# ÁLGEBRA LINEAR

18/10/24

## DIAGONALIZAÇÃO

- Supondo que $A$ tenha $n$ vetores L.I, $\{x_1, \dots, x_n\}$, e denote os autovalores correspondentes por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

- Escreva $S = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ e calcule $AS$:

$$AS = \begin{bmatrix} | & & | \\ Ax_1 & \dots & Ax_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_n x_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

- Como $x_1, \dots, x_n$ são L.I, $\exists S^{-1}$, logo:

$$A = S \Lambda S^{-1}$$

- Quando os autovetores são L.I? Quando todos seus respectivos autovalores são diferentes.

- Se $x_1$ e $x_2$ são autovetores de $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $x_1$ e $x_2$ são L.I.

DEM

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = 0$$

$$\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0$$

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0 \cdot (\lambda_1) \\ \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha \lambda_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_2 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} x_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Logo, $x_1$ e $x_2$ L.I

**TEOREMA**

Se $A$ tem $n$ autovalores distintos, então $A$ é diagonalizavel

- Ou seja, se uma matriz possui autovalores repetidos, não pode ser diagonalizada

- Mas como achamos um padrão? Pois $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem repetição de autovalores, mas é diagonalizável, enquanto $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ repete, mas não é diagonalizável.

- Para isso, definimos:

▷ Multiplicidade Algébrica (MA): Multiplicidade da raíz $\lambda$ no polinômio característico

▷ Multiplicidade Geométrica (MG): $\dim(N(A-\lambda I)) = \dim E_\lambda$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

Temos que $MG \leq MA$, e se $MG < MA$, a matriz não é diagonalizável.

DEM

Se $MG_\lambda = MA_\lambda$ para todo autovalor $\lambda$, então $\dim E_\lambda = m_\lambda$

$\Rightarrow m_{\lambda_1} + \dots + m_{\lambda_k} = n$

Além disso, se $\dim E_\lambda = m_\lambda$, existem $x_1^\lambda \dots x_{m_\lambda}^\lambda \in E_\lambda$ que formam base para $E_\lambda$. Vale ainda $(A-\lambda I)x_i^\lambda = 0$ $\Leftrightarrow Ax_i^\lambda = \lambda x_i^\lambda \Rightarrow$ Achamos $n$ autovetores L.I