Álgebra Linear

22/08/24

Lista 2

1. Ache a matriz de eliminação E que reduz a matriz de Pascal em uma menor:

$$E\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}.$$

Qual matriz M reduz a matriz de Pascal à matriz identidade?

$L_4 - L_3$

$\hookrightarrow E_{34}(1)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}}_{E_{43}(1)}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{E_{32}(1)}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{E_{21}(1)}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}$$

$E_{ij}(\ell) \Rightarrow$ subtraio $\ell \cdot$ linha j da linha i e substituo linha i

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

Achando $(\text{Pascal})^{-1}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&2&1&0&0&0&1&0\\1&3&3&1&0&0&0&1\end{array}\right]=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}}_{E_{43}(1)}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&0&-1&1&0\\0&1&2&1&0&0&-1&1\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}_{E_{32}(1)}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&0&-1&1&0\\0&0&1&1&0&1&-2&1\end{array}\right]=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}}_{E_{43}(1)}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&1&1&0&1&-2&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&\underbrace{-1\;\;3\;\;-3\;\;1}_{(\text{Pas})^{-1}}\end{array}\right]$$

2. Use o método de Gauss-Jordan para achar a inversa da matriz triangular inferior:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$E_{12}(a)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - \frac{b}{c}L_1} \begin{bmatrix} 1 & a-\frac{b}{c} & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - cL_3} \begin{bmatrix} 1 & a-\frac{b}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - (a-\frac{b}{c})L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{12}\left(\tfrac{b}{c}\right) \qquad E_{23}(c)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{b}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a-\frac{b}{c} & 0 & 1 & -\frac{b}{c} & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$E_{12}\left(a-\tfrac{b}{c}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -a+\frac{b}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a-\frac{b}{c} & 0 & 1 & -\frac{b}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3. Para quais valores de a o método de eliminação não dará 3 pivôs?

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}$$

$$a = 0, \quad a = 2 \text{ E } a = 4$$

4. Verdadeiro ou falso (prove ou forneça um contra-exemplo):

(a) Se A^2 está bem definida, então A é quadrada.
(b) Se AB e BA estão bem definidas, então A e B são quadradas.
(c) Se AB e BA estão bem definidas, então AB e BA são quadradas.
(d) Se $AB = B$, então $A = I$.

(a) $\to A_{n\times m} \,/\, n \neq m \Rightarrow A^2 = A_{n\times m} \cdot A_{n\times m}$ ABSURDO! POIS $n \neq m$, APENAS POSSÍVEL SE $n = m$ $\wedge$ $\to n = m \Rightarrow A_{n\times n}$ QUADRADA!

(b) NÃO NECESSARIAMENTE, $\to A_{2\times 3} B_{3\times 2} \Rightarrow B_{3\times 2} A_{2\times 3}$

AMBAS RETANGULARES COM PRODUTOS BEM-DEFINIDOS

(c) VERDADE, PARA $\underset{m\times n}{A}\ \underset{p\times q}{B}$ E $\underset{p\times q}{B}\ \underset{m\times n}{A}$ SEREM BEM DEFINIDAS, $n=p \wedge m=q$. LOGO $\underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times m}{B} = C_{m\times m}$ E

$\underset{n\times m}{B}\ \underset{m\times n}{A} = D_{n\times n}$

(d) $AB=B \therefore A=I$ VERDADE, PASSANDO B PARA O OUTRO LADO, TEMOS $A=B\cdot B^{-1} = A=I$

5. Mostre que se $BA = I$ e $AC = I$, então $B = C$.

$$BA=AC \Rightarrow B(\underbrace{\cancel{A}\cancel{A^{-1}}}_{I})=C \Rightarrow B=C$$

