

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**FUNDAMENTOS DE  
TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA**

## TEOREMA DE HELMHOLTZ

Aquí se dará un breve repaso del teorema de Helmholtz debido a su importancia en la comprensión de la Teoría Electromagnética. Lo que este teorema nos dice es que, si conocemos las ecuaciones de un campo vectorial, es decir, su divergencia ( $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = s(\vec{r})$ ) y su rotacional ( $\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{c}(\vec{r})$ ), entonces podemos escribir a la función que representa al campo vectorial como el menos gradiente de una función escalar más el rotacional de una función vectorial:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (1.1)$$

donde

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{s(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv \quad (1.2)$$

y

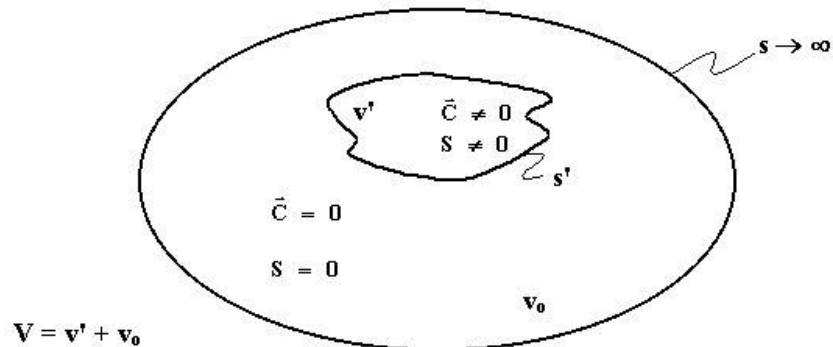
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{c}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv \quad (1.3)$$

bajo las condiciones de que

$$\nabla \cdot \vec{c}(\vec{r}) = 0$$

y

$$\vec{c}(\vec{r}) \neq 0 \quad \text{y} \quad s(\vec{r}) \neq 0 \quad \text{en} \quad V'$$



De acuerdo con el teorema de Helmholtz, los campos vectoriales se clasifican de la siguiente manera:

**1.- CONSERVATIVO**, cuyas ecuaciones de campo representativas son:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad \nabla \times \vec{F} \neq 0$$

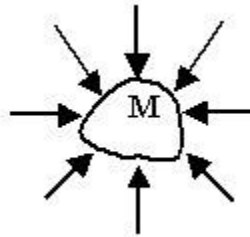
Su característica es que el campo vectorial se puede expresar como el menos gradiente de una función escalar:

$$\vec{F} = -\nabla\phi \quad (1.4)$$

por lo que su integral de línea es cero:

$$\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (1.5)$$

El ejemplo clásico de un campo conservativo es el campo gravitacional:



**2.- SOLENIODAL**, que se caracteriza por las siguientes ecuaciones de campo:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad \nabla \times \vec{F} \neq 0$$

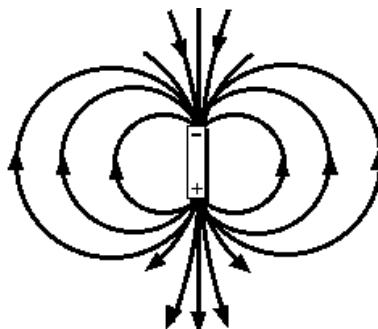
Cuando se tiene un campo donde estas ecuaciones se cumplen en cualquier punto del espacio, se dice que es un campo solenoidal y se caracteriza por que el campo vectorial se puede expresar como el rotacional de  $\vec{A}$ :

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.6)$$

y, por tanto, su integral de flujo es cero:

$$\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.7)$$

el ejemplo típico de un campo solenoidal es el campo magnético, en donde las líneas de fuerza comienzan y terminan en la misma fuente:

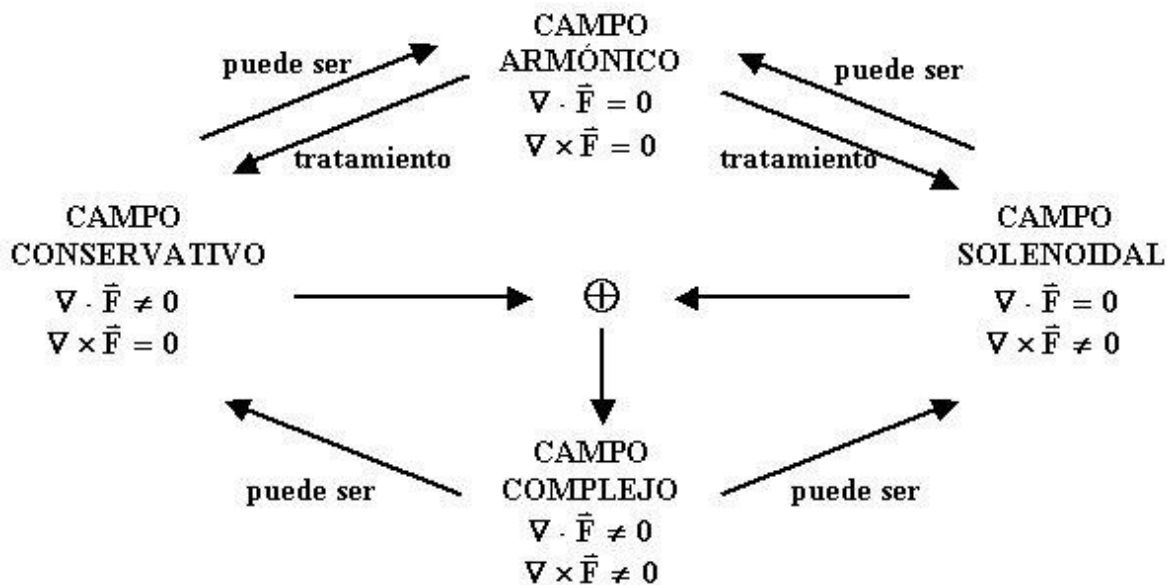


3.- **ARMÓNICO**, donde se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad \nabla \times \vec{F} = 0$$

Este campo se puede resolver matemáticamente como un campo solenoidal o un campo conservativo, aunque tradicionalmente se le da un tratamiento conservativo, es decir, cuando  $\vec{F} = -\nabla\phi$ . En un campo armónico se enfatiza que, en la parte del espacio donde se estudia el fenómeno, no hay una fuente presente.

La clasificación anterior se puede resumir en el siguiente diagrama:



Este diagrama nos dice que un campo complejo se puede separar entre su parte conservativa y su parte solenoidal. A su vez, un campo armónico puede ser tratado como conservativo o como solenoidal. De la misma forma, un campo conservativo y/o un campo solenoidal pueden llegar a ser campos armónicos. De esta manera se explican las interacciones que pueden existir entre los campos.

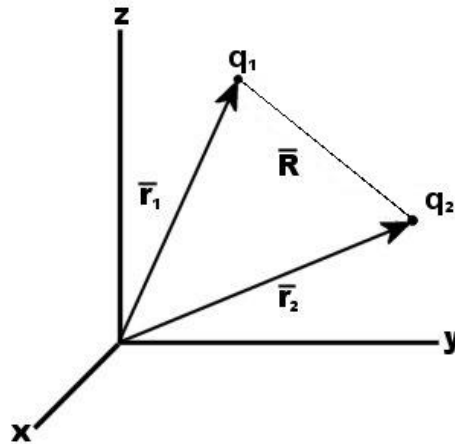
El corolario del Teorema de Helmholtz nos dice que campos físicamente disímiles que satisfagan igual forma de las ecuaciones de campo, pueden ser tratados matemáticamente de la misma manera sin importar su naturaleza física. Estos físicamente no pierden sus propiedades, sólo se simplifica su tratamiento matemático.

La importancia del teorema de Helmholtz es que la Teoría Electromagnética se fundamenta con base en éste, ya que en todo caso se necesita encontrar las ecuaciones de campo que satisfacen al campo vectorial estudiado para determinar su clasificación y, por ende, su tratamiento.

## CAMPO ELECTROSTÁTICO EN EL VACÍO

Su estudio se fundamenta en la Ley de Coulomb, la cual dice que la fuerza que ejercen dos cargas fijas en el espacio es directamente en producto de las cargas e inversa al cuadrado de la distancia que las separa:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \vec{r}_u \quad (1.8)$$

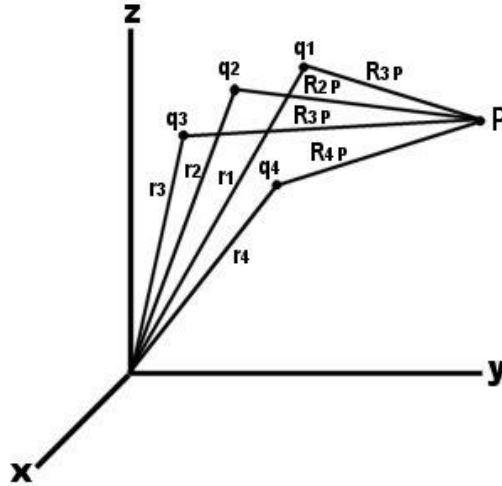


donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica en el vacío y  $\vec{r}_u$  es el vector unitario. Si ambas cargas son iguales, se atraerán; si son distintas, se van a repeler por una fuerza dada por esta ley. El concepto de campo se visualiza como algo que existe sin que sea percibido físicamente. La Ley de Coulomb dice que, para que la fuerza exista, es necesario que exista otra carga; es decir, para que exista fuerza es necesario que existan dos cargas. Pero en el caso del campo no es así. Independientemente que se compruebe la existencia de campo, un campo de fuerza por sí mismo existe. Este concepto ha sido expresado matemáticamente así:

$$\vec{E} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{r}_u = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_2} \quad (1.9)$$

Esto significa que, existiese o no una carga prueba  $q_2$ , existía un efecto por el simple hecho de existir una carga  $q_1$  en el espacio. El concepto de que  $q_2$  tienda a cero se debe al interés de estudiar únicamente el campo creado por la carga  $q_1$ , sin considerar el efecto sobre este del campo creado por  $q_2$ . Este concepto de campo no es manejado de esta forma en la Ley de Coulomb.

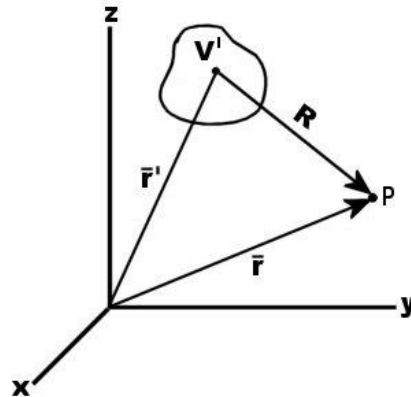
Otro concepto básico es el *Principio de la Superposición*, donde todos nuestros campos son lineales. Esto quiere decir que si tenemos cuatro cargas  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  y  $q_4$ ,



el campo total que existe en el punto **P** es igual a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{R_i} \vec{r}_u \quad (1.10)$$

En otras palabras, el efecto del campo total que se observa es la contribución individual de cada una de las cargas que estén fijas en el espacio. Qué pasaría, pues, si se hablara de una distribución volumétrica de carga,



donde se tiene una carga contenida en **V'**. Aquí se podría que la diferencial de campo que crea una diferencial de carga se puede expresar como

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R} \vec{r}_u \quad (1.11)$$

Pero como el principio de superposición es aplicable, entonces es la sumatoria y, por ende la integración, la nos da el campo total en ese punto del espacio producido por la carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d\mathbf{q}}{R} \vec{r}_u \quad (1.12)$$

Si ahora se piensa en una densidad volumétrica de carga, la diferencial de carga se puede escribir como

$$d\mathbf{q} = \rho(\vec{r})d\mathbf{v} \quad (1.13)$$

De esta forma se llega a la expresión para el campo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\mathbf{v} \quad (1.14)$$

donde  $V$  es todo el volumen. Esta última es la forma más general que se tiene para expresar el campo electrostático producido por una densidad de carga que se encuentra estática en el espacio. La ecuación experimental que nos da la existencia de un campo es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} d\mathbf{v} \quad (1.15)$$

De acuerdo a lo anterior, ya se tiene una expresión que determina el campo en cualquier punto en el espacio, pero no se sabe nada con respecto a él. Para poder caracterizar ese campo es necesario conocer el valor de sus ecuaciones de campo, tanto su divergencia como su rotacional. Siguiendo este razonamiento, se tiene que la divergencia de  $\mathbf{E}$  es igual a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \nabla \cdot \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} d\mathbf{v} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla \cdot \left[ \frac{\rho\vec{r}_u}{R^2} \right] d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.16)$$

El operador nabla entra a la integral ya que este opera sobre coordenadas de campo mientras que la integral se lleva a cabo sobre coordenadas de cuerpo. Del cálculo vectorial se conoce que:

$$\nabla[\mathbf{u}\bar{A}] = \nabla\mathbf{u} \cdot \bar{A} + \mathbf{u}\nabla \cdot \bar{A}$$

Entonces, se tiene que

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r}_u}{R^2} \rho \right] = \nabla\rho(\vec{r}') \cdot \frac{\vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} + \rho(\vec{r}') \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} \right] \quad (1.17)$$

El primer término de la ecuación 1.17 es igual a cero ya que el operador nabla opera sobre coordenadas de campo mientras que la densidad de carga está definida sobre coordenadas de cuerpo. Por el contrario, el segundo término es igual a:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\vec{r}_u}{R^2} \right] = -\nabla \cdot \left[ \nabla \frac{1}{R} \right] = -\nabla^2 \frac{1}{R} \quad (1.18)$$

Por lo tanto, la ecuación 1.16 quedaría de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V -\rho(\vec{r}') \nabla^2 \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\vec{v} \quad (1.19)$$

Pero el laplaciano de  $1/R$ , donde  $R$  es función tanto de coordenadas de campo como de cuerpo, es igual a menos cuatro veces pi una función impulsiva:

$$\nabla^2 \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.20)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1.19, se tiene que la divergencia del campo eléctrico es:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{v} \\ &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.21)$$

ya que, por las propiedades de la función impulsiva, esa integral es igual al valor de la función prueba donde el argumento de la función impulso se vuelve cero, y esto sucede cuando  $\vec{r}'$  es igual con  $\vec{r}$ . La expresión resultante nos indica que la divergencia del campo está íntimamente relacionada a la densidad de carga que existe en el espacio.

De forma similar, el rotacional de  $\vec{E}$  se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) &= \nabla \times \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} d\vec{v} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla \times \left[ \rho \frac{\vec{r}_u}{R^2} \right] d\vec{v} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Al igual que en el caso de la divergencia, el operador nabla entra a la integral ya que este opera sobre coordenadas de campo mientras que la integral se lleva a cabo sobre coordenadas de cuerpo. Del cálculo vectorial se obtiene la siguiente equivalencia:



$$\nabla \times [\mathbf{u}\bar{\mathbf{A}}] = \nabla \mathbf{u} \times \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{u} \nabla \times \bar{\mathbf{A}}$$

lo que implicaría que:

$$\nabla \times \left[ \rho \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} \right] = \nabla \rho(\bar{\mathbf{r}}') \times \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')} + \rho(\bar{\mathbf{r}}') \nabla \times \left[ \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')} \right] \quad (1.23)$$

De la misma forma que en la divergencia, el gradiente de rho es igual con cero. En el segundo término se tendría que si

$$\frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} = -\nabla \frac{1}{R} \quad (1.24)$$

entonces

$$-\nabla \times \nabla \frac{1}{R} \equiv \mathbf{0} \quad (1.25)$$

ya que el rotacional de un gradiente es cero. Por lo tanto, se tendría que el rotacional del campo eléctrico es:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (1.26)$$

Una vez conocidas sus ecuaciones de campo, podemos decir que el campo electrostático se comporta de forma *conservativa* y su expresión, de acuerdo al Teorema de Helmholtz, sería la siguiente:

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = -\nabla \phi(\bar{\mathbf{r}}) \quad (1.27)$$

donde

$$\phi(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\bar{\mathbf{r}}')}{R(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')} d\mathbf{v} \quad (1.28)$$

Si sustituyéramos la definición de  $\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}})$  dada en la ecuación 1.27 en la divergencia de  $\mathbf{E}$  (ecuación 1.21), tendríamos que  $\phi$  satisface lo que se conoce como la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi(\bar{\mathbf{r}}) = -\frac{\rho(\bar{\mathbf{r}})}{\epsilon_0} \quad (1.29)$$

Aquí, la ley experimental que dio origen a las ecuaciones anteriores sigue siendo válida, y  $\mathbf{E}$  también se puede encontrar a partir de:

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\bar{\mathbf{r}}')\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')} d\mathbf{v} \quad (1.30)$$

Como se puede ver, las integrales están definidas sobre todo el espacio, tanto la región que contiene la carga así como todo el espacio donde existe campo. De esta forma, la integral de volumen 1.30 puede separarse en la integral de volumen donde existe fuente más la integral de volumen donde hay campo pero no hay fuente:

$$\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} \vec{r}_u d\mathbf{v} = \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} \vec{r}_u d\mathbf{v}' + \int_{V_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} \vec{r}_u d\mathbf{v}_0 \quad (1.31)$$

donde la segunda integral contribuye con cero ya que, en  $V_0$ ,  $\rho = 0$ . Así, la integral de volumen en todo el espacio se reduce a una integral exclusivamente en la región donde hay carga.

Resumiendo, tenemos que las ecuaciones que rigen el campo electrostático en el vacío, obtenidas a partir de la ecuación experimental, son las siguientes:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$$

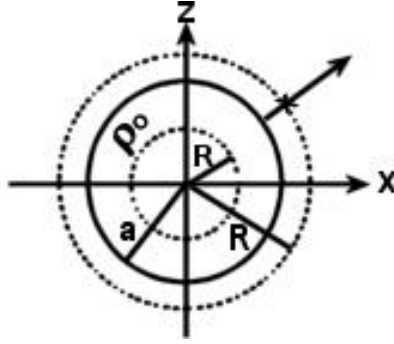
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\mathbf{v}'$$

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} d\mathbf{v}'$$

### EJEMPLO 1.1

Encuentre el campo  $\mathbf{E}$  en una esfera producido por una distribución  $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ , donde la densidad de carga  $\rho_0$  es constante.



Una forma fácil de solucionar este problema es utilizando la Ley de Gauss, el cual dice que

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}') d\vec{v} = \oint_S \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') d\vec{v} \quad (1.32)$$

Lo que este teorema dice es que la integral de flujo está íntimamente relacionada a la carga encerrada. Se dibuja una superficie gaussiana esférica de radio  $R$  para el campo exterior ya que la forma de la superficie es función de cómo se distribuye la carga; de esta forma,  $\vec{E}$  permanece constante con el vector unitario exterior en cualquier punto sobre la superficie gaussiana.

Entonces, al ser constante, la densidad de carga puede salir de la integral en la ecuación 1.32 multiplicando el área de la superficie de una esfera de radio  $R$ :

$$E 4\pi R^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} v = \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right) \quad (1.33)$$

$$E = \frac{a^3 \rho_0}{3\epsilon_0 R^2}$$

Esto sería el campo exterior producido por la esfera. Si se quisiera expresar en forma vectorial, simplemente se multiplica por un vector unitario en la dirección  $\vec{R}$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 (a^3)}{3\epsilon_0 R^2} \vec{r}_u \quad (1.34)$$

Para el caso del campo en el interior de la esfera, Gauss dice, utilizando el mismo procedimiento, que la carga encerrada por la superficie gaussiana interior de radio  $R < a$  sería igual a:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} \vec{r}_u \quad (1.35)$$

Lo que Gauss dice es que el campo en el interior solamente depende de la carga encerrada por la superficie gaussiana en el interior; por lo tanto, el campo producido por la

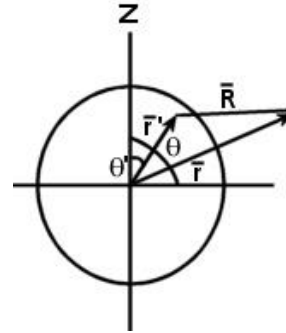
carga que queda fuera no debe de contribuir en el interior, por lo que es cero en la superficie gaussiana. Individualmente, las cargas si crean campo, pero en conjunto la suma de las cargas se distribuyen de tal manera que siempre va a crear un campo hacia adentro de cero.

Este desarrollo empleando la ley de Gauss es general y sólo se satisface para formas geométricas simples. Otra forma, aunque más elaborada, de resolver el problema sería encontrando la función potencial. Esta función potencial, expresada en coordenadas esféricas, sería:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi' \quad (1.36)$$

La densidad de carga, al ser constante, saldría de la integral. Por la ley de Cosenos, se tendría que  $R$  es igual a:

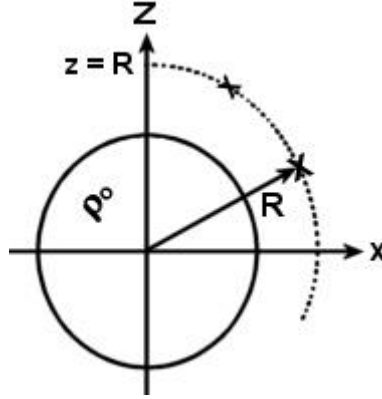
$$R = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}$$



Por lo tanto, el potencial podría expresarse como:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} \\ &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \frac{r'^2 \sin\theta' dr' d\theta'}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Esta integral, en la forma que todavía está, no es matemáticamente fácil de resolver, ya que es función de  $(\theta - \theta')$ . Es necesario, pues, hacer uso de la física del problema para simplificarlo. Sabemos que el campo eléctrico es constante en cualquier punto de la superficie de una esfera de distancia  $R$ . Por lo tanto, el valor del potencial debe de ser constante, facilitando el cálculo. Es decir, si el valor de  $\phi$  es el mismo para cualquier punto a una distancia  $R$ , entonces se puede resolver para un punto sobre el eje  $z$  mientras  $z = R$ .



Esto facilita la integral debido a que, para puntos localizados sobre el eje  $z$ ,  $\theta = 0$ . Esto significa que se puede resolver para puntos localizados sobre el eje  $z$  y, después de encontrar la solución, intercambiar la  $z$  por la  $r$  para obtener así la función potencial para cualquier punto en el espacio. La expresión, pues, sería la siguiente:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \frac{r'^2 \sin\theta' dr' d\theta'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'}} \\ &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'}}\end{aligned}\quad (1.38)$$

Para simplificar más la resolución de esta integral, se realiza un cambio de variable donde:

$$u = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'$$

$$du = 2zr' \sin\theta' d\theta'$$

$$\begin{array}{lll} \text{por lo que cuando} & \theta \rightarrow 0 & \Rightarrow u = (z - r')^2 \\ & \theta \rightarrow \pi & \Rightarrow u = (z + r')^2 \end{array}$$

Entonces, la segunda integral de la función potencial sería igual a:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'}} &= \frac{1}{2zr'} \int_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2zr'} (2) \sqrt{u} \Big|_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} \\ &= \frac{1}{zr'} [z + r' - |z - r'|]\end{aligned}\quad (1.39)$$

y el potencial se expresaría de la siguiente forma:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 z} \int_0^a r' [|z + r'| - |z - r'|] dr' \quad (1.40)$$

Esta integral todavía tiene el problema de que  $z \pm r'$  son funciones de valor absoluto. Para encontrar una expresión más fácil de la misma, se debe proponer encontrar el valor de  $\varphi$  para el interior de la esfera y después para el exterior. En general, se inicia con el exterior ya que es más fácil de calcular. Entonces, el exterior de la esfera implica que  $z > r'$  lo que a su vez implica que:

$$|z + r'| = z + r'$$

$$|z - r'| = z - r'$$

por lo que la función potencial se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ext}}(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 z} \int_0^a 2r'^2 dr' \\ &= \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 z} \quad \text{en } z \geq a \end{aligned} \quad (1.41)$$

En el caso del potencial interior, la integral de  $0$  a  $a$  se debe dividir en dos integrales, ya que el valor absoluto cambia de acuerdo con el rango de integración:

$$\int_0^a r' [|z + r'| - |z - r'|] dr' = \int_0^z r' [|z + r'| - |z - r'|] dr' + \int_z^a r' [|z + r'| - |z - r'|] dr' \quad (1.42)$$

Cuando  $r'$  se está moviendo entre  $0 \leq r' \leq z$ , implica que  $z < r'$ , por lo que la integral se resolvería de una forma muy a la del caso anterior, quedando como:

$$\int_0^z r' [|z + r'| - |z - r'|] dr' = \frac{2}{3} z^3 \quad (1.43)$$

En la integral cuando  $z \leq r' \leq a$ , se tiene que  $r' > z$ , por lo que

$$|z + r'| = r' + z$$

$$|z - r'| = r' - z$$

y, por lo tanto, la segunda integral sería igual a:

$$\int_z^a r' [|z + r'| - |z - r'|] dr' = \int_z^a 2zr' dr' = \frac{2z}{2} (a^2 - z^2) \quad (1.44)$$

De esta forma, el potencial interior se puede expresar como:

$$\phi_{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[ \frac{z^2}{3} + \frac{1}{2}(a^2 - z^2) \right] \quad \text{en } z \leq a \quad (1.45)$$

Al intercambiar a  $z$  por  $r$ , obtenemos la forma general de los potenciales exterior e interior:

$$\phi_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 z} \quad \text{en } r \geq a \quad (1.46)$$

$$\phi_{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[ \frac{r^2}{3} + \frac{1}{2}(a^2 - z^2) \right] \quad \text{en } r \leq a \quad (1.47)$$

Recordando que el campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial r}\phi(\vec{r})\vec{r}_u$$

Si sustituimos los valores encontrados para el potencial en el exterior y el interior, se tiene que el campo eléctrico quedaría como:

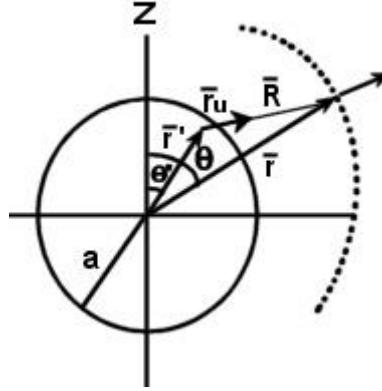
$$\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{r}_u \quad \text{en } r \geq a \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{int}}(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[ \frac{-2r}{3} + r \right] \vec{r}_u \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \vec{r}_u \quad \text{en } r \leq a \end{aligned} \quad (1.49)$$

Este es el ejemplo más sencillo en materia de electrostática y, si embargo, resolverlo no es tan fácil. Este mismo problema también se puede resolver de otra forma, aunque su desarrollo también es complicado. Se comienza por la misma ecuación antes utilizada:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\vec{r}_u}{R^2(\vec{r},\vec{r}')}\, d\vec{v}'$$

Primeramente, se observa al campo en un punto cualesquiera del espacio.



El campo eléctrico puede expresarse como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{R}}{R^3} dv' \quad (1.50)$$

puesto que  $\vec{r}_u = \frac{\vec{R}}{R}$ .

Si, además, se tiene que

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

y

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}$$

entonces se estaría tratando con el mismo problema anterior, si se quisiera resolver para un punto cualesquiera del espacio conservando la misma disposición de los ejes. Debido a la geometría del problema y a la física involucrada, se sabe que el valor del módulo del campo eléctrico debe de ser radial. Siendo esto así, se puede resolver para el punto en el espacio donde  $\theta = 0$ . De esta forma, se simplifica la integral y se puede expresar como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(z\vec{k} - \vec{r}')}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta']^{3/2}} dv' \quad (1.51)$$

Expresándolo todo en coordenadas esféricas, tendríamos a la ecuación en la forma de:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta']^{3/2}} \int_0^{2\pi} (z\vec{k} - \vec{r}') d\phi' \quad (1.52)$$

Concentrándonos primero en la última integral, tenemos que:

$$\int_0^{2\pi} (z\vec{k} - \vec{r}') d\phi' = \int_0^{2\pi} z\vec{k} d\phi' - \int_0^{2\pi} \vec{r}' d\phi' \quad (1.53)$$



Al vector  $\vec{r}'$  no se le puede sacar de la integración, puesto que esta función vectorial varía de acuerdo a la misma variación de la integración. Sin embargo, podemos expresar las componentes en coordenadas cartesianas:

$$\vec{r}' = r' \vec{r}'_u = r' (\text{sen}\theta' \cos\phi' \vec{i} + \cos\theta' \text{sen}\phi' \vec{j} + \cos\theta' \vec{k}) \quad (1.54)$$

Al realizar esto, nuestra integral de  $0$  a  $2\pi$  se puede transformar en:

$$\int_0^{2\pi} (z\vec{k} - \vec{r}') d\phi' = \int_0^{2\pi} (z - r' \cos\theta') d\phi' \vec{k} - \int_0^{2\pi} r' \text{sen}\theta' \cos\phi' d\phi' \vec{i} - \int_0^{2\pi} r' \cos\theta' \text{sen}\phi' d\phi' \vec{j} \quad (1.55)$$

Pero

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \text{sen}\phi' d\phi' \equiv 0$$

Además

$$\int_0^{2\pi} (z\vec{k} - \vec{r}') d\phi' = 2\pi(z\vec{k} - r' \cos\theta') \vec{k}$$

Por ende, el campo eléctrico sólo existe en la componente  $\vec{k}$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{(z - r' \cos\theta')}{[r^2 + r'^2 - 2r r' \cos\theta']^{3/2}} \text{sen}\theta' d\theta' \vec{k} \quad (1.56)$$

Este resultado parcial es lógico ya que estamos resolviendo para un punto localizado en el eje  $z$ , por lo tanto son congruentes con la física del problema.

Para resolver esta integral, utilizamos el método de cambio de variable, donde

$$\begin{aligned} u &= \cos\theta' \\ du &= -\text{sen}\theta' \end{aligned}$$

lo que implica que cuando

$$\begin{aligned} \theta' \rightarrow 0 & \quad u = 1 \\ \theta' \rightarrow \pi & \quad u = -1 \end{aligned}$$

El campo eléctrico, pues, se puede expresar momentáneamente como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a r'^2 dr' \int_{-1}^{+1} \frac{(z - r' u)}{[z^2 + r'^2 - 2z r' u]^{3/2}} du \quad (1.57)$$

Existe una integral del siguiente tipo:

$$\int \frac{\alpha + \beta x}{(a + bx)^{3/2}} = \frac{-2\alpha}{b\sqrt{a + bx}} + \frac{2\beta(2a + bx)}{b^2\sqrt{a + bx}}$$

Si aplicamos esta equivalencia en la integral interior de la ecuación 1.57, donde:

$$\begin{aligned} \alpha &= z & a &= z^2 + r'^2 & x &= u \\ \beta &= r' & b &= zr' \end{aligned}$$

tenemos que:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z - r'u)}{[z^2 + z'^2 - 2zr'u]^{3/2}} du = \frac{-2z}{-2zr'\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr'u}} - \frac{2r'(2(z^2 + r'^2)) - 2zr'u}{4z^2r'^2\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr'u}} \Big|_{-1}^{+1} \quad (1.58)$$

Resolviendo esta ecuación algebraicamente, obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} [*] &= \frac{1}{r'\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr'u}} - \frac{1}{z^2r'} \left[ \frac{z^2 + r'^2 - zr'u}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr'u}} \right] \Big|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{1}{r'} \left[ \frac{1}{|z - r'|} - \frac{1}{|z + r'|} \right] - \frac{1}{z^2r'} \left[ \frac{z^2 + r'^2}{|z - r'|} - \frac{z^2 + r'^2 + zr'}{|z + r'|} \right] \\ &= \frac{1}{r'} \left[ \frac{1}{|z - r'|} - \frac{1}{|z + r'|} \right] - \frac{1}{z^2r'} \left[ \frac{(z - r')^2}{|z - r'|} - \frac{(z + r')^2}{|z + r'|} + \frac{zr'}{|z - r'|} + \frac{zr'}{|z + r'|} \right] \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} \frac{(z - r')^2}{|z - r'|} &= \frac{(z - r')^2}{\sqrt{(z - r')^2}} = \sqrt{\frac{(z - r')^4}{(z - r')^2}} = |z - r'| \\ \frac{(z + r')^2}{|z + r'|} &= |z + r'| \end{aligned}$$

entonces, tenemos que la integral de -1 a +1 es igual a:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} [*] &= \frac{1}{r'} \left[ \frac{1}{|z - r'|} - \frac{1}{|z + r'|} \right] - \frac{1}{z^2r'} \left[ |z - r'| - |z + r'| + \frac{zr'}{|z - r'|} + \frac{zr'}{|z + r'|} \right] \\ &= \frac{1}{r'|z - r'|} - \frac{1}{r'|z + r'|} - \frac{|z - r'|}{z^2r'} + \frac{|z + r'|}{z^2r'} - \frac{1}{z|z - r'|} - \frac{1}{z|z + r'|} \\ &= \frac{1}{|z - r'|} \left( \frac{z - r'}{r'z} \right) - \frac{1}{|z + r'|} \left( \frac{z + r'}{r'z} \right) - \frac{|z - r'|}{z^2r'} + \frac{|z + r'|}{z^2r'} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Este sería el resultado final de la integral interna de la ecuación 1.57; por lo tanto, el campo eléctrico lo podemos expresar como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a \vec{r}'^2 \left[ \frac{1}{|\vec{z} - \vec{r}'|} \left( \frac{\vec{z} - \vec{r}'}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} \right) - \frac{1}{|\vec{z} + \vec{r}'|} \left( \frac{\vec{z} + \vec{r}'}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} \right) - \frac{|\vec{z} - \vec{r}'|}{z^2 \vec{r}'} + \frac{|\vec{z} + \vec{r}'|}{z^2 \vec{r}'} \right] d\vec{r}' \vec{k} \quad (1.60)$$

Esta sería la expresión general del campo eléctrico, pero aún está en una forma difícil de resolver. Para simplificarla, se le debe separar en dos regiones: al interior y al exterior de la esfera. Al exterior de la esfera tenemos que

$$\text{cuando } z > a \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} |\vec{z} - \vec{r}'| &= z - r' \\ |\vec{z} + \vec{r}'| &= z + r' \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que el contenido de la integral es igual a:

$$\vec{r}'^2 \left[ \frac{1}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} - \frac{1}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} + \frac{1}{z^2 \vec{r}'} (-z + r' + z + r') \right] = \vec{r}'^2 \left[ + \frac{2}{z^2} \right]$$

Por ende, el campo para el exterior de la esfera finalmente es igual a:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 z^2} \int_0^a \vec{r}'^2 d\vec{r}' \vec{k} = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 z^2} \vec{k} \quad z > a \quad (1.61)$$

En el caso del interior de la esfera ( $z < a$ ),  $\vec{r}'$  se puede mover entre  $0$  y  $z$  y entre  $z$  y  $a$ , por lo que la podemos dividir en dos regiones:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a \vec{r}'^2 \left[ \frac{1}{|\vec{z} - \vec{r}'|} \left( \frac{\vec{z} - \vec{r}'}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} \right) - \frac{1}{|\vec{z} + \vec{r}'|} \left( \frac{\vec{z} + \vec{r}'}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} \right) - \frac{|\vec{z} - \vec{r}'|}{z^2 \vec{r}'} + \frac{|\vec{z} + \vec{r}'|}{z^2 \vec{r}'} \right] d\vec{r}' \\ &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^z \vec{r}'^2 \left[ \frac{1}{|\vec{z} - \vec{r}'|} \left( \frac{\vec{z} - \vec{r}'}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} \right) - \frac{1}{|\vec{z} + \vec{r}'|} \left( \frac{\vec{z} + \vec{r}'}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} \right) - \frac{|\vec{z} - \vec{r}'|}{z^2 \vec{r}'} + \frac{|\vec{z} + \vec{r}'|}{z^2 \vec{r}'} \right] d\vec{r}' + \\ &\quad + \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_z^a \vec{r}'^2 \left[ \frac{1}{|\vec{z} - \vec{r}'|} \left( \frac{\vec{z} - \vec{r}'}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} \right) - \frac{1}{|\vec{z} + \vec{r}'|} \left( \frac{\vec{z} + \vec{r}'}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} \right) - \frac{|\vec{z} - \vec{r}'|}{z^2 \vec{r}'} + \frac{|\vec{z} + \vec{r}'|}{z^2 \vec{r}'} \right] d\vec{r}' \end{aligned} \quad (1.62)$$

Cuando se tiene que  $0 \leq \vec{r}' \leq z$ , se obtiene el mismo resultado que en el caso exterior a la esfera:

$$\left[ \frac{1}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} - \frac{1}{\vec{r}' \cdot \vec{z}} + \frac{1}{z^2 \vec{r}'} (-z + r' + z + r') \right] = \frac{2}{z^2}$$

Pero cuando  $z \leq \vec{r}' \leq a$ , implica que  $|\vec{z} - \vec{r}'| = \vec{r}' - z$  y que  $|\vec{z} + \vec{r}'| = \vec{r}' + z$ , por lo que el interior de la segunda integral de la ecuación 1.62 sería igual a:

$$\left[ \frac{1}{\mathbf{r}'\mathbf{z}} - \frac{1}{\mathbf{r}'\mathbf{z}} + \frac{1}{z^2\mathbf{r}'} (-\mathbf{z} + \mathbf{r}' + \mathbf{z} + \mathbf{r}') \right] = \left[ -\frac{1}{\mathbf{r}'\mathbf{z}} - \frac{1}{\mathbf{r}'\mathbf{z}} + \frac{1}{z^2\mathbf{r}'} (-\mathbf{r}' + \mathbf{z} + \mathbf{z} + \mathbf{r}') \right]$$

$$= -\frac{2}{\mathbf{r}'\mathbf{z}} + \frac{1}{z^2\mathbf{r}'} (2\mathbf{z}) \equiv 0$$

Por lo cual, la segunda integral contribuye con cero. La razón física para que esta integral de  $\mathbf{z}$  a  $\mathbf{a}$  sea cero es que, de acuerdo con el teorema de Gauss, la carga de  $\mathbf{z}$  a  $\mathbf{a}$  con respecto al punto es exterior; por lo tanto, por mucho que la carga exista, no debe de contribuir al campo. De acuerdo con esto, el campo eléctrico interior simplemente es igual a:

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 z^2} \int_0^z \mathbf{r}'^2 d\mathbf{r}' \bar{\mathbf{k}} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} z \bar{\mathbf{k}} \quad z < a \quad (1.63)$$

Si intercambiamos a  $\mathbf{z}$  por  $\mathbf{r}$  y a  $\bar{\mathbf{k}}$  por  $\bar{\mathbf{r}}_u$ , se tiene que el campo eléctrico para cada una de las regiones es

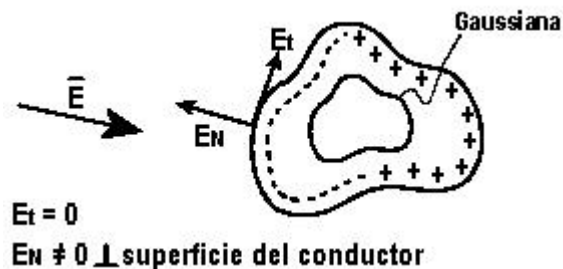
$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \bar{\mathbf{r}}_u \quad r \geq a$$

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \bar{\mathbf{r}}_u \quad r \leq a \quad (1.64)$$

Como se puede observar, los tres tratamientos dados al mismo ejemplo dan el mismo resultado, pero no fueron igual de sencillos de resolver. La forma más sencilla fue por medio de Gauss, aunque desafortunadamente no nos lleva a un resultado general que se pueda utilizar en todos los casos.

## **CONDUCTORES EN UN CAMPO ELECTROSTÁTICO**

La distribución de cargas libres sobre un cuerpo conductor va a producir un campo eléctrico. Si se analiza sobre la superficie del conductor, se va a observar un campo eléctrico con una componente normal y una tangencial.

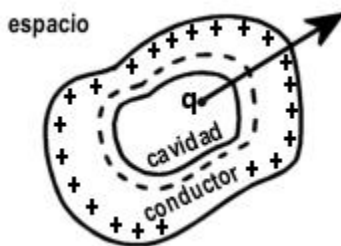


En el exterior del cuerpo, se dice que las cargas están estáticas (no se desplazan), por lo que la componente tangencial debe de ser igual a cero. Si hubiera una componente tangencial que imprimiera una fuerza a las cargas, éstas se moverían a lo largo de la superficie. Esto no sucede aquí, ya que se alcanzó un equilibrio electrostático y, por lo tanto, las cargas permanecen fijas. Es por ello que, en ese momento, la componente tangencial debe de ser cero. Sin embargo, puede existir una componente normal, perpendicular a la superficie del conductor, cuyo valor es distinto a cero. Ello implica que la superficie es una equipotencial.

En el interior del cuerpo, de acuerdo con Gauss, se tiene una superficie gaussiana la cual no encierra carga alguna. Es el único caso en que, sin tener carga encerrada, el campo eléctrico es cero en el interior, ya que la distribución de carga es de tal forma que va a producir un campo neto igual con cero en el interior del conductor. Individualmente, cada carga si está irradiando un campo; pero como el campo es la contribución de todas las cargas, esta contribución finalmente es cero. Por ende, el campo en el interior siempre va a ser cero y el cuerpo va a seguir siendo eléctricamente neutro.

### EJEMPLO 1.2

Se tiene una carga  $q$  dentro de una cavidad que está envuelta por un conductor.



En la cavidad si hay campo ya que, si colocáramos una superficie gaussiana, si se estaría encerrando carga. En cambio, en el interior del conductor no existe campo. La carga total neta encerrada por el volumen debe de ser cero:

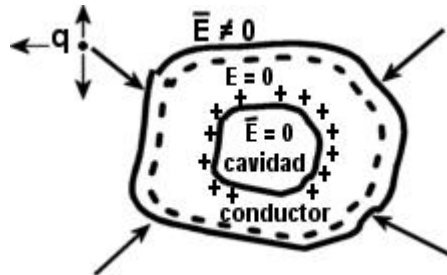
$$\int_V \rho dv = 0$$

Esto implica que la carga  $q$  más la carga superficial debe de ser cero, lo que quiere decir que la carga total superficial inducida es

$$Q_s = -q$$

Fuera del conductor si existe campo ya que, aunque el conductor contribuya con cero, la cavidad no. Por ende, se tiene un campo como producido por una carga puntual.

En el caso contrario en el que se tiene una carga posicionada en el exterior



también se inducen cargas en el conductor, aunque a la inversa (cargas negativas en la superficie y positivas cerca de la cavidad). En la cavidad no se crea campo ya que no se tiene una carga encerrada. En el conductor, el campo sigue siendo cero, mientras que en el exterior si se tiene campo.

## CAMPO ELÉCTRICO EN DIELECTRICOS

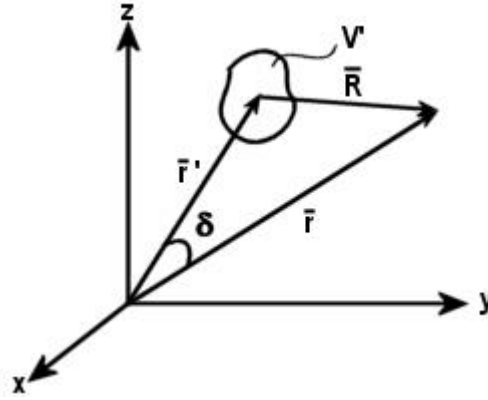
En este apartado se va a estudiar el campo eléctrico en presencia de materia dieléctrica, entendiéndose como dieléctrico a un aislante.

### DESARROLLO EN MULTIPOLOS

Como se ha visto, la función potencial para una distribución de carga en el espacio se expresa de la siguiente manera:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv'$$

Se tiene una distribución de carga en el universo con una geometría determinada para encontrar el potencial en cualquier punto del campo.



Sin embargo, se sabe que  $1/R$  se puede escribir en una serie infinita de polinomios de Legendre:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\delta)}} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \delta) & r > r' \\ \frac{1}{r'} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \delta) & r < r' \end{cases} \quad (1.65)$$

Debido a que nos encontramos en un punto exterior a la región, la serie que nos interesa es cuando  $r > r'$ . Si ahora sustituimos la definición de  $1/R$  por la de la serie infinita, tendríamos que la función potencial se puede expresar como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \delta) \rho(\vec{r}') dv' \quad (1.66)$$

Cuando hablamos de desarrollo de multipolos significa que esta serie infinita representa un tipo de fuente elemental. Por ejemplo, si  $\ell = 0$ , la expresión que resulte es la del potencial de un campo **monopolar**:

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V'} \rho(\vec{r}') dv' \quad (1.67)$$

Esto es igual a la carga total ( $Q$ ) encerrada en la región

$$\int_{V'} \rho(\vec{r}') dv' = Q \quad (1.68)$$

por lo que el potencial de un monopolo se puede expresar como la carga total concentrada en el centro de la región:

$$\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (1.69)$$

El término monopolar es tratado como la concentración en el origen de coordenadas (y no sobre el cuerpo) de toda la carga contenida en la región  $\mathbf{V}'$ , la cual nos va a producir un campo.

Cuando  $\ell = 1$  es a lo que se le conoce con el término de **dipolo**. El potencial de un dipolo se puede escribir como:

$$\varphi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{V'} \vec{r}' P_1(\cos\delta) \rho(\vec{r}') d\mathbf{v}' \quad (1.70)$$

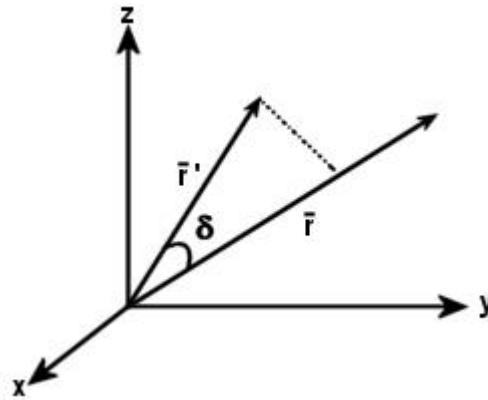
El polinomio de Legendre de orden uno es igual a:

$$P_1(\cos\delta) = \cos\delta$$

Esto daría a que la función potencial se le pueda escribir como:

$$\varphi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{V'} \vec{r}' \cos\delta \rho(\vec{r}') d\mathbf{v}' \quad (1.71)$$

Se puede ver, pues, que  $\vec{r}' \cos\delta$  es la proyección de  $\vec{r}'$  sobre el vector  $\vec{r}$ .



Básicamente, se puede decir que

$$\vec{r}' \cos\delta = \vec{r}' \cdot \vec{r}_u \quad (1.72)$$

Bajo esta suposición,  $\varphi$  se puede expresar como

$$\varphi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\mathbf{v}' \right] \cdot \vec{r}_u \quad (1.73)$$

donde  $\vec{r}_u$  es una constante para las variables de integración y, por ende, puede salir de la integral. La cantidad encerrada en corchetes es a lo que se le llama **momento dipolar eléctrico**:



$$\vec{p}(\vec{r}) = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad (1.74)$$

Con base en lo anterior, la función potencial de un dipolo simplemente puede expresarse como:

$$\varphi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_u}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.75)$$

A  $\ell = 2$  se le conoce como cuadropolo, a  $\ell = 3$  se le llama el octapolo, y así sucesivamente. Lo que esto nos dice es que una función potencial cualesquiera que se tenga puede verse como la contribución de una serie infinita de fuentes elementales actuando en el origen de coordenadas:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_m(\vec{r}) + \varphi_{\text{dip}}(\vec{r}) + \varphi_{\text{cuadri}}(\vec{r}) + \varphi_{\text{octa}}(\vec{r}) + \dots \quad (1.76)$$

Sin embargo, se puede ver dentro de la serie que los potenciales elementales son proporcionales a

$$\varphi_m \propto \frac{1}{r}$$

$$\varphi_{\text{dip}} \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\varphi_{\text{cuadri}} \propto \frac{1}{r^3}$$

$$\varphi_{\text{oct}} \propto \frac{1}{r^4}$$

y a razón de esta proporción decaen. Esto significa que al final, conforme nos vamos alejando de la fuente, las fuentes más importantes son las de orden menor. Las de orden mayor decaen más rápidamente a cero. Por ende, si nos encontramos muy lejos de la fuente, podemos despreocupar estos términos y quedarnos con el monopolio, el cual es el término que prevalece hasta el infinito.

Por su importancia, la fuente dipolar se va a estudiar más de cerca.

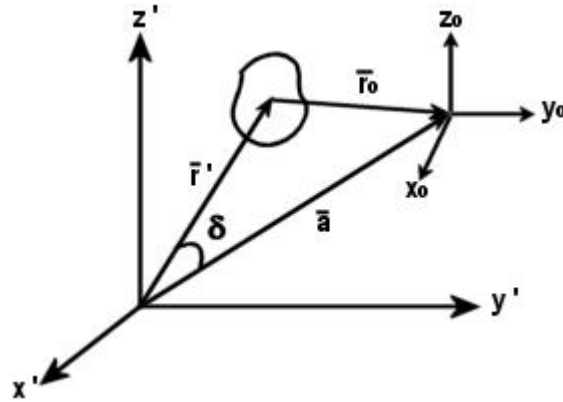
## CAMPO DIPOLAR

- *Momento dipolar*

Como ya se ha visto, la expresión del momento dipolar (ecuac. 1.74) es:

$$\vec{p}(\vec{r}) = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$$

Digamos que se tiene una distribución de carga en el universo dentro de un sistema de coordenadas  $\mathbf{x}'\mathbf{y}'\mathbf{z}'$ , con su respectivo vector de posición  $\mathbf{r}'$ :



En este mismo sistema se tiene otro sistema de coordenadas  $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ , de tal manera que la distribución de carga también tendría un vector de posición  $\mathbf{r}_0$  con respecto a este sistema. Habría también un vector normal  $\vec{a}$  que indique el origen del sistema  $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$  con respecto al sistema  $\mathbf{x}'\mathbf{y}'\mathbf{z}'$ . Si calculamos el momento bipolar con respecto a  $\mathbf{x}'\mathbf{y}'\mathbf{z}'$ , este se expresaría de la misma forma que al inicio:

$$\vec{p}(\vec{r}) = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$$

Si ahora este mismo momento dipolar se calcula con respecto a  $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ , se tendría que el momento bipolar se puede expresar como

$$\vec{p}(\vec{r}) = \int_{V'} \vec{r}'_0 \rho(\vec{r}') dV' \quad (1.77)$$

Pero el vector de posición  $\mathbf{r}'_0$  es igual a

$$\vec{r}'_0 = \vec{r}' - \vec{a}$$

Entonces el momento bipolar se puede escribir como

$$\vec{p}(\vec{r}) = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' - \vec{a} \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' \quad (1.78)$$

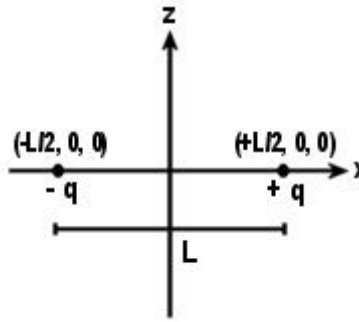
donde  $\vec{a}$ , por ser un vector normal, puede salir de la integral. Este es el momento dipolar con respecto al sistema  $\mathbf{x}'\mathbf{y}'\mathbf{z}'$ , por lo que se tendría que el momento dipolar con respecto a  $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$  es igual al momento dipolar con respecto a  $\mathbf{x}'\mathbf{y}'\mathbf{z}'$  menos el vector que va del origen de un sistema coordenado al otro por la carga total encerrada:

$$\vec{p}_o(\vec{r}) = \vec{p}(\vec{r}) - \vec{a}Q \quad (1.79)$$

Vemos, pues, que el momento dipolar no es una cantidad fija, sino que depende del origen de coordenadas desde el cual se calcule. El único caso en el que se mantiene fijo es cuando la carga total es igual a cero ( $Q \equiv 0$ ); cuando esto sucede, el momento dipolar es independiente del origen de coordenadas que se haya seleccionado:

$$\vec{p}_o(\vec{r}) = \vec{p}(\vec{r}) \quad (1.80)$$

El dipolo más sencillo que se conoce es el de dos cargas distintas, con una carga total del sistema igual a cero pero con un campo existente, separadas por una distancia  $L$ .



El vector de posición se puede escribir como:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

La función de densidad de carga volumétrica se puede expresar con funciones impulso de la siguiente manera:

$$\rho(\vec{r}) = -q\delta\left(x + \frac{L}{2}, 0, 0\right) + q\delta\left(x - \frac{L}{2}, 0, 0\right) \quad (1.81)$$

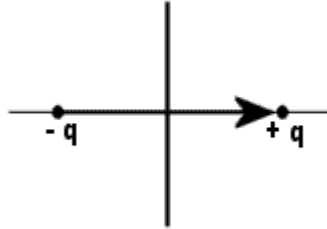
El momento dipolar se traduce en la integral de

$$\begin{aligned} \vec{p}(\vec{r}) &= \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') \\ &= \int_{V'} -q\delta\left(x + \frac{L}{2}, 0, 0\right) (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) dv' + \int_{V'} +q\delta\left(x - \frac{L}{2}, 0, 0\right) (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) dv' \end{aligned} \quad (1.82)$$

donde  $-q$  es una constante y puede salir de la integral. De acuerdo a las propiedades de las funciones impulsivas, el valor de la integral de volumen donde intervienen funciones impulsivas es igual al valor de la función prueba evaluada donde el argumento de la función impulso se vuelve cero; esto sucede cuando  $x = -L/2$ , y  $y = z = 0$ . Entonces, el momento dipolar quedaría como:

$$\vec{p}(\vec{r}) = -q\left(-\frac{L}{2}\right)\vec{i} + q\left(\frac{L}{2}\right)\vec{i} = q\frac{L}{2}\vec{i} + q\frac{L}{2}\vec{i} = qL\vec{i} \quad (1.83)$$

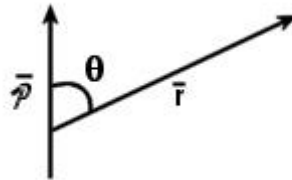
Esto significa que el momento dipolar va en la dirección  $\mathbf{x}$  y siempre va de cargas negativas a cargas positivas.



