^T P v = \bar{v}^T P v - \bar{v}^T P v = 0$$

$\Rightarrow$) Seja $\{q_1, \ldots, q_m\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{C}^m$, onde $\{q_1, \ldots, q_n\}$ é base ortonormal de S_1 e $\{q_{n+1}, \ldots, q_m\}$ de S_2.

Para $j \leq n$ temos $Pq_j = q_j$ e para $j > n$ temos $Pq_j = 0$. Seja Q a matriz de colunas q_j:

$$Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_m \\ | & & | \end{bmatrix} \Leftrightarrow PQ = \begin{bmatrix} | & & | & | & \\ q_1 & \cdots & q_n & 0 & \cdots \\ | & & | & | & \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{Q}^T P Q = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{n} & \\ & 0 \ \ddots \end{bmatrix} = \Sigma$$

Construímos assim uma fatoração S.V.D para P:

$$P = \bar{Q}^T \Sigma Q \Leftrightarrow \bar{P}^T = \overline{(\bar{Q}^T \Sigma Q)}^T \Leftrightarrow \bar{P}^T = \bar{Q}^T \bar{\Sigma} Q = P \Rightarrow P = \bar{P}^T$$

PROJEÇÃO COM BASE ORTONORMAL

- COMO VIMOS NA DEMONSTRAÇÃO DO ÚLTIMO TEOREMA, P TEM UMA S.V.D COM VALORES SINGULARES 1, LOGO, PODEMOS UTILIZAR A VERSÃO REDUZIDA DA S.V.D:

$$P = \bar{\hat{Q}}^T \cdot \hat{Q}$$

- ONDE AS COLUNAS DE Q SÃO ORTOGONAIS. SABEMOS QUE

$$v = r + \sum_{i=1}^{n} q_i^T q_i v$$

REPRESENTA A DECOMPOSIÇÃO DE UM VETOR $v \in \mathbb{C}^m$ EM UM COMPONENTE NO ESPAÇO COLUNA DE $\hat{Q}$ MAIS UM COMPONENTE NO ESPAÇO ORTOGONAL

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\hat{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{\bar{\hat{Q}}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{v}$$

- $\tilde{Q}\bar{\tilde{Q}}^T$ É UMA PROJEÇÃO EM $C(\tilde{Q})$ SE AS COLUNAS DE $\tilde{Q}$ SÃO ORTONORMAIS. $I - \tilde{Q}\bar{\tilde{Q}}^T$ TAMBÉM É UM PROJETOR ORTOGONAL.
- HÁ TAMBÉM OS PROJETORES DE POSTO 1

$$P_q = q\bar{q}^T \qquad P_{\perp q} = I - q\bar{q}^T$$

- PARA VETORES NÃO-UNITÁRIOS:

$$P_a = \frac{a\bar{a}^T}{\bar{a}^T a} \qquad P_{\perp a} = I - \frac{a \cdot \bar{a}^T}{\bar{a}^T \cdot a}$$

PROJEÇÕES EM BASES ARBITRÁRIAS

- DADA UMA BASE $\{a_1, \dots, a_n\}$ ARBITRÁRIA DEIXAMOS A SER A MATRIZ T.Q $A = [a_1 \dots a_n]$. DADO v COM $Pv = y \in C(A)$ ENTÃO $(y-v) \perp C(A)$, OU SEJA, $\bar{a}_j^T(y-v)$ PARA TODO j. COMO $y \in C(A)$, VAMOS ESCREVÊ-LO COMO $Ax = y$. PODEMOS $\bar{a}_j^T(y-v)$ COMO:

$$\bar{A}^T(Ax - v) = 0 \iff \underbrace{\bar{A}^T A}_{\text{Posto Completo}} x = \bar{A}^T v \iff x = (\bar{A}^T A)^{-1} \cdot \bar{A}^T v$$

$$Ax = y \iff y = A(\bar{A}^T A)^{-1} \bar{A}^T \cdot v \Rightarrow \underline{P = A(\bar{A}^T A)^{-1} \bar{A}^T}$$

