ÁLGEBRA LINEAR

2/10/24

DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES (SVD)

- ESSE RESULTADO VALE PARA MATRIZES RETANGULARES, É COMO UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA ESPECTRAL

- DADA UMA MATRIZ RETANGULAR $A_{m\times n}$ EXISTEM MATRIZES $U_{m\times m}$ ORTOGONAL, $\underset{m\times n}{\Sigma}$ DIAGONAL POSITIVA, $\underset{n\times n}{V}$ ORTOGONAL TAIS QUE:

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{U}\ \underset{m\times n}{\Sigma}\ \underset{n\times n}{V^T}$$

- PERCEBA QUE A^TA É SIMÉTRICA, LOGO:

$$A^TA = Q\Lambda Q^T \iff V\Sigma^T \underbrace{\cancel{U^T U}}_{I}\Sigma V^T = Q\Lambda Q^T$$

$$Q\Lambda Q^T = V\underbrace{\Sigma^T\Sigma}_{\text{DIAGONAL}} V^T \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_r & \\ 0 & & & 0 \ddots 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ & & \sigma_r & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \sigma_r \\ - & - & - \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

- NOTE QUE OS AUTOVALORES DE A^TA SÃO POSITIVOS

$\rightarrow \exists x \neq 0;\ A^TAx = \lambda x$

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^TAx = x^T\underbrace{A^TAx}_{\lambda x} = \lambda x^Tx = \lambda\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \geq 0$$

PODE SER 0

- VAMOS CONSIDERAR $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$

- SEJA $0 \leq r \leq n$ TAL QUE

POSTO DE A

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \underbrace{\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n}_{n-r \text{ zeros}} = 0$$

• $\{Aq_1, \dots, Aq_r\}$ É UMA BASE PARA $C(A)$, ENTÃO r É O POSTO DE A.

$$A^TA = Q\Lambda Q^T \rightarrow \underset{\text{ORTOGONAL}}{Q} = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$S = \text{span}\{Aq_1, \dots, Aq_r, Aq_{r+1}, \dots, Aq_n\}$$

• $Aq_i \perp Aq_j$

$$(Aq_i)^T Aq_j = q_i^T \underbrace{A^TAq_j}_{\lambda_j q_j} = \lambda_j \underbrace{\cancel{q_i^T q_j}}_{0}$$

• $\|Aq_i\|$

$$(Aq_i)^T Aq_i = q_i^T A^T A q_i = \lambda_i \|q_i\|^2 = \lambda_i \Rightarrow Aq_i = 0 \text{ se } i \in \{r+1, \dots, n\}$$

• ACHEI $n-r$ VETORES L.I DO NÚCLEO DE A $\Rightarrow$ BASE DE $N(A)$ POIS $Aq_{r+1} = \dots = Aq_n = 0$

$$y \in C(A) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n ; Ax = y$$

$$\Rightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} ; x = c_1 q_1 + \dots + c_n q_n$$

$$y = A(c_1 q_1 + \dots + c_n q_n)$$

$$y = Ac_1 q_1 + \dots + Ac_r q_r + \overset{0}{\cancel{Ac_{r+1} q_{r+1}}} + \dots + \overset{0}{\cancel{Ac_n q_n}}$$

$$y = Ac_1 q_1 + \dots + Ac_r q_r$$

$$\Rightarrow C(A) = \text{span}\{Aq_1, \dots, Aq_r\}$$

- Vamos definir $\underset{m\times m}{U}$, $\underset{m\times n}{\Sigma}$, $\underset{n\times n}{V}$

- Defina também $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$, os valores singulares de A

$$A^TA = Q\Lambda Q^T \rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Para $j = 1, \dots, r$ definimos

$$u_j = \frac{Aq_j}{\sigma_j}$$

- Complete a base ortonormal com $u_{r+1}, \dots, u_n$

- Σ é diagonal onde $\Sigma_{jj} = \sigma_j$

- E, finalmente, $V = Q$, logo,

$$u_{r+1} = \frac{Aq_{r+1}}{\sigma_{r+1}}$$

$$U\Sigma = [\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_r u_r, 0, \dots, 0]$$

$$= [Aq_1, Aq_2, \dots, Aq_r, Aq_{r+1}, \dots, Aq_n] = AV$$

$$U\Sigma = AV$$

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 3 & \lambda_2 = 1 \\ \sigma_1 = \sqrt{3} & \sigma_2 = 1 \end{matrix}$$

$$Q = V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \underset{3\times 2}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3\times3}{U} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \quad \text{ONDE} \quad u_1 = \frac{Aq_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{Aq_2}{\sigma_2} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