La pregunta ahora es: ¿cómo es un campo dipolar? Vimos que el potencial de un dipolo (ecuac. 1.75) es

$$\Phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_u}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Digamos que se tiene un momento dipolar dirigido en la dirección  $\mathbf{z}$ :



Se tendría que

$$\vec{p} \cdot \vec{r}_u = p \cos\theta$$

Entonces, el potencial de un dipolo se puede escribir como:

$$\Phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (1.84)$$

El campo eléctrico bipolar proviene de

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) &= -\nabla\Phi_{\text{dip}}(\vec{r}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial r}\Phi_{\text{dip}}\vec{r}_u - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi_{\text{dip}}\vec{\theta}_u \end{aligned} \quad (1.85)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial r}\Phi_{\text{dip}} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} = -\frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

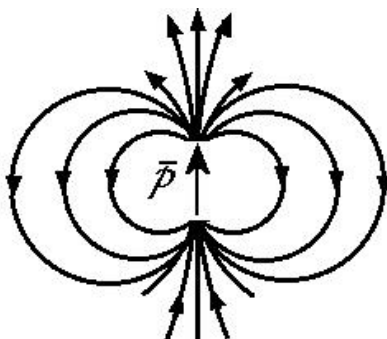
y

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_{\text{dip}} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) = -\frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

De acuerdo con esto, el campo de un dipolo se puede ver como:

$$\vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi \epsilon_0} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{r}_u + -\frac{p}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{\theta}_u \quad (1.86)$$

teniendo componentes en  $\mathbf{r}$  y en  $\theta$ , más no en  $\phi$ . Si tuviéramos un dipolo, el campo producido por este se vería de la siguiente forma:



El campo monopolar sería lineal hacia afuera o hacia adentro, dependiendo de si la carga neta es positiva o negativa. En resumen, todo lo anterior nos dice que a un campo, por muy complejo que sea, se le puede sumar el campo de fuentes elementales y reproducir el mismo campo complejo. Es decir, se puede ver como la superposición de fuentes elementales.

## CAMPO ELÉCTRICO EN LA MATERIA

### POLARIZACIÓN

La polarización quiere decir que las cargas positivas y negativas en las moléculas que conforman a la materia, por algún proceso, se desplazan de su estado de equilibrio, formando un dipolo eléctrico elemental. Se reconocen dos tipos de polarización: 1) *Inducida* y 2) *Permanente*.

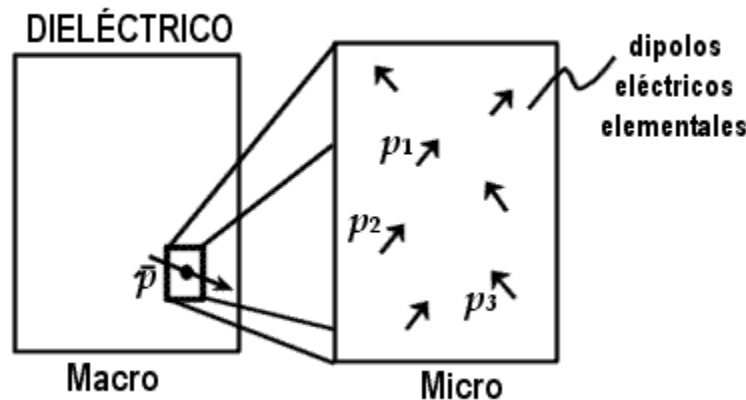
La polarización inducida es debida a la existencia de un campo exterior al cuerpo. Este campo, al actuar sobre las moléculas, ocasiona que las cargas negativas y positivas se salgan de su posición de equilibrio, formando así un dipolo elemental. La polarización

inducida sólo es igual con cero si el campo externo es cero. Los procesos que inducen esta formación pueden ser de tres tipos:

- 1) *Iónica*: a nivel atómico, las cargas positivas quedan separadas de las negativas por una distancia **L** infinitamente pequeña.
- 2) *Electrónica*: el electrón se sale de su posición de equilibrio por la acción del campo, no coincidiendo con la carga positiva.
- 3) *Orientación*: los dipolos eléctricos ya existen dentro de la materia pero se encuentran orientados erráticamente hasta el momento en que la acción de un campo exterior los orienta en una dirección preferencial, dando por resultado un efecto neto distinto de cero.

La polarización permanente, como su nombre lo dice, se refiere a dipolos ya existentes en la materia de forma permanente con un efecto neto distinto de cero y, por lo tanto, producen un campo eléctrico. A los cuerpos que presentan una polarización eléctrica permanente se les llama *electros*. Su característica es que  $\mathbf{P} \neq 0$  independientemente de si el campo exterior es o no cero. Por ende, un cuerpo que presenta una polarización permanente también puede presentar una polarización inducida, pero la permanente va a subsistir sin cambio aunque el campo exterior desaparezca.

La polarización no trata con cargas libres, es decir, el cuerpo no es un conductor de electricidad. Ésta sólo saca a las cargas de su posición de equilibrio, creando en los cuerpos dipolos eléctricos elementales. Desde este punto de vista, cuando se desea estudiar un cuerpo desde una escala macroscópica, primero se toma un volumen elemental de ese cuerpo y se observa a escala microscópica.



A escala micro, lo que se observaría serían dipolos eléctricos. De esta manera se podría representar que el campo eléctrico producido por ese material dieléctrico es la contribución de la suma de los campos eléctricos bipolares de cada uno de esos dipolos eléctricos elementales:

$$\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle$$

Entonces, a escala macro, el campo eléctrico sería el promedio de los campos eléctricos elementales de cada uno de los dipolos. Por ejemplo, digamos que el cuerpo presenta una polarización, sin importar su tipo. Se sabe que la polarización es el fenómeno de formar dipolos eléctricos elementales. Pero la fuente que produce el campo, a escala macro, es la suma de cada uno de esos dipolos elementales. Por lo tanto, se puede hablar de un momento dipolar, y cada dipolo elemental va a presentar, pues, un momento dipolar (**momento =  $q\rho$** ).

Este proceso de sumar cada uno de los dipolos para obtener el campo en teoría es posible, pero en la práctica es muy complicado de llevar a cabo. De tal manera que se necesita un proceso que pueda manejar cantidades a escala macro. Para ello, se define a la polarización como un promedio. Pero, a diferencia del momento bipolar, la polarización es un vector macro que podría definirse de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{\text{no. de dipolos eléctricos}}{\text{Volumen}} \quad (1.87)$$

Con esta expresión se busca representar la contribución de cada uno de esos dipolos eléctricos en un elemento de volumen que presenta una polarización  $\bar{\mathbf{P}}$ . Esta polarización sería como si se hubiera sumado el valor del momento dipolar en forma vectorial de cada uno de los dipolos y se hubiera dividido entre el volumen elemental dentro del cual están encerrados. De esta forma se obtendría el valor de la polarización para ese punto en particular. De acuerdo con este razonamiento, la polarización se podría escribir de la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{d\bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{r}})}{d\mathbf{v}} \quad (1.88)$$

La diferencia radica en que ahora la polarización es un vector macro y da un valor puntual de ese volumen elemental. Posteriormente, se necesitaría encontrar el valor de la polarización por el mismo proceso en los demás puntos del dieléctrico hasta obtener el valor de la polarización en todo el cuerpo. Conociendo, pues, el valor de la polarización como un vector macro, se puede calcular al momento dipolar como:

$$\bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{r}}) = \int_V \bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{r}}) d\mathbf{v} \quad (1.89)$$

Entonces, la fuente que produce un campo  $\bar{\mathbf{E}}$  en un dieléctrico, a una escala macro, es la polarización ( $\bar{\mathbf{P}}$ ). A escala micro, la fuente serían los dipolos eléctricos elementales ( $\bar{\mathbf{p}}$ ). A continuación se presenta una tabla en la cual se resume los conceptos anteriores:

Escala	MACRO	MICRO
Fuente	$\vec{P}$	$\vec{p}$
Campo	$\vec{E}_p$	$\vec{e}_d$
Relación	$\vec{E}_p = \langle \vec{e}_d \rangle$	
Ecuaciones de campo		$\nabla \cdot \vec{e}_d \neq 0$ $\nabla \times \vec{e}_d = 0$

Según el teorema de Helmholtz, para conocer un campo, se necesita establecer sus ecuaciones de campo. Si tomamos en cuenta la relación  $\vec{E}_p = \langle \vec{e}_d \rangle$ , podemos escribir al rotacional de  $\vec{E}$  como:

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \langle \vec{e}_d \rangle = \langle \nabla \times \vec{e}_d \rangle \quad (1.90)$$

donde el operador nabla es un operador lineal. Si se asume la ecuación 1.90 a escala macro, entonces quiere decir que

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

De la misma manera, lo que se puede establecer hasta el momento es que la divergencia de  $\vec{E}$  es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \langle \nabla \cdot \vec{e}_d \rangle \neq 0 \quad (1.91)$$

Por lo tanto, se tiene un campo conservativo y proviene de

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

Obviamente,  $\vec{E}$  debe de estar relacionado a la fuente

$$\nabla \cdot \vec{E} \propto \vec{P}$$

El teorema de Helmholtz también nos dice que campos que satisfacen misma forma de ecuaciones de campo, el tratamiento matemático es el mismo. Aplicando por analogía las ecuaciones obtenidas en el campo electrostático (caso similar al que se tiene aquí para la materia dieléctrica):

$$\nabla \cdot \vec{E}_e = \frac{\rho_F}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E}_e = 0$$

se propone que



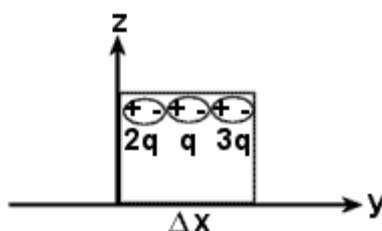
$$\nabla \cdot \vec{E}_p = \frac{\rho_b}{\epsilon_0} \quad (1.92)$$

donde  $\rho_b$  recibirá el nombre de *densidad volumétrica de carga ligada*. La existencia real de esta proposición no es importante, ya que su utilidad proviene de la similitud que guarda con las ecuaciones de campo del caso electrostático con las de la polarización. De la misma manera, también se puede proponer que  $\rho_b$  forzosamente debe de ser igual a un escalar, con el fin de darle similitud a la ecuación. Entonces,  $\rho_b$  (escalar) se debe de relacionar con la polarización (vector) de la siguiente manera:

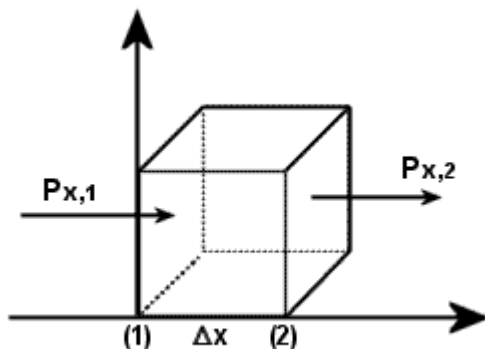
$$\rho_b \propto \nabla \cdot \vec{P} \quad (1.93)$$

Si se reconoce que la divergencia de  $\vec{E}$  es una fuente y que la polarización es otra fuente (ya que si la polarización no existe, el campo es cero), entonces la relación anterior debe de ser válida. Además, esta aplicación estaría también validada con base en el teorema de Helmholtz.

Por ejemplo, se toman dos volúmenes elementales:



Teóricamente, en el momento en que se polariza, y por tanto hay dipolos eléctricos elementales, se crea un exceso de carga dentro del dieléctrico. Es decir, se tienen dipolos eléctricos elementales dentro del volumen los cuales no necesariamente van a tener el mismo momento dipolar, por mucho que sus distancias puedan ser iguales. De acuerdo con lo anterior, se dice que el cuerpo, mientras la polarización está actuando, presenta un exceso de carga (donde cada dipolo puede tener una carga diferente  $q$ ,  $2q$ ,  $3q$ , etc.). Si esto es así, se propone que



En el punto (1), la polarización sería  $\mathbf{P}_{x,1}$  y su flujo sería  $\mathbf{P}_{x,1}\Delta y\Delta z$ . En el punto (2) se tendría que la polarización es:

$$\mathbf{P}_{x,2} = \mathbf{P}_{x,1} + \frac{\partial \mathbf{P}_{x,1}}{\partial x} \Delta x \quad (1.94)$$

y su flujo sería:

$$\left( \mathbf{P}_{x,1} + \frac{\partial \mathbf{P}_{x,1}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \quad (1.95)$$

Entonces, el flujo neto en la dirección  $x$  sería:

$$\mathbf{P}_{x,1}\Delta y\Delta z - \left( \mathbf{P}_{x,1} + \frac{\partial \mathbf{P}_{x,1}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z = -\frac{\partial \mathbf{P}_{x,1}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.96)$$

Para escribir esta ecuación en su forma general, se elimina el (1) de la escritura y quedaría como:

$$\text{flujo neto en la dirección } x = -\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.97)$$

Por un razonamiento similar, se puede establecer el flujo neto en la dirección  $Y$  y en la dirección  $Z$ :

$$\text{flujo neto en la dirección } y = -\frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{flujo neto en la dirección } z = -\frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

De igual forma, el flujo neto general sería:

$$\left( -\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \right) \Delta v = Q_b \quad (1.98)$$

donde la carga total ligada es:

$$Q_b = \rho_b \Delta v \quad (1.99)$$

Esto implicaría que

$$\left( -\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \right) \Delta v = \rho_b \Delta v \quad (1.100)$$

y, por lo tanto,

$$\rho_b(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) \quad (1.101)$$

Con esto se tiene que las ecuaciones de campo para el campo electrostático en la materia se puede proponer como:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}_p &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E}_p &= -\frac{\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.102)$$

Por lo tanto,

$$\vec{E} = -\nabla \phi_p(\vec{r}) \quad (1.103)$$

donde

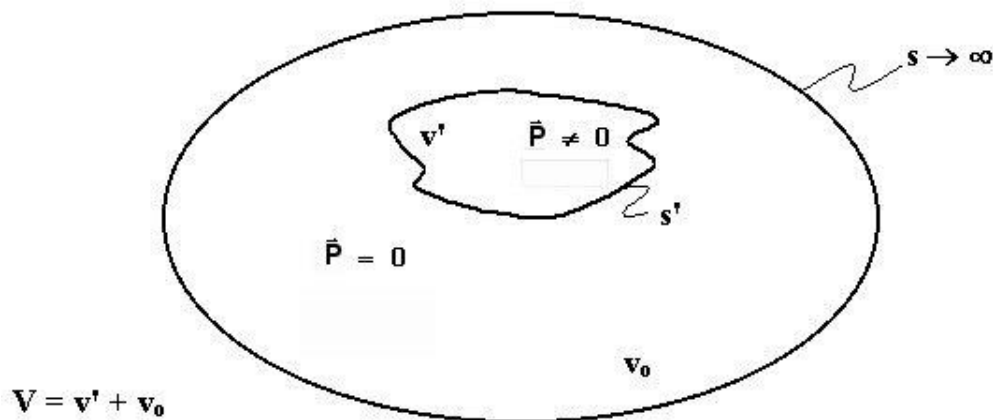
$$\phi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv \quad (1.104)$$

Si sustituimos a la ecuación 1.103 en 1.102, nos daría una ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi_p(\vec{r}) = \frac{\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\epsilon_0} \quad (1.105)$$

Para aumentar la utilidad de la función potencial (ya que opera sobre todo el espacio), se podría modificar utilizando una propiedad del cálculo vectorial:

$$\nabla \cdot [\vec{u} \vec{A}] = \nabla \vec{u} \cdot \vec{A} + \vec{u} \nabla \cdot \vec{A}$$



Si decimos que  $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{P}}$  y que  $\mathbf{u} = \frac{1}{\mathbf{R}}$ , donde  $\mathbf{R}$  es el vector de posición relativa, obtendremos lo siguiente:

$$\nabla' \cdot \left[ \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\mathbf{R}} \right] = \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} + \frac{\nabla' \cdot \bar{\mathbf{P}}}{\mathbf{R}} \quad (1.106)$$

Despejando esta ecuación, obtenemos la siguiente equivalencia:

$$\frac{\nabla' \cdot \bar{\mathbf{P}}}{\mathbf{R}} = -\nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} + \nabla' \cdot \left[ \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\mathbf{R}} \right] \quad (1.107)$$

Entonces, la función potencial es:

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} d\mathbf{v} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \left[ \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\mathbf{R}} \right] d\mathbf{v} \quad (1.108)$$

Del teorema de la Divergencia se sabe que:

$$\int_V \nabla' \cdot \left[ \frac{\bar{\mathbf{P}}}{\mathbf{R}} \right] d\mathbf{v} = \oint_S \frac{\bar{\mathbf{P}} \cdot d\bar{\mathbf{s}}}{\mathbf{R}} \equiv 0 \quad (1.109)$$

ya que  $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$  en la región  $s$ . Entonces, la función potencial sería igual a:

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} d\mathbf{v} \quad (1.110)$$

Esta integral abarca todo el espacio, por lo que se puede dividir en integrales que abarquen cada una de las regiones:

$$\int_V -\nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} d\mathbf{v} = \int_{V'} \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} d\mathbf{v}' + \int_{V_0} \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} d\mathbf{v}_0 \quad (1.111)$$

Pero  $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$  en  $V_0$ , por lo que la segunda integral sería igual con cero. De esta forma, se ha logrado reducir la función potencial a la región donde si hay polarización:

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} d\mathbf{v}' \quad (1.113)$$

Al utilizar esta representación intrínsecamente estamos diciendo que la función potencial es la suma de los potenciales elementales de cada uno de los dipolos eléctricos. Conociendo que

$$\nabla' \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{R} = \frac{\vec{r}_u}{R^2}$$

entonces la función potencial se puede expresar como

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{P} \, dv'}{R} \quad (1.114)$$

donde  $\vec{P} \, dv'$  es la *diferencial del momento dipolar*. Si

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$

$$d\vec{p} = \rho dv$$

se tiene que

$$\phi_P(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}_u}{R^2} \quad (1.115)$$

que es igual a la función potencial de los dipolos elementales:

$$\phi_P(\vec{r}) = \int_{V'} \phi_d(\vec{r}') \quad (1.116)$$

Sin embargo, no es la única representación que puede tener nuestra función potencial. De la relación vista en la ecuación 1.106, se puede ver que

$$\nabla' \frac{1}{R} \cdot \vec{P} = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{R} + \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{P}}{R} \right]$$

Por ende,

$$\int_{V'} \nabla' \frac{1}{R} \cdot \vec{P} \, dv' = \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{R} \, dv' + \int_{V'} \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{P}}{R} \right] dv' \quad (1.117)$$

Del teorema de la divergencia se sabe que:

$$\int_{V'} \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{P}}{R} \right] dv' = \oint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{s}'}{R} \quad (1.118)$$

por lo que resulta que la función potencial también se puede ver como:

$$\varphi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\vec{v}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \quad (1.119)$$

Esta es la tercera representación que puede tener nuestra función potencial, la cual permite una visualización más sencilla de los campos. Cuando la utilizamos, asumimos que estamos tratando con cargas:

$$\nabla \cdot \vec{P} = \rho_b$$

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \delta_b$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal a la región y  $\delta_b$  es la densidad superficial de cargas ligadas. Cuando usamos esta representación, estamos asumiendo que la función potencial la podemos deducir a partir de considerar cargas ligadas. Habrá que recordar que  $\rho_b$  y  $\delta_b$  son ficticias y son sólo parte de una nomenclatura. Resulta, pues, que nuestras ecuaciones también se pueden escribir de forma válida como:

$$\nabla \times \vec{E}_P(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_P(\vec{r}) = \frac{\rho_b(\vec{r}')}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_P(\vec{r}) = -\nabla\varphi_P(\vec{r})$$

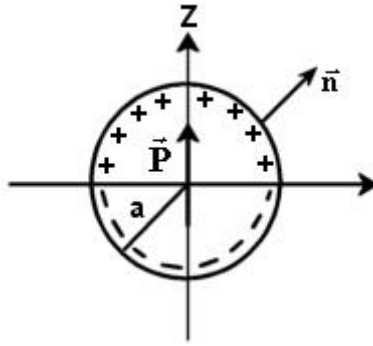
$$\varphi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\vec{v}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\delta_b(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\vec{v}'$$

$$\nabla^2 \varphi_P(\vec{r}) = \frac{-\rho_b(\vec{r}')}{\epsilon_0}$$

Estas ecuaciones han sido deducidas bajo la condición de que existe una polarización, sin hacer énfasis en ningún tipo en especial. Por ende, resultan válidas para el caso general, es decir, para ambos tipos.

### EJEMPLO 1.3

Encuentre el campo  $\vec{E}_P$  producido por una esfera de radio  $a$  que presenta una polarización  $\vec{P} = P_0 \vec{k}$ , donde  $P_0$  es una constante.

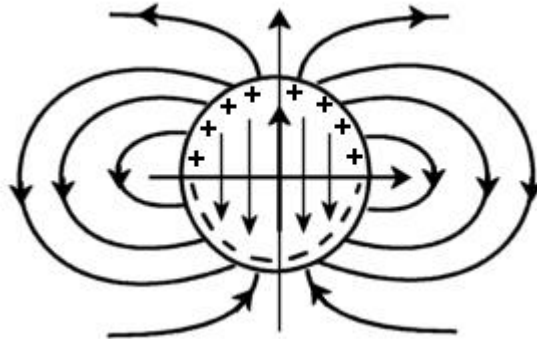


Para encontrar la solución al problema se pueden usar tres tipos de representaciones principalmente: la representación de volumen, la de dipolos eléctricos o la de cargas. En este caso se iniciará utilizando la representación por cargas, por lo que su divergencia y vector normal serán igual a:

$$\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = P_0 \vec{k} \cdot \vec{n} = P_0 \cos \theta = \delta_b$$

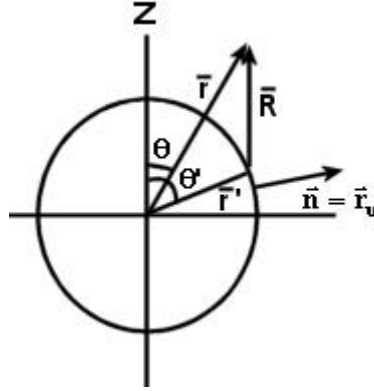
donde  $\delta_b$  es la densidad superficial de carga ligada. El campo exterior creado por la distribución superficial de las cargas ligadas se esperaría visualizar como:



Indudablemente, existe un campo en el interior de la esfera que va en dirección contraria a la polarización. Lo siguiente sería encontrar su expresión. Al decidir utilizar la representación por cargas, la expresión del potencial quedaría de la siguiente manera:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\vec{P} \cdot \vec{n} ds}{R} \quad (1.120)$$

En forma gráfica, el problema se puede ver así:



donde  $\mathbf{R}$  estaría dada por:

$$\mathbf{R} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}$$

Como se definió en un principio,  $\mathbf{P}_0$  es un vector constante y puede salir de la integral, por lo que  $\phi$  puede expresarse en coordenadas esféricas como:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{\mathbf{P}} \cdot \int_s \frac{\bar{\mathbf{n}} ds}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} \quad (1.121)$$

donde el vector normal, en general, se puede expresar como:

$$\bar{\mathbf{n}} = \sin\theta \cos\phi \bar{\mathbf{i}} + \sin\theta \sin\phi \bar{\mathbf{j}} + \cos\theta \bar{\mathbf{k}}$$

Si sustituimos este valor de  $\bar{\mathbf{n}}$  en  $\phi$ , resultaría que:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{\mathbf{P}} \cdot \left[ \int_s \frac{\sin\theta' \cos\phi' ds \bar{\mathbf{i}}}{R} + \int_s \frac{\sin\theta' \sin\phi' ds \bar{\mathbf{j}}}{R} + \int_s \frac{\cos\theta' ds \bar{\mathbf{k}}}{R} \right] \quad (1.122)$$

donde  $ds = a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$ . De acuerdo con esto, se tendría que las primeras dos integrales serían igual:

$$\int_s \frac{\sin\theta' \cos\phi' ds}{R} = \int_0^\pi \frac{a^2 \sin\theta'}{R} d\theta' \int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' \equiv 0$$

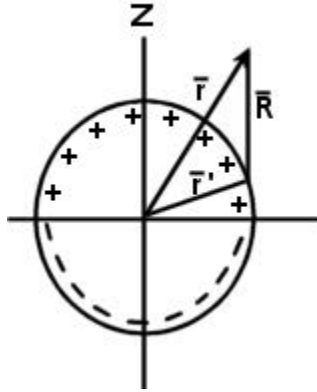
$$\int_s \frac{\sin\theta' \sin\phi' ds}{R} = \int_0^\pi \frac{a^2 \sin\theta'}{R} d\theta' \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' \equiv 0$$

Entonces, la función potencial puede expresarse así:

$$\phi = \frac{\mathbf{P}_0 a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta' \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} \quad (1.123)$$



Esta integral sería la forma general de la función potencial y su geometría se visualizaría gráficamente de la siguiente forma:



Pero utilizar esta representación para resolver el problema para cualquier punto en el espacio aún es difícil de resolver, ya que la simetría dependería en gran medida de la posición del punto de observación. Por lo tanto, para encontrar la solución a la integral que sea útil para cualquier punto del espacio se va a recurrir a la representación por dipolos eléctricos, en la cual se tiene que la expresión del potencial es la siguiente:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \nabla' \cdot \frac{1}{R} \cdot \bar{P} dv' \quad (1.124)$$

Recordando que  $\bar{P}$  es un vector constante y que el producto punto es un producto conmutativo, se tiene que el potencial se puede expresar también así:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{P} \cdot \int_{V'} \nabla' \frac{1}{R} dv' \quad (1.125)$$

En segunda instancia, se recordará que  $\nabla' \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{R}$  con respecto a coordenadas de campo, por lo que

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{P} \cdot \int_V \nabla \frac{1}{R} dv = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{P} \cdot \nabla \int_V \frac{dv}{R} \quad (1.126)$$

La geometría sigue siendo la misma, donde  $R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}$ . Por ende, la función potencial, expresada en coordenadas esféricas, se puede ver como:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{P} \cdot \nabla \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} \quad (1.127)$$

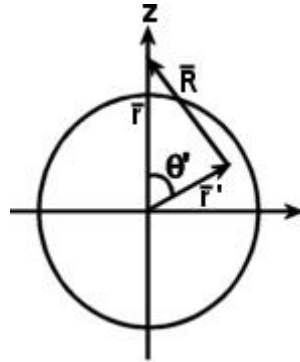
La primera integral puede resolverse de una forma muy sencilla, ya que nada depende de  $\phi$ , por lo que la función se vería como

$$\phi = -\frac{1}{2\epsilon_0} \bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \int_0^a \int_0^\pi \frac{r'^2 \sin\theta' dr' d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} \quad (1.128)$$

La integral  $\int_{\mathbf{v}'} d\mathbf{v}'/R$  de la ecuación 1.126 ya se ha manejado en ejemplos anteriores y tiene la ventaja de ser indistinta ya que la esfera es perfecta y su masa se puede manejar constante. Por lo tanto se puede resolver para puntos localizados sobre el eje  $z$  y así facilitar su resolución. Posteriormente a que se haya resuelto, se intercambia a  $z$  por  $r$  y así obtener el resultado que sea válido para cualquier punto del espacio. De acuerdo con lo anterior, la función potencial se puede expresar como:

$$\phi = -\frac{1}{2\epsilon_0} \bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \int_0^a \int_0^\pi \frac{r'^2 \sin\theta' dr' d\theta'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos(\theta')}} \quad (1.129)$$

La geometría que se tiene ahora se puede visualizar así:



Dividiendo las integrales,  $\phi$  también se puede ver como:

$$\phi = -\frac{1}{2\epsilon_0} \bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \int_0^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos(\theta')}} \quad (1.130)$$

Si nos concentramos primeramente en la resolución de la integral interior, y realizando un cambio de variable, se tiene que

$$u = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'$$

$$du = 2zr' \sin\theta' d\theta'$$

	$\theta' \rightarrow 0$	$u = (z - r')^2$
cuando	$\theta' \rightarrow \pi$	$u = (z + r')^2$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr'\cos(\theta')}} &= \frac{1}{2zr'} \int_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\
 &= \frac{1}{2zr'} \left( 2\sqrt{u} \right)_{(z-r')^2}^{(z+r')^2} \\
 &= \frac{1}{zr'} \left[ |z+r'| - |z-r'| \right]
 \end{aligned} \tag{1.131}$$

Entonces, te tendría que la expresión del potencial, anexando la resolución de la primera integral, sería:

$$\phi = -\frac{1}{2\epsilon_0} \vec{P} \cdot \nabla \frac{1}{z} \int_0^a r' \left[ |z+r'| - |z-r'| \right] dr' \tag{1.132}$$

Esta integral puede resolverse más fácilmente si se divide el espacio para el exterior y para el interior de la esfera. Cuando  $z > a$ , se tiene que el potencial es igual a:

$$\begin{aligned}
 \phi_{\text{ext}}(\vec{r}) &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \vec{P} \cdot \nabla \frac{1}{z} \int_0^a r' [z+r'-z+r'] dr' \\
 &= -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \cdot \nabla \frac{1}{z} \int_0^a r'^2 dr' \\
 &= -\frac{a^3}{3\epsilon_0} \vec{P} \cdot \nabla \frac{1}{z}
 \end{aligned} \tag{1.133}$$

Intercambiando la  $z$  por  $r$ , se obtendría la función potencial en el exterior de la esfera para cualquier punto en el espacio:

$$\begin{aligned}
 \phi_{\text{ext}}(\vec{r}) &= -\frac{a^3}{3\epsilon_0} \vec{P} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{-P_0 a^3}{3\epsilon_0} \vec{k} \cdot \nabla \frac{1}{r} \\
 &= \frac{-P_0 a^3}{3\epsilon_0} \vec{k} \cdot \left( -\frac{\vec{r}_u}{r^2} \right) \\
 \phi_{\text{ext}}(\vec{r}) &= \frac{P_0 a^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}_u}{r^2} \quad z > a
 \end{aligned} \tag{1.134}$$

donde  $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}_u}{r^2}$ .

Este resultado muestra al campo exterior como el campo producido por un dipolo ubicado en el punto central de la esfera de polarización constante, y orientado en la dirección vertical.

Recordando una vez más la expresión general del potencial (ecuación 1.132):

$$\phi = -\frac{1}{2\epsilon_0} \vec{P} \cdot \nabla \frac{1}{z} \int_0^a \mathbf{r}' [|z + \mathbf{r}'| - |z - \mathbf{r}'|] d\mathbf{r}'$$

tenemos que el cálculo de la función potencial para el interior de la esfera se vería de la siguiente manera. Se resuelve primeramente la integral dividiéndola en dos regiones, una que abarca de 0 al punto en el eje  $z$  y de  $z$  a  $a$ :

$$\begin{aligned} \int_0^a \mathbf{r}' [|z + \mathbf{r}'| - |z - \mathbf{r}'|] d\mathbf{r}' &= \int_0^z \mathbf{r}' [|z + \mathbf{r}'| - |z - \mathbf{r}'|] d\mathbf{r}' + \int_z^a \mathbf{r}' [|z + \mathbf{r}'| - |z - \mathbf{r}'|] d\mathbf{r}' \\ &= \int_0^z 2\mathbf{r}'^2 d\mathbf{r}' + \int_z^a 2z\mathbf{r}' d\mathbf{r}' = \frac{2}{3} z^3 + z(a^2 - z^2) \end{aligned}$$

Aplicando este resultado a la expresión del potencial se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{int}} &= \frac{-\mathbf{P}_0}{2\epsilon_0} \vec{k} \cdot \nabla \left[ \frac{2z^2}{3} + (a^2 - z^2) \right] \\ &= \frac{-\mathbf{P}_0}{\epsilon_0} \vec{k} \cdot \nabla \left[ \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{a^2}{2} \right] = \frac{-\mathbf{P}_0}{\epsilon_0} \vec{k} \cdot \nabla \left[ \frac{-z^2}{6} + \frac{a^2}{2} \right] \\ &= \frac{\mathbf{P}_0}{\epsilon_0} \vec{k} \cdot \nabla \frac{z^2}{6} = \frac{\mathbf{P}_0}{6\epsilon_0} \vec{k} \cdot \nabla r^2 = \frac{\mathbf{P}_0}{3\epsilon_0} \vec{k} \cdot \vec{r} \\ \phi_{\text{int}} &= \frac{\mathbf{P}_0}{3\epsilon_0} z \end{aligned} \tag{1.135}$$

Para obtener la expresión del potencial para cualquier punto interior de la esfera, simplemente se intercambia  $z$  por  $r$ :

$$\phi_{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{\mathbf{P}_0}{3\epsilon_0} r \tag{1.136}$$

El cálculo del campo eléctrico para cada uno de los casos se sigue realizando de la misma forma que en ejemplos anteriores. De acuerdo con eso, el campo exterior se puede ver así:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) &= -\nabla\phi_{\text{ext}}(\vec{r}) \\
&= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{P}_0 \cos\theta}{3\epsilon_0 r^2}\right)\vec{r}_u - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mathbf{P}_0 \cos\theta}{3\epsilon_0 r^2}\right)\vec{\theta}_u \\
&= \frac{\mathbf{P}_0}{3\epsilon_0}\frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{r}_u + \frac{\mathbf{P}_0}{3\epsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}\vec{\theta}_u
\end{aligned} \tag{1.137}$$

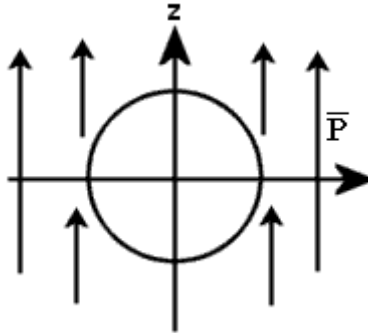
Esta expresión presenta un campo producido por un dipolo localizado en el centro de una esfera. En el caso del campo interior a la esfera, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{\text{int}}(\vec{r}) &= -\nabla\phi_{\text{int}}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{P}_0}{3\epsilon_0}r\right)\vec{r}_u \\
&= -\frac{\mathbf{P}_0}{3\epsilon_0}\vec{r}_u
\end{aligned} \tag{1.138}$$

El signo negativo de la expresión resultante para el campo interior nos indica que las líneas de fuerza de este campo van en sentido contrario a la polarización, idea que se había deducido desde el principio del ejemplo.

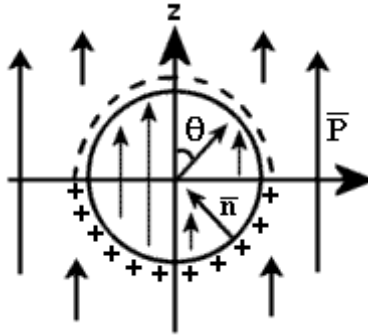
#### EJEMPLO 1.4

Encuentre el campo  $\mathbf{E}$  en el centro de una cavidad esférica inmersa dentro de un dieléctrico que presenta una polarización  $\vec{P} = \mathbf{P}_0\vec{k}$ , donde  $\mathbf{P}_0$  es una constante.



En la superficie de la cavidad esférica están en contacto dos medios distintos, uno que está polarizado y otro que no lo está. Por lo tanto, se va a generar una distribución de cargas ligadas en la superficie de separación entre ambos medios. La carga ligada volumétrica sería cero ( $\rho_b = 0$ ) ya que  $\mathbf{P}_0$  es una constante, por lo cual al calcular su divergencia sería igual a cero. En cambio, la densidad superficial de carga ligada se definiría como la polarización por el producto punto del vector normal exterior ( $\delta_b = \vec{P} \cdot \vec{n} = \mathbf{P}\cos\theta$ ). El vector normal es exterior a región del cuerpo que presenta la

polarización (es decir, el dieléctrico), por lo que estará orientado en dirección hacia el centro de la esfera. Las cargas eléctricas estaría posicionadas al contrario que en el ejemplo anterior (negativas arriba y positivas abajo), ya que el ángulo que forma el  $\mathbf{P} \cos \theta$  con respecto a la dirección del vector normal es mayor de  $90^\circ$ , donde  $\theta$  es el ángulo medido con respecto al eje  $z$ . Por ende, la dirección del campo al interior de la cavidad iría en la misma dirección del vector de la polarización. Esto debido a la forma en que las cargas fueron inducidas.



Tomando en cuenta los elementos deducidos hasta el momento, la mejor manera de resolver el problema sería utilizando la función potencial, la cual se define como (ecuación 1.120):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{s}}{R}$$

El producto anterior sería igual a:

$$\varphi = \frac{-P_0}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\cos \theta' ds'}{R} \quad (1.139)$$

El problema nos pide encontrar el valor del potencial en el centro de la cavidad; por lo tanto, para un punto en el centro de la esfera, el vector de posición relativa  $\mathbf{R}$  sería igual a el radio de la esfera ( $\mathbf{R} = \mathbf{a}$ ). Entonces:

$$\varphi = \frac{-P_0}{4\pi\epsilon_0 a} \oint_S \cos \theta' ds' \quad (1.140)$$

Resolviendo la integral, se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_S \cos \theta' ds' &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \cos \theta' \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= a^2 2\pi \int_0^\pi \cos \theta' \sin \theta' d\theta' \end{aligned} \quad (1.141)$$

Realizamos un cambio de variable, donde

$$u = \cos\theta$$

$$du = -\sin\theta d\theta$$

$$\begin{array}{ll} \text{cuando} & \theta' \rightarrow 0 \quad u = 1 \\ & \theta' \rightarrow \pi \quad u = -1 \end{array}$$

Si

$$\int_0^\pi \cos\theta' \sin\theta' d\theta' = \int_{-1}^{+1} u du \equiv 0 \quad (1.142)$$

Entonces la función potencial sería igual a cero ( $\varphi(\vec{r}) = 0$ ). Este resultado es lógico ya que las cargas positivas y negativas están posicionadas a distancias equidistantes del punto en el centro de la esfera, por lo que se anularían. Pero esto no implica que el campo también sea cero, ya que sólo se calculó el potencial para un punto específico que fue el centro de la esfera. Para comprobar esto se pueden utilizar dos procedimientos: calcular el potencial para cualquier punto del espacio para el interior de la esfera, encontrando una integral difícil de resolver de ejemplos anteriores, u obtener el gradiente. Aquí se tiene la ventaja de que se busca el campo para un punto específico del espacio. Entonces, sabemos que el campo es  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \vec{E}_p(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \oint_s \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{R} ds' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \nabla \left[ \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{R} \right] ds' \end{aligned} \quad (1.143)$$

donde

$$\nabla \left[ \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{R} \right] = \nabla \frac{1}{R} (\vec{P} \cdot \vec{n}) + \frac{1}{R} \nabla (\vec{P} \cdot \vec{n})$$

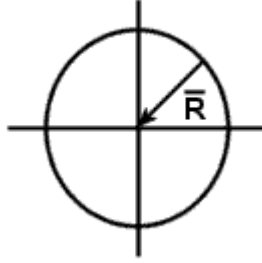
El gradiente de  $\vec{P} \cdot \vec{n}$  es igual a cero, ya que la segunda (que es la densidad de cargas ligadas) está definida sobre coordenadas de cuerpo mientras que nabla opera sobre coordenadas de campo. Si, además,

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\vec{r}_u}{R^2} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

entonces el campo puede verse de la siguiente manera:

$$\vec{E}_P(\vec{r}) = \frac{-P_0}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\cos\theta' \vec{R}_u}{R^3} ds \quad (1.144)$$

Para un punto en el centro de la esfera, el vector de posición relativa  $\mathbf{R}$  va de punto de campo a punto de fuente, es decir, hacia el centro de la esfera:



punto en donde  $\mathbf{R}^3 = a^3$ , y  $\vec{R} = a\vec{r}_u = a(-\text{sen}\theta' \cos\phi' \vec{i} - \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \vec{j} - \cos\theta' \vec{k})$ . Entonces, el campo  $\mathbf{E}$  se puede ver como:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-P_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos\theta' [-\text{sen}\theta' \cos\phi' \vec{i} - \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \vec{j} - \cos\theta' \vec{k}] a^2 \text{sen}\theta' d\theta' d\phi' \quad (1.145)$$

Las  $a^2$  se eliminan. Vemos que en coordenadas cartesianas tenemos dos integrales que van de  $0$  a  $2\pi$  las cuales son idénticamente con cero:

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \text{sen}\phi' d\phi' \equiv 0$$

Entonces, el campo queda como:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{-P_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta' \text{sen}\theta' d\theta' d\phi' \\ &= \frac{P_0}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2\theta' \text{sen}\theta' d\theta' \vec{k} \end{aligned} \quad (1.146)$$

Realizando un cambio de variable se tiene que:

$$u = \cos\theta'$$

$$du = -\text{sen}\theta' d\theta'$$

	$\theta' \rightarrow 0$	$u = 1$
cuando	$\theta' \rightarrow \pi$	$u = -1$



por lo que

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta' = \int_{-1}^{+1} u^2 du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{3} (2)$$

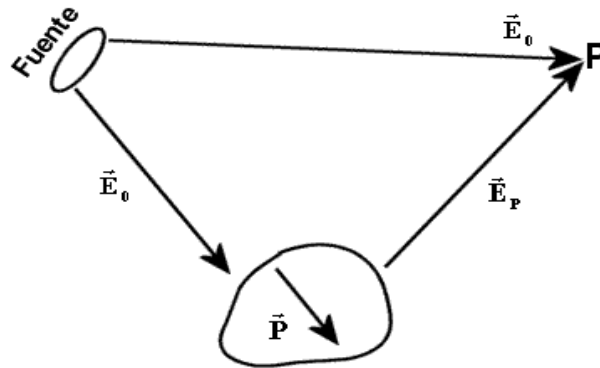
Entonces, finalmente queda que el campo eléctrico es igual a:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{P_0}{3\epsilon_0} \vec{k} \quad (1.147)$$

## CAMPO DE DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO

### Concepto de Campo Total

En temas anteriores se ha visto que un cuerpo que presenta una polarización produce un campo. Por ejemplo, se tiene una fuente que produce un campo primario  $\vec{E}_0$ , y que en un punto del espacio también existe un campo  $\vec{E}_0$ .



Bajo la acción de éstos, un medio dieléctrico se va a polarizar y va a producir un campo  $\vec{E}_P$ . El campo total que va a existir en el punto  $P$ , a final de cuentas, va a ser igual a la suma del campo producido por las fuentes y el campo producido por la polarización existente en el espacio ( $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P$ ), cumpliendo con el principio de la superposición. Por ende, sus ecuaciones de campo se pueden ver como:

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \vec{E}_0 + \nabla \times \vec{E}_P = 0$$

ya que se conoce que los rotacionales del campo primario y de la polarización son cero. En cambio, la divergencia sería igual a:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}_0 + \nabla \cdot \vec{E}_p$$

donde

$$\nabla \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_f(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{E}_p = \frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

Esto quiere decir que el campo total es un campo conservativo cuyas ecuaciones de campo son:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} + \frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Pero la carga total es igual a la carga libre más la carga ligada ( $\rho_t = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P}$ ), por lo que las ecuaciones del campo eléctrico se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_t(\vec{r})}{\epsilon_0} \tag{1.148}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

De acuerdo con el Teorema de Helmholtz, el campo  $\vec{E}$  provendría de

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi$$

donde

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_t(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv = \phi_0 + \phi_p \tag{1.149}$$

Es decir, el potencial total es la suma de dos potenciales simples, uno debido a la fuente y otro debido a la polarización. Por ende, si se conociera la carga total, el problema sería muy sencillo de resolver aplicando cualquiera de los métodos ya vistos. El problema estriba en que, para poder conocer la carga total, se necesita conocer a la polarización, pero ésta es función del mismo campo que se desea resolver.

Sin embargo, el *campo total* permite resolver un campo eléctrico a través de la definición del *campo de desplazamiento eléctrico*, el cual puede expresarse como:

$$\nabla \cdot [\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}] = \rho_f \tag{1.150}$$

Si definimos a este campo como  $\mathbf{D}$ :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.151)$$

se ve que la divergencia del campo de desplazamiento depende de la densidad de carga libre, más no de la polarización:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

Pero, de acuerdo con el Teorema de Helmholtz, se necesita conocer también la ecuación de su rotacional, el cual estaría dada por:

$$\nabla \times \vec{D} = \epsilon_0 \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \vec{P}$$

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$$

donde el rotacional del campo eléctrico total es cero ( $\nabla \times \vec{E} = 0$ ). Lo anterior nos dice que el campo de desplazamiento eléctrico da como resultado un campo complejo más difícil de trabajar, ya que tiene tanto fuentes escalares como fuentes de vórtice. Esto lleva a que  $\vec{D}$  satisfaga las siguientes relaciones de campo:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) \quad (1.152)$$

$$\nabla \times \vec{D}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{P}(\vec{r})$$

De acuerdo con el teorema de Helmholtz, debe de existir una función potencial y una función vectorial en la que se puede descomponer este campo:

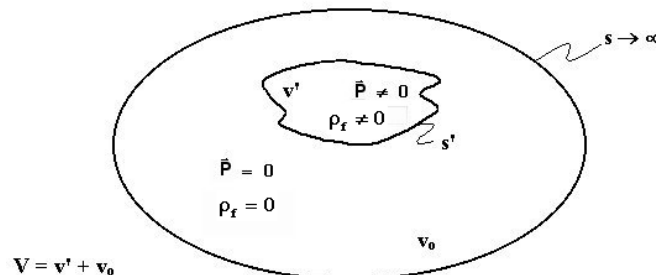
$$\vec{D}(\vec{r}) = -\nabla \phi_D(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}_D(\vec{r}) \quad (1.153)$$

donde

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_f(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\vec{v} \quad (1.154)$$

$$\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{P}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\vec{v}$$

Como se puede observar, estas integrales están llevadas sobre todo el espacio, sobre la región  $V$  que es igual a la suma de las regiones  $V'$  y  $V_0$ .



Esto no es muy conveniente, por lo que habría que llevarlas a una expresión donde solamente intervenga la región donde ambos vectores son distintos de cero. El potencial escalar es más sencillo de llevar, ya que:

$$\int_V \frac{\rho_f(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\mathbf{v} = \int_{V'} \frac{\rho_f}{R} d\mathbf{v}' + \int_{V_0} \frac{\rho_f}{R} d\mathbf{v}_0$$

donde la última integral es cero ya que  $\rho_f = 0$  en la región  $V_0$ . Por ende, el potencial escalar puede expresarse exclusivamente sobre la región donde existen cargas:

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho_f(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\mathbf{v}' \quad (1.155)$$

El segundo potencial es un poco más lento de trabajar. Del cálculo vectorial se tiene que:

$$\begin{aligned} \nabla' \times \left[ \frac{\vec{P}}{R} \right] &= \nabla' \frac{1}{R} \times \vec{P} + \frac{1}{R} \nabla' \times \vec{P} \\ \frac{\nabla' \times \vec{P}}{R} &= -\nabla' \frac{1}{R} \times \vec{P} + \nabla' \times \left[ \frac{\vec{P}}{R} \right] \end{aligned}$$

por lo que la función integral se puede escribir como:

$$\int_V \frac{\nabla' \times \vec{P}}{R} d\mathbf{v} = \int_V -\nabla' \frac{1}{R} \times \vec{P} d\mathbf{v} + \int_V \nabla' \times \left[ \frac{\vec{P}}{R} \right] d\mathbf{v}$$

Pero la última integral de volumen se puede escribir como una integral de superficie:

$$\int_V \nabla' \times \left[ \frac{\vec{P}}{R} \right] d\mathbf{v} = -\oint_S \frac{\vec{P} \times d\vec{s}}{R} = 0$$

ya que  $\vec{P} = 0$  en  $S$ . Por lo tanto, la integral de volumen se reduciría sólo a la primera integral, la cual también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int_V -\nabla' \frac{1}{R} \times \vec{P} d\mathbf{v} = \int_{V'} -\nabla' \frac{1}{R} \times \vec{P} d\mathbf{v}' + \int_{V_0} -\nabla' \frac{1}{R} \times \vec{P} d\mathbf{v}_0$$

Pero  $\vec{P} = 0$  dentro de la región  $V_0$ , reduciéndose así la función potencial vectorial a una integral de volumen sobre la región solamente ocupada por la fuente:

$$\mathbf{A}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \times \mathbf{P}(\vec{r}') d\mathbf{v}' \quad (1.156)$$

Esta expresión todavía puede modificarse utilizando la siguiente relación:

$$\nabla' \frac{1}{R} \times \vec{P} = \frac{\nabla' \times \vec{P}}{R} - \nabla' \times \frac{\vec{P}}{R}$$

Entonces

$$\int_{V'} \nabla' \frac{1}{R} \times \vec{P} dv' = \int_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{P}}{R} dv' - \int_{V'} \nabla' \times \left[ \frac{\vec{P}}{R} \right] dv'$$

Recordando que

$$- \int_{V'} \nabla' \times \left[ \frac{\vec{P}}{R} \right] dv' = \oint_{S'} \frac{\vec{P} \times d\vec{s}'}{R}$$

se obtiene que la función del potencial vectorial puede representarse también como una integral de volumen más una integral de superficie:

$$\begin{aligned} \vec{A}_D(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{P}}{R} dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{P} \times d\vec{s}'}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{P}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \times \vec{n}}{R(\vec{r}, \vec{r}')} ds' \end{aligned} \quad (1.157)$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal exterior a la región. Como se puede ver, el campo de desplazamiento  $\vec{D}$  es más complicado de resolver que el campo  $\vec{E}$ , ya que lleva implícita una función vectorial  $\vec{A}$  y una función escalar  $\phi$ . Éstas satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_D(\vec{r}) &= -\rho_f(\vec{r}) \\ \nabla^2 \vec{A}_D(\vec{r}) &= -\nabla \times \vec{P}(\vec{r}) \\ \vec{D}(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.158)$$

Esto implica que el medio es  $\epsilon_0$ . A la primera expresión de la función del potencial vectorial (ecuación 1.156) se le podría definir como el potencial de un dipolo vectorial por que, a final de cuentas, se puede expresar como:

$$-\nabla' \frac{1}{R} \times \vec{P} = \nabla \frac{1}{R} \times \vec{P} = \frac{-\vec{r}_u}{R^2} \times \vec{P} = \frac{\vec{P} \times \vec{r}_u}{R^2} \quad (1.159)$$

por lo que

$$\vec{A}_D = \int_{V'} \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{P} dv' \times \vec{r}_u}{R^2}$$

donde  $\vec{P}(\vec{r})d\vec{v} = d\vec{p}(\vec{r})$ , es decir al momento dipolar, por lo cual

$$\vec{A}_D = \int_V \frac{1}{4\pi} \frac{d\vec{p}(\vec{r}) \times \vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} \quad (1.160)$$

Cuando usamos esta representación, donde el cuerpo presenta una polarización, se está asumiendo intrínsecamente que el cuerpo está representado por dipolos que generan un campo. Cuando se utiliza la representación de la ecuación 1.157, donde a los productos cruz se les puede llamar

$$\nabla' \times \vec{P} = \vec{J}_p \rightarrow \text{corrientes de polarización volumétrica}$$

$$\vec{P} \times \vec{n} = \vec{k}_p \rightarrow \text{corrientes de polarización superficial}$$

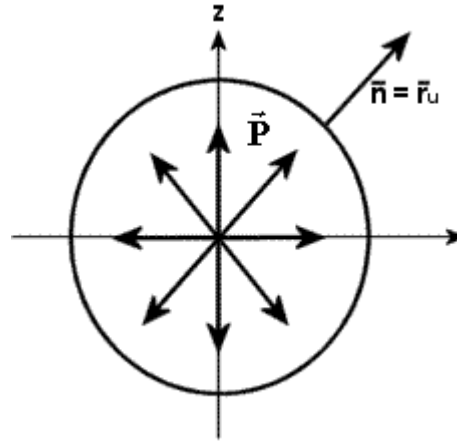
es como si se asimilara que el campo dieléctrico producido por la polarización es debido a corrientes volumétricas que proporcionan un desplazamiento al campo. En otras palabras, es como si se reemplazara al cuerpo por un conjunto de corrientes, tanto volumétricas como de superficie, que dan origen al campo de desplazamiento eléctrico. Estas corrientes obviamente no existen realmente en la naturaleza, son ficticias y se denominan así por similitud a fenómenos reales. Si se entiende por corrientes de conducción verdadera al transporte de carga, las anteriores no realizan esta acción; por lo tanto, el balance de todas las corrientes de polarización siempre debe de ser cero:

$$\int_V \vec{J}_p d\vec{v} + \oint_S \vec{k}_p d\vec{s} = 0$$

Como se puede ver, las dos representaciones del potencial vectorial son disímiles en cuanto a su representación del cuerpo, pero ambas producen el mismo resultado.

### EJEMPLO 1.6

Una esfera de radio  $a$  presenta una polarización  $\vec{P} = \alpha r^\eta \vec{r}_u$ , donde  $\alpha$  y  $\eta$  son constantes. Encuentre  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  dentro y fuera de la esfera.



De acuerdo con su ecuación, se puede ver que la esfera presenta una polarización radial, y que el campo  $\vec{E}$  seguiría las siguientes reglas:

$$\nabla \cdot \vec{E}_p = -\frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E}_p = 0$$

Se sabe que la función potencial se puede encontrar como la suma de la distribución de cargas volumétricas más la distribución de cargas ligadas superficiales (ecuac. 1.119):

$$\phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}}{R} dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{R} ds'$$

Al tener una polarización de tipo radial, ésta sólo va a depender de su componente en  $\mathbf{r}$ , por lo que las demás componentes van a ser igual a  $\mathbf{P}_\theta = \mathbf{P}_\phi = 0$ . Resolviendo, pues, la integral de la carga volumétrica se tiene que:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \vec{P} = \rho_b &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \alpha r^\eta) \\ \rho_b(\vec{r}) &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha r^{\eta+2}) \\ &= -\frac{\alpha}{r^2} (\eta+2) r^{\eta+1} \\ &= -(\eta+2) \alpha r^{\eta-1} \end{aligned} \tag{1.161}$$

La carga ligada superficial es igual a:

$$\delta_b = \vec{P} \cdot \vec{n} = \alpha a^\eta \tag{1.162}$$

donde  $\bar{n}$  es el vector normal exterior a la superficie. Estos resultados nos hablan de la existencia de una densidad de cargas positivas en la superficie de la esfera y de cargas negativas que dependen de  $\eta$  en el interior.