FATORAÇÃO QR

- DADA $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}$, TEMOS

$$\text{span}(a_1) \subseteq \text{span}(a_1, a_2) \subseteq \dots$$

- PARA CONSTRUIR A FATORAÇÃO, QUEREMOS UMA SEQUÊNCIA $\{q_1, \dots, q_j\}$ TAL QUE

$$\underline{\text{span}(\{q_1, \dots, q_j\}) = \text{span}(\{a_1, \dots, a_j\})}$$

- PODEMOS ESCREVER ISSO DA SEGUINTE FORMA

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

- ONDE $r_{kk} \neq 0$. OU SEJA, a_i PODE SER ESCRITO COMO UMA COMBINAÇÃO LINEAR DE $\{q_j\}$ E VICE-VERSA

$$a_1 = r_{11} q_1$$

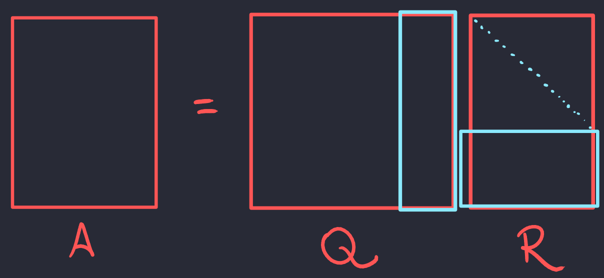
$$a_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2$$

$$\vdots$$

$$a_n = r_{1n} q_1 + r_{2n} q_2 + \dots + r_{nn} q_n$$

- Temos então: $A = \hat{Q}\hat{R}$, a fatoração QR reduzida

- Porém a fatoração completa de $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ $(m \geq n)$ adiciona $m-n$ colunas em $\hat{Q}$.



Método Gram-Schmidit

- No passo j, queremos um vetor $q_j \in \text{span}\{a_1, \dots, a_j\}$ que seja ortogonal a $q_1, \dots, q_{j-1}$:

$$v_j = a_j - \bar{q}_1^T a_1 q_1 - \dots - \bar{q}_{j-1}^T a_{j-1} q_{j-1}$$

- Porém queremos que v_j seja unitário, então reescrevemos:

$$q_1 = \frac{a_1}{r_{11}}$$

$$q_2 = \frac{a_2 - r_{12} q_1}{r_{22}} \quad \boxed{r_{ij} = \bar{q}_i^T a_j}$$

$$\vdots$$

$$q_n = \frac{a_n - \sum_{i=1}^{n-1} r_{in} q_i}{r_{nn}}$$

$$\bar{q}_1^T q_n = \frac{q_1 \cdot a_n - q_1 \underbrace{\cancel{\bar{q}_1^T q_1}}_{1} a_n}{r_{nn}} = 0$$

$$\bar{q}_n^T q_n = \frac{\bar{q}_n^T \cdot a_n}{r_{nn}} = \frac{\bar{q}_n^T \cdot a_n}{\bar{q}_n^T a_n} = 1$$

○ PARA COMPUTADORES, ESSE PROCESSO É INVIÁVEL POR ERROS NUMÉRICOS, CHAMAMOS-A DE CLASSICAL GRAM-SCHMIDIT

```
for j = 1 to n
    v_j = a_j
    for i = 1 to j-1
        r_ij = q̄_i^T a_j
        v_j = v_j - r_ij q_i
    r_jj = ||v_j||_2
    q_j = v_j / r_jj
```

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

$\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}\ (m \geq n),\ \exists\, Q \in \mathbb{C}^{m\times m},\ R \in \mathbb{C}^{m\times n},\ \tilde{Q} \in \mathbb{C}^{m\times n},\ \tilde{R} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

T.Q $A = QR \vee A = \hat{Q}\hat{R}$

DEM:

$\rightarrow$ posto$(A) = n \Rightarrow$ Podemos montar a fatoração reduzida $\hat{Q}\hat{R}$ por construção usando Gram-Schmidt, pois podemos usá-lo para construir as colunas de $\hat{Q}$ e as entradas $\hat{R}$, como fizemos anteriormente. O algoritmo só pode falhar se, em algum momento, v_j é 0 e não possa ser normalizado, mas isso implica que ela não tem posto coluna completo. Se isso acontecer, eu posso simplesmente escolher um vetor ortogonal arbitrário.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