6. Ache uma matriz não-zero A tal que $A^2 = 0$ e uma matriz B com $B^2 \neq 0$ e $B^3 = 0$.

$A^2=B \rightarrow B=0 \Rightarrow$ linha i de B = linha i de $A \cdot A$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2+a_2a_3 & a_2(a_1+a_4) \\ a_3(a_1+a_4) & a_3a_2+a_4^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Ache as inversas de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - \frac{4}{3}L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - 6L_2}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 9 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 - \frac{7}{6}L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 9 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & -7/6 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 30L_4}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 9 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 36 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & -7/6 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 6 \end{array}\right]$$

A^{-1}

$A \qquad\qquad I$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \div 5 \\ \div 3 \\ \div 2 \end{array} \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

8. Verifique que a inversa de $M = I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ é dada por $M^{-1} = I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}}$. Verifique também que a inversa de $N = A - UW^{-1}V$ é dada por $N^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$.

VAMOS VERIFICAR QUE $M^{-1} = I + \frac{uv^T}{1-v^Tu} = J$

$MJ = I \to \quad (I - uv^T)\left(I + \frac{uv^T}{1-v^Tu}\right) = I$

$$I + \frac{uv^T}{1-v^Tu} - uv^T - \frac{u\underbrace{v^T \cdot u}_{R}v^T}{1-v^Tu} = I \longrightarrow \frac{uv^T}{1-v^Tu} - uv^T - \frac{v^Tu \cdot uv^T}{1-v^Tu}$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{-\cancel{uv^T} + \cancel{uv^T}\left(\frac{\overset{1}{\cancel{1-v^Tu}}}{\cancel{1-v^Tu}}\right)}_{0} \rightarrow \boxed{0=0}$$

VERIFICAR A INVERSA DE $N = A - UW^{-1}V$

$$J = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

SUPONDO DOIS VETORES x E y TAIS QUE

$$Nx = y \rightarrow Ax - UW^{-1}Vx = y$$

$$Jy = x \rightarrow A^{-1}y + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y = x$$

$$Ax - y = UW^{-1}Vx$$

$$A(A^{-1}y + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y) - y = UW^{-1}Vx$$

$$\cancel{y} + U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y - \cancel{y} = UW^{-1}Vx$$

$$U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y = UW^{-1}Vx$$

$$Ax - U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y = y$$

$$\cancel{Ax} = y + U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y \Rightarrow x = A^{-1}y + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y$$

9. Sabemos que a matriz de diferenças tem a seguinte inversa

$$L^{-1} = \overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}^{-1} = \overset{E}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}.$$

Use essa propriedade (e sua versão triangular superior) para achar a inversa de

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dica: escreva T como produto de duas matrizes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 + L_2]{L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$T^{-1}$$

10. Mostre que $I + BA$ e $I + AB$ são ambas invertíveis ou singulares. Relacione a inversa de $I + BA$ com a inversa de $I + AB$, caso elas existam.

11. (Bônus) Mostre que se $\alpha_k A^k + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$, com $\alpha_0 \neq 0$, então A é invertível

DADA A MATRIZ DE ELIMINAÇÃO E, SE A NÃO FOR INVERTÍVEL, TEMOS QUE EA GERA $n-k$ PIVÔS E k LINHAS DE 0.

$$E(\alpha_k A^k + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I) = 0$$

$$\alpha_k EA^k + \alpha_{k-1} EA^{k-1} + \ldots + \alpha_1 EA = -\alpha_0 E$$

SE A NÃO FOR INVERTÍVEL, TODA POTÊNCIA EA^i TEM k LINHAS 0 $(E \cdot A \cdot A^{i-1})$. OU SEJA, AO SOMAR TODAS, $-\alpha_0 E$ DEVE TER $n-k$ PIVÔS, O QUE É ABSURDO, POIS, POR DEFINIÇÃO, E POSSUI INVERSA, LOGO, ISSO SÓ PODE ACONTECER SE $\alpha_0 = 0$, OU SEJA, A DEVE TER n PIVÔS $\Rightarrow A$ É INVERTÍVEL.