GA

25/04/2024

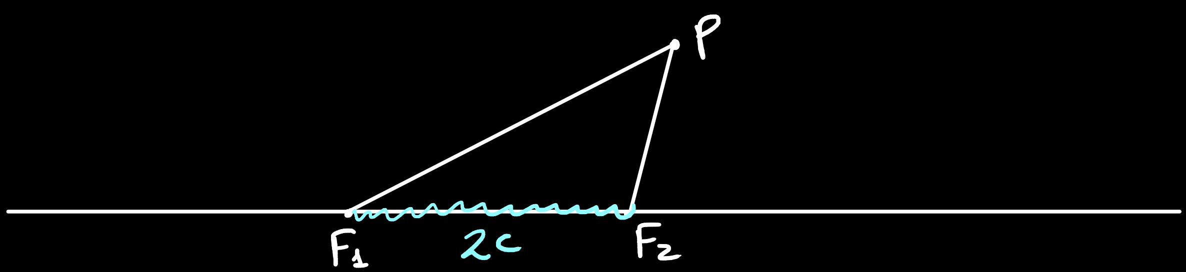
HIPÉRBOLE

DEFINIÇÃO

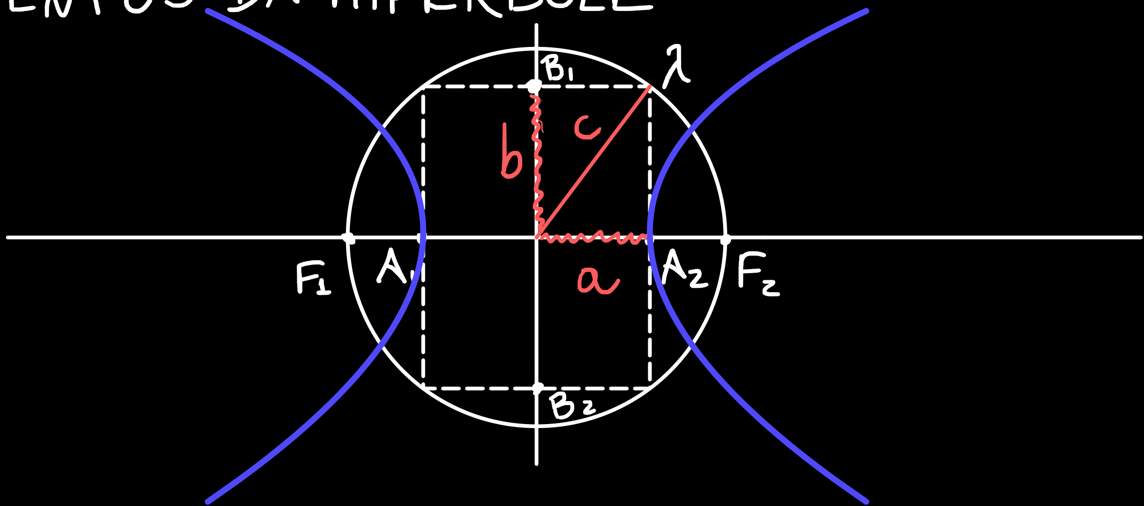
SEJAM F_1 E F_2 PONTOS FIXOS COM $|F_1F_2| = 2c$, ESCOLHEMOS $2a$ TAL QUE $0 < 2a < 2c$

O LUGAR GEOMÉTRICO DA HIPÉRBOLE É TAL QUE

$$\left| |\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}| \right| = 2a$$



ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE



(i) EXCENTRICIDADE $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c > a \therefore e > 1$

(ii) CIRCUNFERÊNCIA FOCAL (λ)

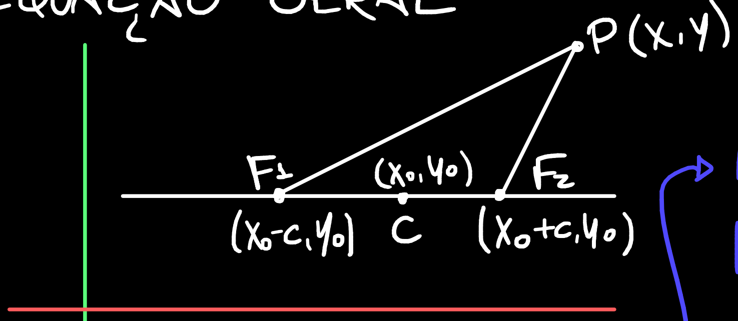
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

(iii) F_1F_2 = DISTÂNCIA FOCAL $(2c)$

(iv) A_1A_2 = EIXO TRANSVERSO $(2a)$

(v) B_1B_2 = EIXO NÃO TRANSVERSO $(2b)$

EQUAÇÃO GERAL



$$||PF_1|-|PF_2||=2a$$

$$|PF_1| = \sqrt{(x_0-c-x)^2+(y_0-y)^2}$$

$$|PF_2| = \sqrt{(x_0+c-x)^2+(y_0-y)^2}$$

$x_0 - x = s$

$y_0 - y = t$

$$\to (|PF_1|)^2 = (2a+|PF_2|)^2 \to \underbrace{(s-c)^2}_{\cancel{s^2}-2sc+\cancel{c^2}}+\cancel{t^2} = 4a^2 + 4\cdot a|PF_2| + \underbrace{(s+c)^2}_{\cancel{s^2}+2sc+\cancel{c^2}} + \cancel{t^2}$$

