Álgebra Linear

17/09/24

Lista 6

1. Seja A uma matriz $m \times n$ com posto r. Suponha que existem $\mathbf{b}$ tais que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tenha solução.

(a) Escreva todas as desigualdade ($<$ e $\leq$) que os números m, n e r precisam satisfazer.

$b \notin C(A) \rightarrow$

$m < n, \ r < m$

$n < m, \ r < n$

(b) Como podemos concluir que $A^T\mathbf{x} = 0$ tem solução fora $\mathbf{x} = 0$?

$|N(A^T)| > 1$

2. Sem calcular A ache uma bases para os quatro espaços fundamentais:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{C}$$

$A_{3 \times 4}$

$C(A)$

coluna$_j$ $BC = B \cdot$ coluna$_j$ de C

$C(A) = \text{span}(\{Bc_1, Bc_2, Bc_3\})$

↳ COMBINAÇÕES LINEARES DAS COLUNAS DE B.

$$\text{BASE } C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$N(A)$:

$BCx = 0 \rightarrow Cx = 0$ ou $Cx = y \Rightarrow By = 0$

OU SEJA, $N(B) \cap N(C)$

MAS B É POSTO n, LOGO $\exists B^{-1}$, OU SEJA, $x \in N(A) \Leftrightarrow x \in N(C)$

REDUZINDO C:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 - 2L_3]{L_1 - 2 \cdot L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

BASE $N(A)$

$C(A^T)$

$$A^T = C^T B^T \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

coluna j de $A^T = C^T \cdot$ coluna j de B^T

↳ combinação linear das colunas de C^T, logo

$C(A^T) \subseteq C(C^T)$, logo uma base para ele é

a base de C^T. como todas as colunas são L.I,

base $C(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

$N(A^T)$

b $A^T x = 0 \Rightarrow C^T B^T x = 0 \rightarrow$ como $\text{posto}(B^T) = \text{posto}(B) = n$,

então $N(B) = \{0\}$, logo, $N(A^T) = \{0\}$

3. Explique porque $v = (1, 0, -1)$ não pode ser uma linha de A e estar também no seu núcleo.

$N(A) \subseteq \mathbb{R}^4$, $\underline{v \in \mathbb{R}^3}$.

$C(A^T) \subseteq \mathbb{R}^4$, $\underline{v \in \mathbb{R}^3}$

4. A equação $A^T\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem solução quando $\mathbf{w}$ está em qual dos quatro subespaços? Quando a solução é única (condição sobre algum dos quatro subespaços)?

$w \in C(A^T) \to$ ESPAÇO LINHA DE A.

$|N(A^T)| = 1 \to$ SOLUÇÃO ÚNICA

5. Seja M o espaço de todas as matrizes 3×3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e note que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Quais matrizes $X \in M$ satisfazem $AX = 0$?

TODA MATRIZ COM BASE DE $C(X) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(b) Quais matrizes $Y \in M$ podem ser escritas como $Y = AX$, para algum $X \in M$?

$X = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]$

$AX = [Ax_1 \;\; Ax_2 \;\; Ax_3] \to$ COLUNAS DE $Y \in C(A)$

BASE $C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \to$ ENTÃO TODA MATRIZ Y DE span $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. Sejam A e B matrizes $m \times n$ com os mesmos quatro subespaços fundamentais. Se ambas estão na sua forma escalonada reduzida, prove que F e G são iguais, onde:

$$A = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B \begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $F \neq G$, então temos $N(A) \neq N(B)$, o que, pela definição, é absurdo, pois $N(A) = N(B)$.