$\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}\ (m \geq n)$ COM POSTO COLUNA COMPLETO, $\exists!\, Q, R \in \mathbb{C}^{m\times m}, \mathbb{C}^{m\times n}$

$\wedge\ \exists!\, \hat{Q}, \hat{R} \in \mathbb{C}^{m\times n}, \mathbb{C}^{n\times n}$ E $r_{jj} > 0$

DEM

Por construção (Gram-Schmidt), novamente, sabemos que toda fatoração reduzida deve seguir:

I $q_1 = \dfrac{a_{11}}{r_{11}}$ II $r_{ij} = \bar{q}_i^T a_j$ III $|r_{jj}| = \| a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_j \|_2$

$$q_2 = \frac{a_2 - r_{12} q_1}{r_{22}}$$

$$\vdots$$

$$q_n = \frac{a_n - \sum_{i=1}^{n-1} r_{in} q_i}{r_{nn}}$$

Soluções de $Ax=b$

- $Ax=b$
- $QRx=b$
- $Rx = \bar{Q}^T b$
- $Rx = y$ com $y = Q^{-1} \cdot b = \bar{Q}^T b$

↳ Triangular sup. trivial de resolver

Projeções Gram-Schmidt

- Vamos descrever o algoritmo QR utilizando projetores!

- Seja $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \geq n$ de posto coluna completo com colunas $\{a_j\}$. Considere a sequência de fórmulas

$$q_1 = \frac{P_1 a_1}{\|P_1 a_1\|} \quad q_2 = \frac{P_2 a_2}{\|P_2 a_2\|} \quad \dots \quad q_n = \frac{P_n a_n}{\|P_n a_n\|}$$

- Onde P_j é a matriz $m \times m$ de posto $m-(j-1)$ que projeta $\mathbb{C}^m$ ortogonalmente no espaço ortogonal a $\text{span}\{q_1, \dots, q_{j-1}\}$

- Observe que q_j é ortogonal a $\{q_1, \dots, q_{j-1}\}$, está no espaço $\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$ e $\|q_j\|_2 = 1$. Podemos escrever P_j:

$$\hat{Q}_{j-1} = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_{j-1} \\ | & & | \end{bmatrix}, \quad P_j = I - \hat{Q}_{j-1} \hat{Q}_{j-1}^*$$

ALGORITMO DE GRAM-SCHMIDT MODIFICADO

- NA PRÁTICA O ALGORITMO DE GRAM-SCHMIDT NÃO É APLICADO COMO VIMOS, JÁ QUE GERA INSTABILIDADES NUMÉRICAS E APROXIMAÇÕES IMPRECISAS.
- PARA CADA VALOR DE j, O ALGORITMO MODIFICADO CALCULA UM ÚNICO PROJETOR

$$v_j = P_j \cdot a_j$$

- JÁ NO ALGORITMO MODIFICADO, ELE COMPUTA O RESULTADO POR UMA SEQUÊNCIA DE $j-1$ PROJETORES DE RANQUE $m-1$.
- LEMBRANDO DE $P_{\perp q} = I - qq^*$ É UM PROJETOR ORTOGONAL DE RANQUE $m-1$ NO ESPAÇO ORTOGONAL AO VETOR $q \in \mathbb{C}^m$.

$$P_j = P_{\perp q_{j-1}} \cdot P_{\perp q_{j-2}} \cdots P_{\perp q_1}$$

$$\Rightarrow v_j = P_{\perp q_{j-1}} \cdot P_{\perp q_{j-2}} \cdots P_{\perp q_1} \cdot a_j$$

- MATEMATICAMENTE, TEMOS QUE:

$$v_j = \overset{\text{I}}{P_j a_j} = \overset{\text{II}}{P_{\perp q_{j-1}} \cdot P_{\perp q_{j-2}} \cdots P_{\perp q_1} a_j}$$