Para analizar el campo en el exterior, se podría dibujar una superficie gaussiana afuera de la esfera, pero no se podría encontrar ningún campo  $\bar{E}$  ya que se conoce que el balance total de las cargas ligadas encerradas por la superficie es igual a cero. En cambio, si se colocara una superficie gaussiana en el interior de la esfera, ésta sólo encerraría cargas negativas, por lo que sí se podría encontrar un campo por medio del teorema de Gauss. Por ende, del teorema de Gauss obtenemos que:

$$\int_S \mathbf{E}_P \cdot d\bar{s} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_b dv \quad (1.163)$$

Entonces, el campo eléctrico debido a la polarización sería igual a:

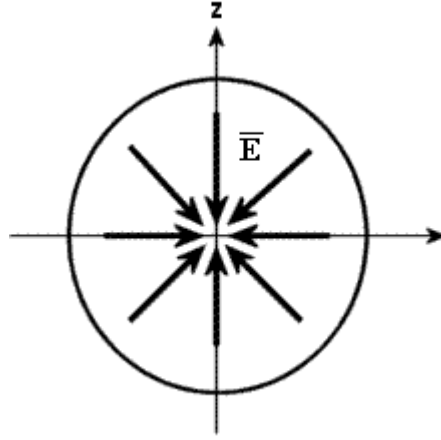
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P 4\pi r^2 &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -(\eta+2)\alpha r'^{\eta-1} r'^2 dr' d\theta' \sin\theta' d\phi' \\ &= -\frac{4\pi}{\epsilon_0} \alpha(\eta+2) \int_0^r r'^{\eta+1} dr' \\ &= -\frac{4\pi}{\epsilon_0} \alpha(\eta+2) \left( \frac{1}{\eta+2} r'^{\eta+2} \right) \Big|_0^r \\ &= -\frac{4\pi}{\epsilon_0} \alpha r^{\eta+2} \\ \mathbf{E}_P &= -\frac{\alpha}{\epsilon_0} \mathbf{r}^\eta \end{aligned} \quad (1.164)$$

Si se deseara ver en forma de vector se tendría que:



$$\vec{E}_p(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{\epsilon_0} \vec{r}^u \vec{r}_u = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \quad (1.165)$$

El signo negativo en esta expresión nos daría a entender que el campo  $\vec{E}$  en el interior de la esfera va en sentido contrario a la polarización.



Si ahora se calcula al campo de desplazamiento, se tiene que éste proseguiría las siguientes reglas:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$$

$$\vec{D} = \nabla \times \vec{A}_D$$

donde (ecuac. 1.157) 
$$\vec{A}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{P}}{R} dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{P} \times \vec{n}}{R} ds'$$

Al calcular el producto de la integral de superficie, se tiene que:

$$\vec{P} \times \vec{n} = \alpha \vec{r}^u \vec{r}_u \times \vec{r}_u = 0 \quad (1.166)$$

ya que la divergencia de componentes paralelas es igual a cero. Esto significaría que no existen cargas en la superficie. Si además la integral de volumen es igual a:

$$\nabla \times \vec{P} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} P_r \bar{\theta}_u - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_r \bar{\phi}_u \equiv 0 \quad (1.167)$$

ya que la componente en  $\vec{r}$  no depende ni de  $\theta$  ni de  $\phi$ , entonces tampoco se tienen corrientes volumétricas. Por lo tanto,  $\vec{A}_D = 0$  en cualquier punto del espacio. Esto implicaría que  $\vec{D} \equiv 0$  en todo el espacio.

Si ahora se calcula el campo en el exterior de la esfera donde la polarización es cero, y recordando que  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , se tiene que:

$$\vec{P} = 0$$

$$\vec{D}_{\text{ext}} = \epsilon_0 \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{ext}} = 0$$

En el exterior, el campo eléctrico y el de desplazamiento coinciden; pero en el interior no, donde se tiene que:

$$\vec{D} = 0$$

y

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$$

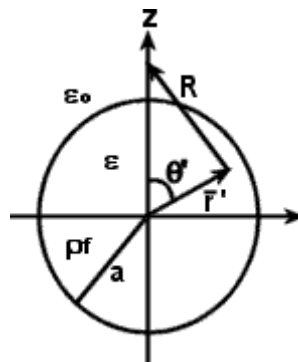
Este ejemplo nos da a entender que  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  no son campos equivalentes, ya que uno puede existir mientras que el otro no e incluso, en caso de si presentarse ambos, uno puede ir en sentido opuesto al del otro. Es decir, mientras en campo eléctrico siempre va de cargas positivas a negativas, el de desplazamiento puede ir de negativas a positivas. Estas diferencias se deben a que poseen fuentes diferentes:  $\vec{E}$  tiene sólo fuentes escalares y  $\vec{D}$  tienen tanto fuentes escalares como de vórtice. En este caso, debido al tipo de polarización que se presentaba, ésta no contribuía a la formación de un campo de desplazamiento eléctrico, pero sí producía un campo eléctrico. Un ejemplo de este tipo de polarización son los capacitores esféricos.

En el siguiente cuadro se puede ver un resumen de las ecuaciones que se satisfacen en Medios Lineales Homogéneos e Isótropos (M. L. H. I.):

MEDIOS LINEALES HOMOGÉNEOS E ISÓTROPOS	
Campo Eléctrico	Campo de Desplazamiento Eléctrico
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$ $\nabla \times \vec{E} = 0$ $\vec{E} = -\nabla\phi$ $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho_f}{R} dv'$ $\nabla^2\phi = \frac{-\rho_f}{\epsilon}$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ $\nabla \times \vec{D} = 0$ $\vec{D} = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$ $\phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_f}{R} dv'$ $\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\vec{P} \times \vec{n}}{R} ds$ $\nabla^2\phi = -\rho_f$ $\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad \text{donde } \epsilon = \text{ctte.}$ $\nabla^2\vec{A} = 0$

### EJEMPLO 1.7

Una esfera de radio **a** presenta una carga libre  $\rho_0 = \text{constante}$  y una permeabilidad  $\epsilon = \text{constante}$  dejada en el vacío. Encuentre el campo **E**. Visualmente, el problema se puede ver de la siguiente forma:



Sabemos que en M. L. H. I. se cumple las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_{\mathbf{v}'}} \int \frac{\rho_f}{R} d\mathbf{v}'$$

Si la carga es libre, el potencial simplemente se expresa como:

$$\phi = \frac{\rho_f}{4\pi\epsilon_{\mathbf{v}'}} \int \frac{d\mathbf{v}'}{R} \quad (1.168)$$

Se recordará que esta integral ya se ha resuelto en ejercicios anteriores, por lo que su solución se resumiría en los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{v}'} \frac{d\mathbf{v}'}{R} &= \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'}} \\ &= 2\pi \int_0^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'}} \\ &= \frac{2\pi}{z} \int_0^a r' [ |z+r'| - |z-r'| ] dr' \end{aligned}$$

Para  $z > a$ , esta integral equivaldría a:

$$\int_{\mathbf{v}'} \frac{d\mathbf{v}'}{R} = \frac{2\pi}{z} \int_0^a 2r'^2 dr' = \frac{2\pi}{3z} a^3 \quad (1.169)$$

Intercambiando la variable  $z$  por  $r$ , se obtendría la siguiente expresión para el potencial exterior:

$$\phi_{\text{ext}} = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon r} \quad (1.170)$$

En el caso del potencial interior, donde  $z < a$ , se tendría este resultado para la integral de volumen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{v}'} \frac{d\mathbf{v}'}{\mathbf{R}} &= \frac{2\pi}{z} \int_0^a \mathbf{r}' \left[ |z + \mathbf{r}'| - |z - \mathbf{r}'| \right] d\mathbf{r}' \\
&= \frac{2\pi}{z} \int_0^z \mathbf{r}' \left[ |z + \mathbf{r}'| - |z - \mathbf{r}'| \right] d\mathbf{r}' + \int_z^a \mathbf{r}' \left[ |z + \mathbf{r}'| - |z - \mathbf{r}'| \right] d\mathbf{r}' \\
&= \frac{2\pi}{z} \int_0^z 2\mathbf{r}'^2 d\mathbf{r}' + \int_z^a 2\mathbf{r}' z d\mathbf{r}' \\
&= \frac{2\pi}{z} \left[ \frac{2}{3} z^3 + z(a^2 - z^2) \right]
\end{aligned}$$

de tal manera que la expresión del potencial interior sería:

$$\begin{aligned}
\phi_{\text{int}} &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{2\pi}{z} \left( \frac{2}{3} z^3 + z(a^2 - z^2) \right) \right] \\
&= \frac{\rho_0}{\epsilon} \left[ \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{a^2}{2} \right] \\
&= \frac{\rho_0}{\epsilon} \left[ \frac{2z^2}{6} - \frac{3z^2}{6} + \frac{a^2}{2} \right] \\
&= \frac{-\rho_0}{6\epsilon} z^2 + \frac{\rho_0}{\epsilon} \frac{a^2}{2}
\end{aligned} \tag{1.171}$$

De acuerdo con lo anterior, el campo eléctrico, donde  $\vec{\mathbf{E}} = -\nabla\phi$ , para ambas regiones sería igual a:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}} &= \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon r^2} \vec{\mathbf{r}}_u \\
\vec{\mathbf{E}}_{\text{int}} &= \frac{\rho_0}{3\epsilon} r \vec{\mathbf{r}}_u
\end{aligned} \tag{1.172}$$

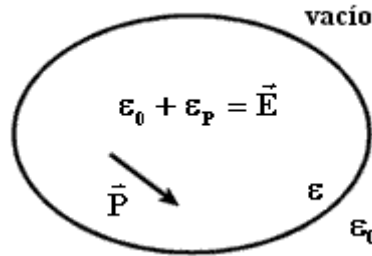
Se conoce que  $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}}$ , por lo que el campo de desplazamiento para ambas regiones quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{D}}_{\text{ext}} &= \frac{\rho_0}{3r^2} \vec{\mathbf{r}}_u \\
\vec{\mathbf{D}}_{\text{int}} &= \frac{\rho_0}{3} r \vec{\mathbf{r}}_u
\end{aligned} \tag{1.173}$$

Si corroboramos estos resultados con los datos reales para este ejemplo, se tiene que la expresión para los potenciales exterior e interior son:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{ext}} &= \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r} \\ \varphi_{\text{int}} &= \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0} \left[ 1 + \frac{\epsilon_0}{2\epsilon} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right]\end{aligned}\quad (1.174)$$

Esta diferencia de resultados pone al descubierto un error al momento de plantear el problema en un inicio. Tenemos una carga libre dentro de un medio dieléctrico que es diferente al medio que lo rodea, donde



En este caso, a la integral del potencial se debió haber agregado una integral de superficie que tomara en cuenta el fenómeno cuando la polarización decae a cero en el momento de pasar al vacío. La solución correcta se hubiera obtenido resolviendo la ecuación diferencial y observar lo que acontece en la frontera. Este ejercicio es un ejemplo de los errores en los que podemos caer si no se plantea bien un problema desde el inicio por no comprender bien la física envuelta en él. Para poder resolver problemas similares al anterior, ahora se verán las condiciones de frontera.

## CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera se pueden deducir a partir tanto del campo eléctrico como del de desplazamiento eléctrico; el en caso del campo eléctrico se tiene que:

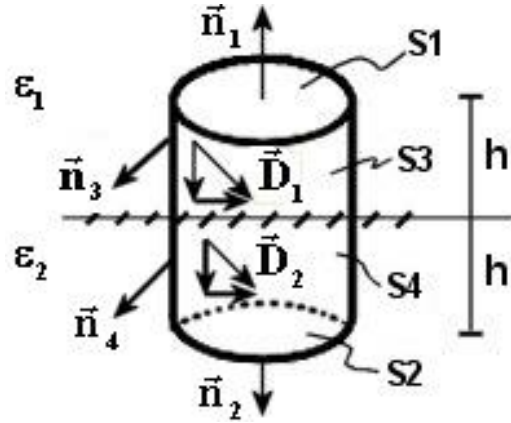
$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) &= \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

Por otro lado, las condiciones de frontera se pueden obtener con mayor facilidad a partir del campo  $\vec{D}$ , donde

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$$

Gráficamente, el problema podría verse como:



Sus integrales se verían de la siguiente forma:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D} dv = \int_V \rho_f dv$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho_f dv$$

La integral de flujo se puede distribuir entre cada una de las superficies del cilindro:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{S1} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S2} \vec{D} \cdot d\vec{s}_2 + \int_{S3(h)} \vec{D} \cdot d\vec{s}_3 + \int_{S4(h)} \vec{D} \cdot d\vec{s}_4$$

A su vez, el campo  $\vec{D}$  puede dividirse en su componente normal y en su componente tangencial:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = -D_{N,1}S_1 + D_{N,2}S_2 + \int_{S3(h)} D_{t,1}ds_3 + \int_{S4(h)} D_{t,2}ds_4 = \int_V \rho_f dv$$

Las superficies  $S3$  y  $S4$  dependen de  $h$ , por lo que en el límite cuando  $h$  tiende a cero se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Rightarrow S_3(h) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad S_4(h) \rightarrow 0$$

lo cual implicaría que

$$\int_{S3} D_{t,1}ds_3 = \int_{S4} D_{t,2}ds_4 \equiv 0$$

Por ende

$$-D_{N,1}S_1 + D_{N,2}S_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \int_V \rho dv$$

Si

$$S_1 = S_2 = A$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V \rho dv = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \rho ds dh$$

donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \rho dh = \sigma_f \quad \rightarrow \text{densidad superficial l de carga}$$

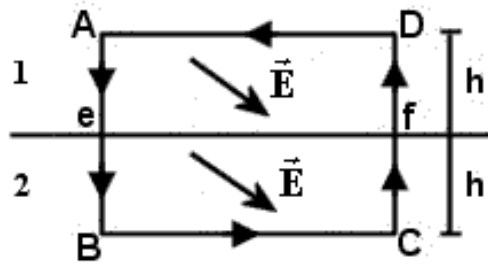
Entonces, se puede decir que:

—

$$\boxed{D_{N,2} - D_{N,1} = \sigma_f} \quad (1.175)$$

Esta última expresión es la **primera condición de frontera**, la cual nos dice que las componentes normales son discontinuas. El establecimiento de las condiciones de frontera no se puede deducir físicamente; éstas parten del supuesto de que existen cargas libres en la superficie.

Visualicemos ahora el problema de la siguiente forma:



Del Teorema de Stokes se conoce que la integral de línea del campo eléctrico es igual a cero, puesto que el rotacional de  $\vec{E}$  es cero:

$$\oint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \equiv 0 \quad (1.176)$$

Por ende, la integral de contorno de  $\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  es igual a la suma de las contribuciones de las integrales de línea de cada uno de sus segmentos:



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{Ae(h)} \vec{E}_{N,1} d\ell + \int_{eB(h)} \vec{E}_{N,2} d\ell + \int_{BC} \vec{E}_{t,2} d\ell - \int_{Cf(h)} \vec{E}_{N,2} d\ell - \int_{fD(h)} \vec{E}_{N,1} d\ell - \int_{DA} \vec{E}_{t,1} d\ell \equiv 0$$

Si ahora se toma el límite cuando  $\mathbf{h} \rightarrow 0$ , se tiene que

$$\int_{Ae} \vec{E}_{N,1} d\ell = \int_{eB} \vec{E}_{N,2} d\ell = \int_{Cf} \vec{E}_{N,2} d\ell = \int_{fD} \vec{E}_{N,1} d\ell \equiv 0$$

por lo que sólo se tendrían las contribuciones de los segmentos **BC** y **DA**. Si se toman en cuenta las componentes tangenciales se tiene que la integral de línea es igual a:

$$\mathbf{E}_{t,2}L - \mathbf{E}_{t,1}L = 0$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{t,2} = \mathbf{E}_{t,1}}$$

(1.177)

De esta forma se obtiene la *segunda condición de frontera*, la cual nos dice que las componentes tangenciales son continuas. Es así como se obtienen las dos condiciones de frontera

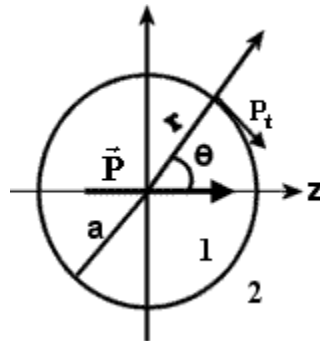
En resumen, se tienen exclusivamente dos condiciones de frontera que se pueden expresar de doce maneras distintas, vistas en la siguiente tabla, dependiendo del problema que se presente y de cómo se desee resolver. En el primer grupo de condiciones está implícito que la polarización es solamente un proceso inductivo. El segundo grupo es más general y maneja explícitamente la polarización, sin importar que se deba a un proceso de inducción o sea permanente:

CONDICIONES DE FRONTERA			
	$\vec{D}$	$\vec{E}$	$\varphi$
<b>1</b>	$\mathbf{D}_{2,N} - \mathbf{D}_{1,N} = \sigma_F$ $\frac{\mathbf{D}_{2,t}}{\epsilon_2} = \frac{\mathbf{D}_{1,t}}{\epsilon_1}$ $\sigma_F \neq 0$	$\epsilon_2 \mathbf{E}_{2,N} - \epsilon_1 \mathbf{E}_{1,N} = \sigma_F$ $\mathbf{E}_{2,t} = \mathbf{E}_{1,t}$ $\sigma_f \neq 0$	$\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = -\sigma_F$ $\varphi_2 = \varphi_1$ $\sigma_F \neq 0$

	$\mathbf{D}_{2,N} = \mathbf{D}_{1,N}$ $\frac{\mathbf{D}_{2,t}}{\epsilon_2} = \frac{\mathbf{D}_{1,t}}{\epsilon_1}$ $\sigma_F = 0$	$\epsilon_2 \mathbf{E}_{2,N} = \epsilon_1 \mathbf{E}_{1,N}$ $\mathbf{E}_{2,t} = \mathbf{E}_{1,t}$ $\sigma_F = 0$	$\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} = \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}$ $\varphi_1 = \varphi_2$ $\sigma_F = 0$
2	$\mathbf{D}_{2,N} - \mathbf{D}_{1,N} = \sigma_F$ $\mathbf{D}_{2,t} - \mathbf{D}_{1,t} = \mathbf{P}_{2,t} - \mathbf{P}_{1,t}$ $\sigma_F \neq 0$	$\mathbf{E}_{2,N} - \mathbf{E}_{1,N} = \frac{\sigma_F}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{P}_{2,N} - \mathbf{P}_{1,N})$ $\mathbf{E}_{2,t} = \mathbf{E}_{1,t}$ $\sigma_F \neq 0$	$\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = \frac{-\sigma_F}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{P}_{2,N} - \mathbf{P}_{1,N})$ $\varphi_2 = \varphi_1$ $\sigma_F \neq 0$
	$\mathbf{D}_{2,N} = \mathbf{D}_{1,N}$ $\mathbf{D}_{2,t} - \mathbf{D}_{1,t} = \mathbf{P}_{2,t} - \mathbf{P}_{1,t}$ $\sigma_F = 0$	$\mathbf{E}_{2,N} - \mathbf{E}_{1,N} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{P}_{2,N} - \mathbf{P}_{1,N})$ $\mathbf{E}_{2,t} = \mathbf{E}_{1,t}$ $\sigma_F = 0$	$\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{P}_{2,N} - \mathbf{P}_{1,N})$ $\varphi_2 = \varphi_1$ $\sigma_F = 0$

### EJEMPLO 1.8

Encuentre el campo producido por una esfera de radio **a** que presenta una polarización  $\vec{\mathbf{P}} = P_0 \vec{\mathbf{k}}$ .



Si el problema se planteara para  $\vec{\mathbf{D}}$ , conociendo que no hay carga libre, se satisfarían estas las ecuaciones de campo:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$$

en todas las regiones, exceptuando en la frontera. Pero  $\vec{P}$  es un vector constante, lo que implicaría que  $\nabla \times \vec{D} = 0$ . Por lo tanto, se cumpliría con

$$\vec{D} = -\nabla \phi_D$$

Si se planteara para  $\vec{E}$ , igualmente se tendría que no hay carga libre; por ende, sus ecuaciones de campo se presentarían como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (1.178)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

por lo que  $\vec{E}$  provendría de una función escalar:

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

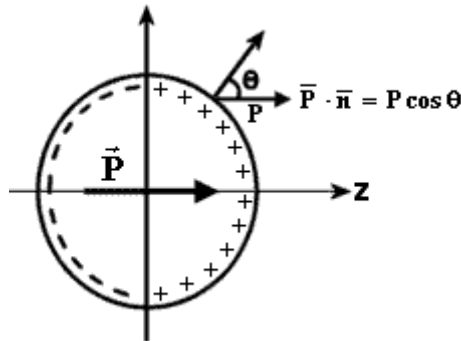
satisfaciéndose este laplaciano

$$\nabla^2 \phi = \frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (1.179)$$

Pero  $\vec{P}$  es un vector constante; por lo tanto,

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Intentemos, pues, resolver el problema utilizar el esquema de  $\vec{D}$ , donde se satisface la ecuación de Laplace ( $\nabla^2 \phi = 0$ ). El problema es más fácil de visualizar a través del uso de cargas ligadas superficiales, donde  $\delta_b = \vec{P} \cdot \vec{n}$ .



Es importante aclarar que, por convención, se maneja que el vector normal exterior se dirige de la región 1 a la región 2. La determinación de cual es cada región dependerá del criterio del investigador, pero debe tener cuidado de conservar una congruencia con la definición que se haya hecho de las regiones durante todo el desarrollo del problema. En este caso se posicionó a la región 1 en el interior de la esfera, lugar donde se encuentra la fuente, y a la región 2 en el exterior, que es hacia donde se dirige el campo originado por la fuente.

En este ejercicio se puede observar que la densidad de carga ligada varía de acuerdo con el ángulo de colatitud  $\theta$ , pero permanece igual al moverse alrededor del ángulo  $\phi$ , siempre y cuando  $\theta$  y  $r$  se mantengan constantes. Es decir, al movernos en  $r$ , el potencial va a aumentar o disminuir conforme nos alejemos de la esfera; al movernos en  $\theta$ , se va a pasar de cargas negativas a positivas variando así la densidad de carga. Pero al movernos sólo en  $\phi$ , las cargas siempre van a ser las mismas, por lo que van a producir el mismo valor de potencial. Esto significaría que el laplaciano solamente va a depender de  $\theta$  y  $r$ , más no de  $\phi$ . Por tanto, la expresión del laplaciano será:

$$\nabla^2 \varphi(\theta, r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.180)$$

De esta forma, la solución general de la ecuación de Laplace, expresada en coordenadas polares, sería:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} + B_{\ell} r^{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.181)$$

donde  $P_{\ell}(\cos \theta)$  representa a los polinomios de Legendre. El potencial en la región 1 ( $\varphi_1$ ) debe de cumplir con la condición de  $\varphi_1(\vec{r}) \neq \infty$  en  $r = 0$ , lo que implicaría que  $A_{\ell} \equiv 0$ , soportando una solución de este tipo:

$$\varphi_1(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.182)$$

Para el potencial  $\varphi_2$ , se debe cumplir con que  $\varphi_2(\vec{r}) \rightarrow \infty$  conforme  $r \rightarrow \infty$ ; para que esto se cumpliera, implicaría que  $B_{\ell} = 0$ , soportando una solución del siguiente tipo:

$$\varphi_2(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.183)$$

Recordemos que las condiciones de frontera para  $\vec{D}$  en  $r = a$  son

$$\mathbf{D}_{2,N} = \mathbf{D}_{1,N}$$

$$\mathbf{D}_{2,t} - \mathbf{D}_{1,t} = \mathbf{P}_{2,t} - \mathbf{P}_{1,t}$$

Se tienen que ajustar las condiciones de frontera para resolver los coeficientes  $\mathbf{B}_\ell$  y  $\mathbf{A}_\ell$ . Esto quiere decir que en general la componente normal sería:

$$\mathbf{D}_N = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}$$

puesto que  $\mathbf{D}$  proviene de una función escalar. Se tiene, pues, que las componentes normales serían:

$$\mathbf{D}_{1,N} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{r}} = -\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \mathbf{B}_\ell \mathbf{r}^{\ell-1} \mathbf{P}_\ell(\cos \theta) \quad (1.184)$$

$$\mathbf{D}_{2,N} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{r}} = -\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{-(\ell+1)\mathbf{A}_\ell}{\mathbf{r}^{\ell+2}} \mathbf{P}_\ell(\cos \theta)$$

De igual forma, las componentes tangenciales, en coordenada polares, serían:

$$\mathbf{D}_{1,t} = -\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = -\frac{1}{\mathbf{r}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{B}_\ell \mathbf{r}^\ell \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{P}_\ell(\cos \theta) \quad (1.185)$$

$$\mathbf{D}_{2,t} = -\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = -\frac{1}{\mathbf{r}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_\ell}{\mathbf{r}^{\ell+1}} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{P}_\ell(\cos \theta)$$

Estableciendo las dos condiciones de frontera para  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ , donde las componentes normales son continuas y las tangenciales son discontinuas, se debe satisfacer que:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \mathbf{B}_\ell \mathbf{a}^{\ell-1} \mathbf{P}_\ell(\cos \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{-(\ell+1)\mathbf{A}_\ell}{\mathbf{a}^{\ell+2}} \mathbf{P}_\ell(\cos \theta) \quad (1.186)$$

$$-\frac{1}{\mathbf{a}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_\ell}{\mathbf{r}^{\ell+1}} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{P}_\ell(\cos \theta) + \frac{1}{\mathbf{a}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{B}_\ell \mathbf{a}^\ell \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{P}_\ell(\cos \theta) = -\mathbf{P}_{1,t} \quad (1.187)$$

donde la componente tangencial en el medio 2 (el vacío) es cero. Recordando que:

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\vec{\mathbf{k}} = \mathbf{P} \cos \theta \vec{\mathbf{r}}_u - \mathbf{P} \sin \theta \vec{\boldsymbol{\theta}}_u = \mathbf{P}_N \vec{\mathbf{r}}_u + \mathbf{P}_t \vec{\boldsymbol{\theta}}_u$$

se tiene que la componente tangencial es:

$$\mathbf{P}_{1,t} = -\mathbf{P} \sin \theta$$

Por lo tanto, la ecuación 1.187 sería igual a:

$$-\frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\ell}(\cos \theta) + \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} a^{\ell} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\ell}(\cos \theta) = +P \sin \theta \quad (1.187)$$

Despejando y factorizando la ecuación 1.186, se tiene que:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \ell B_{\ell} a^{\ell-1} + \frac{-(\ell+1)A_{\ell}}{a^{\ell+2}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) = 0 \quad (1.188)$$

la cual también puede expresarse como:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left( B_{\ell} a^{\ell} + \frac{A_{\ell}}{a^{\ell+1}} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\ell}(\cos \theta) = P a \sin \theta \quad (1.189)$$

Para sea igual con cero, los coeficientes deben ser igual con cero, ya que los polinomios de Legendre no pueden ser cero. Entonces, de la ecuación 1.188, implicaría que

$$\ell B_{\ell} a^{\ell-1} + \frac{-(\ell+1)A_{\ell}}{a^{\ell+2}} = 0$$

Despejando, se tendría un primer valor del coeficiente  $A_{\ell}$ :

$$A_{\ell} = \frac{\ell}{\ell+1} B_{\ell} a^{2\ell+1} \quad (1.190)$$

De la ecuación 1.189 se necesita obtener la derivada  $\frac{\partial}{\partial \theta} P_{\ell}(\cos \theta)$ . De los polinomios de Legendre se conoce que:

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$$

y sucesivamente. Lo anterior implicaría que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_1 = -\sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_2 = -3 \cos \theta \sin \theta$$

Para agilizar la escritura, se va a definir momentáneamente la siguiente variable:

$$C_\ell = B_\ell a^\ell - \frac{A_\ell}{a^{\ell+1}} \quad (1.191)$$

de manera que la ecuación 1.189 se puede describir como:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell \frac{\partial}{\partial \theta} P_\ell(\cos \theta) = P a \sin \theta \quad (1.192)$$

De acuerdo con esto, se tendría que:

$$C_0(0) - C_1 \sin \theta - C_2 2 \cos \theta \sin \theta + \dots = P a \sin \theta \quad (1.193)$$

Para que la ecuación 1.194 se sostenga como válida, implicaría que  $C_0 = C_2 = C_3 = C_\ell \equiv 0$  y que  $C_1 = -P a$ . Entonces,  $C_\ell \equiv 0$  para toda  $\ell \neq 1$ . Como  $C_1 \neq 0$ , implicaría que el único término de Legendre que existe es  $P_1(\cos \theta)$ . Por lo tanto,

$$B_1 a - \frac{A_1}{a^2} = -P a \quad (1.194)$$

De la ecuación 1.190 se tendría que

$$A_1 = \frac{1}{2} B_1 a^3 \quad (1.195)$$

Por lo tanto  $A_\ell = B_\ell \equiv 0$  para toda  $\ell \neq 1$ . Sustituyendo la ecuación 1.195 en la 1.194, se tiene que:

$$B_1 a + \frac{1}{2} B_1 a = -P a$$

$$\frac{3}{2} B_1 a = -P a \quad (1.196)$$

$$B_1 = -\frac{2}{3} P$$

Sustituyendo este valor de  $\mathbf{B}_1$  en la ecuación 1.195, se obtiene el valor del coeficiente  $\mathbf{A}_1$ :

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{Pa}^3 \quad (1.197)$$

Una vez obtenidos los valores de los respectivos coeficientes, se tendría que la expresión del potencial general es igual a:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\vec{r}) &= -\frac{2}{3} \mathbf{Pr} \mathbf{P}_1(\cos \theta) = -\frac{2}{3} \mathbf{Pr}(\cos \theta) \\ \varphi_2(\vec{r}) &= \frac{1}{3} \mathbf{Pa}^3 \frac{\mathbf{P}_1(\cos \theta)}{r^2} = \frac{1}{3} \mathbf{Pa}^3 \frac{\cos \theta}{r^2} \end{aligned} \quad (1.198)$$

Se sabe que el campo  $\mathbf{D}$  interior es igual a:

$$\vec{\mathbf{D}}_1 = -\nabla \varphi_1(\vec{r})$$

pero como  $\mathbf{r} \cos \theta = \mathbf{z}$ , entonces el campo  $\mathbf{D}$  interior sería:

$$\vec{\mathbf{D}}_1 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left( -\frac{2}{3} \mathbf{Pz} \right) \vec{\mathbf{k}} = \frac{2}{3} \mathbf{Pk} \quad (1.199)$$

De igual forma, el campo exterior sería:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{D}}_2 &= -\nabla \varphi_2(\vec{r}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\varphi_2) \vec{\mathbf{r}}_u - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\varphi_2) \vec{\boldsymbol{\theta}}_u \\ &= \frac{\mathbf{Pa}^3}{3} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{\mathbf{r}}_u + \frac{\mathbf{Pa}^3}{3} \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{\boldsymbol{\theta}}_u \end{aligned} \quad (1.200)$$

Si ahora se deseara calcular el campo  $\mathbf{E}$ , tomando en cuenta que se conoce la polarización, de forma general se tendría que:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{P}})$$

Por ende, el campo  $\mathbf{E}$  interior, donde  $\vec{\mathbf{P}} \neq \mathbf{0}$ , sería igual a:

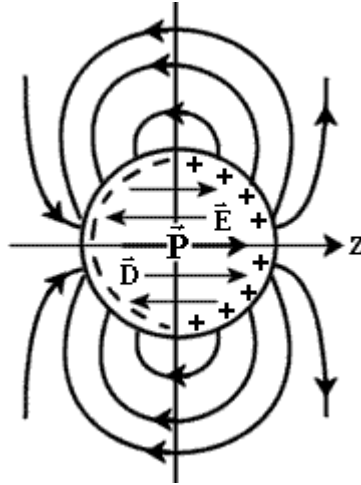


$$\begin{aligned}\vec{E}_1(\vec{r}) &= \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{2}{3} \vec{P} - \vec{P} \right) \vec{k} \\ &= -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \vec{k}\end{aligned}\tag{1.201}$$

y el campo  $\vec{E}$  exterior, donde  $\vec{P} = \vec{0}$ , sería:

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{P}a^3}{3\epsilon_0} \frac{2\cos\theta}{r^3} \vec{r}_u + \frac{\vec{P}a^3}{3\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3} \vec{\theta}_u\tag{1.202}$$

Visualizándolo gráficamente, se tiene que la polarización y el campo de desplazamiento coinciden en la misma dirección en el interior de la esfera, pero que el campo eléctrico va en sentido contrario (es decir, de cargas positivas a negativas). En cambio, en el exterior, los campos  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  van en la misma dirección, ya que  $\vec{P} = \vec{0}$  en el vacío.



En los temas anteriores se ha asumido implícitamente que las cargas se encuentran fijas en el espacio. A continuación se verá que es lo que pasa con las cargas que están en movimiento, es decir, cuando se encuentran en medios conductores.

## CAMPO ELÉCTRICO EN MEDIOS CONDUCTORES

### CORRIENTE ELÉCTRICA

En siglos pasados se asumía que los electrones se comportaban como un flujo, al igual que el agua; es decir, se imaginaba a la corriente como un flujo de electrones que se desplazaban en el medio. Es por ello que la concepción de las leyes que rigen éste fenómeno se manejaban de esta forma. Debido a esto, la **corriente eléctrica** se definió como el número de electrones que pasan por unidad de tiempo en un determinado punto en el espacio:

$$\langle I \rangle = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (1.203)$$

donde **q** es la carga (o electrones) y **t** es el tiempo; las unidades de la corriente están dadas en

$$\left[ \frac{\text{coulombs}}{\text{s}} \right] = [\text{Amper}]$$

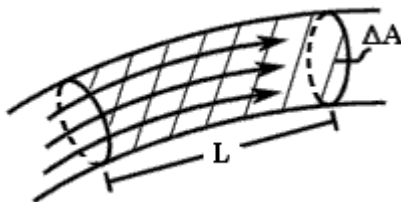
De forma idealizada, la corriente eléctrica se puede ver como el cambio instantáneo en el tiempo de la carga eléctrica:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} \quad (1.204)$$

Se pueden tener dos tipos de corrientes. Si la derivada fuera igual a una constante, se hablaría de una **corriente continua** o constante; si la derivada es distinta a una constante, entonces se tendría una **corriente alterna** o variable:

$$I(t) = \begin{cases} \bullet \text{ continua (directa, estacionaria, constante)} \\ \bullet \text{ variable (alterna)} \end{cases}$$

Básicamente, su representación gráfica se piensa como una especie de tubo dentro del cual los electrones corrían atravesando un área  $\Delta A$ .



Se puede decir, pues, que la carga  $\Delta q$  es igual a:

$$\Delta q = \langle I \rangle \Delta t \quad (1.205)$$

La carga que atraviesa la superficie  $\Delta A$  está contenida dentro de un volumen de longitud  $L$ ; entonces, se puede hablar que en ese volumen existe cierta densidad de carga  $\rho$ , por lo que la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\Delta q = \rho \Delta A L \quad (1.206)$$

Comparando las dos ecuaciones anteriores, tendríamos que:

$$\rho \Delta A L = \langle I \rangle \Delta t \quad (1.207)$$

Esta se puede reordenarla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \rho \Delta A \frac{L}{\Delta t} \\ \frac{\langle I \rangle}{\Delta A} &= \rho \frac{L}{\Delta t} \end{aligned} \quad (1.208)$$

Si decimos que  $\rho \frac{L}{\Delta t} = \langle v \rangle$  es la velocidad promedio de las cargas, entonces

$$\frac{\langle I \rangle}{\Delta A} = \rho \langle v \rangle \quad (1.209)$$

Se puede redefinir al primer término como un vector:

$$\langle \mathbf{J} \rangle = \frac{\langle I \rangle}{\Delta A} = \text{vector de densidad de corriente volumétrica}$$

De esta forma se tendría que

$$\langle \mathbf{J} \rangle = \rho \langle v \rangle \quad (1.210)$$

Si  $\langle v \rangle \rightarrow \mathbf{v}$ , implicaría que  $\Delta t \rightarrow 0$ , por lo que  $\langle \mathbf{J} \rangle = \mathbf{J}$ . Esto significaría que el vector de densidad volumétrica sería igual a:

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}) = \rho \vec{v}(\vec{\mathbf{r}}) \quad \left[ \frac{\text{Amper}}{\text{m}^2} \right] \quad (1.211)$$

Por otro lado, se tendría que

$$\frac{\langle I \rangle}{\Delta A} = \langle \mathbf{J} \rangle \Delta A \quad (1.212)$$

Si  $\Delta\mathbf{A} \rightarrow d\mathbf{A}$  y  $\langle \mathbf{I} \rangle \rightarrow \mathbf{I}$ , entonces

$$d\mathbf{I} = \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

y

$$\mathbf{I}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_s \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{A}} \quad (1.213)$$

Hasta este punto se han logrado establecer las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{I}(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \rho(\vec{\mathbf{r}}) \vec{v}(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

$$\mathbf{I}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \int_s \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

Si el medio o la corriente fueran estacionarios, las ecuaciones anteriores se verían de la siguiente forma:

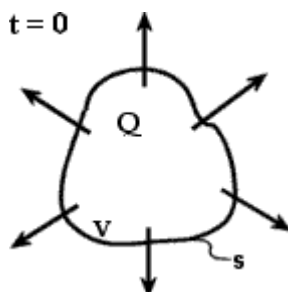
$$\mathbf{I} = \frac{dq}{dt} = \text{constante}$$

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}) = \rho(\vec{\mathbf{r}}) \vec{v}(\vec{\mathbf{r}})$$

$$\mathbf{I} = \int_s \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

## ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Se tiene una carga total  $Q$  limitada en un volumen limitada por una superficie  $S$ . En un tiempo  $t = 0$ , la carga se empieza a mover y atraviesa la superficie  $S$ , estableciendo una corriente.



La cantidad de carga que está atravesando la superficie  $S$  es la misma cantidad de carga que está disminuyendo en el volumen. Entonces, la carga que se está perdiendo en el volumen por unidad de tiempo es:

$$-\frac{dQ}{dt} = I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.214)$$

Pero la carga total  $Q$  se puede ver como la integral de volumen de la carga:

$$Q = \int_V \rho dv \quad (1.215)$$

por lo que la ecuación 1.214 se transforma en:

$$\int_V -\frac{d\rho}{dt} dv = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.216)$$

Del teorema de la Divergencia se tiene que:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dv$$

Igualando las ecuaciones, se obtiene:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} dv = \int_V -\frac{d\rho}{dt} dv \quad (1.217)$$

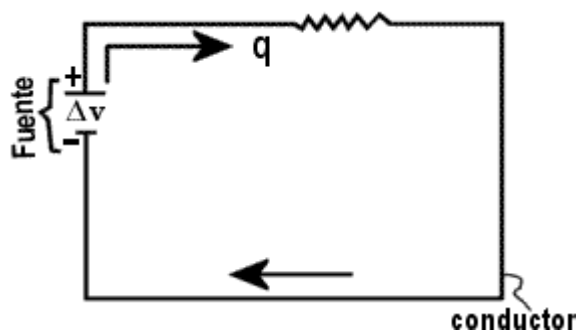
Para que esta integral se sostenga, se puede decir:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) &= -\frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} \\ \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (1.218)$$

A esta última se le conoce como la *Ecuación de Continuidad*. Esta significa que el cambio de corriente volumétrica en un volumen está relacionado a la carga que se está perdiendo por unidad de tiempo al atravesar la superficie. El balance neto del cambio de la carga encerrada en el volumen es igual al cambio de las corrientes volumétricas. Si la corriente es estacionaria, se dice que el cambio neto de la carga es cero [ $\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) = 0$ ]. En otras palabras, la cantidad de carga que ha salido de nuestro volumen de control es la misma carga que ha entrado a ese volumen.

## CORRIENTES DE CONDUCCIÓN

A las corrientes de conducción también se les conoce como *corrientes verdaderas*, corrientes libres o corrientes impresas. Su nombre implica que existe transporte de carga eléctrica, es decir, de electrones y positrones. Para que se pueda mover una carga en el medio, se le debe transmitir una fuerza vía el establecimiento de un campo eléctrico, visto como una fuente externa al medio. De esta manera, se puede ver como un circuito, el cual es un medio conductor.



Para que un electrón se pueda mover en ese medio conductor, debe de existir un campo eléctrico que imprima una fuerza sobre la carga para que se pueda mover. Si este campo existe, se le puede ver como:

$$\xi = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (1.219)$$

donde a  $\xi$  se le llama la *fuerza electromotiva*. Esta generalmente va a ser distinta de cero y representa un trabajo por unidad de carga:

$$\xi = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{w}{q} \left\{ \frac{\text{trabajo}}{\text{carga}} \right\} \neq 0 \quad (1.220)$$

Para poder mantener a una carga en movimiento en un medio conductor, se debe proporcionar constantemente energía al sistema, sea vía un campo eléctrico o por inyección de corriente. El medio disipa esta energía a través de calor en la resistencia, lo que significa que se va a estar perdiendo energía. En el momento en que se deja de proporcionar energía al sistema, el movimiento de las cargas cesa. En el caso de un campo electrostático, este proporciona una energía finita que no cambia en el tiempo.

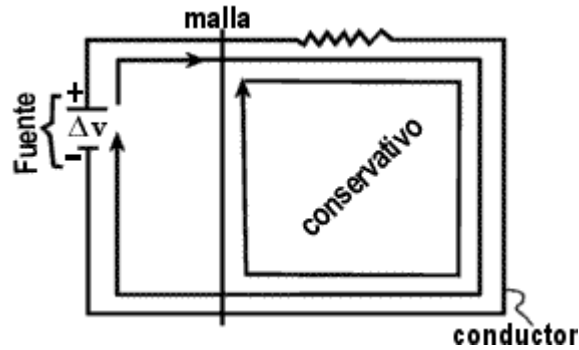
En el caso del medio conductor, se debe de proporcionar siempre energía al sistema para que las cargas se muevan, dando como resultado pérdida de energía en forma de calor; esto plantea el problema de que el campo eléctrico en un medio conductor no es conservativo y su integral de línea es distinta de cero:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$$

Esto se puede dividir en su parte no conservativa del campo y en su parte conservativa:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_L \vec{E}_{NL} \cdot d\vec{\ell} + \oint_L \vec{E}_L \cdot d\vec{\ell} \quad (1.221)$$

Es decir, la energía que se disipa en forma de calor es la misma energía que esta perdiendo la fuente. Si se hace la integración de línea pasando por la fuente hay una discontinuidad, que es la parte no conservativa. Pero si se realiza otra trayectoria evitando pasar por la fuente, se obtiene un campo conservativo.



En otras palabras, podemos tratar al campo eléctrico en medios conductores como conservativo siempre y cuando no considere a la fuente. Por el teorema de Stokes se tiene que:

$$\oint_L \vec{E}_L \cdot d\vec{\ell} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} \equiv 0 \quad (1.222)$$

ya que, en medios conductores:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

El teorema de Helmholtz implica encontrar dos ecuaciones de campo. Lo único que se ha hecho hasta este momento es definir al campo eléctrico como un campo conservativo. La otra ecuación que rige el movimiento de cargas en medios conductores bajo un régimen estacionario es el vector de densidad de corriente  $\vec{J}$ ; pero en medios estacionarios:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

El problema radica en que, para resolver alguna de las dos ecuaciones, se necesita obtener sus otros pares de ecuaciones ( $\nabla \cdot \vec{E}$  o  $\nabla \times \vec{J}$ ). Por ende, debe de existir una relación entre  $\vec{E} \propto \vec{J}$ . Por un lado, podemos definir a  $\vec{J}$  como:

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad (1.223)$$

Por otro lado, se puede definir que  $\rho$  es

$$\rho = \frac{\text{no. de electrones}}{\text{Volumen}} = Ne \quad (1.224)$$

donde  $N$  es el número de electrones y  $e$  es la carga. Digamos que todas estas cargas se mueven a una misma velocidad; al impregnarle velocidad al electrón significa que va a recibir una fuerza, la cual es igual a:

$$\vec{F} = -e\vec{E} \quad (1.225)$$

Pero, de acuerdo con las leyes de Newton, la fuerza es igual a masa por aceleración:

$$\vec{F} = m_e \vec{a}$$

Sabemos que la aceleración es el cambio de la velocidad en el tiempo; por lo tanto:

$$\vec{F} = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.226)$$

Combinando las ecuaciones 1.225 y 1.226, tenemos que el cambio de la velocidad en el tiempo es:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m_e} \vec{E}$$

De esta forma, se puede ver a la velocidad como:

$$\vec{v} = \int_0^{\tau} \frac{e}{m_e} \vec{E} dt \quad (1.227)$$

donde  $\tau$  es un tiempo infinitamente pequeño de tal manera que se pueda considerar al campo eléctrico constante. Entonces, se tiene que se puede considerar a la velocidad como:

$$\vec{v} = \frac{e}{m_e} \vec{E} \tau \quad (1.228)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1.223, se puede decir que  $\vec{J}$  es igual a:

$$\vec{J} = \frac{Ne^2}{m_e} \tau \vec{E} \quad (1.229)$$



en donde a

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m_e} \tau \quad (1.230)$$

se le conoce como la *conductividad* del medio, y está relacionada con la facilidad o dificultad del medio para que una carga se desplace a través de él. Su dimensión está dada en:

$$\sigma = \left[ \frac{\text{siemens}}{\text{m}} \right]$$

De esta manera se obtiene lo que se conoce como la *Ley de Ohms*,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.231)$$

la cual relaciona al vector de densidad de corriente en un punto del espacio en un medio con la conductividad del medio y el campo eléctrico que existe en ese punto del espacio. Con esta relación ya se puede establecer la divergencia del campo eléctrico, la cual sería:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left( \frac{\vec{J}}{\sigma} \right) = \nabla \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \vec{J} + \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \vec{J} \quad (1.232)$$

Pero, bajo un régimen estacionario, la divergencia de  $\vec{J}$  es igual a cero, por lo que bajo este régimen:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \nabla \frac{1}{\sigma} = \vec{J} \cdot \nabla \rho \quad (1.233)$$

donde  $[\rho]$  recibe el nombre de *resistividad* y sus unidades están dadas en  $[\text{ohms} \cdot \text{m}]$ . La resistividad es la inversa de la conductividad:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (1.234)$$

De igual forma se puede establecer el rotacional de  $\vec{J}$ , donde:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{J} &= \nabla \times (\sigma \vec{E}) \\ \text{donde} \quad \nabla \times (\sigma \vec{E}) &= \nabla \sigma \times \vec{E} + \sigma \nabla \times \vec{E} \end{aligned} \quad (1.235)$$

Pero, bajo régimen estacionario, el rotacional de  $\vec{E}$  es cero, por lo que el rotacional de  $\vec{J}$  sería igual a:

$$\nabla \times \vec{J} = \nabla \sigma \times \vec{E} \quad (1.236)$$

De acuerdo con todo lo anterior, para un régimen estacionario, se van a tener las siguientes ecuaciones para el campo eléctrico:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \nabla \cdot \left( \frac{1}{\sigma} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r}) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\sigma} \right) \cdot \sigma \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla \phi(\vec{r})\end{aligned}$$

El problema radica en que la divergencia de  $\vec{E}$ , aunque se ha podido establecer para un régimen estacionario en un medio cualquiera, va a depender del mismo campo que se desea encontrar. Se había encontrado anteriormente que:

$$\nabla \times \vec{J}(\vec{r}) = \nabla \sigma \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\nabla \sigma}{\sigma} \times \vec{J}(\vec{r}) \quad (1.237)$$

Pero  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ . De acuerdo al teorema de Helmholtz,  $\vec{J}$  debería de proveer del rotacional de una cierta función vectorial, ya que su divergencia es igual con cero y su rotacional es distinto de cero. Es decir,  $\vec{J}$  se comporta como un campo solenoidal en un régimen estacionario para cualquier medio:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_J(\vec{r}) \quad (1.238)$$

Para reducir la complejidad del problema, se utilizan Medios Lineales Homogéneos e Isótropos (M. L. H. I.). Estos implican que la conductividad  $\sigma$  es constante, por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla \phi(\vec{r}) \\ \nabla^2 \phi(\vec{r}) &= 0\end{aligned}$$

Para  $\vec{J}$  va a ocurrir que:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{J}(\vec{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{J}(\vec{r}) &= -\nabla \phi_J(\vec{r}) \\ \nabla^2 \phi_J(\vec{r}) &= 0\end{aligned}$$

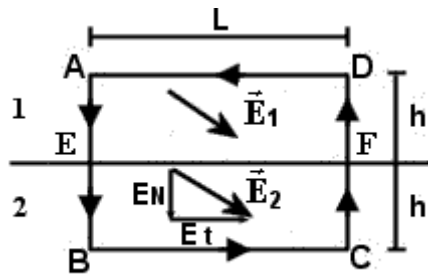
Los medios siguen juntos vía la ley de Ohms

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.239)$$

Cuando el medio es muy complejo, se trabaja directamente con las ecuaciones de  $\nabla \times \vec{E}$  y  $\nabla \cdot \vec{J}$  para evitar resolver ecuaciones muy extensas.

Aunque el teorema de Helmholtz nos permite caracterizar al medio, no nos proporciona una solución ya que parte del hecho de que se conoce a la fuente en el espacio, (cuestión que no se tiene aquí). Por ejemplo, en medios conductores bajo régimen estacionario, la divergencia de  $\vec{E}$  esta en función del mismo campo  $\vec{E}$  que se desea encontrar de la misma manera que el rotacional de  $\vec{J}$  está en función de la misma  $\vec{J}$  que se desea calcular. En el caso de los M. L. H. I., al ser todas las ecuaciones igual a cero, implica que es un campo armónico, por lo que se tiene campo pero no existe fuente en la región. La única arma que se tiene para solucionar este tipo de problemas es resolver la ecuación de Laplace, pero para ello se necesita entender que sucede en la interacción de la frontera.

Para encontrar las condiciones de frontera, habrá que visualizar el problema de forma similar al caso de los dieléctricos:



Del Teorema de Stokes se conoce que la integral de línea del campo eléctrico es igual a cero, puesto que el rotacional de  $\vec{E}$  es cero (no se considera a la fuente):

$$\oint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \equiv 0$$

De esta manera, la integral de contorno de  $\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  será igual a la suma de las contribuciones de cada uno de sus segmentos:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{AE} \vec{E}_{1,N} d\ell + \int_{EB} \vec{E}_{2,N} d\ell + \int_{BC} \vec{E}_{2,t} d\ell - \int_{CF} \vec{E}_{2,N} d\ell - \int_{FD} \vec{E}_{1,N} d\ell - \int_{DA} \vec{E}_{1,t} d\ell \equiv 0$$

Si ahora se toma el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{AE} \mathbf{E}_{1,N} d\ell = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{EB} \mathbf{E}_{2,N} d\ell = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{CF} \mathbf{E}_{2,N} d\ell = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{FD} \mathbf{E}_{1,N} d\ell \equiv 0$$

Si consideramos que los segmentos **BC** y **DA** son relativamente pequeños, de tal manera que podemos considerar que las componentes tangenciales se mantienen constantes, entonces tendríamos que la contribución de línea de esos segmentos sería:

$$\int_{BC} \mathbf{E}_{2,t} d\ell - \int_{DA} \mathbf{E}_{1,t} d\ell \equiv 0$$

De esta forma, la ecuación final de balance de la integral de línea sería:

$$\mathbf{E}_{2,t} L - \mathbf{E}_{1,t} L = 0$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{2,t} = \mathbf{E}_{1,t}} \quad (1.240)$$

Esta primera condición significa que las componentes tangenciales del Campo Eléctrico son continuas a través de una interfase bajo un régimen estacionario que no considera a la fuente. De forma similar, se puede deducir para **J** una segunda condición de frontera, la cual dice que las componentes normales también son continuas:

$$\boxed{\mathbf{J}_{1,N} = \mathbf{J}_{2,N}} \quad (1.241)$$

Los campos están unidos bajo la Ley de Ohms ( $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{J}}/\sigma$ ); esto implica que las componentes tangenciales del vector de densidad de corriente y las componentes normales del campo eléctrico son discontinuas:

$$\frac{\mathbf{J}_{1,t}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{J}_{2,t}}{\sigma_2}$$

$$\sigma_1 \mathbf{E}_{1,N} = \sigma_2 \mathbf{E}_{2,N}$$

En el caso de la función potencial, tenemos que el campo eléctrico es  $\bar{\mathbf{E}} = -\nabla\phi$ , por lo que las componentes normal y tangencial del campo son:

$$\mathbf{E}_N = -\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Si tenemos una superficie de separación entre dos medios, la componente tangencial a lo largo de la interfase se debe mantener continua, por lo que se puede integral tangencialmente hablando. Esto da como resultado que la función potencial debe de ser continua a través de una interfaz de separación:

$$\int -\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dt = \int -\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} dt$$

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

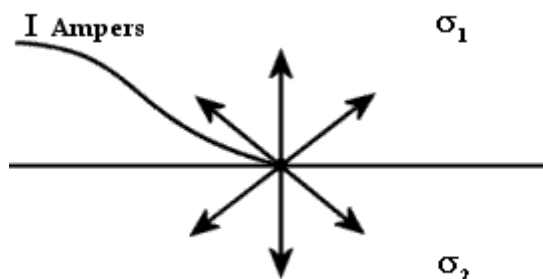
Es así como se obtienen las condiciones de frontera para el campo eléctrico o el vector de densidad de corriente en medios conductores bajo un régimen estacionario. Estas son exclusivamente dos condiciones expresadas en seis formas distintas; éstas se pueden resumir en la siguiente tabla:

CONDICIONES DE FRONTERA PARA MEDIOS CONDUCTORES		
$\vec{E}$	$\vec{J}$	$\varphi$
$\mathbf{E}_{1,t} = \mathbf{E}_{2,t}$ $\sigma_1 \mathbf{E}_{1,N} = \sigma_2 \mathbf{E}_{2,N}$	$\frac{\mathbf{J}_{1,t}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{J}_{2,t}}{\sigma_2}$ $\mathbf{J}_{1,N} = \mathbf{J}_{2,N}$	$\varphi_1 = \varphi_2$ $\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}}$

Éstas nos dicen que la continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico implica la discontinuidad de las componentes tangenciales del vector de densidad de corriente, pero además implica la continuidad del potencial eléctrico. Así mismo, la discontinuidad de las componentes normales del campo eléctrico implica la continuidad de las componentes normales del vector de densidad de corriente y la continuidad del potencial eléctrico.

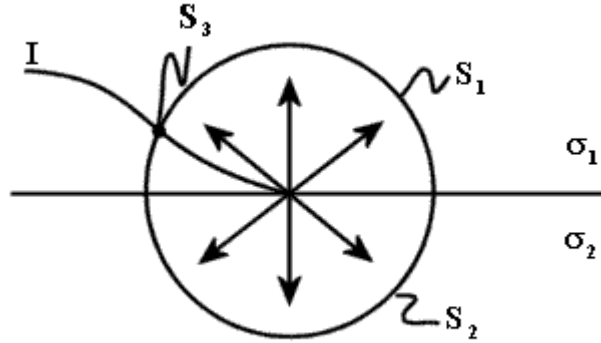
### EJEMPLO 1.9

Un electrodo o fuente puntual es dejado en una superficie de separación entre dos medios de conductividad  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  respectivamente, y por donde se libera una corriente de  $\mathbf{I}$  amperes. Encuentre el campo eléctrico.



Partamos del hecho que, en un régimen estacionario, la divergencia  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ ; además es un Medio Lineal Homogéneo e Isótropo. Esto significaría que podemos encerrar

la corriente que se está liberando en una esfera de radio  $R$ ; por ende, la corriente de  $I$  amperes tendría que atravesar la superficie  $S$ .