$$\to \frac{-4sc = 4a^2+4a|\vec{PF_2}|}{4} \Rightarrow -sc = a^2 + a|\vec{PF_2}| \Rightarrow (a\cdot|\vec{PF_2}|)^2 = (-sc-a^2)^2$$

$$\to a^2((s+c)^2+t^2) = s^2c^2+2sca^2+a^4 \Rightarrow a^2(s+c)^2+a^2t^2 = s^2c^2+2sca^2+a^4$$

$$\to s^2a^2+\cancel{2sca^2}+a^2c^2+a^2t^2 = s^2c^2+\cancel{2sca^2}+a^4$$

$$\to a^2c^2-a^4 = s^2c^2-s^2a^2-a^2t^2 \to a^2(\underbrace{c^2-a^2}_{b^2}) = s^2(\underbrace{c^2-a^2}_{b^2})-a^2t^2$$

$$\to \frac{a^2b^2 = s^2b^2-a^2t^2}{a^2b^2} \Rightarrow 1 = \frac{s^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}$$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

ASSÍNTOTAS

- VAMOS COLOCAR A HIPÉRBOLE EM FUNÇÃO DE Y

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}-1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}-b^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot x^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\cdot x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

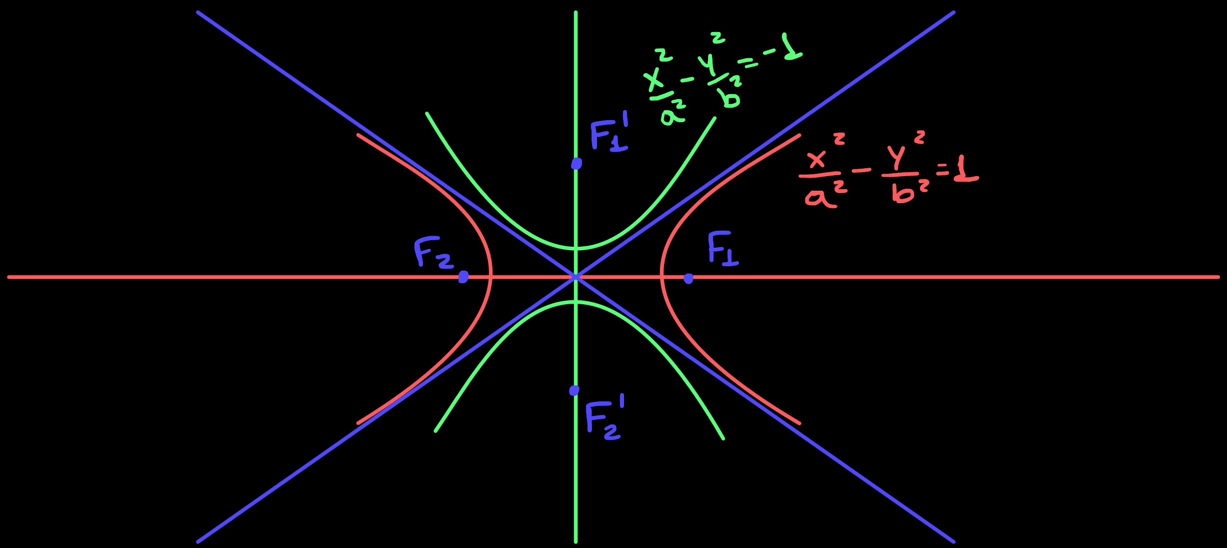
$$\lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}\cdot x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{a^2}{x^2}\to 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\cdot x$$

$$\Rightarrow \pm\frac{b}{a}\cdot x$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ASSÍNTOTAS}\\ y=\pm\frac{b}{a}\cdot x\end{array}}$$

HIPÉRBOLES CONJUGADAS

- DADA A HIPÉRBOLE $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, A HIPÉRBOLE CONJUGADA É DADA COMO $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$



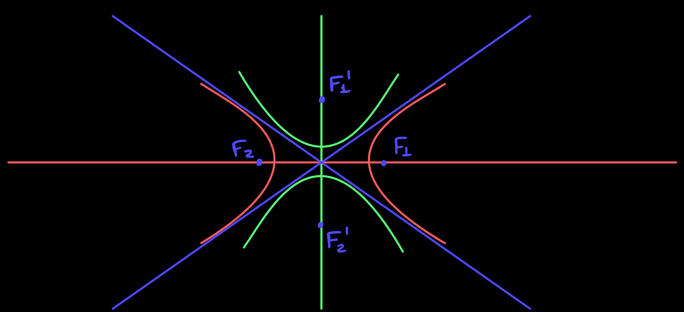
RETA TANGENTE

- A DEMONSTRAÇÃO É PARECIDA COM A TANGENTE DA ELIPSE

$$\boxed{\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1}$$

PS: CÁLCULO

TANGENTES COM ÂNGULO DADO



PERCEBA QUE NÃO É QUALQUER RETA TRAÇADA NO GRÁFICO QUE POSSUI PARALELA TANGENTE A ELA MESMA.

PARA $r: mx+n$ SER TANGENTE,

$$\boxed{m>\frac{b}{a} \quad \text{OU} \quad m<\frac{-b}{a}}$$