MATRIZES

23/04/24

DEFINIÇÃO: $m \cdot n$ NÚMEROS DISPOSTOS EM m LINHAS E n COLUNAS

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

m LINHAS
n COLUNAS

$a_{i,j}$ = ELEMENTO GENÉRICO DA MATRIZ. COM: $1 \leq i \leq m$ $1 \leq j \leq n$

TIPOS DE MATRIZ

* MATRIZ LINHA
  * MATRIZ COM UMA LINHA $(m=1)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 87 \end{bmatrix}$$

* MATRIZ COLUNA
  * MATRIZ COM UMA COLUNA $(n=1)$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

* MATRIZ NULA
  * TODOS OS ELEMENTOS SÃO IGUAIS A 0

* MATRIZ QUADRADA
  * QUANTIDADE DE LINHAS IGUAIS A QUANTIDADE DE COLUNAS $(m=n)$

$$\underset{2 \times 2}{C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}} \qquad \underset{3 \times 3}{D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$A = (a_{i,j})_{m \times n} \wedge B = (b_{k,l})_{t \times s}$. $\exists A \cdot B \iff n = t$

$\hookrightarrow A \cdot B = (h_{o,p})_{\underline{m \times s}}$

Diagonáis

- Dada a matriz $A=(a_{i,j})_{m\times n}$, temos
  - Diagonal Principal: $\{a_{i,j} \in A \,/\, i=j\}$
  - Diagonal Secundária: $\{a_{i,j} \in A \,/\, i+j=n+1\}$

$$A=(a_{i,j})_{3\times 3}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

SECUNDÁRIA PRINCIPAL

Matriz Transposta

- Dada matriz $A=(a_{i,j})_{m\times n}$, a matriz transposta A^t é dada por $A^t=(a_{j,i})_{n\times m}$.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad A^t=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Igualdade de matrizes

- Duas matrizes A e B são iguais quando os elementos são iguais, ou seja.

$$(a_{i,j})_{m\times n}=(b_{i,j})_{m\times n} \Longleftrightarrow a_{i,j}=b_{i,j}$$

Soma de Matrizes

- Dadas duas matrizes $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ e $B=(b_{i,j})_{m\times n}$, a soma $A+B$ é $(a_{i,j}+b_{i,j})_{m\times n}$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad A+B=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

- Propriedades
  - (i) Comutativa: $A+B=B+A$
  - (ii) Associativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$
  - (iii) Elemento neutro $A+M=A$, $M=(0)_{m\times n} \,/\, A=(a_{i,j})_{m\times n}$
  - (iv) $\exists A' \,/\, A+A'=0$

    A' é oposta de A

    $A=(a_{i,j})_{m\times n}$

    $A'=(-a_{i,j})_{m\times n}$

Real por uma matriz

- Seja $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ e $k\in\mathbb{R}$, diz-se $A\cdot k=B$ tal que $B=(k\cdot a_{i,j})_{m\times n}$

$A=\begin{bmatrix}3&2\\5&1\end{bmatrix}\Rightarrow A\cdot 2=\begin{bmatrix}6&4\\10&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2&5\\8&-2\end{bmatrix}\Rightarrow B\cdot(-1)=\begin{bmatrix}-2&-5\\-8&2\end{bmatrix}$

- Propriedades
  - ▷ Sejam $k,t\in\mathbb{R}$ e as matrizes A e B do mesmo tipo

    (i) $k\cdot(t\cdot A)=(k\cdot t)\cdot A$ (iii) $(k+t)\cdot A=k\cdot A+t\cdot A$

    (ii) $k(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$ (iv) $1\cdot A=A$

Matriz por outra matriz

- Dadas as matrizes $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ e $B=(b_{j,k})_{n\times p}$, dizemos como $A\cdot B$ a matriz $C=(c_{i,k})_{m\times p}$ onde

$$c_{i,j}:=\sum_{w=1}^{n}a_{iw}b_{wj}$$

- Só é possível multiplicar matrizes quando o número de colunas da esquerda for igual ao da direita

$A_{m\times n}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$

$B_{n\times p}:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^n$

- Exemplo

$A=\begin{pmatrix}3&5\\2&0\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}\Rightarrow$