Lo anterior implicaría que

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J} dv = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \equiv 0$$

Si el medio es lineal, homogéneo e isótropo, el vector de densidad de corriente sólo va a depender de  $R$ , es decir, de que tal lejos o cerca se está de la fuente. Para una  $R$  dada, el módulo del vector va a ser constante. Por ende, se puede utilizar el teorema de la divergencia para calcular a  $J$ . Asumiendo que al sistema se le está inyectando una corriente de forma puntual en la superficie  $S_3$ . Entonces, el volumen de la integral será:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \oint_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{s}_3 + \oint_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \oint_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{s}_2 \equiv 0 \quad (1.242)$$

Si se toma el principio de que la entrada de corriente es negativa y la salida es positiva, entonces la contribución a la integral de flujo del segmento de superficie  $S_3$  es igual a la corriente total que está entrando al sistema:

$$\oint_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{s}_3 = -I \quad (1.243)$$

y la contribución de los segmentos  $S_1$  y  $S_2$  va a ser igual a la corriente que está saliendo del sistema:

$$\oint_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \oint_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{s}_2 = I \quad (1.244)$$

Como la corriente permanece constante sobre la superficie del hemisferio, se tendría que:

$$J_{1,r} 2\pi R^2 + J_{2,r} 2\pi R^2 = I$$

$$\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 = \frac{\mathbf{I}}{2\pi\mathbf{R}^2} \quad (1.245)$$

donde la  $\mathbf{J}_r$  es la componente de  $\mathbf{J}$  radial o normal y  $2\pi\mathbf{R}^2$  es la superficie de la esfera. Para poder resolver este problema se necesita la condición de frontera que dice que las componentes tangenciales son continuas, lo que implicaría que:

$$\frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{J}_2}{\sigma_2} \quad (1.246)$$

$$\mathbf{J}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mathbf{J}_1$$

Sustituyendo este valor de  $\mathbf{J}_2$  en la ecuación 1.245, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mathbf{J}_1 &= \frac{\mathbf{I}}{2\pi\mathbf{R}^2} \\ \mathbf{J}_1 \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1} \right) &= \frac{\mathbf{I}}{2\pi\mathbf{R}^2} \\ \mathbf{J}_1 &= \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \frac{\mathbf{I}}{2\pi\mathbf{R}^2} \end{aligned} \quad (1.247)$$

Sustituyendo ahora el valor obtenido para  $\mathbf{J}_1$  en la ecuación 1.246 se tiene que:

$$\mathbf{J}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{\mathbf{I}}{2\pi\mathbf{R}^2} \quad (1.248)$$

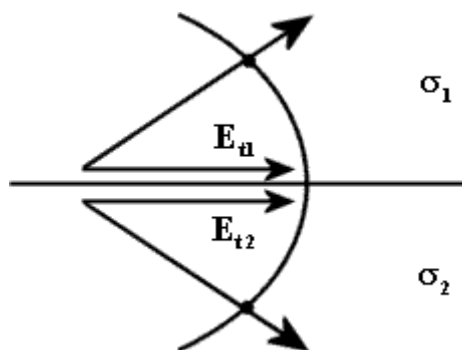
Escritas de forma vectorial se verían de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}_1(\bar{\mathbf{r}}) &= \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{\mathbf{I}}{2\pi\mathbf{R}^2} \bar{\mathbf{r}}_u \\ \bar{\mathbf{J}}_2(\bar{\mathbf{r}}) &= \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{\mathbf{I}}{2\pi\mathbf{R}^2} \bar{\mathbf{r}}_u \end{aligned} \quad (1.249)$$

Si  $\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}}$ , entonces el campo eléctrico va a ser igual a:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(\vec{r}) &= \frac{\vec{J}_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{I}{2\pi R^2} \vec{r}_u \\ \vec{E}_2(\vec{r}) &= \frac{\vec{J}_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{I}{2\pi R^2} \vec{r}_u\end{aligned}\quad (1.250)$$

Como se puede observar, el campo eléctrico tiene el mismo valor en los ambos medios, como si la interfase no existiera. Esto se debe a la condición de frontera, ya que las componentes tangenciales deben de ser continuas. Por ende, al ser el campo radial y el medio lineal, homogéneo e isótropo, implica que todo el campo comprendido sobre el radio sea el mismo; de esta forma, el campo que existe en el medio de conductividad  $\sigma_1$  va a ser igual al campo que existe en el medio de conductividad  $\sigma_2$  en cualquier punto de radio  $R$ .



Si lo comparamos con un medio homogéneo con espacio completo, en el medio de conductividad  $\sigma_1$  (donde se libera la corriente de  $I$  amperes), el campo eléctrico sería igual a:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma_1} \frac{I}{2\pi R^2} \vec{r}_u$$

que es igual a tener

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{2}{\sigma_2 + \sigma_1} = \frac{1}{\sigma_2 + \sigma_1 / 2}$$

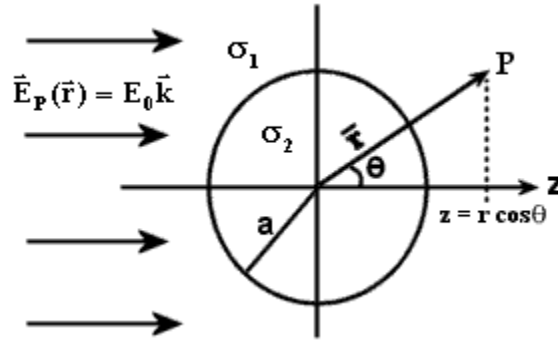
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Es como si se obtuviera el promedio de las conductividades y si les hubiera dado el mismo campo, esto en el caso de que la fuente estuviera exactamente en la interfase.

### EJEMPLO 1.10

Encuentre el campo eléctrico producido por una esfera que se encuentra sumergida en un medio donde previamente existe un campo  $\vec{E}_p = E_0 \vec{k}$  y  $E_0$  es una constante.





El cambio de conductividad en el medio va a inducir cargas en la superficie, pero esta carga es difícil de encontrar. Entonces, el único modo de resolver este problema es a través de la solución de la función potencial, la cual en este caso sólo va a depender de  $r$  y de  $\theta$ . Partamos, pues, de la ya conocida solución de la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} + B_{\ell} r^{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

El campo primario ya existente en el lugar, el cual inducirá a su vez un campo, proviene de:

$$\vec{E}_P = -\frac{\partial \varphi_P}{\partial z} \vec{k} \quad (1.251)$$

$$\varphi_P = -\int E_0 dz = -E_0 z$$

Indudablemente, la esfera conductora va a producir un campo secundario uno, el cual va a tender a cero conforme  $r$  tienda al infinito

$$\varphi_{s,1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow \infty$$

Para que esto suceda, la solución que puede tener  $\varphi_{s,1}$  será:

$$\varphi_{s,1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.252)$$

En la región 2, el interior de la esfera, el campo eléctrico va a ser la superposición de dos campos: un primario ya existente en el medio y un campo secundario inducido por el primario en la esfera. Por ende, el potencial secundario dos que da origen al campo total dentro de la esfera es debido a:

$$\varphi_{s,2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.253)$$

Este potencial debe mantenerse distinto de infinito en  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , debido a que dentro de la esfera no se tiene ninguna fuente sino que es un medio homogéneo. Por ende, no se puede tener ninguna singularidad en el interior de la esfera. La única solución que acepta esa condición es la de la ecuación 1.253. Entonces, la función potencial para cada una de las regiones se puede describir como:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -E_0 r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \\ \varphi_2 &= -E_0 r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)\end{aligned}\tag{1.254}$$

puesto que  $\mathbf{z} = \mathbf{r} \cos \theta$ . La primera condición de frontera (en  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ ) indica que el potencial debe de ser continuo:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_2 \\ \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\end{aligned}$$

lo que significaría que:

$$-E_0 r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)\tag{1.255}$$

De la segunda condición de frontera tendríamos que:

$$\sigma_1 \left[ -E_0 r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{-(\ell+1)A_{\ell}}{a^{\ell+2}} P_{\ell}(\cos \theta) \right] = \sigma_2 \left[ -E_0 r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell B_{\ell} a^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta) \right]\tag{1.256}$$

De la ecuación 1.255 tenemos que

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{A_{\ell}}{a^{\ell+2}} - B_{\ell} a^{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \theta) = 0\tag{1.257}$$

por lo que la ecuación 1.255 se puede describir como

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{-(\ell+1)A_{\ell}}{a^{\ell+2}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ell B_{\ell} a^{\ell-1} \right) P_{\ell}(\cos \theta) = \left( 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) E_0 \cos \theta\tag{1.258}$$

Los polinomios de Legendre en general no pueden ser cero por lo que, para que se satisfaga que la ecuación 1.257 sea igual a cero, el coeficiente que multiplica el polinomio de Legendre debe ser igual a cero. Ello implicaría que:

$$\mathbf{A}_\ell = \mathbf{B}_\ell \mathbf{a}^{2\ell+1} \quad (1.259)$$

Para simplificar la escritura, se dirá que

$$\frac{-(\ell+1)\mathbf{A}_\ell}{\mathbf{a}^{\ell+2}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ell \mathbf{B}_\ell \mathbf{a}^{\ell-1} = \mathbf{C}_\ell \quad (1.260)$$

por lo que la ecuación 1.258 se puede escribir como:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{C}_\ell \mathbf{P}_\ell(\cos \theta) = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} \right) \mathbf{E}_0 \cos \theta \quad (1.261)$$

A su vez, se conoce que  $\cos \theta = \mathbf{P}_1(\cos \theta)$  –polinomio de Legendre de orden 1–. Por lo tanto, la ecuación 1.261 se puede escribir así:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{C}_\ell \mathbf{P}_\ell(\cos \theta) = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} \right) \mathbf{E}_0 \mathbf{P}_1(\cos \theta) \quad (1.262)$$

Para que la siguiente equivalencia procedente de la ecuación 1.262 se pueda sostener:

$$\mathbf{C}_0 \mathbf{P}_0 + \mathbf{C}_1 \mathbf{P}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{P}_2 + \dots = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} \right) \mathbf{E}_0 \mathbf{P}_1$$

se necesita que todas las  $\mathbf{C}_\ell$  sean iguales a cero para toda  $\ell \neq 1$ , lo que implica que:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} \mathbf{E}_0 \quad (1.263)$$

Si se sustituye este valor en la ecuación 1.260, se tendría que

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} \mathbf{E}_0 = -\frac{2\mathbf{A}_1}{\mathbf{a}^3} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mathbf{B}_1 \quad (1.264)$$

De la ecuación 1.259 se tiene que  $\mathbf{A}_1$  debe ser igual a:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{a}^3 \quad (1.265)$$

Si sustituimos esta equivalencia en la ecuación 1.264, se puede obtener el valor del coeficiente  $\mathbf{B}_1$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} E_0 &= -2B_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} B_1 \\
\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} E_0 &= -\left( \frac{2\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1} \right) B_1 \\
B_1 &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} E_0
\end{aligned} \tag{1.266}$$

Sustituyendo ahora el valor de este coeficiente en la ecuación 1.265, obtenemos el valor del coeficiente  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} E_0 a^3 \tag{1.267}$$

Obtenidos los coeficientes, se tiene que la función potencial se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\vec{r}) &= -E_0 r \cos \theta + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} \\
\varphi_2(\vec{r}) &= -E_0 r \cos \theta + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 r \cos \theta
\end{aligned} \tag{1.268}$$

Obviamente, el campo eléctrico proviene del menos gradiente de la función potencial, por lo que el campo  $\mathbf{E}$  en la región 1 se puede ver de forma vectorial como:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \left[ E_0 \cos \theta + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 a^3 \frac{2 \cos \theta}{r^3} \right] \vec{r}_u + \left[ E_0 \sin \theta + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 a^3 \frac{\sin \theta}{r^3} \right] \vec{\theta}_u \tag{1.269}$$

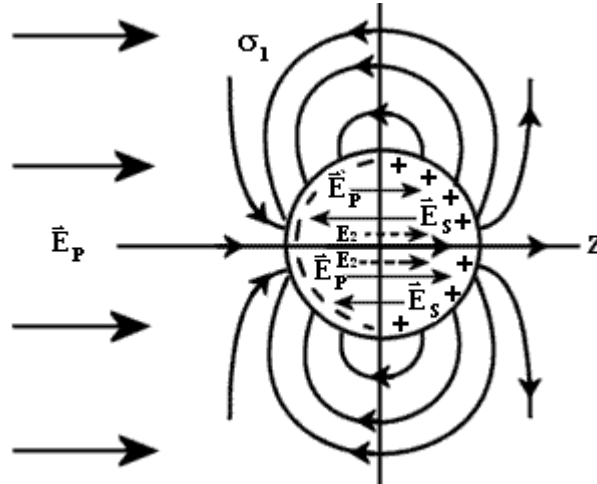
y el campo en el interior de la esfera, recordando  $\mathbf{z} = \mathbf{r} \cos \theta$ , será

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{-\partial \varphi_2}{\partial z} \vec{k} = E_0 \vec{k} - \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 \vec{k} \tag{1.270}$$

De acuerdo con estos resultados, claramente se puede observar que en el interior de la esfera el campo total  $\mathbf{E}_2$  es la suma de dos campos: un campo primario  $\mathbf{E}_p$  externo y un campo secundario  $\mathbf{E}_s$  generado por la inducción de cargas se opone al campo primario. Si los sumamos, éstos nos darían igual a:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{3\sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} E_0 \vec{k} \tag{1.271}$$

Este resultado es el mismo al obtenido con la esfera dieléctrica, con la excepción de que aquí se manejan las conductividades en lugar de las permitividades dieléctricas. Esto es lógico debido a que satisfacen las mismas ecuaciones. Por lo tanto, la esfera conductora que se tiene sigue un campo del mismo tipo:



Hasta el momento hemos estudiado por separado medios dieléctricos y medios conductores, cuyas ecuaciones de campo obtenidas se muestran a continuación en el cuadro de abajo:

RÉGIMEN ESTACIONARIO		
	Conductores	Dieléctricos
M. L. H. I.	$\nabla \times \vec{E} = 0$ $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ $\vec{E} = -\nabla \phi$ $\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\nabla \times \vec{E} = 0$ $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$ $\vec{E} = -\nabla \phi$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
En general	$\nabla \times \vec{E} = 0$ $\nabla \cdot \vec{E} = \sigma \nabla \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \vec{E}$ $\vec{E} = -\nabla \phi$ $\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\nabla \times \vec{E} = 0$ $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$ $\vec{E} = -\nabla \phi$ $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

En la realidad, cuando se establece un campo eléctrico en un medio, éste puede presentar tanto características dieléctricas como conductoras. Por lo tanto, ahora se verá qué pasa en un medio que es conductor-dieléctrico.

## **CAMPO ELÉCTRICO EN UN MEDIO CONDUCTOR – DIELÉCTRICO**

Anteriormente se vio que, para medios conductores, se tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,t} &= \mathbf{E}_{2,t} & \frac{\mathbf{J}_{1,t}}{\sigma_1} &= \frac{\mathbf{J}_{2,t}}{\sigma_2} \\ \sigma_1 \mathbf{E}_{1,N} &= \sigma_2 \mathbf{E}_{2,N} & \mathbf{J}_{1,N} &= \mathbf{J}_{2,N} \end{aligned}$$

Para medios dieléctricos, estas condiciones de frontera, en general, son:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{2,t} &= \mathbf{E}_{1,t} & \mathbf{D}_{2,t} - \mathbf{D}_{1,t} &= \mathbf{P}_{2,t} - \mathbf{P}_{1,t} \\ \epsilon_2 \mathbf{E}_{2,N} - \epsilon_1 \mathbf{E}_{1,N} &= \sigma_F & \mathbf{D}_{2,N} - \mathbf{D}_{1,N} &= \sigma_F \end{aligned}$$

Lo que seguiría es ver que es lo que sucede con las condiciones de frontera en medios conductores-dieléctricos. En el tema de los dieléctricos se vio que la densidad de carga libre solamente depende del vector de densidad de corriente y  $\mathbf{E}$  está relacionado a este vector por la Ley de Ohms:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{D}} = \nabla \cdot (\epsilon \vec{\mathbf{E}}) = \nabla \cdot \left( \frac{\epsilon}{\sigma} \vec{\mathbf{J}} \right) = \rho_f$$

Esto quiere decir que la densidad volumétrica de carga libre se relaciona tanto con las características dieléctricas como con las conductoras del medio, lo que nos daría que:

$$\rho_f = \nabla \cdot \left( \frac{\epsilon}{\sigma} \right) \cdot \vec{\mathbf{J}} + \frac{\epsilon}{\sigma} \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}$$

Pero para un régimen estacionario la divergencia de  $\mathbf{J}$  es igual a cero, por lo que la densidad volumétrica de carga  $\rho_f$  estará en función:

$$\rho_f = \nabla \cdot \left( \frac{\epsilon}{\sigma} \right) \cdot \vec{\mathbf{J}} \quad (1.272)$$

Las condiciones de frontera nos dicen que  $\mathbf{D}_{2,N} - \mathbf{D}_{1,N} = \sigma_F$  y que  $\epsilon_2 \mathbf{E}_{2,N} - \epsilon_1 \mathbf{E}_{1,N} = \sigma_F$ , pero  $\epsilon_2 \left( \frac{1}{\sigma_2} \right) \mathbf{J}_{2,N} - \epsilon_1 \left( \frac{1}{\sigma_1} \right) \mathbf{E}_{1,N} = \sigma_F$ ; entonces:

$$\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \mathbf{J}_{2,N} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \mathbf{J}_{1,N} = \sigma_F \quad (1.273)$$

Para un régimen estacionario, las componentes normales del vector de densidad de corriente son continuas, por lo que la densidad superficial de carga libre se acumula de la siguiente forma:

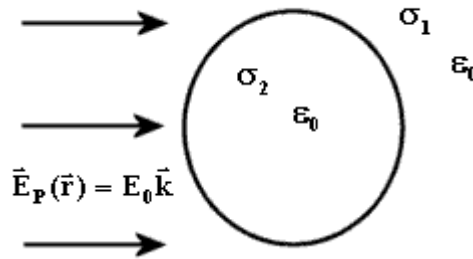
$$\sigma_F = \left( \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) \mathbf{J}_N \quad (1.274)$$

Básicamente las dos ecuaciones que expresan como se acumulan la densidad volumétrica de carga y la densidad superficial de carga son las que se necesitan para la representación de un conductor-dieléctrico:

$$\rho_f(\vec{r}) = \nabla \left( \frac{\epsilon}{\sigma} \right) \cdot \vec{J}(\vec{r})$$

$$\sigma_F = \left( \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) \mathbf{J}_N$$

Regresemos al ejercicio anterior en el que se resolvió una esfera bajo la acción de un campo exterior.



Se encontró que el potencial secundario en la región 1 era:

$$\varphi_{s,1}(\vec{r}) = \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

y que el potencial secundario en el interior de la esfera se explicaba como:

$$\phi_{s,2} = \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 z = \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 r \cos \theta$$

Como se vio, el campo en el interior de la esfera era la suma de dos campos: el campo primario más el campo secundario generado en la región 2,

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_P + \vec{E}_{s,2}$$

lo que dio a final de cuentas un campo total de este tipo:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{3\sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} E_0 \cos \theta \vec{r}_u - \frac{3\sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} E_0 \sin \theta \vec{\theta}_u$$

El campo total en la región 1 de la esfera fue:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \left[ E_0 \cos \theta + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 a^3 \frac{2 \cos \theta}{r^3} \right] \vec{r}_u + \left[ E_0 \sin \theta + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 a^3 \frac{\sin \theta}{r^3} \right] \vec{\theta}_u$$

Digamos ahora que se desea encontrar la densidad superficial de carga, es decir, cuánta carga se está acumulando en la superficie de la esfera. Como sólo se están viendo las características conductoras, se podría pensar que la densidad es de característica  $\epsilon_0$ , de forma que no se tuvieran cargas inducidas por la polarización. Desde este punto de vista, se observa que la densidad superficial de carga depende de:

$$\sigma_F = \frac{\epsilon_0}{\sigma_2 \sigma_1} (\sigma_1 - \sigma_2) \mathbf{J}_N$$

donde el vector normal de corriente es

$$\mathbf{J}_N = \sigma \mathbf{E}r$$

$$\mathbf{J}_N = \sigma_2 \left( \frac{3\sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 \cos \theta$$

entendiendo por  $\mathbf{E}r$  al campo eléctrico total radial. De esta forma, la densidad superficial se estaría acumulando así:

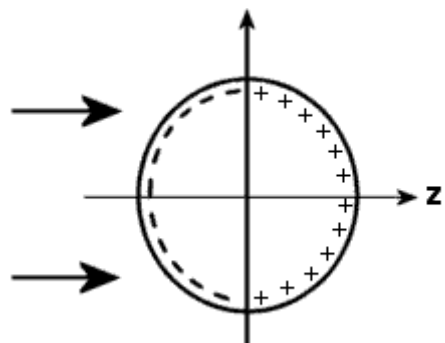
$$\sigma_F = \epsilon_0 \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 \cos \theta \quad (1.275)$$

La densidad superficial es la que da origen al campo secundario, ya que es la carga que se está acumulando en la superficie. Esta se puede escribir momentáneamente como:



$$\sigma_F = \sigma_0 \cos \theta \quad (1.276)$$

Nosotros tenemos una esfera la cual se ve afectada por un campo inductor; por ende, se van a tener cargas superficiales positivas de lado contrario en el que llega el campo y cargas superficiales negativas del lado por donde llega el campo.

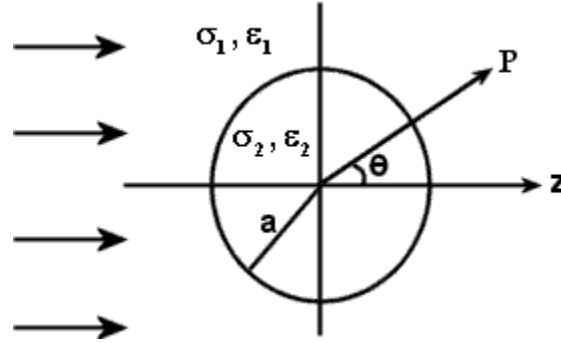


Si se conociera la  $\sigma_F$  que se induce sobre la superficie de la esfera, se podría aplicar directamente la Ley de Coulomb de campo electrostático para encontrar el campo sin necesidad de resolver ninguna ecuación diferencial como antes se ha hecho. En pocas palabras, el campo secundario se podría encontrar a partir de la siguiente integral:

$$\phi_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_F(\vec{r})}{R(\vec{r}, \vec{r}')} ds \quad (1.277)$$

donde  $S$  es la superficie de la esfera. Este mismo potencial nos produciría el campo tanto adentro como afuera de la esfera. Esto quiere decir que hay una misma correspondencia entre campo y carga; es decir, la carga da origen a un campo eléctrico, un campo eléctrico da origen a un vector de densidad de corriente y este da origen un campo eléctrico también. El problema radica en que no se puede conocer de antemano esa densidad de carga libre, ya que para encontrarla se necesita conocer al campo, y si ya se conoce el campo entonces ya no se necesita a la carga. Es por este motivo que no se resuelve por medio de este tipo de desarrollo.

Involucremos ahora un paso más a nuestro problema. ¿Qué sucede en el caso de que existan características dieléctricas distintas? Esto puede explicarse mejor con el siguiente ejemplo. Encuentre el campo eléctrico producido por una esfera de radio  $a$  que se encuentra en un medio donde existe un campo  $\vec{E}_p = E_0 \vec{k}$ .



La pregunta obligada sería cómo se va a resolver, como conductor o como dieléctrico. De una u otra forma, el campo resultante deberá dar el mismo valor, partiendo del hecho de que lo que una carga recibe (sea el medio conductor o dieléctrico) es la acción de un campo, independientemente de las fuentes que lo produzcan. Por ende, es indistinto si se resuelve como conductor o como dieléctrico.

Si lo planteo como dieléctrico, se tendrán las siguientes ecuaciones de campo bajo las condiciones de frontera que ya se conocen:

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\vec{D} = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{D}_{2,N} - \vec{D}_{1,N} = \sigma_F$$

$$\frac{\vec{D}_{2,t}}{\epsilon_2} = \frac{\vec{D}_{1,t}}{\epsilon_1}$$

Para resolverlo de este modo se necesita conocer la densidad de carga libre  $\sigma_F$ , la cual ya se vio que se acumula como:

$$\sigma_F = \left( \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) \mathbf{J}_N$$

Pero, para conocer la  $\sigma_F$ , se necesita conocer el vector de densidad de corriente  $\mathbf{J}$  y para conocer este hay que saber cual es el campo eléctrico; por ende, no es útil resolverlo de esta forma.

Si lo planteo como conductor, bajo un régimen estacionario se tendrán las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

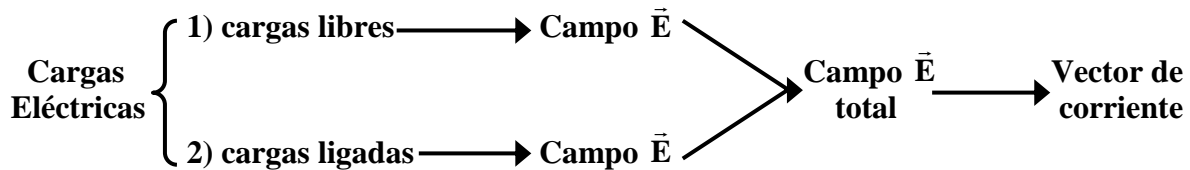
$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

$$\mathbf{E}_{2,t} = \mathbf{E}_{1,t}$$

$$\sigma_2 \mathbf{E}_{2,N} = \sigma_1 \mathbf{E}_{1,N}$$

Planteado de esta forma, en principio, no se necesita conocer la carga libre que se está acumulando en la superficie. El problema, entonces, es saber qué es lo que sucede con la parte dieléctrica si lo planteo resolver como conductor. Para analizar esto, hay que recordar un poco de qué depende un campo eléctrico.

Las cargas eléctricas, ya sea que estén en movimiento o no, producen un campo eléctrico. Hay dos tipos de cargas eléctricas: las cargas libres y las ligadas; cada una de estas cargas producen un campo eléctrico que dan origen a un campo eléctrico total y, por tanto, a un vector de corriente. La carga total es igual a la suma de las cargas libres que se generan por la conducción más las cargas ligadas que se producen por las características dieléctricas del medio:



El campo eléctrico total bajo la acción de cargas se ve de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (1.278)$$

Cuando se analizó la componente total del campo eléctrico, las condiciones de frontera hubieran dado:

$$\mathbf{E}_{2,N} - \mathbf{E}_{1,N} = \frac{\sigma_F}{\epsilon_0} - \left( \mathbf{P}_{2,N} - \mathbf{P}_{1,N} \right) \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_F}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_F}{\epsilon_0}$$

Por otro lado, se tiene que la densidad volumétrica de carga está dada como

$$\rho_f = \nabla \cdot \left( \frac{\epsilon}{\sigma} \right) \vec{J}$$

La carga total está dada por la suma de la carga libre más la carga ligada:

$$\rho_t = \rho_f + \rho_s = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \quad (1.279)$$

De acuerdo con la ecuación anterior, la carga total también se puede escribir como:

$$\rho_t = \rho_f - \nabla \cdot \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \vec{D} \quad (1.280)$$

donde

$$\nabla \cdot \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \vec{D} = \nabla \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \cdot \vec{D} + \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \nabla \cdot \vec{D}$$

Por lo tanto, la carga total sería igual a:

$$\rho_t = \rho_f - \nabla \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \cdot \vec{D} + \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \rho_f \quad (1.281)$$

Entonces, la carga ligada volumétrica o carga total básicamente depende de un cambio de las características del medio pero también de la carga libre que se encuentre en el medio. Si el medio fuera de tipo lineal, homogéneo e isotrópico, no se generaría densidad volumétrica de carga libre en él, lo que implicaría que la carga total en el medio sería igual a cero:

$$\rho_t = \rho_f + \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \rho_f = 0 \quad (1.282)$$

Si no hubiera carga ligada en el medio, entonces

$$\rho_f = \nabla \left( \frac{\sigma}{\epsilon} \right) \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.283)$$

Si  $\sigma_1 \epsilon_1 = \text{constante}$  y  $\sigma_2 \epsilon_2 = \text{constante}$ , dependería exclusivamente de la carga superficial:

$$\rho_f = \nabla \left( \frac{\epsilon}{\sigma} \right) \vec{J} \quad (1.284)$$

En un M. L. H. I. conductor-dieléctrico, el campo eléctrico depende solamente de la carga total libre y ligada que se induce en la superficie del cuerpo; es decir,

$$\mathbf{E}_{1,N} - \mathbf{E}_{2,N} = \frac{\sigma_t}{\epsilon_0}$$

Pero  $\mathbf{E}_{2,N}$  se puede ver como:

$$\mathbf{E}_{2,N} = \frac{\mathbf{J}_{2,N}}{\sigma_2} = \rho_2 \mathbf{J}_{2,N}$$

y  $\mathbf{E}_{1,N}$  como

$$\mathbf{E}_{1,N} = \frac{\mathbf{J}_{1,N}}{\sigma_1} = \rho_1 \mathbf{J}_{1,N}$$

recordando que  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ .

Por ende, la conducción de frontera se puede expresar como

$$\rho_2 \mathbf{J}_{N,2} - \rho_1 \mathbf{J}_{N,1} = \frac{\sigma_t}{\epsilon_0} \quad (1.285)$$

Pero  $\mathbf{J}_{N,2} = \mathbf{J}_{N,1}$ , por lo que

$$\epsilon_0(\rho_2 - \rho_1)\mathbf{J}_N = \sigma_t \quad (1.286)$$

Esto significa que, bajo un régimen estacionario, la carga total que se induce en la superficie de un cuerpo depende exclusivamente del contraste de resistividad entre los medios o de sus características conductivas, más no de sus características dieléctricas. Por lo tanto, el campo eléctrico se puede resolver como si se planteara exclusivamente para medios conductores, aunque tenga características dieléctricas, encontrando el resultado correcto. De acuerdo con lo anterior, el potencial provendrá de:

$$\phi_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \frac{\sigma_t}{R} ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \frac{(\rho_2 - \rho_1)\mathbf{J}_N}{R} ds \quad (1.287)$$

Para verificar lo dicho anteriormente, se resolverá un problema utilizando las dos formas, donde se deberá obtener en ambos casos el mismo resultado. Para ello, vamos a regresar al ejercicio 1.10 de la esfera con un campo externo, el cual ya se había resuelto como conductor y en donde se obtuvieron los siguientes resultados para el potencial:

$$\phi_{s,1} = -E_0 r \cos \theta + \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\phi_{s,2} = -\frac{3\sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} E_0 r \cos \theta$$

La densidad superficial de carga libre era igual a:

$$\sigma_F = 3 \left( \frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2}{\sigma_2 + 2\sigma_1} \right) E_0 \cos \theta$$

Si ahora se tratara como un medio dieléctrico, se manejarían las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= \mathbf{0} & \vec{E} &= -\nabla\phi \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \mathbf{0} & \nabla^2 \phi_D &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

y las siguientes condiciones de frontera:

$$\mathbf{E}_{2,t} = \mathbf{E}_{1,t} \quad \epsilon_2 \mathbf{E}_{2,N} - \epsilon_1 \mathbf{E}_{1,N} = \sigma_F$$

que en función del potencial serían

$$\phi_{D,2} = \phi_{D,1} \quad \epsilon_2 \frac{\partial \phi_{2,D}}{\partial \eta} - \epsilon_1 \frac{\partial \phi_{1,D}}{\partial \eta} = -\sigma_F$$

De forma resumida, el cálculo de la solución general del laplaciano es similar al del medio conductor, donde el potencial expresado en coordenadas esféricas es:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} + B_{\ell} r^{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

El potencial  $\phi_{S,1}^D \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ ; por lo tanto,

$$\phi_{S,1}^D = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

Si  $\phi_{S,2}^D \neq \infty$  cuando  $r = 0$ , entonces:

$$\phi_{S,2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

De esta forma, el potencial en cada una de las regiones será:

$$\begin{aligned}\phi_{D,1} &= -E_0 r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \\ \phi_{D,2} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)\end{aligned} \tag{1.288}$$

Las condiciones de frontera en dieléctricos dice que, en  $r = a$ , los potenciales deben de ser continuos ( $\phi_{D,2} = \phi_{D,1}$ ):

$$-E_0 a \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{a^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} a^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \tag{1.289}$$

y que las componentes tangenciales deben ser discontinuas:

$$\varepsilon_2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \mathbf{B}_\ell \mathbf{a}^{\ell-1} \mathbf{P}_\ell(\cos \theta) - \varepsilon_1 \left[ -\mathbf{E}_0 \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{-(\ell+1)\mathbf{A}_\ell}{\mathbf{a}^{\ell+2}} \right) \mathbf{P}_\ell(\cos \theta) \right] = -\sigma_F \quad (1.290)$$

Recordando que  $\cos \theta = \mathbf{P}_\ell(\cos \theta)$  y que  $\mathbf{A}_\ell = \mathbf{B}_\ell \quad \forall \quad \ell \neq 1$ , entonces las ecuaciones 1.289 y 1.290 se puede escribir todavía como:

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{a} = -\mathbf{E}_0 \mathbf{a} + \frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{a}^2} \quad (1.291)$$

$$\varepsilon_2 \mathbf{B}_1 \cos \theta - \varepsilon_1 \left[ -\mathbf{E}_0 \cos \theta - \frac{2\mathbf{A}_1}{\mathbf{a}^3} \cos \theta \right] = -\sigma_F \quad (1.292)$$

Si dividimos esta última ecuación entre  $(\varepsilon_2 \cos \theta)$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mathbf{E}_0 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{2\mathbf{A}_1}{\mathbf{a}^3} &= -\frac{\sigma_F}{\varepsilon_2 \cos \theta} \\ \mathbf{B}_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{2\mathbf{A}_1}{\mathbf{a}^3} &= -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mathbf{E}_0 - \frac{\sigma_F}{\varepsilon_2 \cos \theta} \end{aligned} \quad (1.293)$$

De la ecuación 1.291, podemos despejar al coeficiente  $\mathbf{A}_1$ :

$$\mathbf{A}_1 = (\mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_0) \mathbf{a}^3 \quad (1.294)$$

y así ahora sustituirlo en la ecuación 1.293 para obtener el valor del coeficiente  $\mathbf{B}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 + 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{E}_0) &= -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mathbf{E}_0 - \frac{\sigma_F}{\varepsilon_2 \cos \theta} \\ \mathbf{B}_1 \left( \frac{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) &= \frac{-3\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mathbf{E}_0 - \frac{\sigma_F}{\varepsilon_2 \cos \theta} \\ \mathbf{B}_1 &= \frac{-3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \mathbf{E}_0 - \frac{\sigma_F}{(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1) \cos \theta} \end{aligned} \quad (1.295)$$

Sustituyendo ahora el valor obtenido para el coeficiente  $\mathbf{B}_1$  en la ecuación 1.294, obtendremos el valor del coeficiente  $\mathbf{A}_1$ :

$$\mathbf{A}_1 = \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \right) \mathbf{E}_0 \mathbf{a}^3 - \frac{\sigma_F \mathbf{a}^3}{(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1) \cos \theta} \quad (1.296)$$

De esta forma, el potencial ya se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\varphi_{D,1} &= -E_0 r \cos \theta + \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \right) E_0 a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{\sigma_F a^3}{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1) \cos \theta} \frac{\cos \theta}{r^2} \\ \varphi_{D,2} &= \frac{-3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_0 r \cos \theta - \frac{\sigma_F}{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1) \cos \theta} r \cos \theta\end{aligned}\quad (1.297)$$

Si  $\sigma = 0$ , entonces se tendrían los mismos resultados obtenidos cuando se trató a la esfera como totalmente conductiva (ejercicio 1.10). Terminemos, pues, de resolver el potencial para el interior de la esfera:

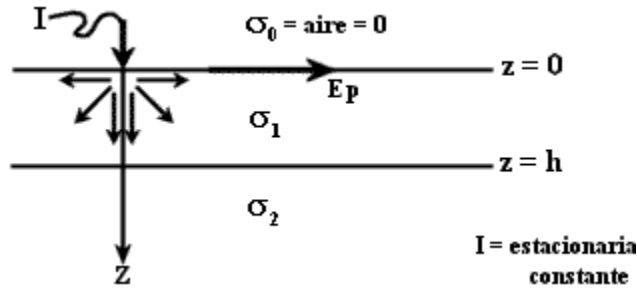
$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \left[ \frac{-3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} - \left( \frac{1}{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)} \right) 3 \left( \frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2}{(\sigma_2 + 2\sigma_1)} \right) \right] E_0 r \cos \theta \\ \varphi_2 &= -3 \left[ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} + \frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2}{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)(\sigma_2 + 2\sigma_1)} \right] E_0 z \\ \varphi_2 &= -3 \left[ \frac{\epsilon_1(\sigma_2 + 2\sigma_1) + \epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2}{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)(\sigma_2 + 2\sigma_1)} \right] E_0 z \\ \varphi_2 &= -3 \left[ \frac{\epsilon_1 \sigma_2 + 2\epsilon_1 \sigma_1 + \epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2}{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)(\sigma_2 + 2\sigma_1)} \right] E_0 z \\ \varphi_2 &= -3 \left[ \frac{\sigma_1(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)}{(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)(\sigma_2 + 2\sigma_1)} \right] E_0 z \\ \varphi_2 &= \frac{-3\sigma_1}{(\sigma_2 + 2\sigma_1)} E_0 z\end{aligned}\quad (1.298)$$

Este es el mismo potencial que se hubiera obtenido resolviendo el problema como conductor bajo régimen estacionario y sin tomar en cuenta las características dieléctricas del medio.

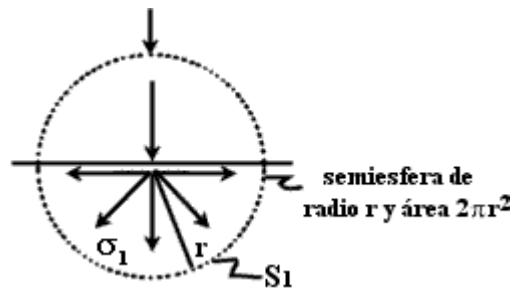
### EJEMPLO 1.11

Encuentre el potencial en  $\mathbf{z} = 0$  producido por una fuente puntual dejada en  $\mathbf{z} = 0$ . A la fuente se le inyecta una corriente estacionaria de  $\mathbf{I}$  amperes.





Bajo un régimen estacionario, las características dieléctricas no se toman en cuenta para resolver el potencial. El potencial primario está irradiando en forma radial toda la corriente hacia un espacio de conductividad  $\mathbf{i}$ . Si encerramos en una superficie gaussiana de radio  $\mathbf{r}$ , tenemos que el balance del vector de densidad de corriente es cero ( $\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} = 0$ ).



Es decir, si integramos en esta superficie gaussiana, tendremos que

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}} dV = \oint_S \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = 0$$

Si tenemos que el balance de la integral de superficie la podemos dividir en dos, donde  $\mathbf{S}_2$  es la superficie por donde entra la corriente, entonces

$$\oint_S \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{S_1} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}_1 + \int_{S_2} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}_2 \quad (1.299)$$

donde

$$\int_{S_1} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}_1 = -I$$

$$\int_{S_2} \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}_2 = I$$

Partiendo del hecho de que hacia arriba no se va a conducir corriente ya que se tiene que ese medio representa al aire, entonces toda la corriente se va a distribuir sobre el medio de conductividad  $\sigma_1$  y sobre una semiesfera de radio  $\mathbf{r}$ , cuya área es  $2\pi R^2$ , por lo que el módulo de la corriente es  $\mathbf{J}2\pi R^2 = \mathbf{I}$ . Escrito en forma vectorial se vería como:

$$\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{I}}{2\pi R^2} \bar{\mathbf{r}}_u \quad (1.300)$$

De la de Ohms se conoce que  $\bar{\mathbf{J}} = \sigma_1 \bar{\mathbf{E}}$  y que  $\bar{\mathbf{E}} = \frac{\bar{\mathbf{J}}}{\sigma_1} = \rho_1 \bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}})$ ; por lo tanto el campo eléctrico de la fuente satisface:

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\rho \cdot \mathbf{I}}{2\pi R^2} \bar{\mathbf{r}}_u \quad (1.301)$$

Si además recordamos que el campo eléctrico proviene de menos el gradiente de la función potencial; por lo tanto, si integramos a ambos lados tenemos que el potencial proviene de:

$$\int \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) \cdot d\bar{\mathbf{r}} = - \int \nabla \phi \cdot d\bar{\mathbf{r}}$$

$$\int \frac{\mathbf{I} \rho_1}{2\pi R^2} d\mathbf{r} = - \int \frac{\partial \phi}{\partial r} d\mathbf{r}$$

$$\phi(\bar{\mathbf{r}}) = - \int \frac{\mathbf{I} \rho_1}{2\pi R^2} d\mathbf{r}$$

$$\phi(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{I} \rho_1}{2\pi R}$$

De esta forma tenemos que el potencial primario es igual a:

$$\phi_p(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\rho_1 \mathbf{I}}{2\pi R} = \frac{\mathbf{I}}{2\pi \sigma_1 R} \quad (1.302)$$

donde  $R = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2}$ .

Así, por facilidad, se ha puesto el origen de coordenadas cartesianas en donde se ubica la fuente puntual. Lo que sucede es que el campo eléctrico primario que se ha producido al inyectar una corriente en el subsuelo se va a esparcir por el medio de conductividad  $\sigma_1$ . Este va a llegar a la interfase y se va a inducir carga sobre la misma interfase; estas cargas a su vez van a inducir un campo secundario en la primera y segunda capa. Por lo tanto, se va a producir un potencial total en la primera capa. El potencial primario va a satisfacer la ecuación 1.302, mientras que el potencial secundario va a satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{z}^2} \phi = 0$$

Se tienen dos condiciones de frontera, en  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  y en  $\mathbf{z} = \mathbf{h}$ . Las condiciones de frontera que se van a satisfacer en  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  es que la componente normal del campo eléctrico debe ser igual a cero ( $\mathbf{E}_N = \mathbf{0}$ ), lo que es igual a decir que el potencial de la primera capa con respecto a  $\mathbf{z}$  debe de ser cero

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

El potencial en la capa 1, al igual que el ejemplo 1.10, va a ser igual al potencial primario más el potencial secundario:

$$\phi_1(\vec{\mathbf{r}}) = \phi_P(\vec{\mathbf{r}}) + \phi_{s,1}$$

En el caso de  $\mathbf{z} = \mathbf{h}$ , los potenciales deben de ser continuos y las componentes normales del campo eléctrico deben ser discontinuas:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \\ \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} &= \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{n}} \end{aligned}$$

El potencial en la capa 2 ( $\phi_2$ ) va a satisfacer la ecuación de Laplace. Una vez obtenidas las condiciones de frontera, podemos intentar resolver la ecuación diferencial. No se tienen fronteras en la dirección  $\mathbf{XY}$ , es decir, tenemos que el potencial no varía con respecto a los ejes  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Y}$ , ya que estos van de  $-\infty$  a  $+\infty$ , por lo que no habría un cambio de propiedad en esta dirección. Pero si hay cambio con respecto al eje  $\mathbf{z}$  (sí se tienen fronteras), por lo que se puede utilizar la trasformada de Fourier en la dirección  $\mathbf{XY}$  del laplaciano de la función:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\mathbf{xy}} \left( \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{z}^2} \phi \right) &= 0 \\ \mathfrak{F}_{\mathbf{xy}} \left( \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \phi \right) &= -\mathbf{p}^2 \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{z}) \\ \mathfrak{F}_{\mathbf{xy}} \left( \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^2} \phi \right) &= -\mathbf{q}^2 \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{z}) \end{aligned} \tag{1.303}$$

La T. de Fourier se transforma en una ecuación ordinaria de primer orden:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{z}^2} \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{z}) - \mathbf{u}^2 \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{z}) = 0 \tag{1.304}$$

donde  $\mathbf{u}^2 = \mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2$ . La solución general de la T. F. es la siguiente:

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z) = A e^{+uz} + B e^{-uz} \quad (1.305)$$

Para la primera capa, el potencial  $\varphi_1$ , en el dominio del número de onda, se debe escribir como:

$$\varphi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z) = \mathfrak{I}_{xy} \left( \frac{\rho_1 \mathbf{I}}{2\pi \mathbf{R}} \right) + A_1 e^{+uz} + B_1 e^{-uz} \quad (1.306)$$

En cambio, el potencial en la segunda capa se puede escribir exclusivamente como:

$$\varphi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z) = A_2 e^{+uz} + B_2 e^{-uz} \quad (1.307)$$

Para obtener el potencial de la primera capa se debe de obtener la T. F. del potencial primario  $\varphi_p$ :

$$\mathfrak{I}_{xy} \left( \frac{\rho_1 \mathbf{I}}{2\pi \mathbf{R}} \right) = \frac{\mathbf{I}}{2\pi \sigma_1} \mathfrak{I}_{xy} \left( \frac{1}{\mathbf{R}} \right) \quad (1.308)$$

Recordando que la T. F. de  $(1/\mathbf{R})$  es igual a:

$$\mathfrak{I}_{xy} \left( \frac{1}{\mathbf{R}} \right) = \frac{2\pi}{u} e^{-u|z|}$$

entonces se tiene que la T. F. del potencial primario es:

$$\mathfrak{I}_{xy} \left( \frac{\rho_1 \mathbf{I}}{2\pi} \frac{1}{\mathbf{R}} \right) = \frac{\mathbf{I}}{\sigma_1 u} e^{-u|z|} \quad (1.309)$$

En  $z = 0$  ocurre que la componente normal del campo debe de ser cero ( $\mathbf{E}_N = 0$ ), lo que implica que la derivada normal del potencial  $\varphi_1$  debe de ser cero:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sigma_1 u} e^{-u|z|} + \frac{\partial}{\partial z} (A_2 e^{+uz} + B_2 e^{-uz}) = 0 \quad (1.310)$$

El potencial primario es igual a  $\varphi_p(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z) = 0$  en  $z = 0$ , debido a que el campo primario es tangencial en  $z = 0$ ; por lo tanto no existe componente normal del campo primario. Se tiene, pues, que la componente normal que podría existir en  $z = 0$  se debe a la existencia del campo secundario; por lo tanto, la componente normal del campo secundario es la que se debe forzar a ser cero:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \varphi_P}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \quad \Downarrow \\
\frac{\partial}{\partial z} \varphi_{s,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z) &= 0 \quad \text{en } z = 0 \\
\frac{\partial}{\partial z} (A_2 e^{+uz} + B_2 e^{-uz}) &= 0 \\
uA_1 - uB_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = B_1
\end{aligned} \tag{1.311}$$

De acuerdo con lo anterior,  $\varphi_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)$  se puede expresar como:

$$\varphi_1 = \frac{\mathbf{I}}{\sigma_1 u} e^{-uz} + A(e^{+uz} - e^{-uz}) \tag{1.312}$$

En el caso del potencial  $\varphi_2$  se tiene que si  $z \rightarrow \infty$ , entonces  $\varphi_2 \rightarrow 0$ . Para cumplir esta condición se debe tener que  $A_2 = 0$  ya que está siendo multiplicada por un exponente de  $+uz$ , por lo que estaría creciendo indefinidamente. Por lo tanto,  $\varphi_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}, z)$  se representa exclusivamente por:

$$\varphi_2 = B e^{-uz} \tag{1.313}$$

Como se recordará, en  $z = h$  se tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi_2 \\
\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}
\end{aligned}$$

Aplicando estas condiciones, en  $z = h$  se tendría que:

$$\frac{\mathbf{I}}{\sigma_1 u} e^{-uh} + \frac{\partial}{\partial z} A(e^{+uh} - e^{-uh}) = B e^{-uh} \tag{1.314}$$

$$\sigma_1 \left[ \frac{-\mathbf{I}}{u} e^{-uh} + A(e^{+uh} - e^{-uh}) \right] = -\sigma_2 u B e^{-uh} \tag{1.315}$$

Por facilidad de cálculo, se va a definir a  $(c)$  como:

$$c = \frac{\mathbf{I}}{\sigma_1} \tag{1.316}$$

Este valor se va a sustituir en la ecuación 1.315, por lo que se va a establecer que:

$$-ce^{-uh} + uA(e^{+uh} + e^{-uh}) = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} uBe^{-uh} \quad (1.317)$$

Multiplicando la ecuación 1.314 por  $(\sigma_2/\sigma_1)u$ , y tomando en cuenta la ecuación 1.316, se va a tener:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} ce^{-uh} + Au \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (e^{+uh} - e^{-uh}) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} uBe^{-uh} \quad (1.318)$$

Sumando las ecuaciones 1.317 y 1.318 se tiene:

$$ce^{-uh} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \right) + uA \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (e^{+uh} - e^{-uh}) + uA(e^{+uh} + e^{-uh}) = 0 \quad (1.319)$$

Juntando términos iguales daría:

$$\begin{aligned} ce^{-uh} \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1} \right) + uAe^{+uh} \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + 1 \right) + uAe^{-uh} \left( 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) &= 0 \\ ce^{-uh} \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1} \right) + uAe^{+uh} \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{\sigma_1} \right) + uAe^{-uh} \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} \right) &= 0 \\ ce^{-uh} \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \right) + uAe^{+uh} - uAe^{-uh} \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.320)$$

Si se considera que  $R_{12} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}$ , donde este es el *coeficiente de reflexión*, se tiene:

$$ce^{-uh} R_{12} - uAe^{-uh} R_{12} + uAe^{+uh} = 0$$

$$ce^{-uh} R_{12} + uAe^{+uh} (1 - R_{12}e^{-2uh}) = 0$$

$$uAe^{+uh} = \frac{cR_{12}e^{-uh}}{1 - R_{12}e^{-2uh}}$$

Despejando se obtiene que el coeficiente **A** es igual a:

$$A = \frac{-cR_{12}e^{-2uh}}{u(1 - R_{12}e^{-2uh})} \quad (1.321)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1.314 y tomando en cuenta la ecuación 1.316, se puede obtener el coeficiente **B**:

$$\begin{aligned}
Be^{-uh} &= \frac{c}{u} e^{-uh} + \frac{-cR_{12}e^{-2uh}}{u(1-R_{12}e^{-2uh})} (e^{+uh} - e^{-uh}) \\
&= \frac{ce^{-uh}(1-R_{12}e^{-2uh}) - cR_{12}e^{-uh}(e^{+uh} - e^{-uh})}{u(1-R_{12}e^{-2uh})} \\
&= \frac{ce^{-uh} - cR_{12}e^{-3uh} - cR_{12}e^{-uh} + cR_{12}e^{-3uh}}{u(1-R_{12}e^{-2uh})} \\
&= \frac{ce^{-uh}(1-R_{12})}{u(1-R_{12}e^{-2uh})}
\end{aligned} \tag{1.322}$$

donde  $1-R_{12} = 1 - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} = \frac{\sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} = \frac{2\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}$

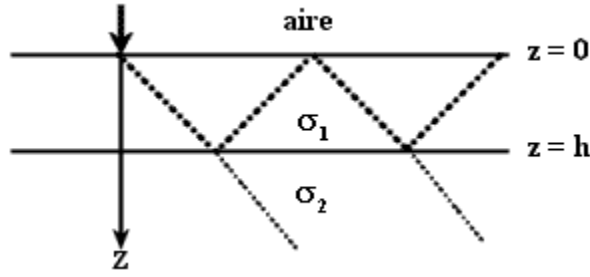
Si se tiene que  $T_{12} = \frac{2\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}$  es el *coeficiente de transmisión o refracción*, entonces:

$$\begin{aligned}
Be^{-uh} &= \frac{T_{12}ce^{-uh}}{u(1-R_{12}e^{-2uh})} \\
B &= \frac{cT_{12}}{u(1-R_{12})e^{-2uh}}
\end{aligned} \tag{1.323}$$

Si sustituimos los valores de los coeficientes **A** y **B**, se tiene que los potenciales en los medios de conductividad 1 (ecuación 1.312) y 2 (ecuación 1.313) son igual a:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{c}{u} e^{-uz} - \frac{cR_{12}e^{-2uh}}{u(1-R_{12}e^{-2uh})} (e^{+uz} - e^{-uz}) \\
&= \frac{ce^{-uz}}{u} - \frac{cR_{12}}{u(1-R_{12}e^{-2uh})} (e^{+u(z-2h)} - e^{-u(z+2h)}) \\
\varphi_2 &= \frac{cT_{12}}{u(1-R_{12})e^{-2uh}} e^{-uz} \\
&= \frac{cT_{12}}{u(1-R_{12}e^{-2uh})} e^{-uz}
\end{aligned} \tag{1.324}$$

Físicamente, se tiene una fuente puntual que emite un campo eléctrico e induce cargas sobre la superficie. Estas a su vez producen un campo eléctrico que también induce cargas, y así consecutivamente hasta que convergen.



Retomando el siguiente término de la ecuación 1.324 se tiene:

$$\frac{cT_{12}}{u(1-R_{12}e^{-2uh})} = \frac{cT_{12}}{u} \left[ \frac{1}{1-R_{12}e^{-2uh}} \right] \quad (1.325)$$

donde, al realizar una división sintética al último término, se obtiene que

$$\begin{array}{r} 1 + R_{12}e^{-2uh} + (R_{12}e^{-2uh})^2 + \dots \\ 1 - R_{12}e^{-2uh} \overline{) 1} \\ \underline{-1 + R_{12}e^{-2uh}} \\ 0 - R_{12}e^{-2uh} + (R_{12}e^{-2uh})^2 \\ \underline{0} \quad \quad \quad - (R_{12}e^{-2uh})^2 + (\dots)^3 \end{array}$$

Con esto, se puede entender que se tiene una serie exponencial, por lo que el último término de la ecuación 1.325 se puede expresar como:

$$\frac{1}{1-R_{12}e^{-2uh}} = \sum_{i=0}^{\infty} (R_{12}e^{-2uh})^i \quad (1.326)$$

Esto significaría que  $\varphi_1$  se puede expresar como

$$\varphi_1 = \frac{c}{u} e^{-uz} - \frac{R_{12}}{u} \sum_{i=0}^{\infty} (R_{12}e^{-2uh})^i (e^{+u(z-2h)} - e^{-u(z+2h)}) \quad (1.327)$$

y  $\varphi_2$  se puede expresar como:

$$\varphi_2 = \frac{cT_{12}}{u} e^{-uz} \sum_{i=0}^{\infty} (R_{12}e^{-2uh})^i \quad (1.328)$$

La T. F. inversa del primer término de la ecuación 1.327 sería igual a:



$$\mathfrak{I}_{XY}^{-I} \left( \frac{c}{u} e^{-uz} \right) = \frac{c}{2\pi R} \quad (1.329)$$

donde  $c = \frac{I}{\sigma_1} = \rho_1 I$ .

