Álgebra Linear Numérica

27/03/25

Condicionamento e Estabilidade

DEFINIÇÃO

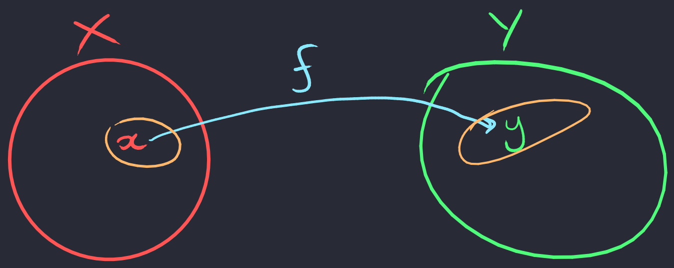
Um problema é definido como

$$f: X \longrightarrow Y$$

"dados" "resposta"

Uma instância é $x \in X$. X e Y são espaços normados

- Dado uma instância em X, gostaríamos de saber, a partir dela e dada uma região em X, como isso afeta a região imagem em Y, aumenta? diminui?



DEFINIÇÃO

Um problema bem-condicionado é aquele que toda pequena pertubação em x é gera pequenas mudanças em y.

Um problema mal-condicionado é aquele que algumas mudanças pequenas em x geram grandes pertubações em y.

- O significado de grande e pequeno da definição anterior varia de acordo com o contexto.

DEFINIÇÃO

SEJA Δx UMA PEQUENA PERTUBAÇÃO EM x E ESCREVA $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$. O NÚMERO DE CONDICIONAMENTO ABSOLUTO $\hat{\kappa} = \hat{\kappa}(x)$ DO PROBLEMA f EM x É:

$$\hat{\kappa} = \lim_{\Delta \to 0} \sup_{\|\Delta x\| \leq \Delta} \left\{ \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|} \right\}$$

- SE f É DIFERENCIÁVEL, PODEMOS FAZER COM QUE $\hat{\kappa}$ FIQUE EM TERMOS DE f'.

→ SEJA $J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

SABEMOS QUE $\Delta f \approx J(x)\Delta x$ COM IGUALDADE SE $\Delta x \to 0$, LOGO, TEMOS QUE

$$\hat{\kappa}(x) = \|J(x)\|_{X \to Y}$$

DEFINIÇÃO

SEJA Δx UMA PEQUENA PERTUBAÇÃO EM x E ESCREVA $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$. O NÚMERO DE CONDICIONAMENTO RELATIVO $\kappa = \kappa(x)$ DO PROBLEMA f EM x É:

$$\hat{\kappa} = \lim_{\Delta \to 0} \sup_{\|\Delta x\| \leq \Delta} \left\{ \frac{\|\Delta f\|}{\|f(x)\|} \div \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \right\}$$

- SE f FOR DIFERENCIÁVEL, TEMOS:

$$\kappa = \frac{\|J(x)\|}{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}}$$

Condicionamento de uma Multiplicação Matriz-Vetor

- Seja $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e x um vetor de $\mathbb{C}^n$, vamos ver o problema para pertubações em x.

$$K = \sup_{\delta x} \left(\frac{\|A(x+\delta x) - Ax\|}{\|Ax\|} \div \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \right) = \sup_{\delta x} \left\{ \frac{\|A\delta x\|}{\|\delta x\|} \div \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\}$$

$$K = \|A\| \frac{\|x\|}{\|Ax\|}$$

- Se tivermos que $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\exists A^{-1}$, podemos usar

$$\frac{\|x\|}{\|Ax\|} \leq \|A^{-1}\|$$

para diminuir K para um condicionamento independente de x

$$K = \|A\| \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \iff K \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

ou

$$K = \alpha \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Teorema

Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\exists A^{-1}$, dada a equação $Ax = b$. O problema de computar b, dado x, tem número de condicionamento:

$$K = \|A\| \cdot \frac{\|x\|}{\|b\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Dado x, com respeito a pertubações em b, o número de condicionamento é:

$$K = \|A\| \cdot \frac{\|b\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

NÚMERO DE CONDICIONAMENTO DE UMA MATRIZ

DEFINIÇÃO

O NÚMERO DE CONDICIONAMENTO DE A (COM RELAÇÃO A UMA NORMA $\|\cdot\|$) É DADO POR

$$K(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

- ESSE NOME É DADO POIS O PRODUTO $\|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ APARECE COM FREQUÊNCIA, ALÉM DE QUE O TERMO "NÚMERO DE CONDICIONAMENTO", NESSE CONTEXTO, ESTÁ ASSOCIADO A UMA MATRIZ, NÃO UM PROBLEMA.

- SE $K(A)$ É PEQUENO, A É BEM-CONDICIONADA, PO CONTRÁRIO, É MAL CONDICIONADA.

- NO CASO DA NORMA 2, TEMOS:

$$K(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_m}$$

Excentricidade da hiperelipse que é imagem da esfera unitária de $\mathbb{C}^m$ sobre A

- PARA MATRIZES RETANGULARES, USAMOS A PSEUDO-INVERSA DE MOORE-PENROSE

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^+\|$$

- ASSIM, NA NORMA DOIS, PODEMOS DEFINIR

$$K(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \qquad A \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

- E EM CASOS DE A SINGULAR, DEFINIMOS

$$K(A) = \infty$$

CONDICIONAMENTO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÃO

- O QUE ACONTECE COM UM PROBLEMA $A \longmapsto x = A^{-1}b$, OU SEJA, DEIXAMOS b FIXO E PERTUBAMOS A PARA SABER O QUE ACONTECE EM x.

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b$$

$$Ax + A\delta x + \delta A x + \delta A \delta x = b$$

↳ Infinitesimalmente pequeno

- Como $Ax = b$, então

$$A(\delta x) + (\delta A)x = 0$$

$$\delta x = -A^{-1}(\delta A)x$$

$$\Rightarrow \|\delta x\| = \|A^{-1}(\delta A)x\| \Rightarrow \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|x\|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}}{\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \leq \underbrace{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}_{= \kappa(A)}$$

TEOREMA

Seja b fixo e considere o problema de computar $x = A^{-1}b$, onde $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e $\exists A^{-1}$. O número de condicionamento do problema com as respectivas pertubações em A é:

$$\kappa = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$