- PORÉM, AS CONTAS FEITAS SÃO DIFERENTES, O ALGORITMO MODIFICADO FAZ ESSES PASSOS:

$$v_j^{(1)} = a_j$$
$$v_j^{(2)} = P_{\perp q_1} v_j^{(1)} = v_j^{(1)} - q_1 q_1^* v_j^{(1)}$$
$$v_j^{(3)} = P_{\perp q_2} v_j^{(2)} = v_j^{(2)} - q_2 q_2^* v_j^{(2)}$$
$$\vdots$$
$$v_j = v_j^{(j)} = P_{\perp q_{j-1}} v_j^{(j-1)} = v_j^{(j-1)} - q_{j-1} q_{j-1}^* v_j^{(j-1)}$$

```
for i = 1 to n
    v_i = a_i

for i = 1 to n
    r_ii = ||v_i||
    q_i = v_i / r_ii
    for j = i+1 to n
        r_ij = q_i^* v_j
        v_j = v_j - r_ij q_i
```

- Com esse algoritmo, podemos interpretá-lo como uma multiplicação por uma matriz triangular superior:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{r_{11}} & \frac{-r_{12}}{r_{11}} & \frac{-r_{13}}{r_{11}} & \cdots \\ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \end{bmatrix}}_{R_1} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & v_2^{(2)} & \cdots & v_n^{(2)} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{r_{22}} & \frac{-r_{23}}{r_{22}} & \cdots \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad R_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{r_{33}} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

- No final das iterações temos

$$A \underbrace{R_1 R_2 \cdots R_n}_{\hat{R}^{-1}} = \hat{Q}$$

Triangularização de Householder

- Vimos que Gram-Schmidt pode ser entendido como um produtório de matrizes triangulares

$$A \cdot \prod_{i=1}^{n} R_i = \hat{Q}$$

- O ALGORITMO DE HOUSE-HOLDER SEGUE O CONTRÁRIO:

$$A\hat{R}^{-1} = \hat{Q} \iff A = \hat{Q}\hat{R} \iff \hat{Q}^{-1} \cdot A = R \iff \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} Q_i\right) A = \hat{R}}_{\text{HOUSE HOLDER}}$$

- GRAM-SCHMIDT: ORTOGONALIZAÇÃO TRIANGULAR

- HOUSEHOLDER: TRIANGULARIZAÇÃO ORTOGONAL

- UM MÉTODO ESPERTO DE, POR UMA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES ORTOGONAIS, OBTER UMA TRIANGULAR SUPERIOR É, NA MATRIZ Q_K, INTRODUZIR 0 ABAIXO DA K-ÉSIMA DIAGONAL ATÉ AS ANTERIORES

EX:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_1} \underset{Q_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times \\ & \times \\ & \times \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_2} \underset{Q_2 Q_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times \\ & \times \\ & \end{bmatrix}}$$

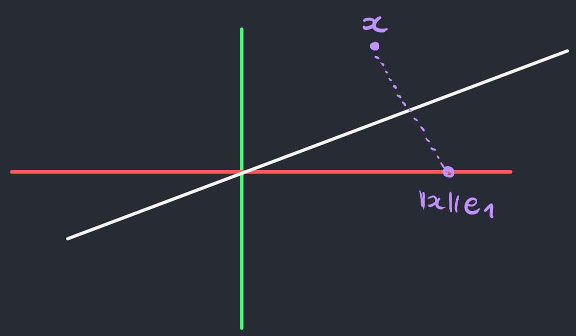
- PARA OBTER Q_K TAL QUE ELA TENHA ESSA FORMA, TEMOS:

$$Q_K = \begin{bmatrix} \underset{(K-1)\times(K-1)}{I} & 0 \\ 0 & \underset{(m-K+1)\times(m-K+1)}{F} \end{bmatrix}$$

- ONDE F É UMA MATRIZ CHAMADA PROJETOR DE HOUSEHOLDER. SUPONHA QUE NO COMEÇO DO K-ÉSIMO PASSO, AS ENTRADAS $K, \dots, m$ DA K-ÉSIMA COLUNA SÃO DADAS PELO VETOR $x \in \mathbb{C}^{m-K+1}$. PARA INTRODUZIR OS 0, A MATRIZ F DEVE FAZER O SEGUINTE:

$$x = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \vdots \\ \times \end{bmatrix} \longrightarrow Fx = \begin{bmatrix} \|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \|x\| e_1$$

- O refletor F vai refletir o espaço $\mathbb{C}^{m-k+1}$ através do hiperplano H ortogonal a $\|x\|e_1 - x$