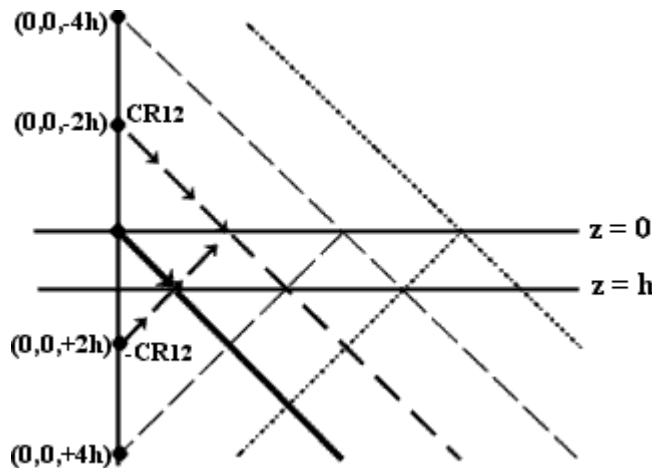
Si además tomamos el segundo término de la ecuación 1.327 cuando  $i = 0$ , tendríamos que  $\varphi_1$  sería:

$$\varphi_1 = \frac{ce^{-uz}}{u} - \frac{cR_{12}}{u} e^{+u(z-2h)} + \frac{cR_{12}}{u} e^{-u(z+2h)} \quad (1.330)$$

El primer término representaría a la fuente puntual. La T. F. inversa del segundo término de la ecuación 1.330 sería:

$$\mathfrak{I}_{XY}^{-I} \left( \frac{cR_{12}}{u} e^{+u(z-2h)} \right) = cR_{12} \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z+2h)^2}} \quad (1.331)$$

lo que indicaría que se tiene una fuente a una altura de 2 veces  $h$  por encima de la superficie  $z = 0$  con una intensidad de carga de  $c R_{12}$ . De la misma, La T. F. inversa del tercer término indicaría que existe otra fuente a una altura de 2 veces  $h$  por debajo de la superficie  $z = 0$  con una intensidad de carga de  $-c R_{12}$ . A estas dos fuentes se les conoce como *fuentes ficticias*. Siguiendo este razonamiento, se estarían creando una serie infinita de fuentes ficticias, cuya intensidad iría disminuyendo, que inducirán a su vez campos eléctricos hasta converger.



De esta forma, se forma una serie infinita de imágenes que representan el potencial en diferentes capas. Toda esta serie estaría representada de forma general por la ecuación 1.324:

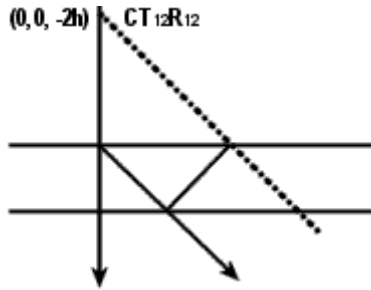
$$\varphi_1 = \frac{ce^{-uz}}{u} - \frac{cR_{12}}{u(1-R_{12}e^{-2uh})}(e^{+u(z-2h)} - e^{-u(z+2h)})$$

En el caso del campo en  $\varphi_2$  se tiene que

$$\varphi_2 = \frac{c}{u} T_{12} e^{-uz} = \frac{cT_{12}}{2\pi R} \quad (1.332)$$

Esto significa que, para el campo de transmisión, la fuente inicial es la fuente primaria. Si  $u = 1$ , entonces:

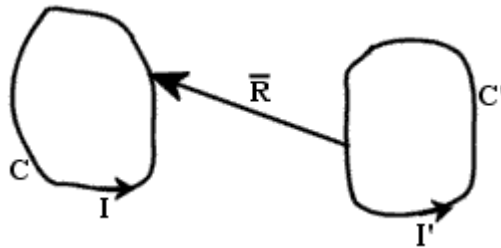
$$\varphi_2 = \frac{c}{u} T_{12} R_{12} e^{-u(z+2h)} \quad (1.333)$$



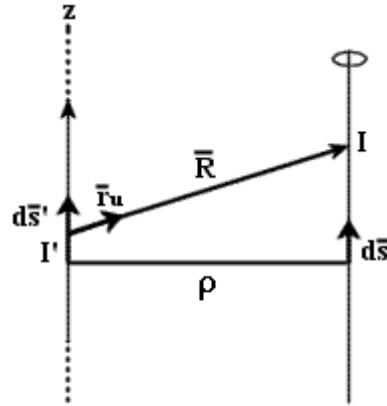
## CAMPO MAGNETOESTACIONARIO

La fuerza que ejerce un circuito en  $C'$  que conduce una corriente  $I'$  ejerce una fuerza sobre otro circuito  $C$  con una corriente  $I$  dada por:

$$\vec{F}_{C'C}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \oint_C \frac{I d\vec{s} \times (I' d\vec{s}' \times \vec{r}_u)}{R^2} \quad (1.334)$$



Vistos estos circuitos en forma de alambres estarían así:



**I e I' son constantes**

donde

$$d\vec{s} = dz\vec{k}$$

$$d\vec{s}' = dz'\vec{k}$$

$$\vec{R} = \rho\vec{\rho}_u + (z - z')\vec{k}$$

$$\vec{r}_u = \frac{\vec{R}}{R}$$

Entonces, el integrando se puede expresar así:

$$\frac{I d\vec{s} \times (I' d\vec{s}' \times \vec{r}_u)}{R^2} = \frac{II' dz dz' \vec{k} \times \vec{k} \times (\rho\vec{\rho}_u + (z - z')\vec{k})}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (1.335)$$

por lo que la fuerza que siente el circuito C ejercida por el circuito C' es igual a

$$\vec{F}_{C'C}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 II'}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz dz' \vec{k} \times \vec{k} \times (\rho\vec{\rho}_u + (z - z')\vec{k})}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (1.336)$$

Resolviendo la integral por partes se tiene que

$$\vec{k} \times (\rho\vec{\rho}_u + (z - z')\vec{k}) = \rho\vec{k} \times \vec{\rho}_u + (z - z')\vec{k} \times \vec{k} = \rho\vec{\phi}_u$$

y

$$\vec{k} \times \vec{k} \times (\rho\vec{\rho}_u + (z - z')\vec{k}) = \rho\vec{k} \times \vec{\phi}_u = -\rho\vec{\rho}_u$$

recordando que el producto cruz de dos vectores paralelos es igual a cero ( $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ ) y que los productos  $\vec{k} \times \vec{\rho}_u = \vec{\phi}_u$  y  $\vec{k} \times \vec{\phi}_u = -\vec{\rho}_u$ . De esta forma, la fuerza magnética se convierte en:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{C'C}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 \Pi'}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\rho \vec{\rho}_u dz dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\
&= \frac{-\mu_0 \Pi' \rho \vec{\rho}_u}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}
\end{aligned} \tag{1.337}$$

El vector  $\vec{\rho}_u$  es función de las variables de integración, por lo que puede salir de la integral. La integral interior se puede resolver por medio de un cambio de variable:

$$u = z - z' \quad \text{cuando } z' \rightarrow -\infty, \quad u = +\infty$$

$$du = -dz' \quad \text{cuando } z' \rightarrow +\infty, \quad u = -\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{[\rho^2 + u^2]^{3/2}} = \frac{2}{\rho^2}$$

Por lo tanto, tendríamos que la fuerza ejercida por el circuito  $C'$  sobre el circuito  $C$  es

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{C'C}(\vec{r}) &= \frac{-2\Pi' \mu_0 \rho \vec{\rho}_u}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\rho^2} \\
&= \frac{-\Pi' \mu_0}{2\pi} \vec{\rho}_u \int_{-\infty}^{+\infty} dz
\end{aligned} \tag{1.338}$$

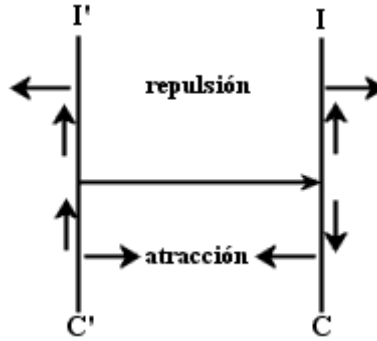
Tenemos todavía una fuerza infinita, pero podemos hablar de una fuerza por unidad de longitud, por lo que en lugar de llevar la integral de  $-\infty$  a  $+\infty$ , se va a llevar de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz = \int_{-1/2}^{+1/2} dz = 1$$

Así, a la fuerza que se obtiene se le llama fuerza por unidad de longitud. Esto quiere decir que cada unidad de longitud del circuito  $C$  va a experimentar una fuerza:

$$\vec{f}_{C'C}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{C'C}(\vec{r})}{\text{unidad de longitud}} = \frac{-\Pi' \mu_0}{2\pi \rho} \vec{\rho}_u \tag{1.339}$$

Cada elemento de longitud del circuito  $C$  experimenta una fuerza dada por la ecuación anterior. Si la corriente va en la misma dirección y sentido en ambos circuitos, los circuitos experimentan una fuerza de repulsión. En cambio, si en alguno de los dos lados va una corriente en sentido opuesto, van a experimentar una fuerza de atracción.



Siempre que se hace circular una corriente en algún medio, induce sobre algún otro medio (i.e. otro cable) una corriente. Como se recordará, al principio del tema se habló de (ecuac. 1.334):

$$\vec{F}_{C'C}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \oint_C \frac{\mathbf{Id}\vec{s} \times (\mathbf{I}'d\vec{s}' \times \vec{r}_u)}{R^2}$$

Además, se escribió a la fuerza como (ecuac. 1.339):

$$\vec{f}_{C'C}(\vec{r}) = -\mathbf{I} \left( \frac{\mathbf{I}'\mu_0}{2\pi\rho} \vec{\rho}_u \right)$$

Esto nos habla de que el circuito  $C'$  depende exclusivamente de la geometría del circuito emisor, sin importar cual es la corriente que lleva. Esto da como resultado que la fuerza que experimentan los dos circuitos se puede escribir así:

$$\vec{F}_{C'C}(\vec{r}) = \int_C \mathbf{Id}\vec{s} \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{(\mathbf{I}'d\vec{s}' \times \vec{r}_u)}{R^2} \right] \quad (1.340)$$

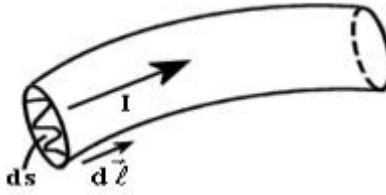
Esta ecuación es a lo que se le llama como *campo de inducción magnética* y se define por la **Ley Biot-savart** que se expresa como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{\mathbf{I}'d\vec{s}' \times \vec{r}_u}{R^2} \quad (1.341)$$

En su forma general, a  $\mathbf{B}$  se puede expresar como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{\mathbf{Id}\vec{\ell} \times \vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}')} \quad (1.342)$$

donde  $\mathbf{d}\vec{\ell}$  es un vector lineal de elemento de longitud. Esto está pensado para corrientes que fluyen en un cable



donde  $d\mathbf{s}$  es despreciable y  $\mathbf{I} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$ . De esta forma el vector  $\mathbf{B}$  también se puede expresar como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \left[ \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\ell} \right] \times \frac{\mathbf{r}_u}{R^2} \quad (1.343)$$

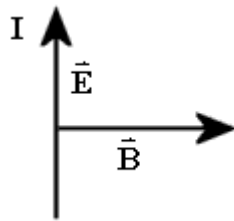
donde

$$\oint \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{\ell} = \iint \mathbf{J} d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{\ell} = \int \mathbf{J} dv$$

Así se obtiene la ley de Biot-savart dada para corrientes volumétricas, la cual se expresa como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}_u}{R^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dv \quad (1.344)$$

Hasta este punto se ha podido reconocer un efecto que no se había tomado en cuenta antes cuando se estudiaban los electrones están en movimiento. Es decir, cuando existe una corriente eléctrica en un medio que implica el movimiento de electrones, se crea un efecto perpendicular a esta corriente. Por ejemplo, en el caso del alambre por donde circulaba una corriente  $\mathbf{I}$ , en ese medio conductor se producía un campo eléctrico; pero, además, aunado a este campo eléctrico existe un efecto perpendicular a él, el cual originaba la acción sobre el otro circuito.



A este efecto que se ha definido como  $\mathbf{B}$  se le define como el *campo de inducción magnética*. Reconocemos pues que, aunado a un campo eléctrico de tipo estacionario (en ningún caso electrostático) existe otro efecto perpendicular a este conocido como el campo de inducción magnética. La ley que nos permite calcularlo es la ley Biot-savart en sus dos formas: para cuando se tiene una distribución de corrientes en un volumen (ecuación 1.344) o para cuando se trata de circuitos (ecuación 1.341). Sin embargo, esta no nos dice que tipo de campo se tiene. Para poder caracterizar al campo se necesita encontrar sus ecuaciones de campo, es decir, su rotacional y su divergencia.

A partir de la ecuación experimental se ha logrado establecer la ecuación 1.344, de acuerdo con la cual se puede expresar al rotacional del campo de inducción magnética como:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[ \frac{\bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} \right] d\mathbf{v} \quad (1.345)$$

Del cálculo vectorial se extrae que el rotacional de dos funciones vectoriales se puede escribir como:

$$\nabla \times \left[ \bar{\mathbf{J}} \times \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} \right] = \left( \nabla \cdot \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} \right) \bar{\mathbf{J}} - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}}) \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} + \left( \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} \cdot \nabla \right) \bar{\mathbf{J}} - (\bar{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} \quad (1.346)$$

Debido a que el operador nabla opera sobre coordenadas de campo mientras que  $\mathbf{J}$  opera sobre coordenadas de cuerpo, el segundo término es cero. Por otro lado, el tercer término es un operador diferencial que opera sobre cada una de las componentes del vector  $\mathbf{J}$ , por lo que estaría dado como:

$$\left( \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} \cdot \nabla \right) \bar{\mathbf{J}} = \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{J}_x \bar{\mathbf{i}} + \mathbf{J}_y \bar{\mathbf{j}} + \mathbf{J}_z \bar{\mathbf{k}}) = 0$$

la cual es igual a cero debido a que el vector  $\mathbf{J}$  está definido en coordenadas de cuerpo mientras que todo el operador está definido en coordenadas de campo. Si, además, se tiene que:

$$-\bar{\mathbf{J}} \cdot \nabla \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} = -(\bar{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \left( \frac{1}{R^2} x \bar{\mathbf{i}} + \frac{1}{R^2} y \bar{\mathbf{j}} + \frac{1}{R^2} z \bar{\mathbf{k}} \right)$$

entonces el rotacional de la ecuación 1.345 quedaría solamente como:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \left( \nabla \cdot \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} \right) \bar{\mathbf{J}} d\mathbf{v} + \int_V -(\bar{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \left( \frac{1}{R^2} x \bar{\mathbf{i}} + \frac{1}{R^2} y \bar{\mathbf{j}} + \frac{1}{R^2} z \bar{\mathbf{k}} \right) d\mathbf{v} \right] \quad (1.347)$$

Como se puede observar aquí, la última integral se divide en tres integrales escalares, por lo que se realice con una es equivalente para las otras dos. Por ende, trabajando sólo con la última integral, se tiene que ésta es igual a:

$$\int_V -\bar{\mathbf{J}} \cdot \nabla \frac{1}{R^2} d\mathbf{v} \quad (1.348)$$

Si tomamos en cuenta la divergencia con respecto a coordenadas de cuerpo del vector  $\mathbf{J}$  y del vector de posición relativa  $\mathbf{R}$  (el cual es función de ambos sistemas coordenados), se puede extraer del cálculo vectorial que:

$$\nabla' \cdot \left[ \bar{\mathbf{J}} \frac{1}{R^2} \right] = \frac{1}{R^2} \nabla' \cdot \bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}} \cdot \nabla' \frac{1}{R^2}$$

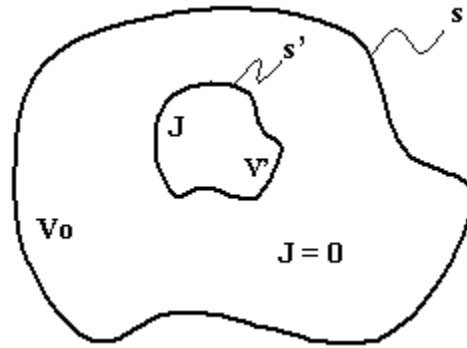
Si  $\bar{\mathbf{J}}$  es un vector estacionario, entonces  $\nabla' \cdot \bar{\mathbf{J}} = 0$ , lo que significaría que

$$\nabla' \cdot \left[ \bar{\mathbf{J}} \frac{1}{R^2} \right] = \bar{\mathbf{J}} \cdot \nabla' \frac{1}{R^2} = -\bar{\mathbf{J}} \cdot \nabla \frac{1}{R^2}$$

Por lo tanto,

$$\int_V -\bar{\mathbf{J}} \cdot \nabla \frac{1}{R^2} dv = \int_V \nabla' \cdot \left[ \bar{\mathbf{J}} \frac{1}{R^2} \right] dv = \oint_S \frac{\bar{\mathbf{J}}}{R^2} \cdot d\bar{\mathbf{s}} \quad (1.349)$$

Aquí se puede ver que el volumen que contiene las corrientes está limitado en el espacio,



Por ende,

$$\oint_S \frac{\bar{\mathbf{J}}}{R^2} \cdot d\bar{\mathbf{s}} \equiv 0$$

y

$$\int_V -(\bar{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} dv \equiv 0$$

De acuerdo con lo anterior, el rotacional del campo magnético se puede escribir como:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left( \nabla \cdot \frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} \right) \bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}') dv \quad (1.350)$$

pero

$$\frac{\bar{\mathbf{r}}_u}{R^2} = -\nabla \frac{1}{R}$$



por lo que el rotacional de  $\mathbf{B}$  se convierte en:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{\mathbf{B}} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V -\nabla^2 \frac{1}{R} \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}') \, d\mathbf{v} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V -4\pi \delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}') \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}') \, d\mathbf{v} \\
 &= \mu_0 \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}})
 \end{aligned} \tag{1.351}$$

De esta forma se obtiene la primera ecuación de campo:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \mu_0 \vec{\mathbf{J}}_f(\vec{\mathbf{r}}) \tag{1.352}$$

donde  $\vec{\mathbf{J}}_f$  son las corrientes libres. De forma similar, la segunda ecuación de campo provendría de:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[ \vec{\mathbf{J}} \times \frac{\vec{\mathbf{r}}_u}{R^2} \right] d\mathbf{v} \tag{1.353}$$

Del cálculo vectorial se obtiene que la divergencia de dos funciones vectoriales es igual a:

$$\nabla \cdot \left[ \vec{\mathbf{J}} \times \frac{\vec{\mathbf{r}}_u}{R^2} \right] = \frac{\vec{\mathbf{r}}_u}{R^2} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{J}} - \vec{\mathbf{J}} \cdot \nabla \times \frac{\vec{\mathbf{r}}_u}{R^2}$$

Pero Nabla opera sobre coordenadas de campo mientras que  $\mathbf{J}$  opera sobre coordenadas de cuerpo, por lo que el primer término es cero. Además, recordando que

$$\frac{\vec{\mathbf{r}}_u}{R^2} = -\nabla \frac{1}{R}$$

se tiene que el segundo término también es cero

$$-\nabla \times \nabla \frac{1}{R} = \mathbf{0}$$

ya que el rotacional de un gradiente es cero. Por lo tanto, la segunda ecuación de campo va a ser igual a:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = 0 \tag{1.354}$$

Una vez obtenidas las dos ecuaciones de campo se puede decir que, de acuerdo con el teorema de Helmholtz, el campo  $\vec{\mathbf{B}}$  es de tipo solenoidal, por lo que este se puede encontrar a través de una función vectorial:

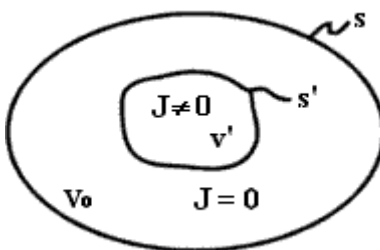
$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_f(\vec{r}')}{R^2(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{v}'$$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}_f(\vec{r})$$

Al campo **B** también se le puede encontrar a través de la expresión dada por la ley de Biot-savart (ecuación 1.344):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{v}'$$



La integral de volumen se puede separar en sus dos regiones, donde

$$\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{v}' = \int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{v}' + \int_{V_0} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{r}_u}{R^2(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{v}'_0$$

Pero **J** = **0** en **V**<sub>0</sub>, por lo que la integral estaría conteniendo sólo la región de interés. De acuerdo con esto, se tiene que:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}_f(\vec{r}')}{R^2(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{v}' \quad (1.355)$$

De esta forma se han obtenido todas las ecuaciones que rigen el campo, las cuales se rigen a continuación:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}_f(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

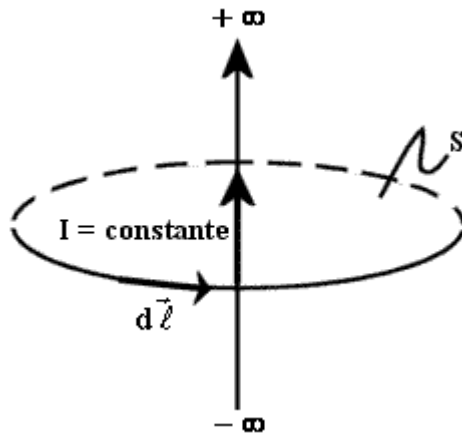
$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_f(\vec{r}')}{R^2(\vec{r}, \vec{r}') dV'}$$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}_f(\vec{r})$$

Del teorema de Stokes se puede obtener que

$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{s}$$



La cantidad de corriente que va a estar atravesando la superficie  $S$  es de  $I$  amperes, es decir:

$$\int \vec{J}_f \cdot d\vec{s} = I$$

$$\int \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

Del teorema de Stokes también se puede ver que:

$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

donde el vector  $d\vec{\ell}$  es el perímetro de la superficie  $S$ . Si el vector es infinito, entonces sólo dependería de  $R$  y se mantendría constante sobre la circunferencia:

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = BL = B2\pi r$$

Entonces se tendría que:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

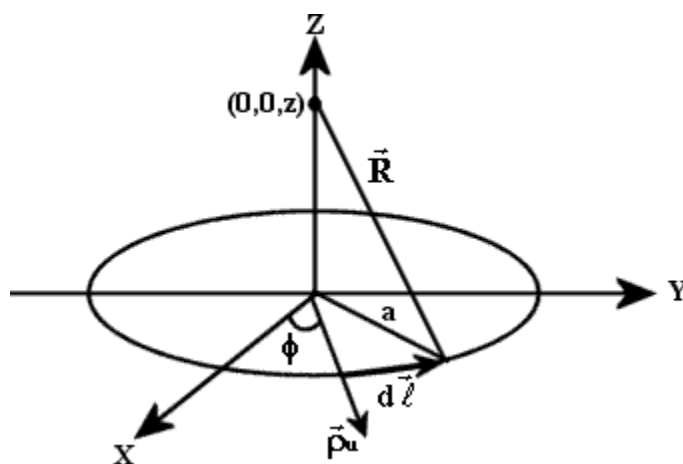
(1.356)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{\phi}_u$$

Este es el mismo valor que se ha encontrado en temas anteriores.

## CAMPO MAGNETOSTÁTICO

Encuentre el campo magnético  $\mathbf{B}$  producido por una bobina de radio  $a$  que lleva una corriente de  $I$  amperes.



Si intenta resolver a  $\mathbf{B}$  a través del rotacional de una función vectorial se tiene que esta es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\mathbf{v}$$

(1.357)

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{d\vec{\ell}}{R(\vec{r}, \vec{r}')}$$

Si  $d\vec{\ell} = a d\phi \vec{\phi}_u$  y  $R = \sqrt{a^2 + z^2}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \vec{\phi}_u d\phi}{\sqrt{a^2 + z^2}} \\
&= \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi \sqrt{a^2 + z^2}} \oint \vec{\phi}_u d\phi
\end{aligned} \tag{1.358}$$

donde

$$\oint \vec{\phi}_u d\phi = \int_0^{2\pi} [-\sin\phi \vec{\mathbf{i}} + \cos\phi \vec{\mathbf{j}}] d\phi \equiv 0$$

por lo tanto

$$\bar{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}}) \equiv 0 \tag{1.359}$$

ya que se encuentra sobre un punto particular del espacio. Pero el campo magnético se calcula a través de la expresión  $\bar{\mathbf{B}} = \nabla \times \bar{\mathbf{A}}$ . Por lo tanto, para poder encontrar el campo  $\mathbf{B}$  se necesitaría utilizar la Ley de Biot-savart en lugar del potencial. De esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{r}}_u}{R^2} d\mathbf{v} \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi} \oint_\ell \frac{d\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{r}}_u}{R^2}
\end{aligned} \tag{1.360}$$

donde el vector de posición relativa expresado en coordenadas cilíndricas es

$$\vec{\mathbf{R}} = -a\vec{\rho}_u + z\vec{\mathbf{k}}$$

y el vector unitario es igual a

$$\vec{\mathbf{r}}_u = \frac{\vec{\mathbf{R}}}{R}$$

De esta forma se tiene que  $\bar{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}})$  se puede expresar como:

$$\bar{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times (-a\vec{\rho}_u + z\vec{\mathbf{k}})}{[a^2 + z^2]^{3/2}} \tag{1.361}$$

donde  $d\vec{\ell} \times (-a\vec{\rho}_u + z\vec{\mathbf{k}}) = -a d\vec{\ell} \times \vec{\rho}_u + z d\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{k}}$ ,  $d\vec{\ell} = a d\phi \vec{\phi}_u$  y  $-a d\vec{\ell} \times \vec{\rho}_u = -a^2 d\phi \vec{\phi}_u \times \vec{\rho}_u = a^2 d\phi \vec{\mathbf{k}}$ .

Si además se tiene que  $d\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{k}} = a d\phi \vec{\phi}_u \times \vec{\mathbf{k}} = \vec{\rho}_u$ , entonces  $\mathbf{B}$  se puede expresar sencillamente como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\phi}{[a^2 + z^2]^{3/2}} \vec{k} + \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \vec{\rho}_u d\phi}{[a^2 + z^2]^{3/2}} \right] \quad (1.362)$$

Si  $\vec{\rho}_u = \cos\phi \vec{i} + \sin\phi \vec{j}$ , entonces la segunda integral va a ser igual a:

$$\int_0^{2\pi} \frac{a^2 \vec{\rho}_u d\phi}{[a^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{a^2}{[a^2 + z^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} \vec{\rho}_u d\phi \equiv 0$$

Por lo tanto,  $\vec{B}$  va a ser igual a:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I\mu_0 a^2}{4\pi[a^2 + z^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \vec{k} = \frac{I}{2} \frac{\mu_0 a^2}{[a^2 + z^2]^{3/2}} \vec{k} \quad (1.363)$$

Esta sería la solución del campo magnético, la cual sólo tiene una componente en la dirección  $\vec{Z}$ . De este ejemplo se pueden discutir dos cuestiones. Si  $\vec{z} = 0$ , es decir cuando el campo se encuentra en el centro de la bobina, se tendría que este es igual a:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I\mu_0}{2a} \vec{k} \quad (1.364)$$

En el segundo caso, cuando  $\vec{z} \gg \vec{a}$ , se tendría que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{2} \frac{\mu_0 a^2}{z^3 \left[ 1 + \left( \frac{a}{z} \right)^2 \right]^{3/2}} \vec{k} \quad (1.365)$$

Si  $\vec{z} \gg \vec{a}$ , entonces  $\frac{a}{z} \cong 0$ ; por lo tanto,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{2} \frac{\mu_0 a^2}{z^3} \vec{k} \quad (1.366)$$

Multiplicando esta ecuación arriba y abajo por  $\pi$ , se obtiene:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \pi I a^2}{2\pi z^3} \vec{k} \quad (1.367)$$

Tomando en cuenta que la superficie del círculo es igual a  $S = \pi a^2$ , se tendría que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{SI\mu_0}{2\pi z^3} \vec{k} \quad (1.368)$$

Pero  $SI$  es igual al módulo del momento magnético, dado en unidades de [amper.m<sup>2</sup>], y se le define con la letra  $m$ . De esta forma tenemos que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3} \vec{k} = \mu_0 \left( \frac{2m}{4\pi z^3} \right) \vec{k} \quad (1.369)$$

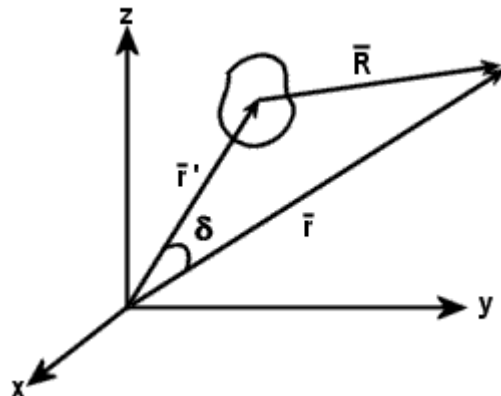
Esta expresión es similar a la del momento de un dipolo eléctrico. Así, si observamos el campo creado por una espira que conduce una corriente eléctrica, el campo estudiado sería similar a un campo dipolar. De esta forma podemos ver que se puede crear un campo magnético dipolar a través de una corriente eléctrica que circula por una bobina o espira de radio  $a$ .

La función potencial geofísicamente la podemos expresar como una expansión de series de fuentes elementales.

## EXPANSIÓN EN MULTIPOLOS

Como se vio en el tema anterior, la función vectorial del potencial (ecuación 1.357) es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dV$$



Pero sabemos que  $1/R$  se puede escribir como una expansión de polinomios de Legendre del siguiente orden

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \delta) \quad (1.370)$$

por lo que la función vectorial se puede escribir como:

$$\bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \int_V \left( \frac{r'}{r} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \delta) \bar{\mathbf{J}} d\mathbf{v} \quad (1.371)$$

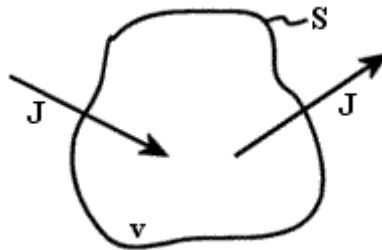
Si tomamos el término cuando  $\ell = 0$ , el cual representa al monopolo magnético, se tendría que:

$$\bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}}') d\mathbf{v} \quad (1.372)$$

Este sería el balance de las corrientes en el volumen de control. Si nos encontramos en un régimen estacionario, entonces sabemos que  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = 0$ , por lo que

$$\int_V \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} d\mathbf{v} = \oint_S \bar{\mathbf{J}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} \equiv 0$$

En otras palabras, tenemos corrientes  $\mathbf{J}$  que entran y salen del volumen; si sumáramos todas las corrientes que están dentro del volumen de control, ésta daría igual a cero ( $\int_V \bar{\mathbf{J}} d\mathbf{v} \equiv 0$ ).



Por lo tanto,

$$\mathbf{Am}(\bar{\mathbf{r}}) \equiv 0 \quad (1.373)$$

Lo anterior nos indica que el monopolo magnético no puede existir, por lo que la fuente más elemental que puede haber para un campo magnético es el dipolo. En teoría, el monopolo magnético puede existir, pero en la práctica no ha sido hallado; éste sólo funciona como un artificio matemático para transformarlos en campos simétricos que permitan resolverlos más fácilmente.

El dipolo magnético está representado por el polinomio de Legendre de orden  $\ell = 1$ , por lo que se tendría que:



$$\begin{aligned}
\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \int_{V'} \vec{r}' P_1(\cos \delta) \vec{J} dv \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{r}' \cos \delta \vec{J} dv
\end{aligned}
\tag{1.374}$$

Pero  $\vec{r}' \cos \delta = \vec{r}' \cdot \vec{r} / r$ ; por lo tanto, el vector dipolar se puede escribir como:

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{r}_u \cdot \vec{r}' \vec{J}(\vec{r}) dv
\tag{1.375}$$

Se puede demostrar que:

$$\int_V \vec{r}_u \cdot \vec{r}' \vec{J}(\vec{r}) dv = \left[ \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}) dv \right] \times \vec{r}_u
\tag{1.376}$$

en donde al término entre corchetes se le conoce como el *momento dipolar magnético*:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dv' = \text{momento dipolar magnético}$$

El potencial vectorial magnético para una fuente elemental se escribe como

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}_u}{r^2}
\tag{1.377}$$

y a esta expresión se le conoce como el *potencial del dipolo magnético*. Cuando el momento es una corriente, adquiere una expresión muy sencilla:

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{r}' \times d\vec{\ell}
\tag{1.378}$$

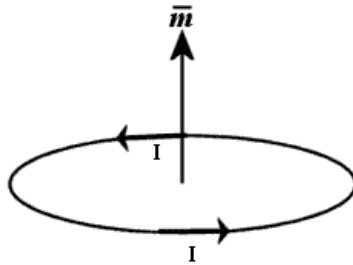
El momento dipolar de la espira estaría dado por la ecuación

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{\ell} \vec{r}' \times d\vec{\ell}$$

donde  $d\vec{\ell} = a d\phi \vec{\phi}_u$  y el vector  $\vec{r}$  de posición es igual a  $\vec{r}' = a \vec{\rho}_u$ . Por ende, el momento dipolar sería:

$$\begin{aligned}
 \vec{m} &= \frac{I}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \vec{\rho}_u \times \vec{\phi}_u d\phi \\
 &= \frac{I}{2} a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &= I \pi a^2 \vec{k} \\
 \vec{m} &= S I \vec{k}
 \end{aligned} \tag{1.379}$$

donde  $\pi a^2$  es el área de la bobina. Esto significa que el momento dipolar de una bobina siempre es igual a su superficie por la corriente que conduce y que la dirección del momento siempre es perpendicular a la bobina.



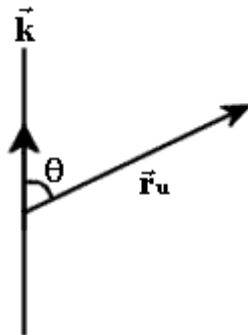
A su vez, el vector magnético se puede expresar como la suma de potenciales de fuentes elementales:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_m(\vec{r}) + \vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) + \dots \tag{1.380}$$

Pero la fuente elemental más pequeña es el dipolo, ya que  $\vec{A}_m(\vec{r}) = \vec{0}$ . La pregunta ahora sería: ¿cómo es el campo dipolar? Como se vio anteriormente (ecuación 1.377), un dipolo es:

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}_u}{r^2}$$

donde  $\vec{m} = m \vec{k}$  y  $\vec{m} \times \vec{r}_u = m \sin \theta \vec{\phi}_u$ .



De este modo se tendría que

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \vec{\phi}_u \quad (1.381)$$

Sabemos que el campo magnético proviene de:

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r})$$

Pero  $\vec{A}$  solo tiene componente en  $\phi$ , por lo que

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\phi) \vec{r}_u - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \vec{\theta}_u \quad (1.382)$$

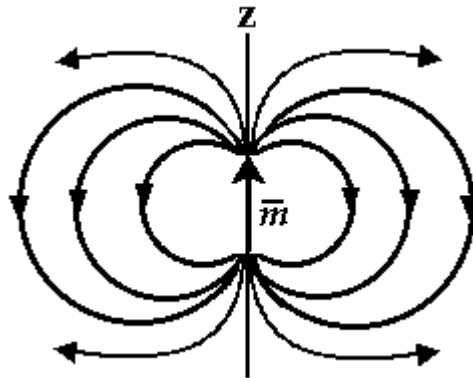
Si  $\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\phi) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2\theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} 2\sin\theta \cos\theta$

y  $\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi} \left( -\frac{1}{r^2} \right)$

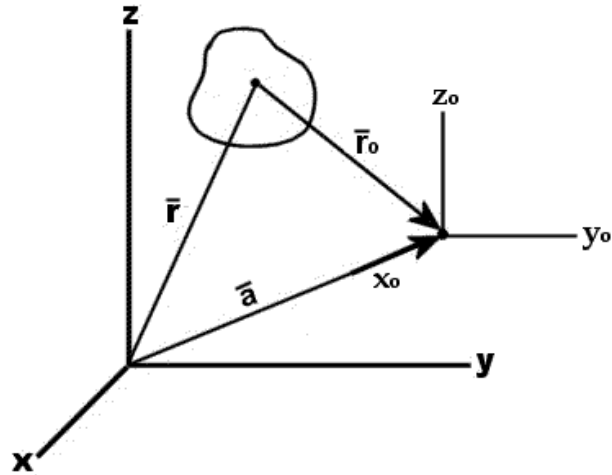
Entonces,  $\vec{B}$  se puede expresar como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{2\cos\theta}{r^3} \vec{r}_u + \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} \vec{\theta}_u \quad (1.383)$$

Si tuviéramos un dipolo magnético con dirección en  $Z$ , se vería así



Otra pregunta que puede surgir es: ¿qué pasa cuando se determina el momento dipolar para dos sistemas coordenados distintos?



Si calculamos a  $\vec{m}$  con respecto a  $XYZ$  se tiene que:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{J} dv \quad (1.384)$$

Si ahora calculamos a  $\vec{m}$  con respecto a  $x_0y_0z_0$  se obtiene:

$$\vec{m}_0 = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}_0' \times \vec{J} dv \quad (1.385)$$

Pero a  $\vec{r}_0'$  se le puede ver como

$$\vec{r}_0' = \vec{r} - \vec{a}$$

Por ende,

$$\begin{aligned} \vec{m}_0 &= \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dv - \frac{1}{2} \int_V \vec{a} \times \vec{J} dv \\ &= \vec{m} - \frac{1}{2} \vec{a} \times \int_V \vec{J} dv \end{aligned} \quad (1.386)$$

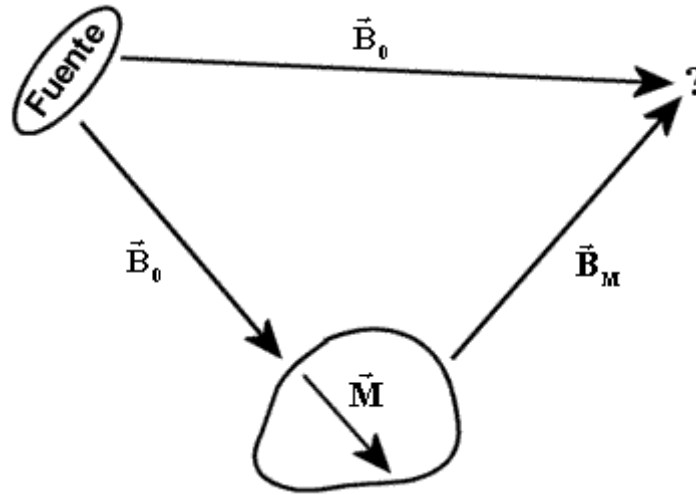
Si el balance de las corrientes en un volumen bajo régimen estacionario es cero, entonces

$$\vec{m}_0 = \vec{m}$$

Esto significa que el valor del momento magnético es indistinto del sistema coordenado en el que se calcule.

## CAMPO MAGNÉTICO TOTAL

Las corrientes verdaderas provenientes de una fuente producen un campo  $\vec{B}_0$ . Si existiese un cuerpo permeable en el espacio, este campo lo magnetizaría; por lo tanto, también se va a producir un campo  $\vec{B}_M$  debido a la magnetización de los cuerpos permeables.



De esta forma, el campo total en un punto en el espacio va a ser la suma del campo producido por las fuentes verdaderas y el campo de inducción magnética producido por la magnetización de los cuerpos permeables:

$$\vec{B}_t = \vec{B}_0 + \vec{B}_M$$

De ahí se obtiene que la divergencia del campo magnético total sea cero

$$\nabla \cdot \vec{B}_t = \nabla \cdot \vec{B}_0 + \nabla \cdot \vec{B}_M$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_t(\vec{r}) = 0 \quad (1.387)$$

y que su rotacional sea

$$\nabla \times \vec{B}_t = \nabla \times \vec{B}_0 + \nabla \times \vec{B}_M$$

$$\nabla \times \vec{B}_t(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}_f(\vec{r}) + \mu_0 \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) \quad (1.388)$$

Por ende, el potencial magnético total va a provenir de la suma del potencial magnético de fuentes verdaderas más el potencial producido por la magnetización:

$$\vec{B}_t(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_t(\vec{r})$$

$$\vec{A}_t(\vec{r}) = \vec{A}_0(\vec{r}) + \vec{A}_M(\vec{r})$$

Si se quisiera resolver un problema de este tipo, se podría hacer por separado, encontrando primeramente el campo producido por las fuentes primarias y posteriormente, bajo el conocimiento de la magnetización, calcular el potencial magnético producido por la magnetización. Una vez que se ha comprendido que el campo magnético total tiene dos tipos de fuentes, las corrientes verdaderas y las corrientes ficticias, se ve que para poder resolver el campo se necesita conocer forzosamente magnetización. Esto trae como consecuencia que nos movamos en un círculo cerrado, ya que para conocer el campo necesito conocer la magnetización y viceversa.

Para poder sobrellevar este problema necesitamos considerar el Campo de Intensidad Magnética  $\vec{H}$ . De la ecuación 1.388 podemos despejar las corrientes verdaderas para obtener:

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{B}_t(\vec{r})}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{r}) \right] = \vec{J}_f(\vec{r}) \quad (1.389)$$

Si definimos a  $\vec{H}$  como el campo de relación que existe en un punto del espacio; es decir, como el campo de inducción magnética que existe en un punto en el espacio sobre la magnetización que existe en ese mismo punto:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\vec{B}_t(\vec{r})}{\mu_0} - \vec{M}(\vec{r}) \quad (1.390)$$

Hecho esto, su rotacional se facilita mucho, quedando exclusivamente relacionado con las corrientes verdaderas que existan en la región:

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}_f(\vec{r}) \quad (1.391)$$

Desafortunadamente, la divergencia de  $\vec{H}$  se complica más, ya que al definir a  $\vec{H}$  de esa manera, su divergencia quedaría como:

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \vec{B}_t(\vec{r}) - \nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}) \quad (1.392)$$

Pero la divergencia del campo magnético total es igual a cero ( $\nabla \cdot \vec{B}_t(\vec{r}) = 0$ ); por lo tanto,

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}) \quad (1.393)$$

Esto trae como consecuencia que, aunque  $\vec{H}$  sea un campo de relación, sea más complicado, ya que tiene una parte solenoidal y una parte conservativa. Por ende, de acuerdo con el teorema de Helmholtz,  $\vec{H}$  proviene de:

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\nabla\phi_M(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}_H(\vec{r}) \quad (1.394)$$

donde

$$\phi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \vec{M}}{R} dv \quad (1.395)$$

$$\vec{A}_H(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_f}{R} dv$$

Sintetizando, para el campo  $\vec{H}$  se han obtenido las siguientes ecuaciones que lo rigen:

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r})$$

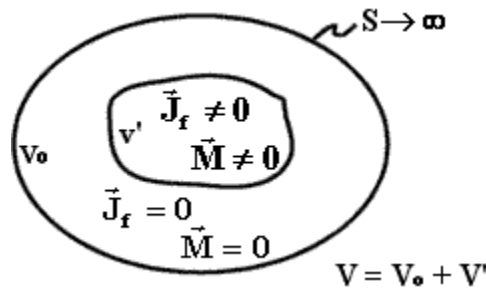
$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}_f(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\nabla\phi_M(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}_H(\vec{r})$$

$$\phi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv$$

$$\vec{A}_H(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_f(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv$$

Tenemos un cuerpo en una región del espacio  $V'$ , donde  $V' + V_0$  es todo el espacio.



La integral del potencial vectorial de  $\vec{H}$  se puede dividir en dos regiones:

$$\int_V \frac{\vec{J}}{R} dv = \int_{V'} \frac{\vec{J}}{R} dv' + \int_{V_0} \frac{\vec{J}}{R} dv_0 \quad (1.396)$$

donde la última integral es cero ya que  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  en la región  $\mathbf{V}_0$ . Por ende, la función potencial vectorial se puede expresar exclusivamente sobre la región ocupada por la corriente:

$$\tilde{\mathbf{A}}_H(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{V}} \frac{\tilde{\mathbf{J}}_f(\vec{\mathbf{r}}')}{\mathbf{R}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}')} d\mathbf{v}' \quad (1.397)$$

En el caso del potencial escalar se tiene que este es (ecuac. 1.395):

$$\phi_M(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{V}} \frac{-\nabla' \cdot \vec{\mathbf{M}}}{\mathbf{R}} d\mathbf{v}$$

Del cálculo vectorial se puede extraer que:

$$\nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\mathbf{M}}}{\mathbf{R}} \right] = \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}} + \frac{1}{\mathbf{R}} \nabla' \cdot \vec{\mathbf{M}}$$

por lo que

$$-\frac{1}{\mathbf{R}} \nabla' \cdot \vec{\mathbf{M}} = \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}} - \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\mathbf{M}}}{\mathbf{R}} \right]$$

De esta manera,  $\phi$  quedaría momentáneamente como:

$$\phi_M(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{V}} \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{V}} \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\mathbf{M}}}{\mathbf{R}} \right] d\mathbf{v} \quad (1.398)$$

Aplicando el teorema de la Divergencia podemos obtener que la segunda integral se puede escribir como una integral de flujo, la cuales igual a es:

$$\int_{\mathbf{V}} \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{\mathbf{M}}}{\mathbf{R}} \right] d\mathbf{v} = \oint_{\mathbf{S}} \frac{\vec{\mathbf{M}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}}{\mathbf{R}} = 0$$

ya que  $\vec{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$  en la superficie  $\mathbf{S}$ . A su vez, la primera integral de la ecuación 1.398 se puede dividir en dos regiones:

$$\int_{\mathbf{V}} \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}} d\mathbf{v} = \int_{\mathbf{V}'} \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}} d\mathbf{v}' + \int_{\mathbf{V}_0} \nabla' \cdot \frac{1}{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}} d\mathbf{v}_0$$

Pero la última integral es cero ya que  $\vec{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$  en la región  $\mathbf{V}_0$ . Por lo tanto, la función potencial escalar se escribiría como:

$$\phi_H(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{V}'} \frac{1}{\mathbf{R}(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}')} \cdot \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}') d\mathbf{v}' \quad (1.399)$$



Sin embargo, ésta no es la única manera en que se puede expresar el potencial escalar, ya que del mismo cálculo vectorial se puede obtener que:

$$\nabla' \frac{1}{R} \cdot \vec{M} = \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{M}}{R} \right] - \frac{\nabla' \cdot \vec{M}}{R}$$

(1.400)

por lo que

$$\int_{V'} \nabla' \frac{1}{R} \cdot \vec{M} dv' = \int_{V'} \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{M}}{R} \right] dv' - \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \vec{M}}{R} dv'$$

Nuevamente, del teorema de la Divergencia se tiene que la integral de volumen se puede expresar como:

$$\int_{V'} \nabla' \cdot \left[ \frac{\vec{M}}{R} \right] dv' = \oint_{S'} \frac{\vec{M} \cdot d\vec{s}'}{R}$$

Por lo tanto, el potencial vectorial también se puede escribir como una integral de volumen más una integral de superficie:

$$\phi_H(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{R(\vec{r}, \vec{r}')} ds' \quad (1.401)$$

Cuando utilizamos la primera expresión del potencial escalar (ecuac. 1.399), se está representando a los dipolos magnéticos escalares. Tomemos la integral de volumen de la ecuación 1.399:

$$\int_{V'} \nabla' \frac{1}{R} \cdot \vec{M} dv'$$

Sabemos que el término interior de la integral se puede escribir como

$$\nabla' \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{R} = -\left( -\frac{\vec{r}_u}{R^2} \right) = \frac{\vec{r}_u}{R^2}$$

Por ende, el potencial escalar se puede expresar de la siguiente manera:

$$\phi_H(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{M}}{R^2} dv' \quad (1.402)$$

Si recordamos lo que se había dicho sobre la magnetización:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv} \quad \Rightarrow \quad d\vec{m} = \vec{M} dv$$

entonces, el potencial escalar se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\varphi_H(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{d\vec{m} \cdot \vec{r}_u}{R^2} \\ &= \int_{V'} \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{d\vec{m} \cdot \vec{r}_u}{R^2} \right]\end{aligned}\quad (1.403)$$

ya que el producto vectorial es conmutativo. Pero se puede reconocer que lo que se encuentra dentro de los corchetes tiene la misma estructura que el potencial de un dipolo eléctrico, con la diferencia que en esta última ecuación se encuentra la magnetización y en la otra se hallaba la polarización o el momento dipolar eléctrico. Por lo tanto, podemos ver a los términos al interior del corchete como una diferencial de un potencial escalar magnético:

$$d\varphi_M = \frac{1}{4\pi} \frac{d\vec{m} \cdot \vec{r}_u}{R^2} \quad (1.404)$$

De esta forma, podemos ver que el potencial macroscópico escalar es la suma de los potenciales de los dipolos magnéticos escalares elementales:

$$\varphi_H(\vec{r}) = \int_{V'} [d\varphi_M(\vec{r}')] \quad (1.405)$$

Cuando manejamos la segunda representación (ecuac. 1.401), por similitud con el caso electrostático donde se tienen cargas volumétricas verdaderas y cargas superficiales verdaderas, se puede definir a

$$-\nabla' \cdot \vec{M} = \rho_M(\vec{r})$$

y a

$$\vec{M} \cdot \vec{n} = \sigma_M(\vec{r})$$

De acuerdo con esto, se puede ver que el potencial escalar también se puede representar como la contribución de una distribución de carga magnética volumétrica y la contribución de densidad de cargas magnéticas superficiales:

$$\varphi_H(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho_M(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\sigma_M(\vec{r}')}{R(\vec{r}, \vec{r}')} ds' \quad (1.406)$$

Al utilizar la representación de esta última ecuación, podemos asumir que el potencial escalar tiene su origen en una distribución de cargas magnéticas. Indudablemente estas cargas no existen en la realidad (no son cargas libres), por lo tanto, las cargas magnéticas siempre debe de sumar cero:

$$\int_{V'} \rho_M dv' + \oint_{S'} \sigma_M ds' = Q_M \equiv 0$$

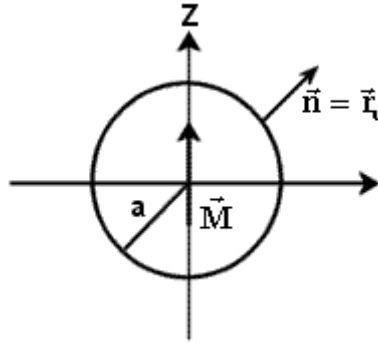
y, por ende,

$$\int_{V'} -\nabla' \cdot \vec{M} dv' + \oint_{S'} \vec{M} \cdot \vec{n} ds' \equiv 0$$

En el caso electrostático, la carga neta siempre es cero ya que un conductor siempre es eléctricamente neutro antes y después de que reciba la acción de un campo. Esto implica un reacomodo de cargas, es decir, que viajan de un lugar a otro. En este caso, no existe una carga magnética que se traslade en el espacio (un reacomodo de cargas) ni existen cargas magnéticas verdaderas, si no que solamente son una muleta matemática para facilitar la solución del problema. La analogía que se realiza para los dos casos simplemente permite visualizar mejor el campo. Para aclarar mejor estos conceptos se analizará el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 1.12

Encuentre el campo  $\vec{H}$  en una esfera que presenta una magnetización  $\vec{M} = M\vec{k}$ , donde  $M$  es constante, para cualquier punto del espacio.



Utilizando la representación por cargas magnéticas se tiene que el vector de corriente  $\vec{J}_f = 0$ , lo que implica que el potencial vectorial  $\vec{A}_H(\vec{r}) = 0$ . Por ende, sólo existe el potencial escalar. Si  $M$  es un vector constante, entonces

$$\nabla \cdot \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_M = 0$$

Por lo tanto, sólo existiría la integral de superficie y el potencial escalar estaría dado por:

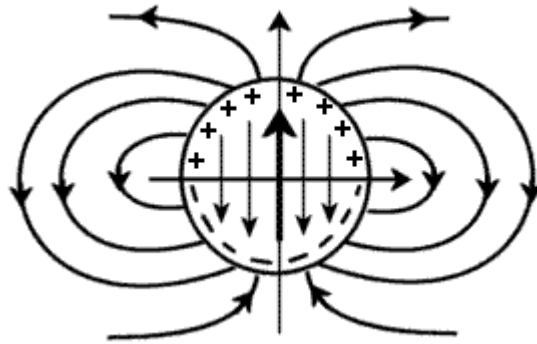
$$\phi_H(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}}{R} ds' \quad (1.407)$$

Antes de proseguir resolviendo la integral, se recordará que el producto punto de dos vectores es igual al módulo de los vectores por el ángulo que forman:

$$\vec{M} \cdot \vec{n} = M\vec{k} \cdot \vec{r}_u = M \cos \theta' = \sigma_M$$

De esta forma, tendremos que las cargas positivas se ubicarían en la parte superior de la esfera y las cargas negativas en la inferior. Por lo tanto, se esperaría que el campo

fuera de cargas positivas a negativas. Además, en el interior se esperaría un campo que se opone a la magnetización.

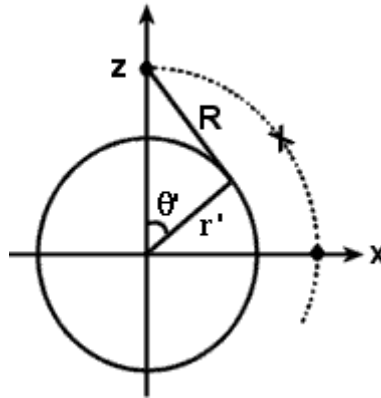


Esta es la ventaja de utilizar la representación de cargas, ya que facilita la visualización del campo. La resolución del problema ya dependerá de la decisión del investigador. En este caso se seguirá el mismo procedimiento.

Como  $\mathbf{M}$  es constante, entonces

$$\phi_H(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \oint_{S'} \frac{d\vec{s}'}{R} \quad (1.408)$$

Esta es una integral de geometría por lo que, para cualquier punto con una misma  $\mathbf{r}$ , la integral va a dar el mismo valor. Sin embargo, por facilidad, se resolverá para un punto sobre el eje  $\mathbf{Z}$  con la salvedad de que, una vez resuelta la integral, se intercambiará a  $\mathbf{r}$  por  $\mathbf{z}$  para obtener a  $\phi_H$  para cualquier punto en el espacio.