GRAN-SCHMIDIT PARA ACHAR u_3

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (\underbrace{\cancel{e_1^T u_1}}_{2/\sqrt{6}}) u_1 - (\overbrace{\cancel{e_1^T u_2}}^{0}) u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/3 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/3 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/3 \end{bmatrix}$$

- TAMBÉM TEMOS UMA VERSÃO REDUZIDA, ONDE

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times r}{U} \; \underset{r\times r}{\Sigma} \; \underset{r\times n}{V^T}$$

$$\rightarrow \Sigma = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{r} & \overbrace{\quad}^{n-r} \end{array} \\ \begin{array}{c} r\{ \\ m-r\{ \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$U = \left[U_r \,\vdots\, U_{m-r} \right]$$

$$V = \left[V_r \,\vdots\, V_{n-r} \right]$$

$$A = U\Sigma V^T = \underbrace{\left[U_r \; U_{m-r} \right] \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]} \begin{bmatrix} V_r^T \\ V_{n-r}^T \end{bmatrix}$$

$$\left[U_r \Sigma_r \,\vdots\, 0 \right] \begin{bmatrix} V_r^T \\ V_{n-r}^T \end{bmatrix} = \underline{\underset{m\times r}{U_r} \, \underset{r\times r}{\Sigma_r} \, \underset{r\times n}{V_r^T}}$$

• A PARTIR DA DECOMPOSIÇÃO S.V.D, PODEMOS ACHAR BASES PARA OS ESPAÇOS FUNDAMENTAIS DE A:

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{U}\,\underset{m\times n}{\Sigma}\,\underset{n\times n}{V^T} \iff V\Sigma^T U^T = A^T$$

$$U = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_m \\ | & & | \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{matrix}}^{r\times r} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

▷ $\{v_1, \dots, v_r\}$ É UMA BASE ORTONORMAL DE $C(A^T)$

$$A = \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ u_1\sigma_1 & \dots & u_r\sigma_r & \dots & 0 \\ | & & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_r & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{bmatrix}$$

↳ $v_{r+1}, \dots, v_n$ vai multiplicar com 0

$\Rightarrow C(A^T) = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$

▷ $\{u_1, \dots, u_r\}$ É UMA BASE ORTONORMAL DE $C(A)$

$$u_j = \frac{Av_j}{\sigma_j} \qquad j = 1, \dots, r$$

▷ $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ É UMA BASE ORTONORMAL DE $N(A)$

$$v_j \in N(A) \quad j = r+1, \dots, n$$

▷ $\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$ É UMA BASE ORTONORMAL DE $N(A^T)$

- Uma utilidade é no problema de mínimos quadrados.

$$\min_x \|Ax-b\|^2$$

$$\Rightarrow A = U\Sigma V^T \to \min_x \|U\Sigma V^T x - b\|^2 \to \min_x \|U(\Sigma V^T x - U^T b)\|^2$$

Como U é ortogonal, não muda a norma:

$$\min_x \|\Sigma \underbrace{V^T x}_{y} - \underbrace{U^T b}_{c}\|^2 \to \min_x \|\Sigma y - c\|$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & \sigma_r & \vdots & 0 \\ & 0 & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \Rightarrow (\Sigma y - c)^T(\Sigma y - c) = \sum_{i=1}^{r} (y_i\sigma_i - c_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} c_i$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 y_1 \\ \vdots \\ \sigma_r y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 y_1 - c_1 \\ \vdots \\ \sigma_r y_r - c_r \\ -c_{r+1} \\ \vdots \\ -c_n \end{bmatrix}$$

Logo, $y_i = \frac{c_i}{\sigma_i}$ para minimizar a norma $\Rightarrow y_i = \frac{u_i^T b}{\sigma_i}$

Portanto a solução é $\bar{x} = \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$

- Podemos ter uma interpretação geométrica da matriz A