ÁLGEBRA LINEAR

05/09/24

LISTA 5

1. Explique porque essas afirmações são falsas

(a) A solução completa é qualquer combinação linear de x_p e x_n.

SE $\alpha x_p + \beta x_n$ FOREM SOLUÇÕES, SE $\alpha = 0$, x_n NÃO VAI SER SOLUÇÃO DE $Ax=b \rightarrow b \neq 0$

(b) O sistema $Ax = b$ tem no máximo uma solução particular.

SE O NÚCLEO DE A FOR NÃO-TRIVIAL TODA SOLUÇÃO DE $Ax=b$ É ESCRITA COMO

(c) Se A é inversível, não existe nenhuma solução x_n no núcleo.

SEMPRE HÁ A SOLUÇÃO $x=0$

2. Sejam

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Use a eliminação de Gauss-Jordan para reduzir as matrizes $[U\ 0]$ e $[U\ c]$ para $[R\ 0]$ e $[R\ d]$. Resolva $Rx = 0$ e $Rx = d$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - \frac{3}{4}L_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\div 4\, L_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$x_2 = 1$

$x_1 + 2 = 0$

$x_1 = -2$

$x_3 = 0$

$$N(U) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

SOLUÇÃO PARTICULAR

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$x_2 = 1$

$x_1 + 2 = -1$

$x_1 = -3$

$x_3 = 2$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO GERAL.

3. Suponha que $Ax = b$ e $Cx = b$ tenham as mesmas soluções (completas) para todo b. Podemos concluir que $A = C$?

SEJA e_i A i-ÉSIMA COLUNA DA BASE CANÔNICA

$Ae_i = a_i$ → i-ÉSIMA COLUNA DE A

SE $Ax=b$ E $Cx=b$ ENTÃO $Cx = a_i \Rightarrow Ce_i = a_i$ OU SEJA A iÉSIMA COLUNA DE A É A DE C. $A=C$

4. Ache o maior número possível de vetores linearmente independentes dentre os vetores:

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\-1&0&0&1&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\\0&0&-1&0&-1&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\\0&0&-1&0&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4+L_3]{L_3+L_2} \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow \text{3 PIVÔS, LOGO 3 VETORES LI}$$

5. Ache uma base para o plano $x - 2y + 3z = 0$ em $\mathbb{R}^3$. Encontre então uma base para a interseção desse plano com o plano xy. Ache ainda uma base para todos os vetores perpendiculares a esse plano.

PLANO:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\end{bmatrix} \\ x \quad y \quad z \end{array}$$

PIVÔ

$\rightarrow$ $y=1$, $z=0$ $\rightarrow$ $x-2=0$, $x=2$

$y=0$, $z=1$ $\rightarrow$ $x+3=0$, $x=-3$

$\rightarrow \text{span}\left(\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\right)$

PLANO xy:

$x - 2y + 3z = 0$

$x - 2y = 0$

$x = 2y$ → VETORES DO TIPO $\begin{bmatrix}x\\x/2\end{bmatrix}$ OU $\begin{bmatrix}2y\\y\end{bmatrix}$

PERPENDICULARES

$$x - 2y + 3z = 0$$

VETOR NORMAL: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

6. Ache (na sua forma mais simples) a matriz que é o produto das matrizes de posto 1 $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ e $\mathbf{w}\mathbf{z}^T$? Qual seu posto?

$$\underset{n\times 1\ 1\times n}{uv^T} \qquad \underset{n\times 1\ 1\times n}{wz^T}$$

COMO $u\underbrace{v^T w}_{\mathbb{R}} z^T \rightarrow \langle v, w\rangle \cdot uz^T$ LOGO, COMO uz^T É POSTO 1, uv^Twz^T TAMBÉM TEM POSTO 1.

7. Suponha que a coluna j de B é uma combinação linear das colunas anteriores de B. Mostre que a coluna j de AB é uma combinação linear das colunas anteriores de AB. Conclua que posto$(AB) \leq$ posto(B).

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow$$ coluna j de B é combinação linear das colunas anteriores.

coluna j de AB = $A \cdot$ coluna j de B

coluna j de AB = $A \cdot (\text{span}([b_1, \ldots, b_j]))$

$$\alpha A b_1 + \beta A b_2 + \gamma A b_3 + \ldots + \theta A b_j$$

$\hookrightarrow$ combinação linear das colunas anteriores de AB.

posto$(AB) \leq$ posto(B)?

O POSTO SÃO AS COLUNAS LI, SE B TEM n COLUNAS, PORÉM, DEPENDENDO DA MATRIZ A, PODE OCORRER DA COLUNA $\alpha A b_i$ SER A COMBINAÇÃO LINEAR DE OUTRAS COLS. LOGO, posto$(AB) \leq$ posto(B)

8. O item anterior nos dá posto$(B^TA^T) \leq$ posto(A^T). É possível concluir que posto$(AB) \leq$ posto(A)?

POSTO $(AB) \leq$ posto (B) → posto $(A) =$ posto (A^T)

POSTO$(B^TA^T) \leq$ POSTO (A^T)

$\Downarrow$

posto $(B^TA^T) \leq$ posto(A)

posto$((B^TA^T)^T) \leq$ posto (A) → $\boxed{\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(A)}$

9. Suponha que A e B são matrizes quadradas e $AB = I$. Prove que posto$(A) = n$. Conclua que B precisa ser a inversa (de ambos lados) de A. Então, $BA = I$.

VIMOS QUE posto$(AB) \leq$ posto(A)

COMO $AB = I$, A E B SÃO $n \times n$

LOGO, SE $AB = I$, ENTÃO posto$(AB) = n$, LOGO, posto$(A) = n$, POIS NÃO PODE SER MENOR. COMO VIMOS ANTES, posto$(B) = n$.

$AB = I \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1} \cdot I$ → $AB \cdot B^{-1} = I \cdot B^{-1}$

$\underbrace{B = A^{-1}}$ $\underbrace{A = B^{-1}}$