$c_{11}=3\cdot1+5\cdot0=3$

$c_{12}=3\cdot3+3\cdot4=21$

$c_{21}=2\cdot1+0\cdot0=2$

$c_{22}=2\cdot3+0\cdot4=6$

$\begin{pmatrix}3&21\\2&6\end{pmatrix}$

- PROPRIEDADES

(i) NÃO-COMUTATIVA: $A \cdot B = C \neg\Rightarrow B \cdot A = C$

(ii) DISTRIBUTIVA (DIREITA): $(B+C)A = B \cdot A + C \cdot A$

(iii) DISTRIBUTIVA (ESQUERDA): $A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$

(iv) ASSOCIATIVA: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

DEM

$$(A(BC))_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{m=1}^{n} b_{km} c_{mj}$$

$$((AB)C)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \sum_{m=1}^{n} a_{im} b_{mk}$$

- OUTRO JEITO DE VISUALIZAR É USANDO MATRIZES x VETORES

$A_{m \times n} \cdot V_{n \times 1} \Rightarrow$ VETOR $m \times 1$ ONDE CADA x_i É UMA COMBINAÇÃO LINEAR DO VETOR LINHA DE A COM V.

EXEMPLO

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = [8, 22, 18]$$

$$[0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2,\ 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 0 \cdot 2,\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2]$$

★ ASSIM PODEMOS GENERALIZAR A MULTIPLICAÇÃO $A \cdot B$.

→ DADAS DUAS MATRIZES $A_{m\times n}$ E $B_{n\times p}$, DIZEMOS QUE

$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} := C_{m\times p}$ TAL QUE $C = (c_{i,j})_{m\times p}$ ONDE

$$\text{COLUNA } j \text{ DE } C = A \cdot \underbrace{b_j}_{\text{VETOR COLUNA DE } B}$$

$$\text{LINHA } i \text{ DE } C = \underbrace{a_i}_{\text{VETOR LINHA DE } A} \cdot B$$

• ALGUNS CASOS INTERESSANTES

▷ $A_{1\times n} \cdot B_{n\times 1} \Rightarrow AB_{1\times 1}$ É O PRODUTO INTERNO ENTRE ESSES VETORES

▷ $A_{n\times 1} \cdot B_{1\times n} \Rightarrow AB_{1\times 1}$ É UMA MATRIZ $n\times n$ ONDE AS COLUNAS SÃO MÚLTIPLAS DAS DE A E AS LINHAS SÃO MÚLTIPLAS DAS DE B.

Matriz Identidade

- Seja A uma matriz quadrada de ordem n
- A é uma matriz identidade se os elementos da diagonal principal são 1 e os outros são 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

ORDEM 2 ORDEM 3 ORDEM n

- Propriedades

(i) Dada $A_{n\times n}$ e $I_{n\times n}$, $A_{n\times n} \cdot I_n = A_{n\times n}$

(ii) Dada $A_{n\times m}$ com $n \neq m$, $I_n \cdot A_{n\times m} = A_{n\times m} \cdot I_m = A_{n\times m}$

Matriz Inversa

- Dada uma matriz quadrada A, ela é dita inversível

$\rightarrow \exists B \, / \, A \cdot B = B \cdot A = I_n$. $B = A^{-1}$. B é a inversa de A.

- Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Alguns outros tipos de Matriz

▷ Triangular Superior

- Matriz quadrada cujas entradas abaixo da diagonal são igual a 0

$\left(A = [a_{i,j}]_{m\times m} \, / \rightarrow i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0 \right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

▷ Triangular Inferior

- Matriz quadrada cujas entradas abaixo da diagonal são igual a 0

$(A=[a_{i,j}]_{m\times m} \,/\, \to i<j \Rightarrow a_{i,j}=0)$

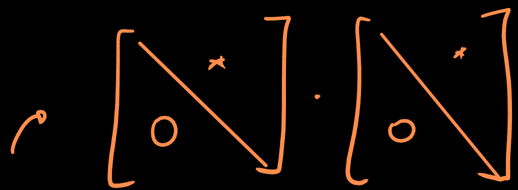
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedade:

→ Dadas duas matrizes L_1 e L_2, ambas triangulares inferiores, o produto $L_1 \cdot L_2$ também será triangular inferior (o mesmo para superior)

DEM

$A = L_1 \cdot L_2$



$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (L_1)_{i,k} \cdot (L_2)_{k,j}$$

→ se o valor da esquerda $\neq 0$, o da direita $= 0$ e vice-versa