- Sabemos que $\forall y \in \mathbb{C}^m$:

$$Py = \left(I - \frac{v\bar{v}^T}{\bar{v}^T v}\right) y = y - v\left(\frac{\bar{v}^T y}{\bar{v}^T v}\right)$$

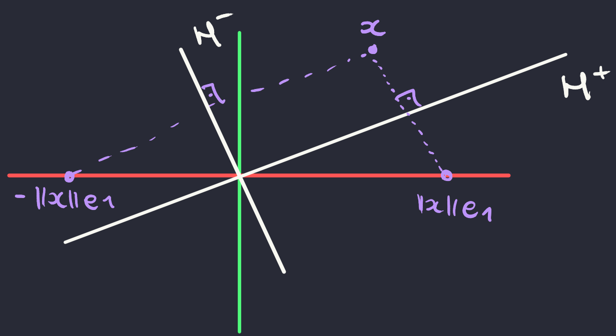
- Como vemos na imagem, temos que ir 2 vezes a distância original, logo:

$$Fy = \left(I - 2 \cdot \frac{vv^*}{v^* v}\right) y = y - 2v\left(\frac{v^* y}{v^* v}\right)$$

- Logo, temos que

$$F = I - 2\frac{vv^*}{v^* v}$$

- Porém, há várias dessas projeções, pois x pode ser projetado no vetor $z\|x\|e_1$ com $|z| = 1$ (complexos também). Pela estabilidade numérica, escolhemos um $z\|x\|e_1$ não próximo de x.



- Definimos então $v = -\text{sign}(x_1)\|x\|e_1 - x$ ou $v = \text{sign}(x_1)\|x\|e_1 + x$

($\to x_1 = 0 \Rightarrow \text{sign}(x_1) = 1$)

ALGORITMO DE HOUSEHOLDER

DEFINIÇÃO

DADA UMA MATRIZ A, $A_{i:i',j:j'}$ É A SUBMATRIZ $(i'-i+1)\times(j'-j+1)$ DE A COM ELEMENTO DO CANTO SUPERIOR ESQUERDO a_{ij} E INFERIOR DIREITO $a_{i'j'}$. SE A SUBMATRIZ FOR UM VETOR LINHA OU COLUNA, PODEMOS ESCREVER $A_{i,j:j'}$ OU $A_{i:i',j}$

for $k = 1$ to n

$x = A_{k:m,k}$

$v_k = \text{sign}(x_1) * \|x\|_2 * e_1 + x$

$v_k = v_k / \|v_k\|_2$

$A_{k:m,k:n} = A_{k:m,k:n} - 2 * v_k * (\bar{v}_k^T * A_{k:m,k:n})$

Complexidade $O(mn^2)$

- PORÉM, SABEMOS QUE UM SISTEMA $Ax=b$ PODE SER RESOLVIDO PELA SUA FATORAÇÃO $QR \Rightarrow Ax=b \Leftrightarrow Rx = Q^*b$. PORÉM, SABEMOS:

$$Q = \prod_{i=1}^{n} Q_i \quad \text{ou} \quad Q^* = \prod_{i=1}^{n} Q_{n-i}$$

- LOGO, PODEMOS OBTER Q^*b APLICANDO n OPERAÇÕES EM b

for $k = 1$ to n

$b_{k:m} = b_{k:m} - 2^* v_k(\bar{v}_k^T * b_{k:m})$

- PODEMOS ATINGIR O MESMO RESULTADO COM UM PROCESSO INVERSO PARA OBTER Qx

for $k = 1$ downto n

$x_{k:m} = x_{k:m} - 2^* v_k(\bar{v}_k^T * x_{k:m})$

- COMPLEXIDADE DE AMBOS É $O(m \cdot n)$

MÍNIMOS QUADRADOS

- CONSIDERE UM SISTEMA DE EQUAÇÃO TENDO n INCÓGNITAS, MAS $m > n$ EQUAÇÕES. EM GERAL, ESSE PROBLEMA NÃO TEM SOLUÇÕES. PODEMOS CRIAR UM VETOR RESIDUAL E TENTAR APROXIMÁ-LO DE O:

$$r = b - Ax \in \mathbb{C}^m$$

- ENTÃO UTILIZAMOS UMA MEDIDA, USANDO A NORMA-2, TEMOS:

DADO $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \geq n$, $b \in \mathbb{C}^m$
ACHE $x \in \mathbb{C}^m$ TAL QUE $\|b - Ax\|_2$ É MÍNIMA

- PARA RESOLVER O CASO GERAL, A CHAVE É PROJEÇÃO ORTOGONAL

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

SEJA $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ $(m \geq n)$ E $b \in \mathbb{C}^m$. UM VETOR $x \in \mathbb{C}^n$ MINIMIZA A NORMA RESIDUAL $\|b - Ax\|_2 \Leftrightarrow r \perp C(A)$ i.e $A^* r = 0$

DEM

$$A^* r = 0 \Leftrightarrow A^*(b - Ax) = 0 \Leftrightarrow A^* b = A^* A x \Leftrightarrow Pb \underset{\text{I}}{=} Ax$$

(I) Isso segue da definição de r, já que $b \notin C(A)$

Vamos supor $z \neq y$ tal que $z \in C(A)$ e $y = Pb$

Sabemos que $z - y$ é ortogonal a $b - y$, podemos usar o teorema de pitágoras.

$$\|b - z\|_2^2 = \|b - y\|_2^2 + \|y - z\|_2^2 > \|b - y\|_2^2$$

Logo, Pb é a solução que minimiza o mínimo quadrado

PSEUDO-INVERSA

- COMO O VETOR QUE MINIMIZA O RESÍDUO É Pb, ENTÃO:

$$\min \|b - Ax\| \Leftrightarrow x = (A^* A)^{-1} A^* b$$

- $(A^* A)^{-1} A^*$ É CONHECIDA COMO A MATRIZ PSEUDO-INVERSA DE MOORE-PENROSE. $A^+ = (A^* A)^{-1} A^*$

Equações normais

- Um jeito comum de resolver esse problema é resolvendo $\bar{A}^T A x = \bar{A}^T b$. Se A tem posto linha / coluna completo, então $\bar{A}^T A$ é quadrada e de posto completo. Usamos então a decomposição de Cholesky $\bar{A}^T A = \bar{R}^T R$ com R triangular superior:

$$\bar{R}^T R x = \bar{A}^T b$$

- Logo, o algorítmo:

1. Formar a matriz $A^* A x = A^* b$
2. Computar a fatoração de Cholesky de $A^* A$
3. Resolva o sistema triangular $R^* w = A^* b$
4. Resolva o sistema triangular $R x = w$ para x

Fatoração QR

- Usando a triangularização de Householder, temos $A = \hat{Q}\hat{R}$. Escrevemos então $P = QQ^*$, logo

$$y = Pb = QQ^* b$$

- Como $y \in C(A)$, $Ax = y$ tem uma solução, temos então

$$Ax = y \underset{\hat{Q}^*\cdot}{\Leftrightarrow} \hat{Q}\hat{R}x = \underset{\hat{Q}^*\cdot}{\hat{Q}\hat{Q}^* b} \Leftrightarrow \hat{R}x = \hat{Q}^* b$$

- Multiplicando por $\hat{R}^{-1}$ temos uma nova fórmula para a pseudo-inversa:

$$\hat{R}x = \hat{Q}^* b \Leftrightarrow x = \hat{R}^{-1}\hat{Q}^* b \Rightarrow A^+ = \hat{R}^{-1}\hat{Q}^*$$

- Assim, obtemos o algoritmo

1. Computar a fatoração QR reduzida de A
2. Computar o vetor $\hat{Q}^* b$
3. Resolver o sistema triangular $\hat{R}x = \hat{Q}^* b$

S.V.D

- DADA A S.V.D REDUZIDA $A = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^*$, VAMOS DENOTAR $P = \hat{U}\hat{U}^*$.

$$y = Pb = \hat{U}\hat{U}^* b \Rightarrow Ax = y \Leftrightarrow \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^* x = \hat{U}\hat{U}^* b$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Sigma}\hat{V}^* x = \hat{U}^* b$$

- O ALGORITMO FICA

1. Compute a S.V.D reduzida de A
2. Compute o vetor $\hat{U}^* b$
3. Resolva o sistema diagonal $\hat{\Sigma} w = \hat{U}^* b$ para w
4. Defina $x = \hat{V} w$