De este modo, por simetría se tiene que si

$$R = \sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}$$

$$d\vec{s}' = \vec{r}_u ds'$$

entonces

$$\varphi_H(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\vec{r}_u a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos\theta}} \quad (1.409)$$

Pero el vector  $\vec{r}_u$ , el cual depende de las variables de integración, es igual a:

$$\vec{r}_u = \sin\theta' \cos\phi' \vec{i} + \sin\theta' \sin\phi' \vec{j} + \cos\theta' \vec{k}$$

por lo que:

$$\varphi_H(\vec{r}) = \frac{a^2}{4\pi} \vec{M} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos\theta}} \int_0^{2\pi} [\sin\theta' \cos\phi' \vec{i} + \sin\theta' \sin\phi' \vec{j} + \cos\theta' \vec{k}] d\phi' \quad (1.410)$$

Pero

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' \equiv 0$$

Por lo tanto,

$$\varphi_H(\vec{r}) = \frac{a^2}{4\pi} \vec{M} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin\theta' \cos\theta'}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos\theta}} d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \vec{k} \quad (1.411)$$

La primera integral se resuelve rápidamente dejando a  $\phi$  como:

$$\varphi_H(\vec{r}) = \frac{a^2}{4\pi} \vec{M} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin\theta' \cos\theta' d\theta'}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos\theta}} \vec{k} \quad (1.412)$$

La siguiente integral se puede resolver más fácilmente realizando un cambio de variable, donde:

$$u = \cos\theta'$$

$$du = -\sin\theta' d\theta'$$

$$\text{cuando } \theta' \rightarrow 0 \quad \text{entonces } u = 1$$

$$\text{cuando } \theta' \rightarrow \pi \quad \text{entonces } u = -1$$

De esta forma, la integral se puede escribir como:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta' \cos\theta'}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos\theta}} d\theta' = \int_{-1}^{+1} \frac{u du}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos\theta}}$$

Si extraemos la siguiente regla de integración:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx}} = \left( \frac{1}{3}(a+bx) - a \right) \frac{2\sqrt{a+bx}}{b^2}$$

y hacemos que  $a = a^2 + z^2$  y que  $b = -2az$ , entonces obtendremos que la integral anterior sea igual a:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{udu}{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}} &= \left( \frac{1}{3} [a^2 + z^2 - 2azu] - (a^2 + z^2) \right) \frac{2\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}}{4a^2 z^2} \Bigg|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{1}{3} [-2a^2 - 2z^2 - 2azu] \frac{\sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta}}{2a^2 z^2} \Bigg|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{1}{3a^2 z^2} \left( [a^2 + z^2 - 2azu] \sqrt{a^2 + z^2 - 2az \cos \theta} \right) \Bigg|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{1}{3a^2 z^2} \left( [a^2 + z^2 + 2azu] |a - z| - [a^2 + z^2 - 2azu] |a + z| \right) \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, el potencial escalar se puede escribir momentáneamente así:

$$\phi_H(\vec{r}) = \frac{a^2}{4\pi} \vec{M} \cdot \left\{ \frac{[(a^2 + z^2)(|a - z| - |a + z|) + 2az(|a - z| + |a + z|)]}{3a^2 z^2} \vec{k} \right\} \quad (1.413)$$

Finalmente, intercambiando a  $z$  por  $r$ , se obtendría la expresión del potencial para cualquier punto en el espacio:

$$\phi_H(\vec{r}) = \frac{a^2}{4\pi} \vec{M} \cdot \left\{ \frac{1}{3a^2 r^2} [(a^2 + r^2)(|a - r| - |a + r|) + 2ar(|a - r| + |a + r|)] \vec{r}_u \right\} \quad (1.414)$$

Aún así, en el modo en que se encuentra la expresión todavía no nos resulta de utilidad, ya que es difícil de visualizar. Por lo tanto, para simplificarla, se dividirá la región del espacio en dos como se ha hecho en ejemplos anteriores. De esta forma, se tiene que, para  $r > a$ :

$$|a - r| = r - a$$

$$|a + r| = r + a$$

por lo que el potencial exterior será igual a:

$$\begin{aligned}\varphi_H^{\text{ext}}(\vec{r}) &= -\frac{\vec{M}}{6r^2} [2a^3 - 2ar^2 + 2ar^2] \vec{r}_u \\ &= \frac{a^3 \vec{M} \cdot \vec{r}_u}{3r^2}\end{aligned}\quad (1.415)$$

Si  $\vec{m} = \frac{4}{3}\pi a^3 \vec{M}$ , entonces:

$$\varphi_H^{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}_u}{r^2} \quad (1.416)$$

En el caso del potencial interior, donde  $a > r$ , se tendría que:

$$\begin{aligned}\varphi_H^{\text{int}}(\vec{r}) &= -\frac{\vec{M}}{6r^2} [-2a^2r - 2r^3 + 2a^2r] \vec{r}_u \\ &= \frac{\vec{M} \cdot r\vec{r}_u}{3} \\ \varphi_H^{\text{int}}(\vec{r}) &= \frac{1}{3} \vec{M} \cdot \vec{r}\end{aligned}\quad (1.417)$$

Se puede observar que el campo en el exterior de la esfera se sigue comportando como un campo dipolar. El campo  $\vec{H}$  proviene, pues, del menos gradiente de la función escalar. Por lo tanto, se puede ver que el campo  $\vec{H}$  exterior es:

$$\vec{H}^{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial r} \varphi_H(\vec{r}) \vec{r}_u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_H(\vec{r}) \vec{\theta}_u \quad (1.418)$$

Si

$$\frac{\partial}{\partial r} \varphi_H^{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Ma^3}{3r^2} \cos \theta \right) = \frac{-Ma^3}{3r^3} 2 \cos \theta$$

y

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_H^{\text{ext}} = \frac{-Ma^3}{3r^3} \text{sen} \theta$$

Entonces,

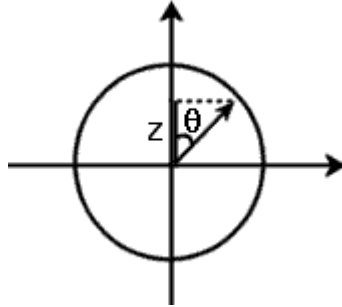
$$\vec{H}_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{Ma^3}{3r^3} 2 \cos \theta \vec{r}_u + \frac{Ma^3}{3r^3} \text{sen} \theta \vec{\theta}_u \quad (1.419)$$

resultado que es exactamente igual al del campo de un dipolo.

En el interior de la esfera tenemos que el potencial se puede ver como:

$$\phi_H^{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{1}{3} \vec{M} \vec{k} \cdot \vec{r} \vec{r}_u = \frac{1}{3} M r \vec{k} \cdot \vec{r}_u = \frac{1}{3} M r \cos \theta \quad (1.420)$$

Pero  $r \cos \theta = z$ .



Entonces se tiene que:

$$\phi_H^{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{1}{3} M z \quad (1.421)$$

por lo que el campo  $\vec{H}$  en el interior se transforma en:

$$\vec{H}_{\text{int}}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial z} \phi_H^{\text{int}} \vec{k} = -\frac{1}{3} M \vec{k} \quad (1.422)$$

Si ahora se desea encontrar al campo  $\vec{B}$  a partir de  $\vec{H}$ , y partiendo de la siguiente relación:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

se tiene que el campo  $\vec{B}$  en el exterior, donde  $\vec{M} = \mathbf{0}$  (ya que no existe magnetización en el vacío), va a ser igual a:

$$\vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{H}_{\text{ext}} = \frac{M a^3 \mu_0 2 \cos \theta}{3 r^3} \vec{r}_u + \frac{M a^3 \mu_0 \sin \theta}{3 r^3} \vec{\theta}_u \quad (1.423)$$

y que el campo  $\vec{B}$  interior va a ser igual a:

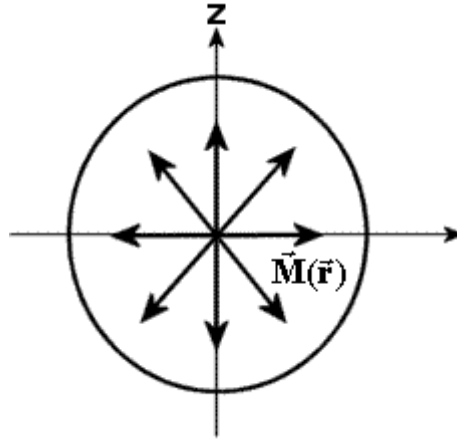
$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{int}} &= \mu_0 \left( -\frac{1}{3} M \vec{k} + M \vec{k} \right) \\ &= \frac{2}{3} \mu_0 M \vec{k} \end{aligned} \quad (1.424)$$



Indudablemente es más fácil resolver un potencial escalar que un potencial vectorial, pero en ambos casos se debe de obtener el mismo resultado.

### EJEMPLO 1.13

Una esfera de radio  $a$  presenta una magnetización  $\vec{M}(\vec{r}) = M(r)\vec{r}_u$  y  $M(0)$  es un valor finito. Encuentre el campo  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ .



El problema nos dice que las corrientes de conducción son cero ( $\vec{J}_f = 0$ ). Si planteamos el problema para resolver  $\vec{H}$  implicaría que su potencial vectorial para es  $\vec{A}_H = 0$ ; por lo tanto, sólo existe el potencial escalar el cual, definido para cargas magnéticas, sería

$$\varphi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{R} dv' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M} \cdot d\vec{s}}{R}$$

Por otro lado, sabemos que la divergencia de  $\vec{H}$  es igual a la carga magnética encerrada:

$$\nabla \cdot \vec{H} = \rho_M$$

donde

$$\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M}$$

$$\sigma_M = \vec{M} \cdot \vec{n}$$

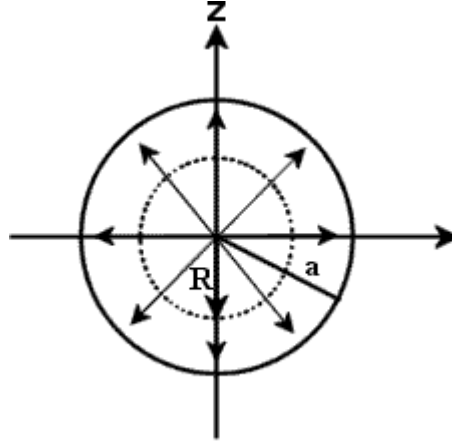
En este ejemplo tendríamos que el módulo del vector de magnetización  $M(r)$  es exclusivamente función de  $r$ , más no depende de  $\theta$  ni de  $\phi$ . Así, la divergencia de  $\vec{M}$ , en coordenadas esféricas, será:

$$-\nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 M(r)) = \rho_M \quad (1.425)$$

La densidad superficial de carga se sabe que es

$$\vec{M} \cdot \vec{n} = M(a) = \sigma_M$$

Resolver la integral tal cual tenemos los datos es muy complicado. En su lugar, se puede argumentar el teorema de Gauss para cargas magnéticas para encontrar el campo en el interior.



La superficie gaussiana de radio  $R$  contiene cierta cantidad de carga magnética. Así, del teorema de la divergencia se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{H} dv &= \int_V \rho_M dv \\ \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \int_V \rho_M dv \end{aligned} \quad (1.426)$$

Para que el teorema de Gauss nos pueda ser útil, el campo  $\vec{H}$  debe de mantenerse constante sobre la superficie gaussiana y perpendicular a la misma superficie. Como no depende ni de  $\theta$  ni de  $\phi$ , lo anterior se cumple. De esta forma, la integral de flujo quedaría como:

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = H 4\pi R^2 = \int_0^R \int_0^\theta \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 M(r)) r^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' dr \quad (1.427)$$

la cual nos dice cuanta carga se está encerrando. La densidad de carga ya la dio la ecuación 1.425. Como ya se mencionó, solamente depende de  $r$ , por lo que:

$$\begin{aligned} 4\pi R^2 H &= -4\pi \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} (r^2 M(r)) dr \\ &= -4\pi (r^2 M(r))_0^R \\ &= -4\pi R^2 M(R) \end{aligned} \quad (1.428)$$

Por lo tanto,

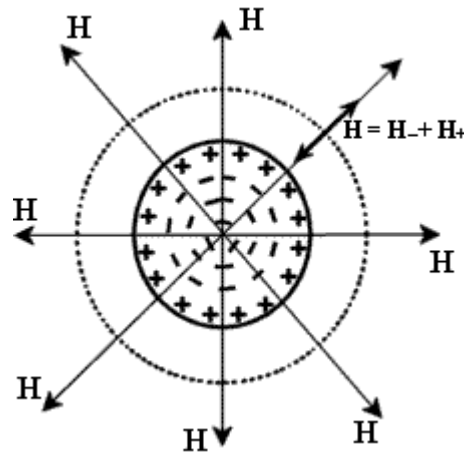
$$\mathbf{H} = -\mathbf{M}(\mathbf{R}) \quad (1.429)$$

donde  $\mathbf{R}$  indica solamente el valor de la magnetización en el radio  $\mathbf{R}$ . En general, ya en forma vectorial se puede escribir, para el interior, así:

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{r}}) = -\mathbf{M}(\mathbf{r})\vec{\mathbf{r}}_u \quad (1.430)$$

En el exterior, la única fuente que existe es la magnetización. Si dibujamos una superficie gaussiana al exterior de la esfera, la carga magnética encerrada será igual a cero; hasta este punto, esta es una condición necesaria más no suficiente para asegurar que el campo también sea cero, ya que todavía no se ha podido visualizar el comportamiento del campo. El valor del campo se definirá más adelante, conforme se vaya resolviendo el problema. Para ello habrá que tomar en cuenta los datos que tenemos hasta el momento.

Se tiene una esfera de la cual se sabe que la densidad de carga magnética varía radialmente, obteniendo diferentes valores (todos negativos) para cada  $\mathbf{r}$  hasta alcanzar la superficie. En la superficie, se tienen cargas magnéticas positivas constantes. De acuerdo con esto, se puede ver que el campo está forzado a trasladarse de forma radial.



Entonces, el campo  $\mathbf{H}$  será la superposición de dos campos: el campo  $\mathbf{H}$  creado por las cargas magnéticas negativas más el creado por las cargas magnéticas positivas, ambos moviéndose en sentidos opuestos pero con la misma intensidad. De esta forma, el campo  $\mathbf{H}$  creado por las cargas negativas sería:

$$\mathbf{H}_-(\mathbf{r}) = \frac{-a^2 \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\mathbf{R}^2} \quad (1.431)$$

El campo creado por las cargas positivas sería solamente el de las cargas que se encuentran en la superficie, lo cual daría:

$$\mathbf{H}_+(\vec{r})4\pi R^2 = \oint_S \sigma_M d\mathbf{s} \quad (1.432)$$

donde la carga magnética total encerrada es

$$\begin{aligned} \oint_S \sigma_M d\mathbf{s} &= M(\mathbf{a}) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin\theta d\theta dv \\ &= a^2 M(\mathbf{a}) 4\pi \end{aligned} \quad (1.433)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_+ 4\pi R^2 &= a^2 4\pi M(\mathbf{a}) \\ \mathbf{H}_+ &= \frac{M(\mathbf{a})a^2}{R^2} \end{aligned} \quad (1.434)$$

El campo total es el campo producido por las cargas positivas más el campo producido por las cargas negativas, lo que sería igual a:

$$\vec{\mathbf{H}}_t = \vec{\mathbf{H}}_+ + \vec{\mathbf{H}}_- = -\frac{M(\mathbf{a})a^2}{R^2} \vec{\mathbf{r}}_u + \frac{M(\mathbf{a})a^2}{R^2} \vec{\mathbf{r}}_u \equiv \mathbf{0} \quad (1.435)$$

Por ende, el campo  $\mathbf{H}$  en el exterior es igual a cero. Para encontrar al campo  $\mathbf{B}$  habrá que recordar la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{H}} &= \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \vec{\mathbf{M}} \\ \vec{\mathbf{B}} &= \mu_0 (\vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}}) \end{aligned}$$

De esta forma, el campo  $\mathbf{B}$  interior será:

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 (-M(\mathbf{r})\vec{\mathbf{r}}_u + M(\mathbf{r})\vec{\mathbf{r}}_u) = \mathbf{0} \quad (1.436)$$

y el campo  $\mathbf{B}$  exterior será:

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (1.437)$$

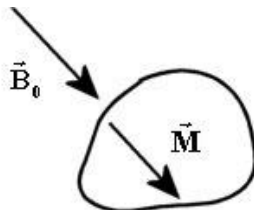
ya que  $\vec{\mathbf{H}}$  y  $\vec{\mathbf{M}}$  en el exterior son igual a cero.

Este ejemplo pone en claro que los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  son diferentes. El hecho de que  $\mathbf{H}$  sea distinta de cero no implica que  $\mathbf{B}$  lo sea también debido al tipo de fuentes que tienen:  $\mathbf{H}$  tiene fuentes de vórtice y escalares mientras que  $\mathbf{B}$  sólo tiene fuentes de vórtice. Solamente en el vacío se cumple que  $\mathbf{B}$  sea proporcional a  $\mathbf{H}$ . Este es el motivo por el que se maneja al campo de inducción magnética  $\mathbf{H}$  para determinar al campo  $\mathbf{B}$  en una prospección

magnetométrica, ya que, en magnetometría, uno mide afuera del cuerpo magnetizado (en el vacío) y no dentro de él.

## MEDIOS LINEALES HOMOGÉNEOS E ISÓTROPOS (M. L. H. I.)

Se ha visto en temas anteriores que, cuando un cuerpo permeable se encuentra bajo la acción de un campo, éste se magnetiza por medio de un proceso de inducción. Por lo tanto, existe una relación entre campo externo o inductor y la magnetización.



Cuando un medio se puede considerar como homogéneo (que no varía el parámetro físico en ningún punto aleatorio del medio) e isótropo ( $\phi_M$  permanecerá igual sin importar la dirección en que uno se mueva), resulta que la magnetización es proporcional a la intensidad del campo que existe en el interior del cuerpo:

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}_{\text{int}}$$

Por otro lado, bajo cualquier circunstancia y medio, la siguiente relación es válida:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

por lo que  $\vec{B}$  puede verse como:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0 (\vec{H} + \chi_M \vec{H}) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_M) \vec{H} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \tag{1.438}$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética y  $\chi_M$  es la susceptibilidad magnética. Esta relación asume que la magnetización que presenta un cuerpo forzosamente es debida a un proceso inductivo y no permanente.

También se sabe que el rotacional de  $\vec{H}$  es igual a las corrientes libres:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$$

lo que implicaría que el rotacional de  $\mathbf{B}$  para un M. L. H. I. está relacionado de la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{J}}_f \quad (1.439)$$

La única diferencia entre una y otra sería la presencia de la susceptibilidad. Además, como ya se había visto, la divergencia de  $\mathbf{H}$  es igual a la menos divergencia de  $\mathbf{M}$ :

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{H}} = -\nabla \cdot \vec{\mathbf{M}}$$

pero si el medio es L. H. I., entonces la divergencia de  $\mathbf{M}$  forzosamente debe de ser cero:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$$

Lo anterior se debe a que la divergencia de  $\mathbf{B}$  es:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mu \nabla \cdot \vec{\mathbf{H}} = \mu \nabla \cdot \vec{\mathbf{M}}$$

pero como  $\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$  bajo toda circunstancia, lo que implicaría que la divergencia de  $\mathbf{M}$  sea también cero. Esto no significa que no exista magnetización; en otras palabras, no quiere decir que en  $\mathbf{H}$ , aunque sea un M. L. H. I., no exista la fuente escalar, ya ésta puede existir en la superficie. Es la carga magnética volumétrica la que no existe. Por lo tanto, si es que hay una magnetización, toda la carga magnética positiva y negativa debe de concentrarse en la superficie.

Así, para M. L. H. I., el campo  $\mathbf{B}$  puede continuar proviniendo del rotacional de una función vectorial:

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}$$

donde

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathbf{J}}_f}{\mathbf{R}} d\mathbf{v} \quad (1.440)$$

Cuando utilizamos esta definición para  $\vec{\mathbf{A}}$  se está considerando que todo el universo es de la misma permeabilidad magnética. Si ahora definimos que

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}}_f$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{H}} = 0$$

entonces se puede decir que  $\mathbf{H}$  provendría de la misma función vectorial:

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathbf{J}}_f}{\mathbf{R}} d\mathbf{v} \quad (1.441)$$

Podría también existir la función escalar:

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} - \nabla \phi_H$$

Pero  $\phi_H$  estaría dada exclusivamente por la integral de superficie:

$$\phi_H = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_M}{R} ds \quad (1.442)$$

Esta última ecuación podría ser cero pero, en general, puede existir.

La expresión más general de las ecuaciones que hemos estado viendo en este ejemplo se puede ver a continuación:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_f & \nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{J}_f \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

## CONDICIONES DE FRONTERA

Las condiciones de frontera que se resumen en la siguiente tabla son válidas cuando la magnetización es debida a un proceso de inducción:

$\vec{B}$	$\vec{H}$	$\phi$
$B_{N,1} = B_{N,2}$ $\frac{B_{t,2}}{\mu_2} - \frac{B_{t,1}}{\mu_1} = \vec{k}_f$ $\vec{k}_f \neq 0$	$\mu_1 H_{N,1} = \mu_2 H_{N,2}$ $H_{t,2} - H_{t,1} = \vec{k}_f$ $\vec{k}_f \neq 0$	<p>No existen corrientes verdaderas (<math>J_f = 0</math>)</p>
$B_{N,1} = B_{N,2}$ $\frac{B_{t,2}}{\mu_2} - \frac{B_{t,1}}{\mu_1} = \vec{k}_f$ $\vec{k}_f = 0$	$\mu_1 H_{N,1} = \mu_2 H_{N,2}$ $H_{t,2} = H_{t,1}$ $\vec{k}_f = 0$	$\mu_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$ $\phi_2 = \phi_1$

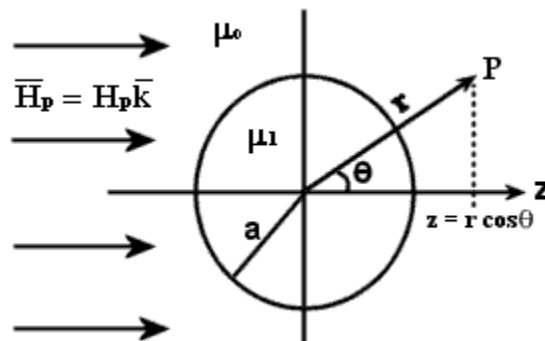
\*  $\vec{k}_f$  son las corrientes de superficie verdaderas

Las siguientes condiciones de frontera están expresadas en forma general y parten deshecho de que ya se conoce la magnetización; son válidas tanto para la magnetización debida a procesos de inducción como para la permanente y están dadas para varios tipos de medios:

$\vec{B}$	$\vec{H}$	$\phi$
$B_{N,1} = B_{N,2}$ $B_{t,2} - B_{t,1} = \mu_0 k_f + \mu_0 (M_{t,2} - M_{t,1})$ $\vec{k}_f \neq 0$	$H_{N,2} - H_{N,1} = -(M_{N,2} - M_{N,1})$ $H_{t,2} - H_{t,1} = \vec{k}_f$ $\vec{k}_f \neq 0$	$J_f = 0$ $k_f = 0$
$B_{N,1} = B_{N,2}$ $B_{t,2} - B_{t,1} = \mu_0 (M_{t,2} - M_{t,1})$ $\vec{k}_f = 0$	$H_{N,2} - H_{N,1} = -(M_{N,2} - M_{N,1})$ $H_{t,2} = H_{t,1}$ $\vec{k}_f = 0$	$\frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = (M_{N,2} - M_{N,1})$ $\phi_2 = \phi_1$

### EJEMPLO 1.14

Encuentre el campo  $\vec{H}$  producido por una esfera de radio  $a$  que se encuentra en un medio que presenta una  $\vec{H}_p = H_p \vec{k}$ .



En este problema se tiene una esfera que se va a magnetizar por inducción. Obviamente no hay corrientes de conducción y tampoco se conoce la magnetización. Además, se tiene un M. L. H. I., por lo que la ecuación que va a satisfacer el potencial escalar para  $\vec{H}$  va a ser la ecuación de Laplace:



$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Debido a la posible magnetización que sufre el cuerpo, va a existir carga magnética sobre la superficie de la esfera. Se va a tener simetría con respecto al ángulo azimutal, por lo que el potencial sólo será función del ángulo de colatitud y de  $\mathbf{R}$ . Bajo esta premisa, la solución de la ecuación de Laplace para coordenadas polares será:

$$\varphi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} + r^{\ell} B_{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.443)$$

Se sabe que el potencial en la región 0 es la suma del potencial secundario creado en esta región más el potencial primario que está dando origen al campo inductor:

$$\varphi_0 = \varphi_{s,0} + \varphi_P$$

El campo  $\vec{H}$  primario proviene de:

$$\vec{H}_P = -\frac{\partial}{\partial z} \varphi_P \vec{k} \quad (1.444)$$

de tal manera que se puede decir que el potencial primario es:

$$\varphi_P = -H_0 z \quad (1.445)$$

A su vez,  $z$  se puede expresar como  $z = r \cos \theta$ ; por lo tanto, el campo primario se puede expresar como:

$$\varphi_P = -H_0 r \cos \theta \quad (1.446)$$

Siguiendo este razonamiento, el potencial en la región 0 se puede escribir:

$$\varphi_0 = -H_P r \cos \theta + \varphi_{s,0} \quad (1.447)$$

El potencial secundario en la región cero debe de tender a 0 conforme  $r$  tienda a infinito, ya que es el potencial que representa al campo, por lo que se tendremos que:

$$\varphi_{s,0} \rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty$$

$$\varphi_{s,0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.448)$$

y el potencial en cero será

$$\varphi_0 = -H_P r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.449)$$

El potencial interior también es la suma de un potencial primario más un potencial secundario en la región 1:

$$\Phi_1 = \Phi_P + \Phi_{S,1}$$

Esto quiere decir que el campo primario no debe su origen a la existencia de la esfera en el medio. La esfera sólo modifica el entorno del campo que existe en los puntos del espacio ya que esta crea un campo secundario. En otras palabras, al campo primario preexistente se le suma un campo secundario. Por ende, en el interior de la esfera también se puede hablar de la existencia de un campo primario, por lo que no se hubiera podido resolver el problema tomando en cuenta sólo un campo secundario sino como la superposición de los campos.

El campo secundario en la región 1 debe permanecer finito en  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , por lo que el potencial secundario deberá de estar representado por:

$$\begin{aligned} \Phi_{S,1} &\neq \infty \\ \Phi_{S,1} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{B}_{\ell} \mathbf{r}^{\ell} \mathbf{P}_{\ell}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (1.450)$$

y el campo total en el interior se verá como:

$$\Phi_1 = -\mathbf{H}_P \mathbf{r} \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{B}_{\ell} \mathbf{r}^{\ell} \mathbf{P}_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.451)$$

Para poder resolver los coeficientes  $\mathbf{A}_{\ell}$  y  $\mathbf{B}_{\ell}$  habrá que establecer primero las condiciones de frontera las cuales, según las tablas anteriores, son:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi_1 \\ \mu_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}} &= \mu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

Esto nos daría que, en  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ :

$$-\mathbf{H}_P \mathbf{a} \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_{\ell}}{\mathbf{a}^{\ell+1}} \mathbf{P}_{\ell}(\cos \theta) = -\mathbf{H}_P \mathbf{a} \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{B}_{\ell} \mathbf{a}^{\ell} \mathbf{P}_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.452)$$

y su derivada sea:

$$-\mathbf{H}_P \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{-(\ell+1)\mathbf{A}_{\ell}}{\mathbf{a}^{\ell+2}} \mathbf{P}_{\ell}(\cos \theta) = \frac{\mu_1}{\mu_0} \left[ -\mathbf{H}_P \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell \mathbf{B}_{\ell} \mathbf{a}^{\ell-1} \mathbf{P}_{\ell}(\cos \theta) \right] \quad (1.453)$$

De la ecuación 1.452 podemos llegar a la conclusión de que la siguiente relación se debe de satisfacer:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{a^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} a^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.454)$$

y para que esta igualdad se pueda sostener, entonces:

$$A_{\ell} = B_{\ell} a^{2\ell+1} \quad (1.455)$$

Si pasamos los elementos similares de la ecuación 1.453 del mismo lado obtenemos:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{-(\ell+1)A_{\ell}}{a^{\ell+2}} - \frac{\mu_1}{\mu_0} \ell B_{\ell} a^{\ell-1} \right) P_{\ell}(\cos \theta) = \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_0} \right) H_P \cos \theta \quad (1.456)$$

A  $C_{\ell}$  la podemos definir como:

$$C_{\ell} = \frac{-(\ell+1)A_{\ell}}{a^{\ell+2}} - \frac{\mu_1}{\mu_0} \ell B_{\ell} a^{\ell-1} \quad (1.457)$$

de tal forma que la ecuación 1.456 quedaría como:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) = \left( \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0} \right) H_P \cos \theta \quad (1.458)$$

Sin embargo, sabemos de ejemplos anteriores que:

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$$

Por lo tanto, la ecuación 1.458 se puede expresar como:

$$C_0 P_0 + C_1 P_1 + C_2 P_2 + \dots = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0} H_P \cos \theta \quad (1.459)$$

lo que significaría que, para que esta igualdad se sostenga, todas  $C_{\ell} = 0$  excepto para  $\ell = 1$ , lo que traería como consecuencia que la ecuación 1.458 sea:

$$C_1 = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0} H_P \quad (1.459)$$

Si sustituimos este coeficiente en la ecuación 1.457 tendremos que:

$$-\frac{2A_1}{a^3} - \frac{\mu_1}{\mu_0} B_1 = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0} H_P \quad (1.460)$$

La ecuación 1.459 implica que, en la ecuación 1.455, sólo existe el término  $\ell = 1$ , por ser las ecuaciones 1.455 y 1.457 simultáneas. De este modo, se tiene que:

$$A_1 = B_1 a^3 \quad (1.461)$$

y que  $A_\ell = B_\ell \equiv 0 \quad \forall \quad \ell \neq 1$ .

Sustituyendo la ecuación 1.461 en la ecuación 1.460 se tendría que el coeficiente  $B_1$  es igual a:

$$\begin{aligned} -2B_1 - \frac{\mu_1}{\mu_0} B_1 &= \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0} H_P \\ B_1 \left( \frac{2\mu_0 - \mu_1}{\mu_0} \right) &= \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} H_P \\ B_1 &= \left( \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \right) H_P \end{aligned} \quad (1.462)$$

Sustituyendo este valor de  $B_1$  en la ecuación 1.461 se tendría que  $A_1$  es igual a:

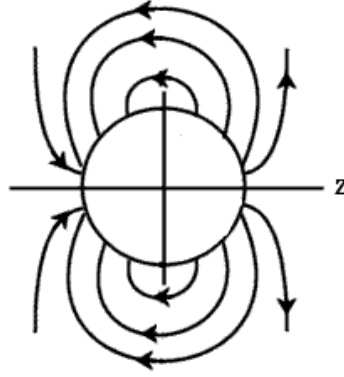
$$A_1 = \left( \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \right) H_P a^3 \quad (1.463)$$

Sustituyendo ahora el valor de los dos coeficientes tendríamos que los potenciales exterior e interior se pueden expresar como:

$$\varphi_0 = -H_P r \cos \theta + \left( \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \right) H_P a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (1.464)$$

$$\varphi_1 = -H_P r \cos \theta + \left( \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \right) H_P \cos \theta \quad (1.465)$$

Esto nos habla de un potencial exterior secundario que se comporta como un campo dipolar, el cual se puede visualizar así:



Obviamente, el campo  $\vec{H}_0 = -\nabla\varphi_P$ , por lo que se puede ver como un campo dipolar:

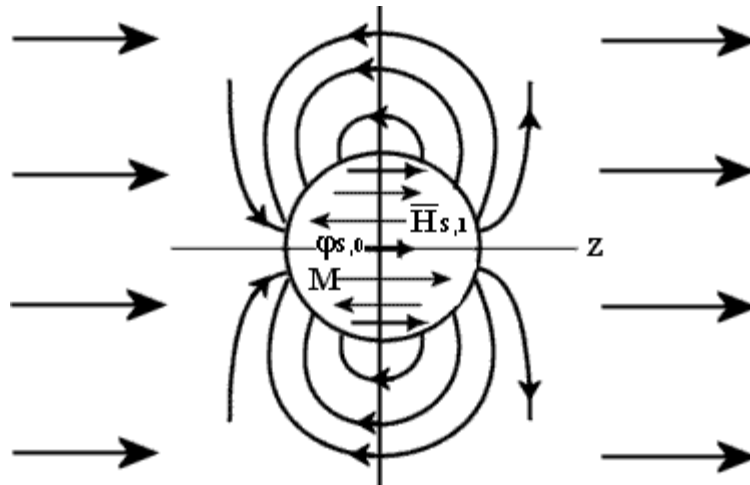
$$\vec{H}_0(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\varphi_0\vec{r}_u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\varphi_0\vec{\theta}_u \quad (1.466)$$

$$\vec{H}_0(\vec{r}) = H_0\vec{k} + \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0}\right)H_P a^3 \frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{r}_u + \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0}\right)H_P a^3 \frac{\sin\theta}{r^3}\vec{\theta}_u$$

En el interior,  $z = r\cos\theta$ , por lo que el campo  $\vec{H}_1$  es igual a:

$$\vec{H}_1(\vec{r}) = \vec{H}_1\vec{k} - \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0}\right)H_P\vec{k} \quad (1.467)$$

Esto nos dice que el campo primario preexistente también existe en todo punto interior de la esfera. A este campo se le opone un campo debido al efecto de la magnetización del cuerpo en el interior de la esfera. En todo punto del espacio, tanto en el campo exterior como en el interior, el campo total será la suma del campo primario más el campo secundario creado por la esfera, sólo que en el interior será opuesto al primario.



Sabemos que la magnetización está dada por la susceptibilidad magnética multiplicada por el campo  $\vec{H}$  interior:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \chi_M \vec{H}_{\text{int}} \\ \vec{M} &= \chi_M \left[ 1 - \left( \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \right) \right] \vec{H}_P \vec{k}\end{aligned}\quad (1.468)$$

Por ende, a final de cuentas, la magnetización se podría ver como:

$$\vec{M} = \chi_M \frac{3\mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \vec{H}_P \vec{k} \quad (1.469)$$

Esto nos habla de que la magnetización que sufre el cuerpo va en la misma dirección que el campo inductor. Por otro lado, la susceptibilidad magnética se puede expresar como:

$$\chi_M = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} \quad (1.470)$$

por lo que la magnetización también se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= 3 \left( \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \right) \vec{H}_P \vec{k} \\ \frac{\vec{M}}{3} &= \left( \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \right) \vec{H}_P\end{aligned}\quad (1.471)$$

De acuerdo con esto, el potencial secundario en la región cero se puede escribir como:

$$\phi_{s,0} = \frac{M}{3} a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (1.472)$$

Este resultado es igual al potencial de un dipolo; es decir, se comporta como un campo producido por un dipolo colocado en el centro de la esfera.

El potencial secundario en el interior se puede expresar de la misma manera:

$$\begin{aligned}\phi_{s,1} &= \frac{M}{3} r \cos \theta \\ \phi_{s,1} &= \frac{M}{3} z\end{aligned}\quad (1.473)$$

lo que quiere decir que el campo secundario en el interior es igual a.

$$\vec{H}_{s,1} = -\nabla\varphi_{s,1} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{M}}{3}z\right)\vec{k} = -\frac{\vec{M}}{3}\vec{k} = -\frac{\vec{M}}{3} \quad (1.474)$$

Esto se puede traducir como un campo secundario generado dentro de la esfera que es contrario y proporcional a la magnetización. La relación de los módulos es:

$$\frac{|\vec{H}_{s,1}|}{|\vec{M}|} = N \quad (1.475)$$

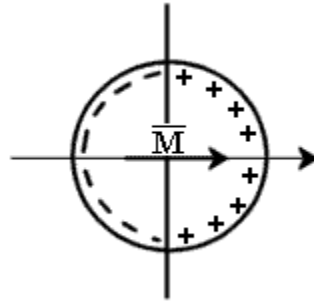
donde  $N$  es el *factor de demagnetización*. Para el interior de la esfera:

$$N = \frac{1}{3}$$

Este es un factor que depende de la geometría del cuerpo, más no del proceso físico involucrado. Por ejemplo, para el caso de un cilindro sería  $N = 1/2$  y para el caso de un estrato infinito  $N = 1$ . Es por ello que se dice que, en general, el campo secundario creado dentro de una esfera es:

$$\vec{H}_s = -N\vec{M} \quad (1.476)$$

Si hubiéramos conocido la magnetización del cuerpo desde un principio,

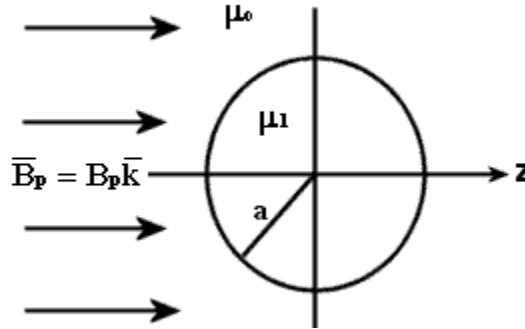


sabríamos que la magnetización es constante y hubiéramos tenido que la carga magnética inducida es igual a  $\sigma_M = \vec{M} \cdot \vec{n}$  y, por ende, se hubiera podido resolver el problema de la misma manera que se hizo en el ejemplo 1.13, donde el potencial magnético escalar era igual a:

$$\begin{aligned} \varphi_H &= \frac{1}{4\pi} \oint_s \frac{\vec{M} \cdot d\vec{s}}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \oint_s \frac{d\vec{s}}{R} \end{aligned}$$

Siguiendo este procedimiento, se hubiera llegado al mismo resultado que se obtuvo aquí para el campo secundario. A este sólo se le hubiera necesitado sumar el campo primario inductor para obtener el campo total.

Planteemos este mismo problema ahora para encontrar el campo  $\vec{B}$  sin partir primero de  $\vec{H}$ .



Como se recordará, no hay corrientes de conducción ( $\vec{J}_f = \mathbf{0}$ ). Por lo mismo, en la región 0 tendríamos que las ecuaciones de campo son:

$$\nabla \times \vec{B} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

y en la región 1 se tendrían las mismas ecuaciones de campo:

$$\nabla \times \vec{B} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Lo anterior nos daría un campo armónico, el cual se puede tratar tanto como una función potencial escalar como una vectorial. Obviamente, en la frontera habría que ajustar los campos vía las condiciones de frontera.

Podemos proponer, pues, que  $\vec{B}$  proviene de:

$$\vec{B} = -\nabla \phi_B$$

lo que daría que el potencial satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi_B = 0$$

De forma similar a  $\vec{H}$ , el potencial exterior sería:

$$\phi_0 = \phi_{P,B} + \phi_{S,0} \quad (1.477)$$



y el potencial del campo primario sería:

$$\varphi_p = -\mathbf{B}_p \mathbf{z} = -\mathbf{B}_p \mathbf{r} \cos \theta = -\mathbf{B}_p \mathbf{r} \mathbf{P}_1(\cos \theta) \quad (1.478)$$

El potencial secundario exterior tendría una solución del siguiente tipo:

$${}_B \varphi_{s,0} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A_{\ell}}{r^{\ell+1}} \mathbf{P}_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.479)$$

y el potencial secundario interior sería:

$${}_B \varphi_1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{B}_{\ell}^* r^{\ell} \mathbf{P}_{\ell}(\cos \theta) \quad (1.480)$$

Como  $\mathbf{z} = \mathbf{r} \cos \theta$  y, por tanto,  $\mathbf{z} = \mathbf{r} \mathbf{P}_1 \cos \theta$ , entonces sólo existe el término  $\mathbf{P}_1$ . Puesto que el campo primario sólo contiene el término  $\mathbf{P}_1(\cos \theta)$ , el potencial exterior se puede expresar como:

$$\varphi_0(\vec{r}) = -\mathbf{B}_0 \mathbf{r} \cos \theta + \frac{A_1}{r^2} \cos \theta \quad (1.481)$$

y al potencial interior como:

$$\varphi_1(\vec{r}) = -\mathbf{B}_1^* \mathbf{r} \cos \theta \quad (1.482)$$

Las condiciones de frontera (en  $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ ) deben de satisfacer que las componentes normales del campo sean continuas, las componentes tangenciales del campo sean discontinuas, las derivadas normales del potencial sean discontinuas y que los potenciales sean continuos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{N,0} = \mathbf{B}_{N,1} & \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} \\ \frac{\mathbf{B}_{t,0}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{B}_{t,1}}{\mu_1} & \Leftrightarrow \frac{1}{\mu_0} \varphi_0 = \frac{1}{\mu_1} \varphi \end{aligned}$$

donde  $\mu_0$  y  $\mu_1$  son constantes alrededor de la interfase. De las condiciones para las derivadas normales del potencial se tendría:

$$-\mathbf{B}_0 \cos \theta - \frac{2A_1}{a^3} \cos \theta = \mathbf{B}_1^* \cos \theta \quad (1.483)$$

y de la continuidad de los potenciales se tendría:

$$\frac{1}{\mu_0} \left[ -\mathbf{B}_0 \mathbf{a} \cos \theta + \frac{A_1}{a^2} \cos \theta \right] = \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^* \mathbf{a} \cos \theta \quad (1.484)$$

Estas dos últimas ecuaciones se pueden volver a escribir como:

$$-B_0 - \frac{2A_1}{a^3} = B_1^* \quad (1.485)$$

$$-B_0 a + \frac{A_1}{a^2} = \frac{\mu_0}{\mu_1} B_1^* a \quad (1.486)$$

Multiplicando la ecuación 1.486 por  $\frac{2}{a}$ , se tendría:

$$-2B_0 + \frac{2A_1}{a^3} = \frac{\mu_0}{\mu_1} 2B_1^* \quad (1.487)$$

Si sumamos ahora las ecuaciones 1.485 y 1.487 y despejamos, podemos obtener el valor del coeficiente  $B_1^*$ :

$$\begin{aligned} -3B_0 + 0 &= \left(1 + \frac{2\mu_0}{\mu_1}\right) B_1^* \\ B_1^* &= \frac{-3\mu_1}{\mu_1 + 2\mu_0} B_0 \end{aligned} \quad (1.488)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1.485, podemos obtener el valor del coeficiente  $A_1$ :

$$\begin{aligned} -\frac{2A_1}{a^3} &= B_1^* + B_0 \\ -\frac{2A_1}{a^3} &= \left[\frac{-3\mu_1}{\mu_1 + 2\mu_0} + 1\right] B_0 \\ -\frac{2A_1}{a^3} &= \frac{-2\mu_1 + 2\mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} B_0 \\ A_1 &= \left[\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0}\right] B_0 \end{aligned} \quad (1.489)$$

De esta forma, podemos obtener que los potenciales se pueden expresar finalmente como:

$$\varphi_0(\vec{r}) = -B_0 r \cos \theta + \left[\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0}\right] a^3 B_0 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (1.490)$$

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{-3\mu_1}{\mu_1 + 2\mu_0} B_0 r \cos \theta \quad (1.491)$$

Por sencillez se trabajará sólo con el interior, por lo que el campo  $\vec{H}$  es igual a:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_p \vec{k} - \left( \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \right) \vec{H}_p \vec{k} \quad (1.492)$$

que es el mismo resultado obtenido en la primera parte del ejercicio, y el campo  $\vec{B}$  interior es:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3\mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \vec{B}_p \vec{k} \quad (1.493)$$

Aparentemente, ambos campos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  son distintos. Si recordamos que  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , en el interior tendremos que  $\vec{B} = \mu_1 \vec{H}$ , por lo que

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_1} \vec{B}$$

Por ende, sustituyendo  $\vec{B}$  se tiene que:

$$\vec{H} = \frac{3}{\mu_1 + 2\mu_0} \vec{B}_p \vec{k}$$

pero  $\vec{B}_p = \mu_0 \vec{H}_p$ ; entonces, se tiene que:

$$\vec{H} = \frac{3\mu_0}{\mu_1 + 2\mu_0} \vec{H}_p \vec{k} \quad (1.494)$$

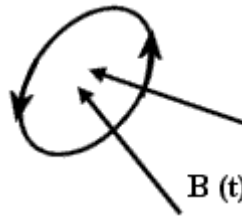
Esto nos demuestra que  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  son campos equivalentes y, por tanto, se pueden utilizar indistintamente. Hasta el momento, todos los temas anteriores se han manejado de forma estática o estacionario. Veamos que pasa cuando se le agrega la variable temporal a nuestros problemas.

## ECUACIONES DE MAXWELL

A Maxwell se le atribuye ser el unificador de las teorías referentes al fenómeno electromagnético. Antes de que Faraday realizara su famoso experimento, las ecuaciones que se conocían para el espacio vacío eran las siguientes:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_f}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{B} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

El experimento de Faraday consistió en acercar y alejar un imán (hecho con un bucle) de un amperímetro. Lo que encontró con ello fue que el cambio de flujo en una espira inducía una corriente en la bobina corriendo en sentido contrario al campo. El movimiento relativo de los elementos no era importante, sino que se producía un cambio en el flujo dependiente del tiempo, entendiendo por flujo a las líneas de fuerza que atravesaban la bobina.



Es decir, el flujo varía en el tiempo. Esto implicaba que la integral de circulación en el circuito, que se puede cambiar a una integral de superficie, era distinta de cero:

$$\oint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} \neq 0$$

Maxwell logra establecer que:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.495)$$

Además, Maxwell notó otro problema; antes se manejaba que

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}$$

pero la divergencia de un rotacional es igual a cero, lo que implicaba que  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ , lo cual violaba la ley de continuidad que decía que:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

y, por ende, debía de ser que  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) \neq 0$ . Esta ecuación trabajaba bien cuando el régimen era estacionario; pero cuando se involucraba una variación en el tiempo, entonces la ley de Ampere ( $\nabla \times \vec{B}$ ) estaba incompleta.

Maxwell razona que entonces falta algún elemento necesario para que el conjunto de ecuaciones estuvieran bien establecidas, por lo que modifica la Ley de Amper proponiendo la existencia de otro factor que forzara a la ecuación a ser cero:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \vec{J}_D \quad (1.496)$$

Para que esto suceda, entonces:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 [\nabla \cdot \vec{J}_f + \nabla \cdot \vec{J}_D] \quad (1.497)$$

Esto va a forzar a que:

$$\nabla \cdot \vec{J}_f + \nabla \cdot \vec{J}_D = 0$$

lo que implicaría que la divergencia de  $\nabla \cdot \vec{J}_D$  sea igual a la derivada con respecto al tiempo de la densidad volumétrica de carga libre:

$$\nabla \cdot \vec{J}_D = + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \quad (1.498)$$

puesto que las corrientes de conducción son:

$$\nabla \cdot \vec{J}_f = - \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$$

En época de Maxwell ya también se había establecido que:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

Al derivarla con respecto al tiempo se tendría que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} &= \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \\ \nabla \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right] &= \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.499)$$

ya que la derivada es conmutativa y no se altera. Entonces, la divergencia de  $\vec{J}_D$  debe de ser igual a la divergencia de la derivada temporal del vector de desplazamiento eléctrico:

$$\nabla \cdot \vec{J}_D = \nabla \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right] \quad (1.500)$$

De aquí se obtiene que  $\vec{J}_D$  sea igual a:

$$\vec{J}_D = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (1.501)$$

Entonces, Maxwell modifica la ley de Amper proponiendo que:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad (1.502)$$

De esta forma, se eliminaba el hecho de que no se cumpliera que  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$ . Es por ello que a  $\vec{J}_D$  se le conozca como *corriente de desplazamiento eléctrico*. Indudablemente, esta no es una corriente física, ya que no hay un transporte de carga; sólo por analogía se le llama corriente.

Ya modificadas, las *Ecuaciones de Maxwell* quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_f}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones sólo son válidas para el espacio vacío. Para cuerpos más complejos, como los que presentan polarización o magnetización, las ecuaciones se modifican.

Es decir, digamos que se tiene un medio donde existe una polarización  $\vec{P}$  y una magnetización  $\vec{M}$ . La Ley de Inducción de Faraday quedaría de la misma forma:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.503)$$

Pero la Ley de Amper se tiene que modificar, expresándola como:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \nabla \times \vec{M} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.504)$$

Por otro lado, si existe una polarización, la divergencia de  $\vec{E}$  se modifica también:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \vec{P}) \quad (1.505)$$

con sus respectivas relaciones constitutivas:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

En su forma más compleja, las ecuaciones de Maxwell se escribirías así:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \nabla \times \vec{M} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} + \frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

donde  $\vec{J}_f$  son las corrientes libres,  $\nabla \times \vec{M}$  son las corrientes magnéticas,  $\partial \vec{E} / \partial t$  son las corrientes de desplazamiento eléctrico en el vacío y  $\partial \vec{P} / \partial t$  son las corrientes de polarización. Estas ecuaciones son válidas para cualquier medio, sin hacer énfasis en el tipo de polarización o magnetización.

Si nos limitamos a M. L. H. I. y a que los procesos de polarización y magnetización son debidos a inducción, traería como consecuencia que:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

De ser esto así, la ecuación de Faraday se puede escribir en su forma más conocida:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left[ \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \vec{M} \right] = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{P}] \quad (1.506)$$

donde  $\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \vec{M}$  y  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{P}$ . Por lo tanto,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.507)$$

Es así como, para M. L. H. I., las ecuaciones de Maxwell serían:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

las cuales también se pueden escribir como:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

Ahora ya podemos establecer los potenciales. Notemos que el campo de inducción magnética  $\vec{B}$  sigue siendo de tipo solenoidal, lo que implicaría que, de acuerdo con el teorema de Helmholtz, proviene del rotacional de una función vectorial:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Esto además implica que

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.508)$$

pero significaría que

$$\nabla \times \left[ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (1.509)$$



Si definimos momentáneamente un vector  $\vec{F}$  como el campo de relación entre  $\vec{A}$  y la derivada temporal de  $t$ ,

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.510)$$

tendríamos que su rotacional, sin importar su divergencia, sería igual con cero:

$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema de Helmholtz, se puede proponer que proviene del gradiente de una función escalar:

$$\vec{F} = -\nabla\phi$$

De esta forma, se tendría que:

$$-\nabla\phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.511)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico provendría de:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.512)$$

Este resultado es lógico ya que  $\vec{E}$  es un campo complejo (con una divergencia y un rotacional distintos de cero); por ende, debe de existir una función escalar y una vectorial. Existen muchas otras formas de descomponer los campos electromagnéticos, pero ésta es con la cuál se puede obtener un campo más sencillo de resolver.

Así, podemos escribir ahora que los campos  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$  provienen de:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

Aquí, el teorema de Helmholtz nos ayudó a caracterizar los campos pero no nos puede ayudar a resolver el problema, ya que para conocer al campo  $\vec{B}$  se necesita conocer al campo  $\vec{E}$  y viceversa, lo cual nos llevaría a un círculo vicioso. El único modo de resolverlos es encontrando la ecuación diferencial que satisfaga los campos electromagnéticos y, por ende, sus funciones potenciales.

Empezando con los campos electromagnéticos, si tomamos el rotacional de la ley de Faraday, tenemos que:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \quad (1.513)$$

lo que sería igual a:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}_f}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.514)$$

Las corrientes de conducción  $\vec{J}_f$ , a su vez, pueden separarse en las corrientes impresas más las corrientes de conducción:

$$\vec{J}_f = \vec{J}_I + \vec{J}_C \quad (1.515)$$

donde las **corrientes impresas** son las creadas por una fuente real (como una batería, un dipolo magnético por el que corre una corriente, etc.) y las **corrientes de conducción** son las generadas en el medio obedeciendo a la Ley de Ohms para medios lineales ( $\vec{J}_C = \sigma \vec{E}$ ).

De este modo, la ecuación 1.514 se puede ver como:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}_I}{\partial t} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.516)$$

y por tanto

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \vec{J}_I}{\partial t} \quad (1.517)$$

El rotacional del rotacional de  $\vec{E}$  también se puede escribir como:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) \quad (1.518)$$

pero

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

Por ende, se puede ver como

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla \left( \frac{\rho_f}{\epsilon} \right) \quad (1.519)$$

por lo que, entonces,

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{E} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -\mu \frac{\partial \vec{J}_I}{\partial t} - \nabla \left( \frac{\rho_f}{\epsilon} \right) \\ \nabla^2 \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= +\mu \vec{J}_I + \nabla \left( \frac{\rho_f}{\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (1.520)$$

Si, además, decimos no hay cargas libres en el medio ( $\bar{\mathbf{J}}_I = \mathbf{0}$  y  $\rho_f = 0$ ), tendríamos que se satisface la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1.521)$$

Estableciendo ahora las ecuaciones para el campo  $\bar{\mathbf{B}}$  de la misma forma que para  $\bar{\mathbf{E}}$ , tenemos que:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \mu \nabla \times \bar{\mathbf{J}}_f + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{\mathbf{E}} \quad (1.522)$$

pero

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

Por lo tanto,

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \mu \nabla \times \bar{\mathbf{J}}_f - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\mathbf{B}} \quad (1.523)$$

Separando de igual manera a  $\bar{\mathbf{J}}_f$  en las corrientes impresas más las corrientes de conducción que obedecen a la ley de Ohms, tendríamos que:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{B}} &= \mu \nabla \times \bar{\mathbf{J}}_I + \mu\sigma \nabla \times \bar{\mathbf{E}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\mathbf{B}} \\ &= \mu \nabla \times \bar{\mathbf{J}}_I - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{B}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (1.524)$$

Pasando los términos del otro lado de la ecuación se obtendría:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{B}} + \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{B}} + \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\mathbf{B}} = \mu \nabla \times \bar{\mathbf{J}}_I \quad (1.525)$$

De la misma forma, si recordamos que:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{B}} = -\nabla^2 \bar{\mathbf{B}} + \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}}) = -\nabla^2 \bar{\mathbf{B}}$$

puesto que  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$ . Por tanto, la ecuación 1.525 quedaría como:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{B}} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times \bar{\mathbf{J}}_I \quad (1.526)$$

Si en el medio no existen fuentes ( $\bar{\mathbf{J}}_I = \mathbf{0}$  y  $\rho_f = 0$ ), entonces se tendría el campo  $\bar{\mathbf{B}}$  satisface la misma ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.527)$$

De esta forma, se puede observar que el campo eléctrico y el campo magnético satisfacen el mismo operador de ecuación de onda, incluso aunque la fuente fuera distinta de cero:

$$\nabla^2 - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Cuando la primera derivada temporal es igual con cero  $\partial/\partial t = 0$ , quedaría lo que se conoce como el *operador D'Alambertiano*:

$$\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square^2 \quad (1.528)$$

Las ecuaciones de onda para los potenciales pueden definirse de la misma forma:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J}_I - \mu\sigma \left( \nabla \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \mu\epsilon \left( \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) \quad (1.529)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J}_I - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma \nabla \phi - \mu\epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

ya que  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Si recordamos que:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$$

entonces

$$-\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu \vec{J}_I - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma \nabla \phi - \mu\epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.530)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_I + \mu\sigma \nabla \phi - \mu\epsilon \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$$

Un problema radica en que en esta ecuación no se pueden separar la función escalar y la vectorial; pero la ecuación anterior se puede escribir así:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_I + \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \mu\sigma \phi + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (1.531)$$

Dejando un poco de lado la función vectorial  $\vec{A}$ , deduzcamos ahora para el potencial escalar  $\phi$ . Este se puede obtener a partir del rotacional de  $\vec{E}$ . El campo  $\vec{E}$ , como se vio en la ecuación 1.512, se puede escribir como:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Sustituyendo este valor de  $\vec{E}$  en la divergencia de  $\vec{E}$  tendríamos que:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_f}{\epsilon} \\ -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\rho_f}{\epsilon} \\ \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} &= -\frac{\rho_f}{\epsilon}\end{aligned}\tag{1.532}$$

De la manera como lo hemos visto, los potenciales escalar y vectorial están relacionados y no se pueden separar. Pero la **condición de Lorentz** define la divergencia de  $\vec{A}$  de forma arbitraria, de tal manera que nos convenga, siendo que:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\sigma\phi + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0\tag{1.533}$$

lo que implicaría que uno escogería aquella función vectorial cuya divergencia sea igual a:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\sigma\phi - \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Al momento de introducir la condición de Lorentz en la ecuación 1.532 se logra que la función potencial que satisface  $\phi$  sea la misma ecuación de onda:

$$\nabla^2 \phi - \mu\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}\tag{1.534}$$

La condición de Lorentz permite elegir cualquier función vectorial que permita la separación de los potenciales y que, al mismo tiempo, satisfagan la misma ecuación de onda. En otras palabras, las funciones potenciales no son únicas; se pueden tener distintas ecuaciones potenciales y, sin embargo, encontrar el mismo campo. Bajo esta condición, uno es libre de seleccionar de este número infinito de funciones vectoriales la que más convenga sin alterar los campos. Un ejemplo de este tipo de transformación es la siguiente:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{A}^* + \nabla\chi \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}^* + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \vec{A}^*\end{aligned}\tag{1.535}$$

puesto que el rotacional de un gradiente es igual a cero.

