ÁLGEBRA LINEAR 19109

LISTA 7

1. Se $AB = 0$, as colunas de B estão em qual espaço fundamental de A? E as linhas de A estão em qual espaço fundamental de B? É possível que A e B sejam 3×3 e com posto 2?

$AB \Rightarrow$ coluna j de $AB = A \cdot$ coluna j de B

$\therefore$ colunas de $B \in N(A)$

$AB = 0 \rightarrow B^T A^T = 0 \rightarrow B^T \cdot$ coluna j de A^T

$\therefore$ linhas de $A \in N(B^T)$

Como o posto de A e $B = 2$, sabemos que $N(A)$ tem dimensão $= 1$ e como todas as colunas de $B \in N(A)$, temos que $N(A) = C(B)$. PORÉM ISSO FAZ QUE $\dim C(B) = 1$, OU SEJA, NÃO É POSSÍVEL QUE AMBAS TENHAM POSTO 1.

2. Se $Ax = b$ e $A^T y = 0$, temos $y^T x = 0$ ou $y^T b = 0$?

$b \in C(A)$

$y \in N(A^T)$

$\rightarrow C(A) \perp N(A^T) \therefore \boxed{y^T \cdot b = 0}$

3. O sistema abaixo não tem solução:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases}$$

Ache números y_1, y_2, y_3 para multiplicar as equações acima para que elas somem $0 = 1$. Em qual espaço fundamental o vetor y pertence? Verifique que $y^T b = 1$. O caso acima é típico e conhecido como a *Alternativa de Fredholm*: ou $Ax = b$ ou $A^T y = 0$ com $y^T b = 1$.

TEMOS $Ax = b \Rightarrow y^T A x = y^T b \Rightarrow 0 = 1$

LOGO $y^T A = 0 \Rightarrow y \in N(A^T)$

ACHANDO $N(A^T)$:

$$A^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \div (-2)]{L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = N(A^T)$

$\alpha \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = 1 \rightarrow -5\alpha - 5\alpha + 9\alpha = 1$

$-10\alpha + 9\alpha = 1$

$-\alpha = 1$

$\alpha = -1$

$\therefore \; y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. Mostre que se $A^T Ax = 0$, então $Ax = 0$. O oposto é obviamente verdade e então temos $N(A^T A) = N(A)$.

$N(A) \subseteq N(A^T A)$

$\hookrightarrow x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^T Ax = 0 \quad \therefore \; N(A) \subseteq N(A^T A)$

$N(A^T A) \subseteq N(A)$

$\hookrightarrow A^T Ax = 0 \rightarrow A^T A$ É QUADRADA $\therefore$ SE $A^T A$ FOR INVERSÍVEL,

$\cancel{(A^T A)^{-1} A^T} A x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow N(A^T A) \subseteq N(A)$

$\therefore \quad N(A) = N(A^T A)$

5. Seja A uma matriz 3×4 e B uma 4×5 tais que $AB = 0$. Mostre que $C(B) \subset N(A)$. Além disso, mostre que posto(A) + posto$(B) \leq 4$.

$\underset{3\times4}{A} \; \underset{4\times5}{B} = 0 \rightarrow$ (i) $C(B) \subset N(A)$

$y \in C(B) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^m ; Bx = y$

$y \in N(A) \Leftrightarrow Ay = 0$

SE PARA TODO ELEMENTO $y \in C(B)$

$Ay = 0$, ENTÃO $y \in N(A)$, LOGO $C(B) \subset N(A)$

$\underset{3\times4}{A}\ \underset{4\times5}{B} = \underset{3\times5}{0}$ → Sabemos que $\dim C(A) < 4$. Como $C(B) \subseteq N(A)$, podemos dizer que a base de $N(A)$ = base de $C(B)$. Logo

$\dim C(A) + \dim N(A) = 4$, porém $\dim N(A) \leq$ posto B.

Logo, $\underline{\text{posto } A + \text{posto } B \leq 4}$

6. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vetores não-zeros de $\mathbb{R}^2$.

(a) Quais são as condições sobre esses vetores para que cada um possa ser, respectivamente, base dos espaços $C(A^T)$, $N(A)$, $C(A)$ e $N(A^T)$ para uma dada matriz A que seja 2×2. *Dica: cada espaço fundamental vai ter somente um desses vetores como base.*

base $C(A) = \{c\}$

base $N(A) = \{b\}$

base $C(A^T) = \{a\}$

base $N(A^T) = \{d\}$

$c^T d = b^T \cdot a = 0$

Matriz A

c

$Ax = c \rightarrow A = [c \ \ \alpha c]$

b

$Ab = 0$

$\begin{bmatrix} c & \alpha c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow cb_1 + \alpha c b_2 = 0$

$c(b_1 + \alpha b_2) = 0$

$b_1 = -\alpha b_2$

$b = [-\alpha b_2 \ \ b_2]$

a

$\begin{bmatrix} c_1 & \alpha c_1 \\ c_2 & \alpha c_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ \alpha c_1 & \alpha c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{a = c}$

d

$\begin{bmatrix} c^T \\ \alpha c^T \end{bmatrix} d = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} c^T d \\ \alpha c^T d \end{bmatrix} = 0 \rightarrow c^T d = 0$

(b) Qual seria uma matriz A possível?

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a^T$$

$$\alpha = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a^T$$

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. Ache $S^\perp$ para os seguintes conjuntos:

(a) $S = \{0\}$

$$S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^k ; k \in \mathbb{N}\}$$

(b) $S = span\{[1,1,1]\}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{base } N(A^T) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $S = span\{[1,1,1],[1,1,-1]\}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2/-2]{L_1 + \frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{BASE } N(PA) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{BASE } N(A) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d) $S = \{[1,5,1],[2,2,2]\}$. Note que S não é um subespaço, mas $S^\perp$ é.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2/-4]{L_1 + \frac{5}{4}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{base } N(A^T) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8. Seja A uma matriz 4×3 formada pela primeiras 3 colunas da matriz identidade 4×4. Projeta o vetor $b = [1, 2, 3, 4]$ no espaço coluna de A. Ache a matriz de projeção P.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T A$$

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

$$\underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{4\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$I = [I \,\vdots\, 0] \begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = A \cdot I \cdot A^T \longrightarrow \underset{4\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P$$

9. Se $P^2 = P$, mostre que $(I - P)^2 = I - P$. Para a matriz P do exercício anterior, em qual subespaço a matriz $I - P$ projeta?

$$(I-P)^2 = (I-P)(I-P) = I - IP - PI + P^2$$

$$I - P \cancel{- P + P}$$

$$\boxed{I - P}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right]$$

PROJETA NO SUBESPAÇO

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$$