Sintetizando, en un medio donde no hay fuentes se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

con sus respectivas relaciones constitutivas:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

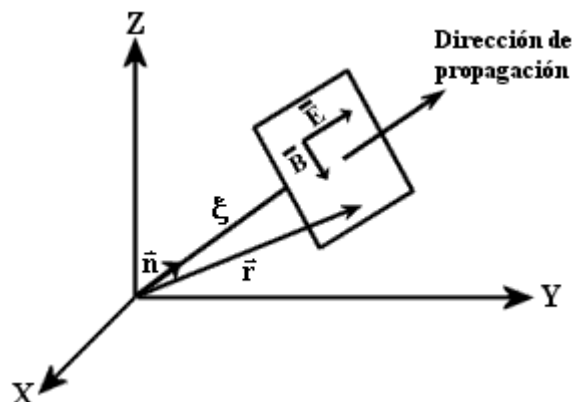
$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

Todas cumplen con la misma ecuación de onda, la cual se puede escribir de forma general como:

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \\ \vec{A} \\ \phi \end{Bmatrix} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \\ \vec{A} \\ \phi \end{Bmatrix} - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \\ \vec{A} \\ \phi \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.536)$$

## ONDAS PLANAS

Cuando hablamos de ondas planas queremos indicar que los campos electromagnéticos los estamos observando desde una zona lejana. La **onda plana** significa, en zonas muy lejanas, que los campos electromagnéticos son coplanares a un plano perpendicular la dirección de propagación. A su vez, las ondas electromagnéticas están contenidas en el plano.



$\xi$  = distancia desde el origen al plano en forma perpendicular.  
 $\vec{n}$  = vector unitario en la dirección de propagación y paralelo a  $\xi$ .  
 $\vec{r}$  = vector de posición a un punto en el plano.

Cuando tenemos esto, decimos que tenemos una propagación o un **frente de onda plana**. En otras palabras, el frente de onda plana es donde están contenidos los campos electromagnéticos. Por otro lado, el campo lejano o campo de radiación, los campos electromagnéticos se pueden tratar como una superposición de frentes de onda plana. Esta es la importancia de estudiar los frentes de onda plana o **F.O.P.** Cuando decimos que el campo es un F.O.P., resulta que la intensidad de los campos electromagnéticos es función exclusivamente de la distancia del origen de la fuente al frente de onda plana:

$$\vec{E}(\xi); \vec{B}(\xi)$$

Esta es una dirección arbitraria. Como ya se ha mencionado, se puede reconstruir cualquier fenómeno electromagnético como una superposición de frentes de onda plana. La pregunta entonces sería, cuando un campo se mueve en una dirección arbitraria, ¿cómo cambiarían las ecuaciones de campo de una función que depende de una variable espacial?

En general, el rotacional de  $\vec{E}$  sería el siguiente:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\xi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{E}_x & \mathbf{E}_y & \mathbf{E}_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\xi) = \mathbf{i} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} \right) \quad (1.537)$$

Las derivadas  $\partial \mathbf{E}_z / \partial y$  y  $\partial \mathbf{E}_y / \partial z$ , donde  $\mathbf{E}_z$  es la proyección, se pueden ver como:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_z(\xi)}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}_z(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_y(\xi)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{E}_y(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

El vector  $\bar{\mathbf{n}}$  es un vector unitario paralelo a  $\xi$ . Por lo tanto,  $\xi$  sería igual a:

$$\xi = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{n}_x \mathbf{x} + \mathbf{n}_y \mathbf{y} + \mathbf{n}_z \mathbf{z} \quad (1.538)$$

donde  $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$  son los cosenos directores del vector unitario. De esta forma se tendría que:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \mathbf{n}_y \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \mathbf{n}_x$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \mathbf{n}_z$$

Por lo tanto, la ecuación 1.537 se transformaría en:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\xi) = \mathbf{i} \left( \mathbf{n}_y \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial \xi} - \mathbf{n}_z \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial \xi} \right) - \mathbf{j} \left( \mathbf{n}_x \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial \xi} - \mathbf{n}_z \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial \xi} \right) + \mathbf{k} \left( \mathbf{n}_x \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial \xi} - \mathbf{n}_y \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial \xi} \right) \quad (1.539)$$

Resulta, pues, que el rotacional  $\nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\xi)$  se puede describir como:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\xi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{n}_x & \mathbf{n}_y & \mathbf{n}_z \\ \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial \xi} \end{vmatrix}$$



lo cual sería igual a un producto cruz, donde:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{E}(\xi) &= \vec{n} \times \left( \frac{\partial E_x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial E_y}{\partial \xi} \vec{j} + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \vec{k} \right) \\
 &= \vec{n} \times \frac{\partial}{\partial \xi} (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) \\
 &= \vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi}
 \end{aligned} \tag{1.540}$$

Esto nos dice que el rotacional de una función vectorial que depende exclusivamente de una variable es igual a:

$$\nabla \times \vec{F}(\xi) = \vec{n} \times \frac{\partial \vec{F}(\xi)}{\partial \xi} \tag{1.541}$$

lo que también significaría que la divergencia sería igual a

$$\nabla \cdot \vec{F}(\xi) = \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{F}(\xi)}{\partial \xi} \tag{1.542}$$

y que

$$\nabla^2 \vec{F}(\xi) = \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi} \vec{F}(\xi) \tag{1.543}$$

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir así:

$$\vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}(\xi)}{\partial \xi} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.544}$$

$$\vec{n} \times \frac{\partial \vec{B}(\xi)}{\partial \xi} = \mu \sigma \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.545}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{E}(\xi)}{\partial \xi} = 0 \tag{1.546}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{B}(\xi)}{\partial \xi} = 0 \tag{1.547}$$

Si realizamos el producto punto de la ecuación 1.544 con el vector  $\vec{n}$ , tenemos que:

$$\vec{n} \cdot \left( \vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}(\xi)}{\partial \xi} \right) = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.548)$$

Realizando una permuta podemos obtener lo siguiente:

$$\vec{n} \cdot \left( \vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}(\xi)}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial \vec{E}(\xi)}{\partial \xi} \cdot \vec{n} \times \vec{n} = 0 \quad (1.549)$$

ya que el rotacional de dos vectores paralelos es igual a cero; por lo tanto:

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.550)$$

Multiplicando a la ecuación 1.550 por  $d\mathbf{t}$  obtendríamos:

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\mathbf{t} = 0 \quad (1.551)$$

Multiplicando ahora a la ecuación 1.547 por  $d\xi$  obtendríamos que:

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial \xi} d\xi = 0 \quad (1.552)$$

Si sumamos las ecuaciones 1.551 y 1.552 resultaría que:

$$\vec{n} \cdot \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\mathbf{t} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial \xi} d\xi \right) = 0 \quad (1.553)$$

Pero ésta es la diferencial total, donde  $\vec{B}$  depende tanto del tiempo como de la distancia  $\xi$ , por lo que puede describir como:

$$\vec{n} \cdot d\vec{B} = 0 \quad (1.554)$$

Esto se puede traducir en que, en un frente de onda plana, no puede haber un campo magnético en la dirección de la propagación, ya que  $\vec{B}$  iría perpendicular a esta dirección; en otras palabras, la ecuación 1.554 implica que no puede existir una componente de  $\vec{B}$  perpendicular a la dirección de propagación  $\vec{n}$ .

Enfocándonos ahora en el rotacional de  $\vec{B}$ , si multiplicamos la ecuación 1.545 por  $\vec{n}$ , tendremos que:

$$\vec{n} \cdot \left( \vec{n} \times \frac{\partial \vec{B}(\xi)}{\partial \xi} \right) = \vec{n} \cdot \left( \mu \sigma \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.555)$$

Pero sabemos que

$$\vec{n} \cdot \left( \vec{n} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial \xi} \cdot \vec{n} \times \vec{n} = 0 \quad (1.556)$$

lo que quiere decir que:

$$\vec{n} \cdot \left( \mu \sigma \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.557)$$

Si

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = E\xi \quad (1.558)$$

donde  $E\xi$  es la componente del campo eléctrico en la dirección de propagación, se tiene entonces que:

$$\mu \sigma E\xi + \mu \varepsilon \frac{\partial E\xi}{\partial t} = 0 \quad (1.559)$$

y, a su vez, que

$$\frac{\partial E\xi}{\partial t} + \frac{\mu \sigma}{\mu \varepsilon} E\xi = 0$$

Esta última es una ecuación diferencial de primer orden cuya solución sería:

$$E\xi = A e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} \quad (1.560)$$

Esto significa que la única componente del campo eléctrico que puede existir en la dirección de propagación es una componente estacionaria que se disiparía rápidamente con el tiempo en el medio, lo que no es estrictamente hablando un fenómeno electromagnético. Por lo tanto, tampoco hay una componente del campo electromagnético en la dirección de propagación del fenómeno. Se ha demostrado de esta forma que los campos electromagnéticos son campos transversales a la dirección de propagación.

## REPRESENTACIÓN FASORIAL

Se desea representar un fenómeno electromagnético, i.e. un campo eléctrico, que varía en una forma sinusoidal con respecto al tiempo  $t$  y a una cierta dirección  $\xi$ , por lo que se podría tener lo siguiente:

$$\vec{E}(t, \xi) = E(\xi) \cos(\omega t - \alpha \xi) \quad (1.561)$$

donde  $\omega = 2\pi f$ . Cuando tenemos un campo que varía de esta forma, como un coseno o un seno donde  $f$  es una constante, entonces se dice que se tiene una *onda monocromática*.

Si al  $\cos(\omega t - \alpha \xi)$  se le representa como un número complejo:

$$\cos(\omega t - \alpha \xi) = \Re_e \left( e^{i(\omega t - \alpha \xi)} \right) \quad (1.562)$$

donde  $E(\xi)$  podría ser también un número complejo, entonces un fenómeno temporal se podría representar en general de la siguiente forma:

$$\vec{E}(t, \xi) = \Re_e \left( E(\xi) e^{i(\omega t - \alpha \xi)} \right) \quad (1.563)$$

Por convención y para facilitar la ecuación, la componente real del número complejo se deja de lado, por lo que el fenómeno de onda temporal se puede representar exclusivamente como:

$$\vec{E}(t, \xi) = E(\xi) e^{i\alpha \xi} e^{i\omega t} \quad (1.564)$$

También se puede suprimir momentáneamente el término  $e^{i\omega t}$  bajo el conocimiento de que este siempre va a existir, integrándolo de vuelta a la ecuación al final de la operación, por lo que se tendría que:

$$\vec{E}(t, \xi) = E(\xi) e^{i\alpha \xi} \vec{n} \quad (1.565)$$

Cuando se tiene una ecuación de este tipo se dice que se tiene una *representación fasorial*, haciendo referencia a una onda monocromática donde  $f$  se mantiene constante. Esta representación es similar a aplicar la transformada de Fourier del campo eléctrico y su inversa. La ecuación de onda en una representación fasorial se podría escribir de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \vec{E} - i\omega\mu\sigma\vec{E} - \mu\epsilon\omega^2\vec{E} &= 0 \\
\nabla^2 \vec{E} - (-\mu\epsilon\omega^2 + i\omega\mu\sigma)\vec{E} &= 0 \\
\nabla^2 \vec{E} - (\mu\epsilon\omega^2 - i\omega\mu\sigma)\vec{E} &= 0
\end{aligned} \tag{1.566}$$

De la misma forma, en una representación fasorial, las ecuaciones de Maxwell se modifican de tal manera que ahora se pueden escribir así:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -i\omega\vec{B} \\
\nabla \times \vec{B} &= \sigma\vec{E} + i\omega\epsilon\vec{E} \\
\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\
\vec{E} &= -\nabla\phi - i\omega\vec{A} \\
\phi &= \frac{-\nabla \cdot \vec{A}}{\mu\sigma + i\omega\mu\epsilon}
\end{aligned} \tag{1.567}$$

y la ecuación de onda puede quedar también como:

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \\ \vec{A} \\ \phi \end{Bmatrix} + (\mu\epsilon\omega^2 - i\omega\mu\sigma) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \\ \vec{A} \\ \phi \end{Bmatrix} = 0 \tag{1.568}$$

Al hacer esto, automáticamente se está trabajando en el dominio de las frecuencias, por lo que la representación de un fenómeno temporal es la superposición de diversas ondas monocromáticas de diferentes frecuencias. Por otro lado, se había visto que la condición de Lorentz (ecuación 1.533), la cual nos permitía separar las funciones potenciales, estaba dada por:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\sigma\phi = 0$$

En representación fasorial en el dominio de las frecuencias se tendría que  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = i\omega\phi$ ; por lo tanto, la condición de Lorentz se transformaría en:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} + i\mu\epsilon\omega\phi + \mu\sigma\phi &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{A} + (\mu\sigma + i\mu\epsilon\omega)\phi &= 0\end{aligned}\tag{1.569}$$

Despejando esta ecuación es como podemos encontrar que  $\phi$  es igual a:

$$\phi = \frac{-\nabla \cdot \vec{A}}{\mu\sigma + i\mu\epsilon\omega}\tag{1.570}$$

Esto nos indica que sólo tenemos la necesidad de resolver un solo potencial y no dos, ya que uno está dado por el otro según la condición de Lorentz.

Por facilidad se tomará la ecuación de onda del campo eléctrico, dada por:

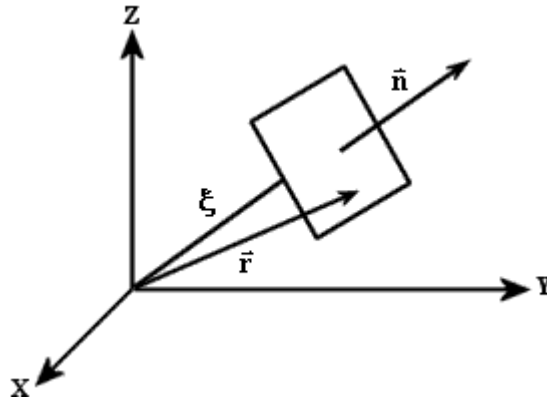
$$\nabla^2 \vec{E} - (\mu\epsilon\omega^2 - i\omega\mu\sigma)\vec{E} = 0$$

De esta ecuación se obtiene que:

$$\gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 - i\omega\mu\sigma\tag{1.572}$$

donde a  $\gamma^2$  se le conoce como la *constante de propagación* debido a que depende de los parámetros electromagnéticos del medio.

Se recordará que el frente de onda plano va en cierta dirección, donde  $\xi$  es la distancia perpendicular al frente de onda plano y  $\vec{r}$  es el vector de posición a un punto del plano.



Espacialmente, el campo eléctrico depende en el espacio de la distancia  $\xi$ , por lo que el operador laplaciano se va a expresar como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\tag{1.573}$$

y la ecuación de onda como una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \xi^2} + \gamma^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.574)$$

De acuerdo con lo anterior,  $\mathbf{E}(\xi)$  se puede expresar exclusivamente como:

$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{E}_0(\xi) e^{i\gamma\xi} \quad (1.575)$$

Si  $\bar{\mathbf{n}}$  es el vector normal al plano y  $\bar{\mathbf{r}}$  es el vector de posición a un punto en el plano, entonces  $\xi = \bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ , por lo que el fenómeno de onda se puede representar como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\xi) &= \mathbf{E}_0(\xi) e^{-i\gamma \bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{n}}} \\ \mathbf{E}(\xi) &= \mathbf{E}_0(\xi) e^{-i\gamma \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{r}}} \end{aligned} \quad (1.576)$$

ya que el producto punto es conmutativo. Pero  $\gamma \bar{\mathbf{n}} = \bar{\boldsymbol{\gamma}}$ , donde  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$  recibe el nombre de *vector de propagación*; entonces:

$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{E}_0(\xi) e^{-i\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\mathbf{r}}} \quad (1.577)$$

Obviamente, el producto punto del vector de propagación por el vector de posición daría las componentes en  $\mathbf{X}$ , en  $\mathbf{Y}$  y en  $\mathbf{Z}$  del vector de propagación, dadas para una onda que se encuentra orientada arbitrariamente en el espacio:

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\mathbf{r}} = \gamma_x \mathbf{x} + \gamma_y \mathbf{y} + \gamma_z \mathbf{z}$$

Representada vectorialmente, la ecuación 1.577 se puede ver así:

$$\vec{\mathbf{E}}(\xi) = \mathbf{E}_0(\xi) e^{-i\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\mathbf{r}}} \bar{\mathbf{n}}_e \quad (1.578)$$

donde  $\bar{\mathbf{n}}_e$  es el vector unitario en la dirección en que se encuentra dirigido el campo eléctrico.

Sabemos que  $\bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \bar{\mathbf{r}} = \xi \gamma$ . Cuando se tiene que  $\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -i\omega \vec{\mathbf{B}}$ , entonces se puede decir que  $\vec{\mathbf{B}}$  es igual a:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{-i\omega} \nabla \times \vec{\mathbf{E}} \quad (1.579)$$

Pero sabemos que  $\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{n}} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial \xi}$ ; por lo tanto:

$$\vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi} = \vec{n} \times \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \vec{E}(\xi) e^{-i \xi \gamma} \right) \right) \quad (1.580)$$

Esto sería equivalente a:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -i \gamma \vec{n} \times \vec{E}_0(\xi) e^{-i \xi \gamma} \\ \nabla \times \vec{E} &= -i \gamma \vec{n} \times \vec{E} \end{aligned} \quad (1.581)$$

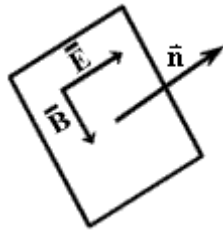
Sustituyendo esta equivalencia del rotacional en la ecuación 1.579, tendríamos que  $\vec{B}$  sería igual a:

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{\omega} \vec{n} \times \vec{E} \quad (1.582)$$

El producto punto de  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$  daría igual a:

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{B} &= \vec{E} \cdot \frac{\gamma}{\omega} \vec{n} \times \vec{E} \\ &= \frac{\gamma}{\omega} \vec{E} \cdot \vec{n} \times \vec{E} \\ &= \frac{\gamma}{\omega} \vec{E} \cdot \vec{E} \times \vec{n} \\ &= \frac{\gamma}{\omega} \vec{n} \cdot \vec{E} \times \vec{E} = 0 \end{aligned} \quad (1.583)$$

Esto nos dice que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es perpendicular al campo magnético  $\vec{B}$ .



En otras palabras, cuando un frente de onda plana va viajando en la dirección  $\vec{n}$ , los campos electromagnéticos son perpendiculares a la dirección de propagación, pero también son perpendiculares entre sí. Indudablemente se tendría que el módulo de los campos sería igual al vector de la dirección de propagación:

$$\frac{|\vec{B} \times \vec{E}|}{|\vec{B} \times \vec{E}|} = \vec{n}$$



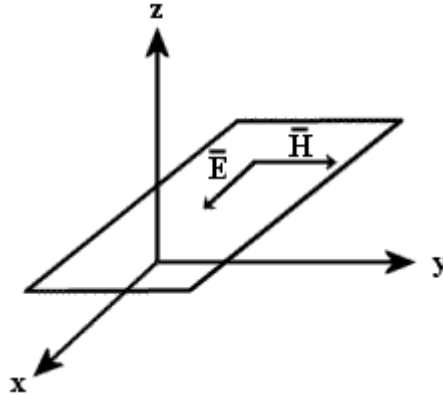
A su vez, a  $\vec{H}$  también se le puede encontrar de forma similar:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{H} &= \frac{\gamma}{\mu \omega} \vec{n} \times \vec{E}\end{aligned}\quad (1.584)$$

Regresando al campo eléctrico, se vio que éste se puede expresar en forma general como:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\gamma z}$$

Para facilitar la comprensión del problema, supongamos que la dirección de propagación va en dirección del eje  $Z$ . Supongamos también que el campo  $\vec{E}$  va en la dirección del eje  $X$  y que, por lo tanto, el campo  $\vec{H}$  va en dirección del eje  $Y$ .



A continuación se va a definir una serie de parámetros:

- a) Constante de fase y Constante de atenuación
- b) Skin depth (profundidad nominal)
- c) Longitud de onda
- d) Velocidad de fase y Velocidad de grupo
- e) Impedancia y
- f) Polarización

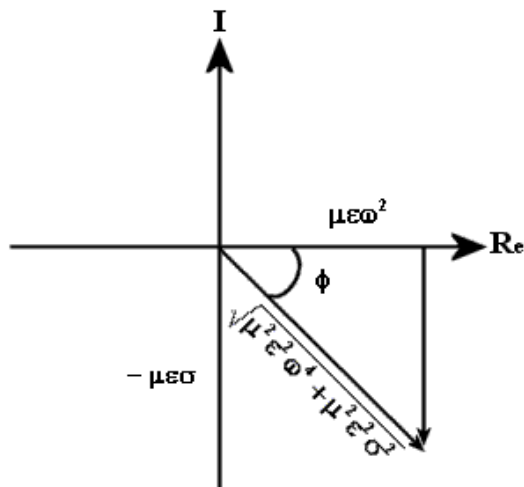
(a) El campo eléctrico ( $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\gamma z}$ ) depende de la raíz cuadrada de la constante de propagación:

$$\gamma = \sqrt{\gamma^2} = \sqrt{\mu \epsilon \omega^2 - i \omega \mu \sigma} \quad (1.585)$$

La raíz cuadrada de un número complejo, siendo ésta una función multivaluada, se obtiene representándola por su módulo y su ángulo de fase:

$$\gamma^2 = |\gamma^2| e^{-i\phi} \Rightarrow \gamma = \sqrt{|\gamma^2|} e^{-i\phi/2} \quad (1.586)$$

De esta forma, el vector complejo se puede visualizar del siguiente modo:



De acuerdo con lo anterior, el módulo de la constante se puede obtenerse así:

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \sqrt{\mu^2 \epsilon^2 \omega^4 + \omega^2 \mu^2 \sigma^2} \\ &= \mu \omega \sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2} \\ \sqrt{|\gamma^2|} &= \sqrt{\mu \omega \sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\gamma$  sería igual a:

$$\gamma = \pm \sqrt{|\gamma^2|} [\cos \phi / 2 - i \sin \phi / 2] \quad (1.587)$$

El coseno y el seno son iguales a:

$$\cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{2}} \quad \sin \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{2}}$$

Si

$$\cos \phi = \frac{\mu \epsilon \omega^2}{\mu \omega \sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}} = \frac{\epsilon \omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}$$

entonces

$$\cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\epsilon \omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}}}$$

y

$$\operatorname{sen} \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon \omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}}$$

De este modo se tendría que  $\gamma$  es igual a:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\mu \omega}{2} \sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}} \left[ \sqrt{1 + \frac{\epsilon \omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}} - i \sqrt{1 - \frac{\epsilon \omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}} \right] \quad (1.588)$$

Si además se tiene que:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{\epsilon \omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}} &= \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2} + \epsilon \omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}} \\ \text{y} \\ \sqrt{1 - \frac{\epsilon \omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}} &= \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2} - \epsilon \omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2}}} \end{aligned}$$

Entonces  $\gamma$  se puede representar como:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\mu \omega}{2}} \left[ \sqrt{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2} + \epsilon \omega} - i \sqrt{\sqrt{\omega^2 \epsilon^2 + \sigma^2} - \epsilon \omega} \right] \quad (1.589)$$

A partir de esta última ecuación, se van a definir dos constantes  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{\mu \omega}{2}} \sqrt{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2 \omega^2} + \epsilon \omega} \\ \beta &= \sqrt{\frac{\mu \omega}{2}} \sqrt{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2 \omega^2} - \epsilon \omega} \end{aligned} \quad (1.590)$$

donde  $\alpha$  es la **constante de fase** (la responsable del retraso de la onda) y  $\beta$  es la **constante de atenuación** (la responsable de que la energía se disipe). De acuerdo con esto, el campo eléctrico se puede definir como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i \gamma z} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\alpha - i\beta)z} = \mathbf{E}_0 e^{-\beta z} e^{-i \alpha z}$$

Si ahora integramos el término  $e^{-i \omega t}$  que se había dejado de lado en un principio, se tiene que el fenómeno de onda se puede representar como:

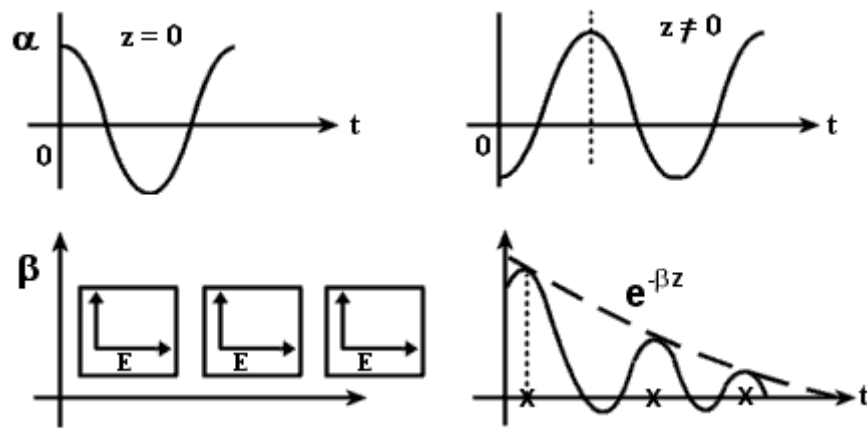
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\beta z} e^{-i \alpha z} e^{-i \omega t} \quad (1.591)$$

Añadiendo posteriormente la parte real del número complejo se tiene que:

$$\mathbf{E} = \left( \mathbf{E}_0 e^{-\beta z} e^{-i\alpha z} e^{+i\omega t} \right) \quad (1.592)$$

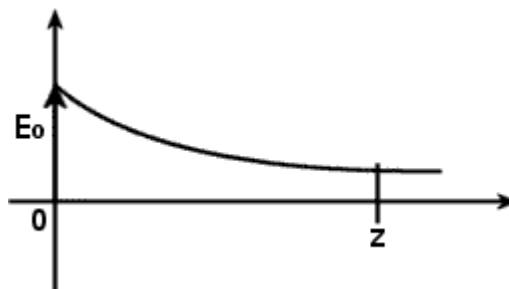
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\beta z} \cos(\omega t - \alpha z)$$

Como se vio,  $\beta$  es la responsable de disminuir la amplitud original de la onda conforme va avanzando el frente de onda en la dirección  $\mathbf{Z}$ ; al mismo tiempo que avanza en esta dirección, proporciona un retraso en la fase. Por lo tanto, para  $\mathbf{Z} = 0$ , en un punto del espacio proporciona un desfase con respecto al origen de la onda. Es por ello que a  $\alpha$  se le denomina la constante de fase, ya que da un valor de retraso constante.



La constante  $\beta$  se puede ver de la siguiente manera. Se tiene que los frentes de onda plana van avanzando en la dirección  $\mathbf{Z}$ . Si midiéramos el campo eléctrico para un mismo tiempo, veríamos que el campo eléctrico se comporta como una curva de decaimiento exponencial de la onda, el cual se debe a la constante de atenuación  $\beta$ .

(b) Un frente de onda plana que se va propagando en la dirección  $\mathbf{Z}$  tiene en el origen una amplitud inicial  $\mathbf{E}_0$ . Conforme se va desplazando en  $\mathbf{Z}$ , la amplitud original de la onda va disminuyendo. Para una cierta  $\mathbf{Z}$ , el valor de la amplitud de la onda va a ser aproximadamente del 36-37 % de la amplitud original. Cuando se alcanza esa  $\mathbf{Z}$ , se dice entonces que se tiene una skin depth.



Es así como la profundidad nominal o *skin depth* se define como la profundidad que recorre la onda hasta que ésta alcanza el 37% de su amplitud original. Este porcentaje se alcanza cuando el exponente de  $e$  es igual con uno:

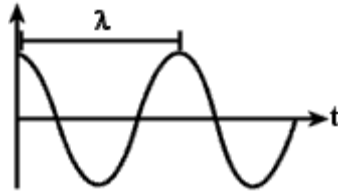
$$e^{-1} = 0.307$$

Para que el exponente sea uno, significaría que la constante de atenuación por  $z$  debe ser igual a uno ( $\beta z = 1$ ). Por lo tanto, la skin depth ( $\delta$ ) va a ser la inversa de la constante de atenuación:

$$\delta = \frac{1}{\beta}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}} \sqrt{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2\omega^2} - \epsilon\omega}} \quad (1.593)$$

Una onda que se desplaza en la dirección  $Z$  se puede visualizar de la siguiente forma:



(c) La *longitud de onda* ( $\lambda$ ) es cuando un mismo valor de oscilación se repite espacialmente; es decir, es la distancia que existe entre las crestas de las ondas y/o la longitud entre valles. Para que en una onda  $\cos(\omega t - \alpha z)$  dos crestas se repitan en  $Z$ ,  $\alpha z = 2\pi$  (donde  $z$  es la longitud de onda); cuando esto sucede, entonces la longitud de onda puede expresarse como:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{V_f}} = \frac{2\pi}{\omega} V_f \quad (1.594)$$

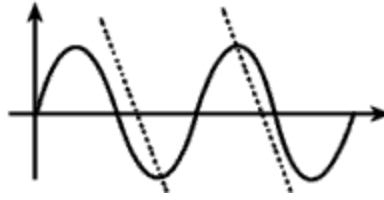
donde  $V_f$  es la velocidad de fase; por ende, también puede verse como:

$$\lambda = \frac{1}{f} V_f \quad (1.595)$$

(d) La fase de la onda está dada por:

$$\text{fase} = \phi = \omega t - \alpha z = \text{constante} \quad (1.596)$$

Si cuando el frente de onda plana se está moviendo, nosotros tomáramos los puntos en el espacio donde la onda tiene el mismo valor de fase (planos de igual fase), ¿a qué velocidad se debe de mover la onda para que la fase se repita?



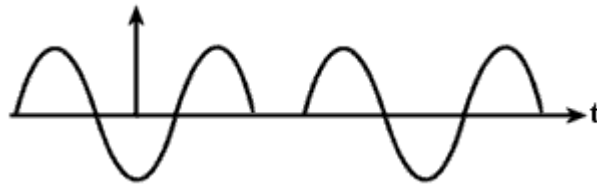
La velocidad de fase  $V_f$  está dada por:

$$\frac{d\phi}{dt} = V_f = \omega - \alpha \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\alpha} = V_f$$

$$V_f = \omega \quad (1.597)$$

De acuerdo con esto, podemos ver que la velocidad de fase depende de los parámetros electromagnéticos. La **velocidad de grupo** es distinta a la velocidad de fase y está relacionada a cómo se desplaza la energía en el medio. Por ejemplo, cuando se detona una carga de dinamita en el suelo, se libera una energía impulsiva en el tiempo  $t = 0$ . Esta va a empezar a viajar en el tiempo a cierta velocidad. A la velocidad a la que se desplaza esta energía es a lo que se le denomina velocidad de grupo.



En electromagnetismo se puede dar una situación similar con el radar de penetración terrestre, el cual envía un pulso de energía al terreno que se ve reflejada cuando choca con un cuerpo o se da cambio de medios. La velocidad de fase y la velocidad de grupo están relacionadas de la siguiente manera:

$$\frac{V_f}{V_g} = 1 - \alpha \frac{dv_f}{d\omega} \quad (1.598)$$

De esta forma podemos observar que la velocidad de grupo está más relacionada al aspecto temporal mientras que la velocidad de fase se refiere al dominio de la frecuencia. La velocidad de grupo nunca puede ser mayor a la velocidad de la luz mientras que la

velocidad de fase si lo puede ser. Sólo en un medio sin pérdidas la velocidad de grupo y la de fase pueden ser iguales.

(e) Como habíamos visto, para el campo eléctrico y el campo magnético no se necesitan resolver dos ecuaciones distintas. El rotacional de  $\vec{E}$  se puede expresar de dos formas, como:

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\vec{B} = -i\omega\mu\vec{H}$$

y como

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi}$$

Por lo tanto, a  $\vec{H}$  se le podía ver como:

$$\vec{H} = -\frac{1}{i\omega\mu} \vec{n} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi}$$

Supongamos que se tiene una onda que viaja en la dirección del eje  $Z$  y que sólo tiene la componente en  $\vec{i}$ :

$$\vec{E} = E_0 e^{-i\gamma z} \vec{i} \quad (1.599)$$

Entonces la derivada con respecto a  $\xi$  se transforma en:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [E_0 e^{-i\gamma z} \vec{i}] = -i\gamma E_0 e^{-i\gamma z} \vec{i}$$

Así, el campo magnético se puede expresar como:

$$\vec{H} = \frac{\gamma}{\omega\mu} \vec{n} \times \vec{E} \quad (1.600)$$

Si además  $\vec{n} \times \vec{E} = |\vec{E}| \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ , entonces  $\vec{H}$  se transforma en:

$$\vec{H} = \frac{\gamma}{\omega\mu} |\vec{E}| \vec{j} \quad (1.601)$$

$$\vec{H} = \frac{\gamma}{\omega\mu} E_0 e^{-i\gamma z} \vec{j}$$

La *impedancia intrínseca* ( $Z$ ) es la relación entre los módulos del campo eléctrico y el campo magnético:

$$Z = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} \quad (1.602)$$

que sería igual a:

$$Z = \frac{E_0 e^{-i\gamma z} \mathbf{j}}{\frac{\gamma}{\omega\mu} E_0 e^{-i\gamma z} \mathbf{j}} = \frac{\omega\mu}{\gamma}$$

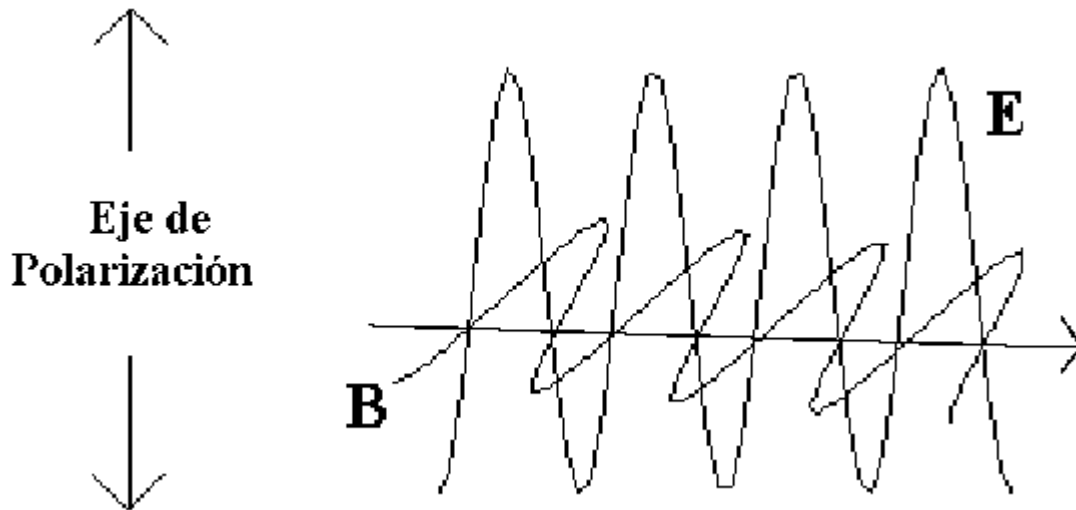
De esta forma se puede ver que la impedancia intrínseca puede ser un número complejo (i.e. en medios conductores) y depende de los parámetros del medio:

$$Z = \frac{\omega\mu}{\gamma} \quad (1.603)$$

De acuerdo con esto, el campo magnético se puede expresar como:

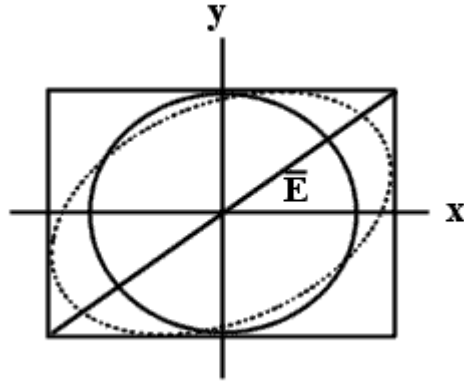
$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z} \bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{E}} \quad (1.604)$$

(f) Cuando una onda monocromática está viajando en el espacio y avanza en el tiempo, se puede visualizar de la siguiente forma:



Observando en la dirección del eje de polarización se puede ver que, por ejemplo, el campo eléctrico va girando a modo de espiral conforme avanza en el tiempo. Si proyectáramos en el plano **XY** la figura geométrica que describe en su avance, un campo puede presentar tres tipos de formas: una línea, una elipse o un círculo.





Dependiendo de la figura geométrica que describa, es el tipo de polarización que se presenta: lineal, elíptica o circular. La polarización elíptica es la más común. Así se puede decir que el campo eléctrico total se puede observar con una componente en **X** y una en **Y**:

$$\vec{E} = E_{0X} \vec{i} + E_{0Y} \vec{j} \quad (1.605)$$

Pero en el momento en que se empieza a observar el campo eléctrico, éste ya tiene cierto tiempo de propagarse, por lo que tendría cierto desfase; de esta manera, las componentes en **X** y en **Y** se pueden representar como su amplitud en **1** y en **2**, respectivamente, con su correspondiente ángulo de fase ( $\phi_1$  y  $\phi_2$ ):

$$E_{0X} = E_1 e^{i\phi_1}$$

$$E_{0Y} = E_2 e^{i\phi_2}$$

De esta forma se tendría que el fenómeno del campo eléctrico se puede describir así:

$$\vec{E} = (E_1 e^{i\phi_1} \vec{i} + E_2 e^{i\phi_2} \vec{j}) e^{-i\gamma z} \cdot e^{+i\omega t} \quad (1.606)$$

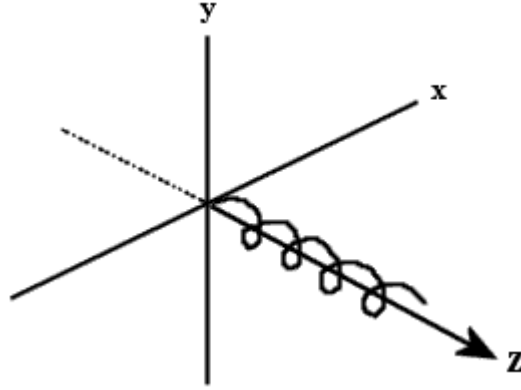
Bajo este concepto, las componentes **X** y **Y** del campo eléctrico se pueden escribir como:

$$E_X = E_1 \cos(\omega t - \alpha z + \phi_1) \quad (1.607)$$

$$E_Y = E_2 \cos(\omega t - \alpha z + \phi_2)$$

Así, la descripción del campo total (vista como el módulo del vector) depende del valor de las amplitudes de sus componentes.

La ecuación de la polarización elíptica puede desarrollarse de la siguiente forma. Como se dijo anteriormente, al ir el campo eléctrico evolucionando en el tiempo, va trazando en el plano **XY** la forma de una elipse.



Si

$$\cos^{-1}\left(\frac{E_x}{E_1}\right) = \omega t - \alpha z + \varphi_1$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{E_y}{E_2}\right) = \omega t - \alpha z + \varphi_2$$

entonces:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(-\omega t + \alpha z + \cos^{-1}\left(\frac{E_y}{E_2}\right)\right) - \left(-\omega t + \cos^{-1}\left(\frac{E_x}{E_1}\right)\right) \quad (1.608)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \cos^{-1}\left(\frac{E_y}{E_2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{E_x}{E_1}\right)$$

donde  $\Delta\varphi$  es la diferencia en la fase. Si además  $E_x = E_1 \cos \varphi_1$  y  $E_y = E_2 \cos \varphi_2$ , entonces:

$$\cos \varphi_1 = \frac{E_x}{E_1} \quad (1.609)$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{E_y}{E_2}$$

Esto nos permitiría realizar lo siguiente:

$$\cos(\Delta\varphi) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1$$

$$\cos(\Delta\varphi) = \frac{E_y}{E_2} \frac{E_x}{E_1} + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \quad (1.610)$$

Pero

$$\text{sen}\varphi_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2}$$

$$\text{sen}\varphi_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2}$$

Por lo tanto,

$$\cos(\Delta\varphi) = \frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2} \frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1} + \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2} \quad (1.611)$$

Elevando esta ecuación al cuadrado se tendría:

$$\begin{aligned} \cos^2(\Delta\varphi) &= \left( \frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2} \frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1} + \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2} \right)^2 \\ &= \frac{\mathbf{E}_y^2}{\mathbf{E}_2^2} \frac{\mathbf{E}_x^2}{\mathbf{E}_1^2} + \frac{2\mathbf{E}_y\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2} + \left(1 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2\right) \\ &= \frac{\mathbf{E}_y^2\mathbf{E}_x^2}{\mathbf{E}_2^2\mathbf{E}_1^2} + 1 - \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2 \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2 + \frac{2\mathbf{E}_y\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2} \end{aligned}$$

Pasando el 1 del otro lado de la ecuación se tendría momentáneamente que:

$$\begin{aligned} \cos^2(\Delta\varphi) - 1 &= 2 \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2 \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2 + \frac{2\mathbf{E}_y\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2} \\ &= 2 \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2 \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1}\right)^2 + \frac{2\mathbf{E}_y\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1} \text{sen}\varphi_2 \text{sen}\varphi_1 \end{aligned} \quad (1.612)$$

Recordando la ecuación 1.610, tendríamos que:

$$\cos(\Delta\varphi) = \frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2} \frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1} + \text{sen}\varphi_2 \text{sen}\varphi_1$$

$$\cos(\Delta\varphi) \frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_2} \frac{\mathbf{E}_x}{\mathbf{E}_1} = \text{sen}\varphi_2 \text{sen}\varphi_1$$

por lo que:

$$\frac{2E_Y E_X}{E_2 E_1} \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 = \frac{2E_Y E_X}{E_2 E_1} \cos(\Delta \varphi) - \frac{2E_Y^2 E_X^2}{E_2^2 E_1^2}$$

De esta forma se tendría que:

$$\begin{aligned} \cos^2(\Delta \varphi) - 1 &= 2 \left( \frac{E_X}{E_1} \right)^2 \left( \frac{E_Y}{E_2} \right)^2 - \left( \frac{E_Y}{E_2} \right)^2 - \left( \frac{E_X}{E_1} \right)^2 + \frac{2E_Y E_X}{E_2 E_1} \cos \Delta \varphi - 2 \left( \frac{E_X}{E_1} \right)^2 \left( \frac{E_Y}{E_2} \right)^2 \\ &= - \left( \frac{E_Y}{E_2} \right)^2 - \left( \frac{E_X}{E_1} \right)^2 + \frac{2E_Y E_X}{E_2 E_1} \cos \Delta \varphi \end{aligned} \quad (1.613)$$

Pero si

$$\cos^2 \Delta \varphi + \sin^2 \Delta \varphi = 1$$

entonces

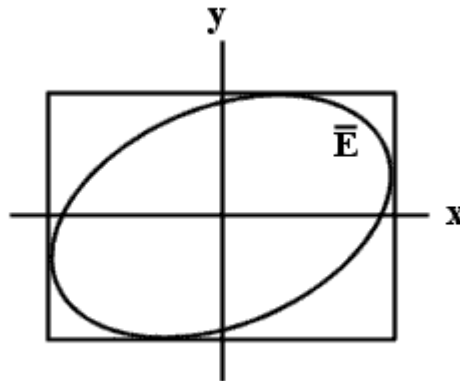
$$\cos^2 \Delta \varphi - 1 = -\sin^2 \Delta \varphi$$

Por lo tanto,

$$\sin^2(\Delta \varphi) = \left( \frac{E_Y}{E_2} \right)^2 + \left( \frac{E_X}{E_1} \right)^2 - \frac{2E_Y E_X}{E_2 E_1} \cos \Delta \varphi \quad (1.614)$$

donde  $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Esta última representa la ecuación de una elipse escrita en coordenadas polares. La **polarización elíptica** se da cuando existe una diferencia de fase entre las componentes planares del campo eléctrico. Visto desde el plano del frente de onda, la onda formaría la siguiente trayectoria.



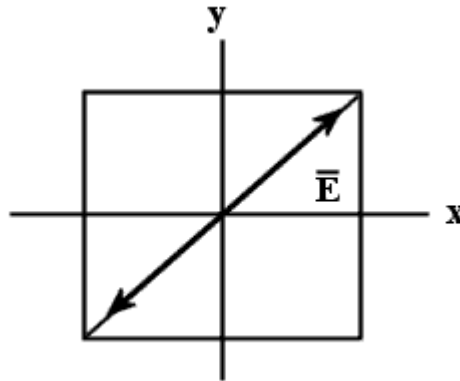
Si la diferencia de ángulo es igual a cero ( $\Delta \varphi = 0$ ), entonces se tendría que la ecuación es:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{E_Y}{E_2}\right)^2 + \left(\frac{E_X}{E_1}\right)^2 - \frac{2E_Y E_X}{E_2 E_1} &= 0 \\
 \left(\frac{E_X}{E_1} - \frac{E_Y}{E_2}\right)^2 &= 0 \\
 \frac{E_X}{E_1} &= \frac{E_Y}{E_2}
 \end{aligned}
 \tag{1.615}$$

La ecuación 1.615 a representaría una *polarización lineal*. Si

$$E_Y = \frac{E_2}{E_1} E_X$$

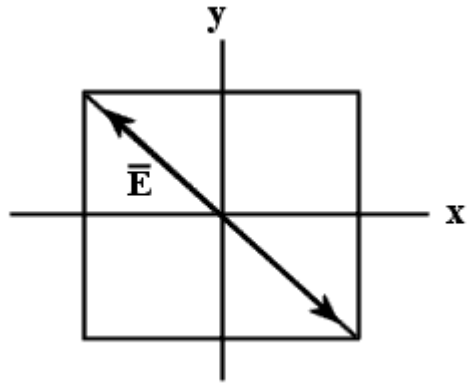
entonces se puede ver la existencia de una dependencia lineal de la función. Si observáramos desde el frente de onda plana, en el plano **XY**, el campo eléctrico describiría una trayectoria lineal.



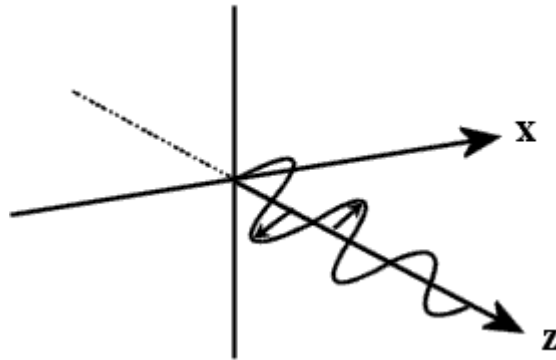
Si la diferencia de ángulos fuera de  $\Delta\phi = \pi$ , se obtendría la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{E_X}{E_1} + \frac{E_Y}{E_2}\right)^2 &= 0 \\
 \frac{E_X}{E_1} &= -\frac{E_Y}{E_2} \\
 E_Y &= -\frac{E_2}{E_1} E_X
 \end{aligned}
 \tag{1.616}$$

Esto nos daría como resultado una polarización lineal que se mueve en sentido contrario a la anterior:



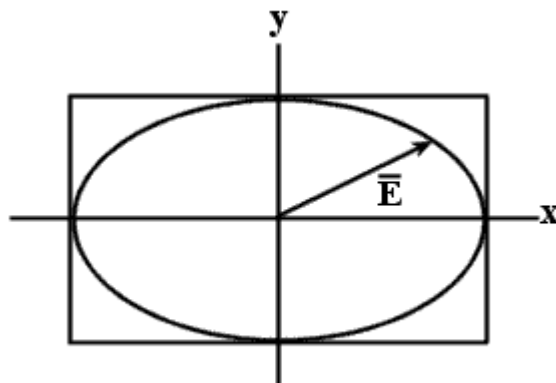
Si visualizáramos el movimiento de la onda en tres dimensiones, se vería así:



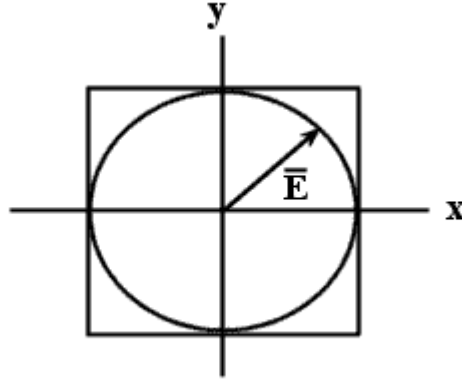
Cuando la diferencia de ángulos fuera de  $\Delta\phi = \pi / 2$ , se tendría una polarización elíptica del siguiente tipo:

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1 \quad (1.617)$$

y se podría visualizar como una elipse centrada sin un ángulo de inclinación:



Cuando  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ , entonces se presentaría una *polarización circular*.



## CLASIFICACIÓN DE MEDIOS

Los medios se clasifican en *conductores* y *dieléctricos*. A su vez, estos se clasifican en perfectos y buenos:

$$\text{MEDIOS} \left\{ \begin{array}{l} \text{Conductores} \left\{ \begin{array}{l} \text{perfectos} \\ \text{buenos} \end{array} \right. \\ \text{Dieléctricos} \left\{ \begin{array}{l} \text{perfectos} \\ \text{buenos} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Para determinar que tipo de medio se tiene se necesita conocer el coeficiente  $\mathbf{Q}$ .

Como se vio en el tema anterior, la constante de propagación (ecuación 1.585) está dada por:

$$\gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 - i\omega\mu\sigma$$

$$\gamma = \alpha - \beta i$$

donde

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2}} \sqrt{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2\omega^2} + \epsilon\omega}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2}} \sqrt{\sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2\omega^2} - \epsilon\omega}$$

Las constantes de fase y de atenuación también se pueden ver de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sqrt{\frac{\mu\omega}{2}} \sqrt{\omega\epsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + \omega\epsilon} \\
 &= \sqrt{\frac{\mu\omega^2\epsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1} \\
 &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1}
 \end{aligned} \tag{1.618}$$

y, de igual forma,

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1} \tag{1.619}$$

El coeficiente **Q** está dado por la siguiente relación:

$$\mathbf{Q} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma \vec{\mathbf{E}}}{\epsilon \omega \vec{\mathbf{E}}} \tag{1.620}$$

Si multiplicamos momentáneamente esta ecuación por (**i/i**), se tendría que:

$$\mathbf{Q} = \frac{\sigma \vec{\mathbf{E}}}{\epsilon \omega \vec{\mathbf{E}}} = \frac{\vec{\mathbf{J}}}{\epsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}} \tag{1.621}$$

Bajo esta expresión, el coeficiente **Q** representa la relación entre corrientes de conducción y las corrientes de desplazamiento eléctrico: si dominan las corrientes de conducción entonces el medio es un conductor, si dominan las corrientes de desplazamiento eléctrico, el medio es un dieléctrico. De acuerdo con esta definición, la clasificación de los medios se realiza en función de las corrientes que predominan en el medio.

## Dieléctricos

Para que un medio pueda clasificarse como *dieléctrico*, el coeficiente **Q** debe de ser mucho menor a 1: **Q << 1**. Esto diría que

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} = \sqrt{1 + \mathbf{Q}^2} = (1 + \mathbf{Q}^2) \tag{1.622}$$



Por el teorema del Binomio, se puede obtener que:

$$\begin{aligned}
 (1 + Q^2) &= \frac{1^{1/2}(Q^2)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(1)^{-1/2}(Q^2)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(1)^{-3/2}(Q^2)^2}{2!} + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2}Q^2 - \frac{1}{2}Q^2 + \frac{1}{8}Q^4 + \dots
 \end{aligned} \tag{1.623}$$

Como el coeficiente  $Q$  debe de ser muy pequeño, entonces  $Q^4 \cong 0$ ; por lo tanto, se pueden despreciar las potencias de  $Q$  mayores a 2. De esta forma, la constante de fase sería:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}Q^2} + 1 = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{2 + \frac{1}{2}Q^2} \\
 &\cong \omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{4}Q^2}
 \end{aligned} \tag{1.624}$$

Si  $Q^2 \cong 0$ , puesto que  $Q \ll 1$ , entonces:

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \tag{1.625}$$

A su vez, la constante de atenuación se puede definir de forma similar:

$$\begin{aligned}
 \beta &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}Q^2} - 1 \\
 &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}Q^2} \\
 &= \frac{\omega}{2} Q \sqrt{\mu\epsilon}
 \end{aligned} \tag{1.626}$$

Si recordamos que  $Q = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{\sigma}{2\epsilon} \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\epsilon^2}} \\
 &= \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}
 \end{aligned} \tag{1.627}$$

Lo anterior nos dice que, en buenos dieléctricos, la constante de fase depende únicamente de las características dieléctricas y de la permitividad magnética, y que la constante de atenuación es función de los parámetros del medio.

Por ejemplo, si utilizáramos la técnica del radar en un medio con una conductividad  $\sigma = 1000 \text{ ohms/m}$ , una frecuencia central de 1 MHz ( $2\pi \times 100 \times 10^6$ ) y con un coeficiente de propagación en el vacío ( $8.85 \times 10^{-12}$ ), entonces se tendría que el coeficiente  $Q$  sería:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\omega\epsilon} &= \frac{10^{-3}}{(8.85)(10^{12})(2\pi \times 100 \times 10^6)} = \frac{10^{-3}}{(8.85)(2\pi)(1 \times 10^8 \times 10^{-12})} \\ &= \frac{1}{(8.85)(2\pi) \times 10^{11} \times 10^{-12}} = \frac{10}{(8.85)(2\pi)} \ll 1 \end{aligned}$$

Dado este resultado, se puede observar la predominancia de las corrientes de desplazamiento eléctrico, lo que da que  $Q \ll 1$ . Es por ello que en la técnica de radar predominan las corrientes de desplazamiento eléctrico, ya que las frecuencias que utiliza son muy altas (de 50 MHz a 1 GHz). También se puede determinar que entre mayor sea la frecuencia que se utiliza, menor es la skin depth, ya que esta última depende de la constante de atenuación. Por ejemplo, si utilizamos los datos anteriores tendríamos que la skin depth sería igual a:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{\beta} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{2}{10^3} \sqrt{\frac{8.85 \times 10^{-12}}{4\pi \times 10^{-7}}} \\ &= \sqrt{\frac{8.85}{\pi}} \sqrt{10^{-5}} (10^3) = 10^{-2} \times 10^3 \sqrt{\frac{8.85}{\pi}} \\ &= 10^{+1} \sqrt{\frac{8.85}{\pi}} = (10^{+1})(1.7) = 17 \end{aligned}$$

Esto significaría que para un medio de conductividad de 1000 ohms/m y con la permitividad del vacío sólo se tendría una penetración de máximo 17 m. Si la conductividad fuera de 100 ohms/m, la skin depth decrecería a 1.7 m. Es por ello que la técnica de radar es muy sensible a las condiciones de conducción del subsuelo y sólo se utiliza como un método de prospección somera.

En un dieléctrico perfecto, las corrientes de conducción son despreciables ( $\sigma = 0$ ), lo que permite que la constante de fase se mantenga ( $\alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ ); pero la constante de atenuación es igual a cero ( $\beta = 0$ ). Es por ello que, en un dieléctrico perfecto, no hay atenuación de la onda. El hielo y el espacio vacío son dos ejemplos de dieléctricos perfectos.

## Conductores

Para que un medio sea clasificado como **conductor**, el coeficiente  $Q$  debe de ser mucho mayor a 1:  $Q \gg 1$ . Esto significa que las corrientes de conducción son más importantes que las de desplazamiento eléctrico.

Recordemos que:

$$Q = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1+Q^2} + 1}$$

y que

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1+Q^2} - 1}$$

Aplicando el teorema del Binomio obtendríamos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+Q^2} &= Q \sqrt{1+\frac{1}{Q^2}} = \left(1+\frac{1}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{Q^2}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{Q^2}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(1)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{Q^2}\right)^2}{2!} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q^2}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{Q}\right)^4 + \dots \end{aligned} \quad (1.628)$$

Si  $Q \gg 1$ , entonces implicaría que  $\frac{1}{Q} \ll 1$ . Por ende, se tendría que:

$$\sqrt{1+\frac{1}{Q^2}} \cong Q \quad (1.629)$$

De acuerdo con lo anterior, la constante de fase se puede escribir como:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \sqrt{Q+1} \quad (1.630)$$

Pero si  $Q \gg 1$ , significaría que  $Q+1 \cong Q$ ; por ende, la constante de fase se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} Q \\
&= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \\
&= \omega \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}} \\
\alpha &= \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (1.631)
\end{aligned}$$

De la misma forma, la constante de atenuación se puede escribir como:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{Q-1} \quad (1.632)$$

Como  $Q \gg 1$ , entonces  $Q - 1 \cong Q$ ; por tanto, la constante de atenuación se expresaría así:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\epsilon}{2}} \quad (1.633)$$

En *buenos conductores*, la constante de fase y la constante de atenuación tienen la misma expresión, por lo que  $\alpha = \beta$ . En la mayoría de los métodos electromagnéticos se dice que las corrientes de conducción son superiores a las corrientes de desplazamiento eléctrico, por lo que se dice que se observan a las características conductoras del medio más que a las dieléctricas. Es por ello que generalmente se maneja que los métodos electromagnéticos son técnicas de baja frecuencia; por decir, los métodos magneto-telúricos operan en frecuencias que va de los 0.001 hasta los  $1 \times 10^5$  Hz (en el caso del ESTRATAGEM). Sólo el GPR opera en frecuencias mayores (50 MHz –1 GHz) .

Por ejemplo, se tiene un medio de una conductividad  $\sigma = 10^{-3}$ , la permitividad del vacío y se trabaja en una frecuencia baja de  $\omega = 10^5$  Hz. El coeficiente  $Q$  daría el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{10^{-3}}{(8.85)(2\pi) \times 10^{-12} \times 10^5} \\
&= 10^4 \gg 1
\end{aligned}$$

Esto nos habla de que, en el caso de los *conductores perfectos*, conforme la frecuencia aumenta, la skin depth disminuye. A su vez, conforme la conductividad aumenta, la skin depth tiende a cero:

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

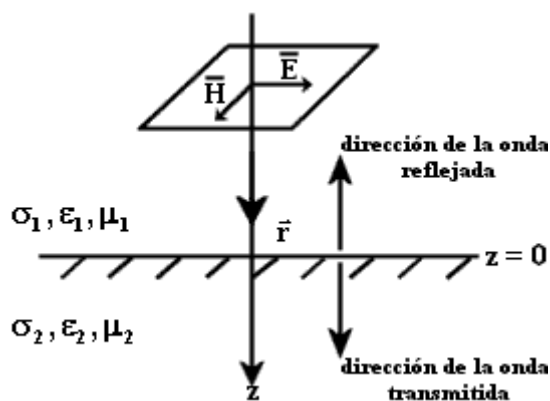
$$\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow \delta = 0$$

Por lo tanto, en un conductor perfecto no hay penetración de un campo electromagnético, ya que toda la onda se quedaría en la superficie. Es por ello que la mayor barrera para los métodos eléctricos o electromagnéticos es la conductividad del medio.

## REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDA PLANA

### INCIDENCIA NORMAL

Supongamos que se tiene un frente de onda plana (F.O.P.) que viaja en la dirección **Z**, ya sea positiva o negativa, y un plano de discontinuidad.



Se dice que se tiene una **Incidencia Normal** cuando el F.O.P. es paralelo a la interfase o cuando el vector de propagación es perpendicular a ese plano de separación entre dos medios. Obviamente, Los campos electromagnéticos están contenidos en el frente de onda.

Las **condiciones de frontera** que se deben satisfacer son las siguientes: las componentes tangenciales del campo eléctrico son continuas siempre y cuando no exista densidad de carga superficial

$$E_{t,1} = E_{t,2} \quad (1.634)$$

y las componentes tangenciales del campo magnético también son continuas mientras no existan corrientes magnéticas de superficie

$$\mathbf{H}_{t,1} = \mathbf{H}_{t,2} \quad (1.635)$$

Como se recordará, el campo magnético está dado por (ecuaciones 1.601 y 1.602):

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{\gamma}{\omega\mu} \vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{E}}$$

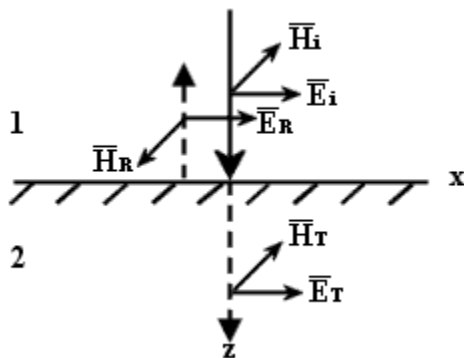
La ecuación de onda que satisface al campo eléctrico tiene las siguientes representaciones:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \gamma^2 \vec{\mathbf{E}} &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} \vec{\mathbf{E}} - \gamma^2 \vec{\mathbf{E}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.636)$$

y su solución general es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}e^{-i\gamma z} + \mathbf{B}e^{+i\gamma z} \quad (1.637)$$

Cuando una onda incidente llega a una superficie de separación, una parte de la onda se va a transmitir y otra parte se va a reflejar.



El campo eléctrico incidente, el cual va en dirección de  $z$  positiva, se puede escribir en su notación fasorial como:

$$\vec{\mathbf{E}}_i = E_0 e^{-i\gamma_1 z} \vec{\mathbf{i}} \quad (1.638)$$

donde  $E_0$  es la amplitud de onda original y la constante de propagación en el medio uno es igual a:

$$\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - i \omega \mu \sigma} \quad (1.639)$$

A esta onda incidente le corresponde un campo magnético incidente dado sobre la impedancia intrínseca:

$$\vec{H}_i = \frac{\vec{n}}{Z_1} \times \vec{E} \quad (1.640)$$

donde  $\vec{n} = +\vec{k}$  la impedancia intrínseca del medio uno está dada por:

$$Z_1 = \frac{\omega\mu_1}{\gamma_1} \quad (1.641)$$

De acuerdo con eso, el campo magnético incidente será:

$$\vec{H}_i = \frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} \vec{k} \times \vec{i} E_0 e^{-i\gamma_1 z} \quad (1.642)$$

Si  $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ , entonces se tendrá que

$$\vec{H}_i = \frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} E_0 e^{-i\gamma_1 z} \vec{j} \quad (1.643)$$

De igual modo se debe de ir resolviendo los campos electromagnéticos para la onda transmitida y la onda reflejada. Por lo tanto, de acuerdo con lo anterior, el campo eléctrico de la onda reflejada en los medios 1 y 2 se podrá expresar fasorialmente como:

$$\vec{E}_R = E_{R,1} e^{+i\gamma_1 z} + E_{R,2} e^{+i\gamma_1 z} \quad (1.644)$$

La onda reflejada viaja en la dirección del eje  $Z$  negativo, lo que implicaría que  $E_{R,2} = 0$  y, por tanto, tendrá la siguiente expresión:

$$\vec{E}_R = E_R e^{+i\gamma_1 z} \vec{i} \quad \text{para } z > 0 \quad (1.645)$$

De acuerdo esto, el campo magnético de la onda reflejada provendría de la ecuación:

$$\begin{aligned} \vec{H}_R &= \frac{1}{Z_1} \vec{n} \times \vec{E}_R \\ \vec{H}_R &= \frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} -\vec{k} \times \vec{i} E_R e^{+i\gamma_1 z} \end{aligned} \quad (1.646)$$

donde  $\vec{n} = -\vec{k}$ . Si además recordamos que  $-\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{j}$ , entonces obtendremos que el campo magnético de la onda reflejada sea igual a:

$$\vec{H}_R = -\frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} E_R e^{+i\gamma_1 z} \vec{j} \quad (1.647)$$

La onda transmitida tendrá una solución similar a las anteriores, donde sus campos electromagnéticos tendrán esta expresión:

$$\vec{E}_T = E_T e^{-i\gamma_2 z} \vec{i} \quad \text{para } z < 0 \quad (1.648)$$

$$\vec{H}_T = \frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} E_T e^{-i\gamma_2 z} \vec{j} \quad (1.649)$$

Esto se puede traducir de la siguiente manera. Cuando la onda se refleja, el campo eléctrico reflejado se mantiene en fase con el incidente, pero el campo magnético reflejado cambia de dirección con respecto al incidente. En cambio, el campo transmitido conserva la fase en que venía.

Lo que se debe encontrar ahora son las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida. Debido a que los campos magnéticos son función de los parámetros conocidos, sólo se necesita encontrar las intensidades de los campos eléctricos. Para ello, se tienen que resolver dos ecuaciones para encontrar dos incógnitas.

Aplicando las condiciones de frontera se tiene que, en  $z = 0$ , el campo eléctrico total se puede expresar así:

$$E_0 + E_R = E_T \quad (1.650)$$

y

$$\frac{1}{Z_1} (E_0 - E_R) = \frac{1}{Z_2} E_T \quad (1.651)$$

Sustituyendo la ecuación 1.650 en la 1.651 se tendría que:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{Z_1} - \frac{E_R}{Z_1} &= \frac{E_0}{Z_2} + \frac{E_R}{Z_2} \\ E_0 \left( \frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right) &= E_R \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \\ E_0 \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 Z_2} \right) &= E_R \left( \frac{Z_2 + Z_1}{Z_1 Z_2} \right) \end{aligned} \quad (1.652)$$

Por ende, la amplitud del campo eléctrico reflejado es:

$$E_R = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right) E_0 \quad (1.653)$$

Sustituyendo la expresión 1.653 en la 1.651 se puede obtener la amplitud de la onda transmitida:



$$\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0 \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right) = \mathbf{E}_T$$

$$\mathbf{E}_T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \mathbf{E}_0 \quad (1.654)$$

Se puede definir al *coeficiente de reflexión* con respecto a las impedancias como:

$$\mathbf{R}_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (1.655)$$

y al *coeficiente de transmisión* como:

$$\mathbf{T}_{12} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (1.656)$$

Como se puede observar, los coeficientes de reflexión y transmisión son función de las impedancias intrínsecas de los medios. De la ecuación 1.651 se puede demostrar la siguiente relación:

$$\mathbf{E}_0 (\mathbf{R}_{12} + 1) = \mathbf{E}_0 \mathbf{T}_{12}$$

$$\mathbf{R}_{12} + 1 = \mathbf{T}_{12} \quad (1.657)$$

Utilizando la definición de los coeficientes de transmisión y reflexión en las ecuaciones de los campos electromagnéticos, tendríamos que estos también se pueden expresar así:

$$\vec{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_0 e^{-i\gamma_1 z} \vec{\mathbf{i}} \quad (1.658)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_R = \mathbf{R}_{12} \mathbf{E}_0 e^{+i\gamma_1 z} \vec{\mathbf{i}} \quad (1.659)$$

$$\vec{\mathbf{E}}_T = \mathbf{T}_{12} \mathbf{E}_0 e^{-i\gamma_2 z} \vec{\mathbf{i}} \quad (1.660)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_i = \frac{1}{Z_1} \mathbf{E}_0 e^{-i\gamma_1 z} \vec{\mathbf{j}} \quad (1.661)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_R = \frac{\mathbf{R}_{12}}{Z_1} \mathbf{E}_0 e^{+i\gamma_1 z} \vec{\mathbf{j}} \quad (1.662)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_T = \frac{\mathbf{T}_{12}}{Z_2} \mathbf{E}_0 e^{-i\gamma_2 z} \vec{\mathbf{j}} \quad (1.663)$$

De forma similar, los campos electromagnéticos de la onda incidente en los medios uno y dos serían:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_i + \vec{E}_R = E_0 e^{+i\gamma_1 z} \vec{i} + R_{12} E_0 e^{-i\gamma_1 z} \vec{i} \\ \vec{H}_1 &= \vec{H}_i + \vec{H}_R = -\frac{1}{Z_1} E_0 e^{+i\gamma_1 z} \vec{j} + \frac{1}{Z_1} R_{12} E_0 e^{-i\gamma_1 z} \vec{j}\end{aligned}\quad (1.664)$$

y

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \vec{E}_T = T_{12} E_0 e^{+i\gamma_2 z} \\ \vec{H}_2 &= \vec{H}_T = -\frac{1}{Z_2} T_{12} E_0 e^{+i\gamma_2 z}\end{aligned}\quad (1.665)$$

Regresemos un poco a la definición de impedancia. En general, se entiende por *impedancia* a la relación de campo eléctrico a campo magnético en forma vectorial:

$$\tilde{Z} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} \quad (1.666)$$

Cuando observamos por separado esta relación para cada uno de los medios existentes, entonces se obtiene la *impedancia intrínseca*. Cuando observamos todo un fenómeno de onda reflejada incluyendo a todos los medios presentes, entonces se obtiene la *impedancia de onda*. La impedancia intrínseca está forzosamente en función de los parámetros del medio donde la onda se está transmitiendo; en cambio, la impedancia de onda no. Por ejemplo, la impedancia de onda para el medio uno sería igual a:

$$\tilde{Z}_1 = \frac{|\vec{E}_1|}{|\vec{H}_1|} = \frac{E_0 e^{-i\gamma_1 z} + R_{12} E_0 e^{+i\gamma_1 z}}{\frac{1}{Z_1} E_0 e^{-i\gamma_1 z} - \frac{R_{12}}{Z_1} E_0 e^{+i\gamma_1 z}} \quad (1.667)$$

Factorizando se obtendría que  $\tilde{Z}$  es igual a:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_1 &= Z_1 \frac{e^{+i\gamma_1 z} + R_{12} e^{-i\gamma_1 z}}{e^{+i\gamma_1 z} - R_{12} e^{-i\gamma_1 z}} \\ &= Z_1 \frac{1 + R_{12} e^{+i2\gamma_1 z}}{1 - R_{12} e^{+i2\gamma_1 z}}\end{aligned}\quad (1.668)$$

Para el medio dos, la impedancia de onda sería:

$$\tilde{Z}_2 = \frac{|\vec{E}_2|}{|\vec{H}_2|} = \frac{T_{12} E_0 e^{-i\gamma_2 z}}{\frac{1}{Z_2} T_{12} E_0 e^{-i\gamma_2 z}} \quad (1.669)$$

La impedancia de onda es una función de la posición y toma en cuenta todos los campos electromagnéticos de todos los medios existentes, sean estos producidos por fuentes verdaderas, por campos reflejados o transmitidos. Es decir, la impedancia de onda es la relación del campo total que existe en el medio. Por el contrario, la impedancia intrínseca es función solamente del medio en el que se está propagando la onda. Obviamente, la impedancia de onda depende de la impedancia intrínseca (ya que el coeficiente de reflexión depende de ella) y/o de la constante de propagación. Por ende, queda claro que la impedancia intrínseca y la impedancia de onda no son la misma cosa y no se deben de manejar por igual.

Sólo en medios infinitos donde ya no hay reflexión, la impedancia de onda es igual a la impedancia intrínseca:

$$\tilde{Z}_2 = Z_2 \quad (1.670)$$

Es por esto que se maneja que, en la última capa de un medio estratificado, las impedancias son las mismas. Este es el supuesto que se utiliza para encontrar la relación de recurrencia de las impedancias, ya que es ésta la que se mide en la superficie de la Tierra a través de los métodos electromagnéticos.

Recordando la definición que se había proporcionado para la impedancia (ecuación 1.603):

$$Z = \frac{\omega\mu}{\gamma}$$

se tiene que el coeficiente de reflexión también se puede expresar con respecto a la constante de propagación:

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\frac{\mu_2\omega}{\gamma_2} - \frac{\mu_1\omega}{\gamma_1}}{\frac{\mu_2\omega}{\gamma_2} + \frac{\mu_1\omega}{\gamma_1}} = \frac{\frac{\mu_2\gamma_1 - \mu_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}}{\frac{\mu_2\gamma_1 + \mu_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}} \\ R_{21} &= \frac{\mu_2\gamma_1 - \mu_1\gamma_2}{\mu_2\gamma_1 + \mu_1\gamma_2} \end{aligned} \quad (1.671)$$

Indudablemente, el coeficiente de transmisión se puede escribir así:

$$\begin{aligned} T_{12} &= \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{\frac{2\mu_2\omega}{\gamma_2}}{\frac{\mu_2\omega}{\gamma_2} + \frac{\mu_1\omega}{\gamma_1}} = \frac{\frac{2\mu_2\gamma_1}{\gamma_2}}{\frac{\mu_2\gamma_1 + \mu_1\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}} \\ T_{21} &= \frac{2\mu_2\gamma_1}{\mu_2\gamma_1 + \mu_1\gamma_2} \end{aligned} \quad (1.672)$$

Cabe hacer la aclaración de que, cuando se utiliza las notaciones  $\mathbf{R}_{12}$  y  $\mathbf{T}_{12}$ , implica que se está utilizando las representaciones de los coeficientes con respecto a las impedancias intrínsecas. Cuando se denotan como  $\mathbf{R}_{21}$  y  $\mathbf{T}_{21}$  significa que se está trabajando en función de las constantes de propagación. En general, ambas representaciones son equivalentes y su notación es libre, sólo hay que prestar atención al parámetro al que hacen referencia.

Si se tuviera la permitividad magnética del vacío ( $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ ), entonces los coeficientes de reflexión y transmisión se convierten en:

$$\mathbf{R}_{21} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (1.673)$$

$$\mathbf{T}_{21} = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (1.674)$$

A continuación se hará una descripción de los tres **tipos de interfases** que se pueden presentar:

(1) ***Dieléctrico –Dieléctrico***

Esto implicaría que:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 - i\beta_1$$

donde

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1}$$

Cuando los dieléctricos son *perfectos*, se tendría que la constante de atenuación es cero ( $\beta = 0$ ), por lo que la constante de propagación queda exclusivamente en función de la constante de fase:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

$$\gamma = \alpha$$

donde  $\alpha = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ . Si, además  $\mu = \mu_0$ , entonces los coeficientes de reflexión y transmisión serían igual a:

$$\mathbf{R}_{21} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \quad (1.675)$$

$$\mathbf{T}_{21} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \quad (1.676)$$

Cuando los medios son *buenos dieléctricos* se tendría lo siguiente:

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\beta = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\gamma = \alpha - i\beta_1$$

y, por tanto, la constante de propagación tendría una parte real y una parte negativa, por lo que

$$\mathbf{R}_{21} = \frac{\alpha_1 - i\beta_1 - \alpha_2 - i\beta_2}{\alpha_1 - i\beta_1 + \alpha_2 - i\beta_2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) - i(\beta_1 - \beta_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2) - i(\beta_1 + \beta_2)} \quad (1.677)$$

$$\mathbf{T}_{21} = \frac{2(\alpha_1 - i\beta_1)}{(\alpha_1 + \alpha_2) - i(\beta_1 + \beta_2)} \quad (1.678)$$

En general, los coeficientes se pueden escribir en una forma fasorial:

$$\mathbf{R}_{21} = |\mathbf{R}_{21}| e^{+i\phi_R} \quad (1.679)$$

$$\mathbf{T}_{21} = |\mathbf{T}_{21}| e^{+i\phi_T} \quad (1.680)$$

Esto indica que con la presencia de un poco de conductividad y, por ende, un poco de pérdida de energía, se produciría un retraso de la onda. Esto señala una disipación de la energía por calor, lo que proporciona el desfase. De acuerdo con esto, a la onda reflejada se le agregaría un desfase:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_R &= \mathbf{R}_{21} \mathbf{E}_0 e^{+i\gamma_1 z} \\ &= |\mathbf{R}_{21}| \mathbf{E}_0 e^{+i\gamma_1 z} e^{-i\phi_R} \end{aligned} \quad (1.681)$$

En cambio, en dieléctricos perfectos la energía no se pierde por disipación, si no que el área se hace mayor mientras la energía permanece la misma, obteniendo menos energía por unidad de área.

## (2) *Conductor – Conductor*

En conductores perfectos no hay penetración de onda.

En buenos conductores, las corrientes de conducción son más importantes que las corrientes de desplazamiento eléctrico. Por ende, se tendría que:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

por lo que  $\gamma$  sería igual a

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}(1 - i)$$

Si  $\mu = \mu_0$ , entonces el coeficiente de reflexión sería:

$$\mathbf{R}_{21} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) - (\beta_1 - \beta_2)i}{(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)i}$$

Pero las alfas también se pueden escribir así:

$$\alpha_1 = \sqrt{\omega \mu} \sqrt{\sigma_1} = \sqrt{\omega \mu_0} \sqrt{\sigma_1}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\omega \mu} \sqrt{\sigma_2} = \sqrt{\omega \mu_0} \sqrt{\sigma_2}$$

Por lo tanto, los coeficientes de reflexión y transmisión se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{21} &= \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2} - (\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2})i}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2} - (\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2})i} = \frac{(\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2})(1 - i)}{(\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2})(1 - i)} \\ &= \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} \end{aligned} \quad (1.682)$$

$$\mathbf{T}_{21} = \frac{2\sqrt{\sigma_1}(1 - i)}{(\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2})(1 - i)} = \frac{2\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} \quad (1.683)$$

En un medio conductor, los campos electromagnéticos están dados por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} &= \mathbf{E}_0 e^{-\beta_1 z} e^{+i\alpha_1 z} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{H}} &= \frac{\mu \omega}{\gamma} \mathbf{E}_0 e^{-\beta_1 z} \cdot e^{+i\alpha_1 z} \vec{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (1.684)$$

Si recordamos que  $\gamma = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1-i)$ , entonces tendríamos que:

$$\begin{aligned}
 \vec{H} &= \frac{\mu\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1-i)} E_0 e^{-\beta_1 z} \cdot e^{+i\alpha_1 z} \vec{j} \\
 &= \sqrt{\frac{\mu^2 \omega^2}{\omega\mu\sigma}} \frac{E_0}{(1-i)} e^{-\beta_1 z} \cdot e^{+i\alpha_1 z} \vec{j} \\
 &= \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\sigma}} \frac{E_0}{(1-i)} e^{-\beta_1 z} \cdot e^{+i\alpha_1 z} \vec{j}
 \end{aligned} \tag{1.685}$$

En forma fasorial,  $(1-i) = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}$ ; por lo tanto, los campos electromagnéticos en buenos conductores se pueden expresar como:

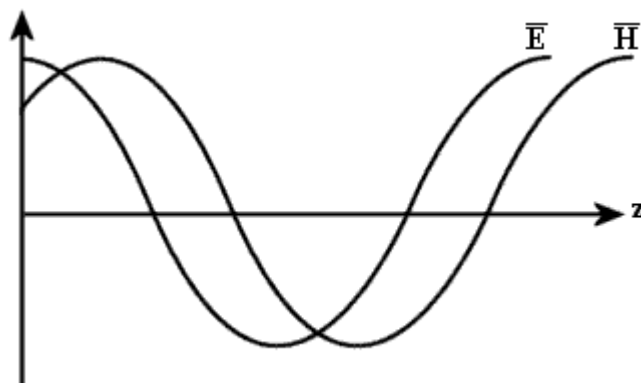
$$\begin{aligned}
 \vec{H} &= \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\sigma}} \frac{E_0}{\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}} e^{-\beta z} \cdot e^{+i\alpha z} \vec{j} \\
 &= \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} E_0 e^{-\beta z} \cdot e^{+i\alpha z} \cdot e^{+\frac{\pi}{4}i} \vec{j} \\
 &= \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} E_0 e^{-\beta z} \cdot e^{+i\left(\alpha z + \frac{\pi}{4}\right)} \vec{j}
 \end{aligned} \tag{1.686}$$

$$\vec{E} = E_0 e^{-\beta z} e^{+i\alpha z} \vec{i} \tag{1.687}$$

Con base en lo anterior, las amplitudes de los campos serían:

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= E_0 e^{-\beta z} \cos(\alpha z) \\
 \vec{H} &= H_0 e^{-\beta z} \cos\left(\alpha z + \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned} \tag{1.688}$$

Esto nos da a entender que el campo magnético tiene un retraso de  $\pi/4$  radianes con respecto al campo eléctrico. Es decir, el campo eléctrico alcanza su valor máximo antes que el campo magnético. Este desfase lo proporcionan exclusivamente las características conductoras del medio.

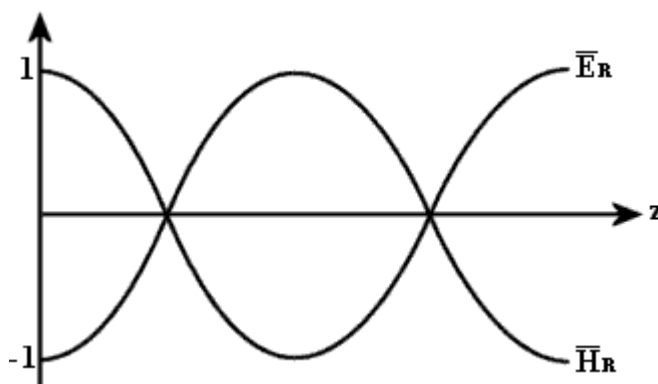


En otras palabras, este retraso de  $45^\circ$  del campo magnético reflejado con respecto al campo eléctrico incidente lo ocasiona la impedancia intrínseca del medio y no el coeficiente de reflexión. Por ejemplo, el campo magnético reflejado en medios conductores sigue al campo eléctrico reflejado sin ocasionar retrasos:

$$\begin{aligned}\vec{E}_R &= R_{21} E_0 e^{-\beta z} \cdot e^{+i\alpha z} \vec{i} \\ \vec{H}_R &= \frac{1}{Z_1} R_{21} E_0 e^{-\beta z} \cdot e^{+i\alpha z} \vec{j}\end{aligned}\quad (1.689)$$

donde  $-1 = e^{+i\pi}$ ; pero el campo magnético reflejado tiene un desfase con respecto al campo eléctrico incidente que puede llegar a ser de hasta  $180^\circ$ :

$$\vec{H}_R = H_R e^{-\beta z} \cos(\alpha z + \pi + \pi/4) - 1 = e^{+i\pi} \quad (1.690)$$



### (3) *Dieléctrico – Conductor*

En un dieléctrico perfecto se tendría que:

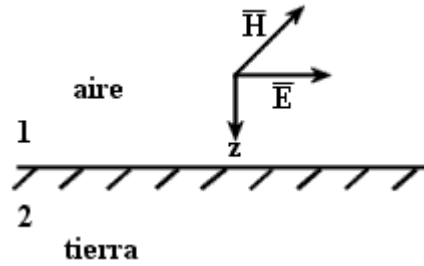
$$\beta = 0 \quad \text{y} \quad \alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$



y en un buen conductor se tendría que:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Un ejemplo de esto sería cuando una onda incide sobre la superficie de la Tierra, viniendo de un dieléctrico (el aire) y llegando a un conductor (la Tierra).



Si  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , y recordando que  $\gamma = \alpha$ , se tendría que el coeficiente de transmisión es igual a:

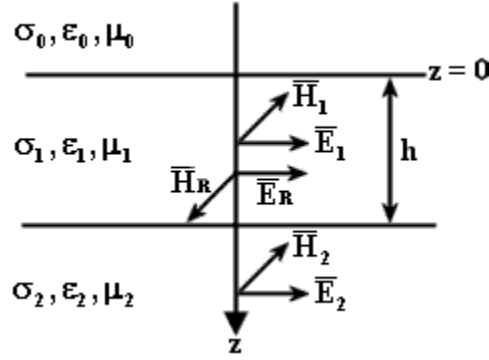
$$\begin{aligned} T_{21} &= \frac{2\gamma_1\mu_2}{\mu_2\gamma_1 + \mu_1\gamma_2} = \frac{2\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\omega\sqrt{\mu\epsilon} + \left(\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} - i\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\right)} \\ &= \frac{2}{\left(1 + \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}}\right) - i\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} - i\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}} \end{aligned} \quad (1.691)$$

Si, además,  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \cong 0$ , entonces  $T_{21} = \sqrt{2}$ .

Esto quiere decir que, cuando la onda electromagnética incide normalmente sobre la faz de la Tierra (siendo ésta un buen conductor), las corrientes de conducción son más importantes que las de desplazamiento eléctrico, lo que permite que no haya un desfase y el campo sea real. Esto se satisface para frecuencias bajas.

### Impedancia de un estrato conductor bajo incidencia normal

En un medio uno se presenta una incidencia normal, de tal manera que en  $z = 0$  se tiene un campo eléctrico incidente con una amplitud de  $\bar{E}_1 = E_0\bar{i}$ , donde  $E_0$  es real ( $E_0 =$  amplitud real).



Esta onda electromagnética se desplaza sobre el medio uno en dirección del eje  $Z$  negativo. Por tanto, a la onda incidente se le puede expresar como:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}_1 &= E_0 e^{-i\gamma_1 z} \bar{\mathbf{i}} \\ \bar{\mathbf{H}}_1 &= \frac{\gamma_1}{\omega \mu_1} E_0 e^{-i\gamma_1 z} \bar{\mathbf{j}}\end{aligned}\quad (1.692)$$

Obviamente, va a existir en la interfase, donde  $z = h$ , una onda reflejada

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}_R &= E_R e^{+i\gamma_1 z} \bar{\mathbf{i}} \\ \bar{\mathbf{H}}_R &= -\frac{\gamma_1}{\omega \mu_1} E_R e^{+i\gamma_1 z} \bar{\mathbf{j}}\end{aligned}\quad (1.693)$$

y una onda transmitida

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}_T &= E_T e^{-i\gamma_2 z} \bar{\mathbf{i}} \\ \bar{\mathbf{H}}_T &= \frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} E_T e^{-i\gamma_2 z} \bar{\mathbf{j}}\end{aligned}\quad (1.694)$$

Como ya se ha visto, sabemos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_R &= \mathbf{R}_{21} \mathbf{E}_0 \mathbf{A} \\ \mathbf{E}_T &= \mathbf{T}_{21} \mathbf{E}_0 \mathbf{A}\end{aligned}\quad (1.695)$$

y que los coeficientes de reflexión y transmisión (ecuaciones 1.670 y 1.671) en función de la constante de propagación son:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{21} &= \frac{\mu_2 \gamma_1 - \mu_1 \gamma_2}{\mu_2 \gamma_1 + \mu_1 \gamma_2} \\ \mathbf{T}_{21} &= \frac{2\mu_2 \gamma_1}{\mu_2 \gamma_1 + \mu_1 \gamma_2}\end{aligned}$$

Las condiciones de frontera, en  $z = h$ , nos dicen que:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$$

Esto daría como resultado que se pueda expresar al campo eléctrico como:

$$\mathbf{E}_0 e^{-i\gamma_1 h} + \mathbf{E}_R e^{+i\gamma_1 h} = \mathbf{E}_T e^{-i\gamma_2 h} \quad (1.696)$$

y al campo magnético como:

$$\frac{\gamma_1}{\omega \mu_1} (\mathbf{E}_0 e^{-i\gamma_1 z} - \mathbf{E}_R e^{+i\gamma_1 z}) = \frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} \mathbf{E}_T e^{-i\gamma_2 z} \quad (1.697)$$

Si multiplicamos a la ecuación 1.696 por  $-\frac{\gamma_2}{\omega \mu_2}$  obtendríamos:

$$-\frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} \mathbf{E}_0 e^{-i\gamma_1 h} - \frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} \mathbf{E}_R e^{+i\gamma_1 h} = -\frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} \mathbf{E}_T e^{-i\gamma_2 h} \quad (1.698)$$

Sumando ahora las ecuaciones 1.697 y 1.698 se tendría:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 e^{-i\gamma_1 h} \left[ \frac{\gamma_1}{\omega \mu_1} - \frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} \right] - \mathbf{E}_R e^{+i\gamma_1 h} \left[ \frac{\gamma_1}{\omega \mu_1} + \frac{\gamma_2}{\omega \mu_2} \right] &= 0 \\ \mathbf{E}_R e^{+i\gamma_1 h} \left[ \frac{\omega \mu_2 \gamma_1 + \omega \mu_1 \gamma_2}{\omega \mu_1 \mu_2} \right] &= \mathbf{E}_0 \left[ \frac{\omega \mu_2 \gamma_1 - \omega \mu_1 \gamma_2}{\omega \mu_1 \mu_2} \right] e^{-i\gamma_1 h} \end{aligned} \quad (1.699)$$

Despejando esta última ecuación podemos obtener el valor del campo eléctrico reflejado:

$$\mathbf{E}_R = \left[ \frac{\mu_2 \gamma_1 - \mu_1 \gamma_2}{\mu_1 \mu_2} \right] \mathbf{E}_0 e^{-i2\gamma_1 h} \quad (1.700)$$

que también se puede expresar como

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{R}_{21} \mathbf{E}_0 e^{-i2\gamma_1 h} \quad (1.701)$$

De la misma forma se puede encontrar al campo eléctrico transmitido. Primeramente, se vuelve a multiplicar a la ecuación 1.696 por  $(\gamma_1 / \omega \mu_1)$ :

$$\frac{\gamma_1}{\omega \mu_1} \mathbf{E}_0 e^{-i\gamma_1 h} + \frac{\gamma_1}{\omega \mu_1} \mathbf{E}_R e^{+i\gamma_1 h} = \frac{\gamma_1}{\omega \mu_1} \mathbf{E}_T e^{-i\gamma_2 h} \quad (1.702)$$

Sumando las ecuaciones 1.702 y 1.697 tendríamos que:

$$\frac{2\gamma_1}{\omega\mu_1} E_0 e^{-i\gamma_1 h} + 0 = \left( \frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} + \frac{\gamma_2}{\omega\mu_2} \right) E_T e^{-i\gamma_2 h} \quad (1.703)$$

De esta ecuación podemos obtener que  $E_T$  se puede expresar como:

$$E_T e^{-i\gamma_2 h} \left( \frac{\omega\mu_2\gamma_1 + \omega\mu_1\gamma_2}{\omega\mu_1\mu_2} \right) = \frac{2\gamma_1}{\omega\mu_1} E_0 e^{-i\gamma_1 h} \quad (1.704)$$

$$E_T = \frac{2\mu_2\gamma_1}{\mu_1\gamma_2 + \mu_2\gamma_1} E_0 e^{-i\gamma_1 h} \cdot e^{-i\gamma_2 h}$$

la cual se puede ver también de la siguiente forma:

$$E_T = T_{21} E_0 \underbrace{e^{-i\gamma_1 h} \cdot e^{-i\gamma_2 h}}_A \quad (1.705)$$

donde el término en corchetes es el factor A anexado a la ecuación 1.695 del campo eléctrico transmitido. De acuerdo con estos valores encontrados, se tendría que los campos electromagnéticos incidentes se pueden escribir como:

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{-i\gamma_1 z} + R_{21} E_0 e^{-i2\gamma_1 h} \cdot e^{+i\gamma_1 z} \vec{i} \quad (1.706)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} \left[ E_0 e^{-i\gamma_1 z} - R_{21} E_0 e^{-i2\gamma_1 h} \cdot e^{+i\gamma_1 z} \right] \vec{j}$$

En esta última expresión se tiene la representación del campo magnético total para todos los medios. A su vez, los campos electromagnéticos transmitidos son:

$$\vec{E}_T = T_{21} E_0 e^{-i\gamma_1 h} \cdot e^{+i\gamma_2 h} \cdot e^{-i\gamma_2 z} \vec{i} \quad (1.707)$$

$$\vec{H}_T = \frac{\gamma_2}{\omega\mu_2} T_{21} E_0 e^{-i\gamma_1 h} \cdot e^{+i\gamma_2 h} \cdot e^{-i\gamma_2 z} \vec{j}$$

En el medio dos ya no se presenta reflexión; por lo tanto, la impedancia de onda en el medio dos va a ser igual a la impedancia intrínseca:

$$\tilde{Z} = \frac{\vec{E}}{\vec{H}} = \frac{T_{21} E_0 e^{-i\gamma_1 h} \cdot e^{+i\gamma_2 h} \cdot e^{-i\gamma_2 z}}{\frac{\gamma_2}{\omega\mu_2} T_{21} E_0 e^{-i\gamma_1 h} \cdot e^{+i\gamma_2 h} \cdot e^{-i\gamma_2 z}}$$

$$\tilde{Z} = \frac{\omega \mu_2}{\gamma_2} = Z \quad (1.708)$$

En cambio, el medio uno se tendría que la impedancia intrínseca es:

$$\tilde{Z}_1 = Z_1 \frac{E_0 e^{-i\gamma_1 z} + R_{21} E_0 e^{-i2\gamma_1 h} \cdot e^{+i\gamma_1 z}}{\frac{\gamma_1}{\omega \mu_1} E_0 e^{-i\gamma_1 z} - R_{21} E_0 e^{-i2\gamma_1 h} \cdot e^{+i\gamma_1 z}} \quad (1.709)$$

Aquí se puede observar que la impedancia de onda depende de  $z$ . Por ende, al evaluarla en  $z = 0$ , obtendríamos que ésta es igual a:

$$\tilde{Z}_1 = Z_1 \frac{1 + R_{21} e^{-i2\gamma_1 h}}{1 - R_{21} e^{-i2\gamma_1 h}} \quad (1.710)$$

donde el coeficiente de reflexión sigue siendo

$$R_{21} = \frac{\mu_2 \gamma_1 - \mu_1 \gamma_2}{\mu_2 \gamma_1 + \mu_1 \gamma_2}$$

Si decimos que las permeabilidades magnéticas de los medios son iguales ( $\mu_0 = \mu_2 = \mu_1$ ), el coeficiente de reflexión quedaría como:

$$R_{21} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (1.711)$$

En un **dieléctrico perfecto**, donde las constantes de fase y de atenuación son

$$\beta = 0 \quad \text{y} \quad \alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

y, por tanto, el coeficiente de propagación es real, el coeficiente de reflexión quedaría en función de las permitividades:

$$R_{21} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \quad (1.712)$$

En **buenos dieléctricos**, donde

$$\beta = \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

y

$$\gamma = 2 - i\beta$$

el coeficiente de reflexión mostraría un decaimiento:

$$\begin{aligned}
 R_{21} &= \frac{\alpha_1 - i\beta_2 - \alpha_2 + i\beta_1}{(\alpha_1 + \alpha_2) - i(\beta_1 + \beta_2)} \\
 &= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) - i(\beta_1 - \beta_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2) - i(\beta_1 + \beta_2)} \\
 &= \frac{\omega\sqrt{\mu}(\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}) - i\sqrt{\mu}\left(\frac{\sigma_1}{2}\sqrt{\epsilon_1} - \frac{\sigma_2}{2}\sqrt{\epsilon_2}\right)}{\omega\sqrt{\mu}(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}) - i\sqrt{\mu}\left(\frac{\sigma_1}{2}\sqrt{\epsilon_1} + \frac{\sigma_2}{2}\sqrt{\epsilon_2}\right)} \\
 R_{21} &= \frac{(\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2})\left(\omega - \frac{i}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right)}{(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2})\left(\omega - \frac{i}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right)} \quad (1.713)
 \end{aligned}$$

En esta ecuación se puede observar que la parte imaginaria, la cual depende de la frecuencia, es la responsable de meter el desfase posterior en la onda.

En **buenos conductores** se sabe que

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \\
 \text{y que} \\
 \gamma &= \alpha - i\beta = \alpha(1 - i)
 \end{aligned}$$

Pero  $(i - 1) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$ , entonces

$$\gamma = \alpha\sqrt{2} e^{-i\pi/4} = \sqrt{\omega\mu\sigma} e^{-i\pi/4} \quad (1.714)$$

Por ende, el coeficiente de reflexión quedaría en función de las conductividades de los medios:

$$\begin{aligned}
 R_{21} &= \frac{\sqrt{\omega\mu\sigma_1} e^{-i\pi/4} - \sqrt{\omega\mu\sigma_2} e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\omega\mu\sigma_1} e^{-i\pi/4} + \sqrt{\omega\mu\sigma_2} e^{-i\pi/4}} \\
 &= \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} \quad (1.715)
 \end{aligned}$$

y la impedancia de onda sería igual a:

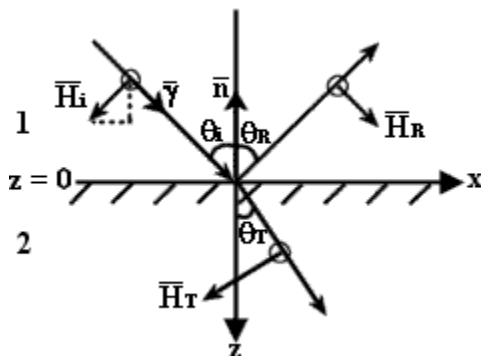
$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{-i\omega\mu\sigma_1}{\omega\mu} \left[ \frac{1 + \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} e^{-i2\gamma_1 h}}{1 - \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} e^{-i2\gamma_1 h}} \right] \\
 &= -i\sigma_1 \left[ \frac{1 + \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} e^{-2\alpha h} \cdot e^{-i2\alpha h}}{1 - \frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} e^{-2\alpha h} \cdot e^{-i2\alpha h}} \right]
 \end{aligned} \tag{1.716}$$

donde  $e^{-i2\gamma_1 h} = e^{-i2(\alpha(1-i))h} = e^{-2\alpha h} \cdot e^{-i2\alpha h}$ . Aquí también se puede observar que se presenta un decaimiento y un desfase de la onda.

De lo anterior podemos decir que si determináramos la impedancia de un medio en  $z = 0$ , se vería que se tiene información tanto de la capa uno como de la capa dos, ya que la impedancia está en función de la conductividad de las capas uno y dos y de su espesor. Por ende, en principio, por medio de un proceso inverso se podrían determinar las conductividades de los medios. En resumen, en este apartado se pudo analizar la respuesta de un estrato dada para dieléctricos perfectos, buenos dieléctricos y buenos conductores y se vio que lo único que cambia es la expresión del coeficiente de reflexión. Cuando más alta es la frecuencia, el valor de la impedancia de los estratos más someros es la que domina en la expresión, mientras que en frecuencias más bajas dominarán las impedancias de los estratos más profundos.

## INCIDENCIA OBLICUA

En este apartado se estudiará la incidencia oblicua en medios dieléctricos.



El *plano de incidencia* se define como el plano que contiene al vector de propagación y al vector normal a la superficie. En la figura anterior, el plano de incidencia estaría definido por el plano de la hoja. En teoría electromagnética se maneja que, cuando uno de los campos electromagnéticos es perpendicular al plano de incidencia, como sería en la figura anterior el campo eléctrico, se dice que la incidencia es de tipo transversal. Es decir, cuando el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia, se le denomina una incidencia de tipo *transversal magnético* (TM) o **polarización vertical**; si el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia, entonces se dice que es una incidencia de tipo *transversal eléctrico* (TE) o **polarización horizontal**. Cabe hacer la observación que en Geofísica estas definiciones se manejan al contrario; por ejemplo, se conoce como transversal eléctrico cuando el campo magnético es paralelo al rumbo de la estructura y como transversal magnético cuando el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia.

Las condiciones de frontera, para  $z = 0$ , se siguen cumpliendo:

$$E_{t,1} = E_{t,2}$$

$$H_{t,1} = H_{t,2}$$

Indudablemente, el campo eléctrico incidente sólo presenta una componente en  $\mathbf{Y}$ , por lo que puede escribirse así:

$$\vec{E}_i = E_i e^{-i\vec{y} \cdot \vec{r}} \vec{j} \quad (1.717)$$

donde el vector de posición al plano de onda se expresa como:

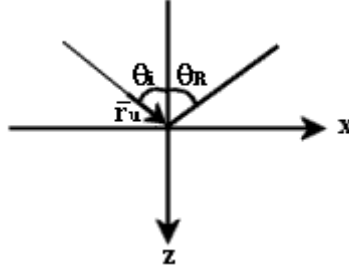
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + z\vec{k} \quad (1.718)$$

y donde el vector de propagación es



$$\vec{\gamma} = \gamma \vec{r}_u \quad (1.719)$$

siendo  $\vec{r}_u$  el vector unitario en la dirección de la propagación que está contenido en el plano de incidencia.



Expresado a través de sus cosenos directores,  $\vec{r}_u$  es igual a:

$$\vec{r}_u = \cos \theta_i \vec{k} + \sin \theta_i \vec{i} \quad (1.720)$$

por lo que el vector de propagación se puede expresar como:

$$\vec{\gamma} = \gamma (\sin \theta_i \vec{i} + \cos \theta_i \vec{k}) \quad (1.721)$$

De acuerdo con esto, el campo eléctrico incidente se escribirá así:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_i e^{-i[\gamma_1 (\sin \theta_i \vec{i} + \cos \theta_i \vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})]} \vec{j} \\ &= E_i e^{-i[\gamma_1 x \sin \theta_i + \gamma_1 z \cos \theta_i]} \vec{j} \end{aligned} \quad (1.722)$$

A este campo eléctrico también corresponde un campo magnético incidente. Como se recordará, el campo magnético está dado por:

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} \vec{n} \times \vec{E}$$

donde el vector de propagación  $\vec{n} = (\sin \theta_i \vec{i} + \cos \theta_i \vec{k})$  y la impedancia intrínseca está dada como  $Z = \frac{\omega \mu}{\gamma}$ . Si el vector  $\vec{E}$  se puede ver como  $\vec{E} = \vec{j} |\vec{E}|$ , entonces:

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} \vec{n} \times \vec{j} |\vec{E}| \quad (1.723)$$

Pero

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \vec{j} &= \text{sen}\theta_i \vec{i} \times \vec{j} + \cos\theta_i \vec{k} \times \vec{j} \\ &= \text{sen}\theta_i \vec{k} - \cos\theta_i \vec{i}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el campo magnético incidente se puede escribir como:

$$\vec{H}_i = \frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} \left( -\cos\theta_i \vec{i} + \text{sen}\theta_i \vec{k} \right) E_i e^{-i[\gamma_1 x \text{sen}\theta_i + \gamma_1 z \cos\theta_i]} \quad (1.724)$$

El campo transmitido va a ser similar al incidente, escribiéndose al campo eléctrico como:

$$\vec{E}_T = E_T E_i e^{-i[\gamma_2 x \cos\theta_T + \gamma_2 z \text{sen}\theta_T]} \vec{j} \quad (1.725)$$

y al campo magnético como:

$$\vec{H}_T = \frac{\gamma_2}{\omega\mu_2} \left( -\cos\theta_T \vec{i} + \text{sen}\theta_T \vec{k} \right) E_T e^{-i[\gamma_2 x \cos\theta_T + \gamma_2 z \text{sen}\theta_T]} \quad (1.726)$$

El campo eléctrico reflejado se puede escribir como:

$$\vec{E}_R = E_R e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} \vec{j} \quad (1.727)$$

donde  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , el vector de propagación es  $\vec{\gamma} = \gamma \vec{r}_u$ , pero donde ahora  $\vec{r}_u = \text{sen}\theta_R \vec{i} - \cos\theta_R \vec{k}$ . Por ende, el campo eléctrico reflejado se expresará como:

$$\begin{aligned}\vec{E}_R &= E_R e^{-i[(\gamma_1 \text{sen}\theta_R \vec{i} - \gamma_1 \cos\theta_R \vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})]} \vec{j} \\ &= E_R e^{-i[\gamma_1 x \text{sen}\theta_R - \gamma_1 z \cos\theta_R]} \vec{j}\end{aligned} \quad (1.728)$$

Recordemos que el campo magnético es:

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} \vec{n} \times \vec{E} = \frac{\gamma}{\omega\mu} \vec{n} \times \vec{E}$$

Pero, en el campo reflejado, el vector de propagación es  $\vec{n} = \text{sen}\theta_R \vec{i} - \cos\theta_R \vec{k}$ . Si recordamos que  $\vec{E} = \vec{j}|\vec{E}|$ , entonces

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{\gamma}{\omega\mu} \vec{n} \times \vec{E} = \frac{\gamma}{\omega\mu} \vec{n} \times \vec{j} |\vec{E}| \\
&= \frac{\gamma}{\omega\mu} (\sin\theta_R \vec{i} \times \vec{j} - \cos\theta_R \vec{k} \times \vec{j}) |\vec{E}|
\end{aligned} \tag{1.729}$$

Si además tenemos que  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  y que  $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ , entonces el campo magnético reflejado se puede escribir como:

$$\vec{H}_R = \frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} (\cos\theta_R \vec{i} + \sin\theta_R \vec{k}) E_R e^{-i[\gamma_1 x \sin\theta_R - \gamma_1 z \cos\theta_R]} \tag{1.730}$$

Se sigue cumpliendo con las condiciones de frontera, las cuales dicen que las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos deben ser continuas; por lo tanto, en  $z = 0$ , debe de satisfacerse que:

$$\begin{aligned}
E_i e^{-i\gamma_1 x \sin\theta_i} + E_R e^{-i\gamma_1 x \sin\theta_R} &= E_T e^{-i\gamma_2 x \sin\theta_T} \\
e^{-i\gamma_1 x \sin\theta_i} + R_{21} e^{-i\gamma_1 x \sin\theta_R} &= T_{21} e^{-i\gamma_2 x \sin\theta_T}
\end{aligned} \tag{1.731}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} E_i \cos\theta_i e^{-i\gamma_1 x \sin\theta_i} + \frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} E_R \cos\theta_R e^{-i\gamma_1 x \sin\theta_R} &= -\frac{\gamma_2}{\omega\mu_2} E_T \cos\theta_T e^{-i\gamma_2 x \sin\theta_T} \\
\frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} \left[ -\cos\theta_i e^{-i\gamma_1 x \sin\theta_i} + R_{21} \cos\theta_R e^{-i\gamma_1 x \sin\theta_R} \right] &= -\frac{\gamma_2}{\omega\mu_2} T_{21} \cos\theta_T e^{-i\gamma_2 x \sin\theta_T}
\end{aligned} \tag{1.732}$$

Para que lo anterior se cumpla, los exponentes de las ecuaciones deben de ser iguales, lo implicaría que:

$$\gamma_1 x \sin\theta_i = i\gamma_1 x \sin\theta_R = \gamma_2 x \sin\theta_T$$

Para lograr esto se puede hacer uso de la *Ley de Snell* de la reflexión y la refracción, la cual expresa lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sin\theta_i &= \sin\theta_R \\
\theta_i &= \theta_R \\
\gamma_1 \sin\theta_i &= \gamma_2 \sin\theta_T
\end{aligned} \tag{1.733}$$

Esta ley sólo es válida para medios dieléctricos o cuando se presenta una interfase dieléctrico-conductor. Con base en esta ley, las ecuaciones 1.731 y 1.732 se pueden volver a escribir como:

$$1 + R_{21} = T_{21} \quad (1.734)$$

$$\frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} [-\cos\theta_i + R_{21}\cos\theta_R] = -\frac{\gamma_2}{\omega\mu_2} T_{21}\cos\theta_T \quad (1.735)$$

donde  $R_{21} = \frac{E_R}{E_i}$  y  $T_{21} = \frac{E_T}{E_i}$ .

De la ecuación 1.735 podemos obtener:

$$\cos\theta_i - R_{21}\cos\theta_R = \frac{\gamma_2\mu_1}{\gamma_1\mu_2} T_{21}\cos\theta_T \quad (1.736)$$

Se puede multiplicar la ecuación 1.734 por  $\cos\theta_R$  de forma que:

$$\cos\theta_R + R_{21}\cos\theta_R = T_{21}\cos\theta_R \quad (1.737)$$

Sumando ahora las ecuaciones 1.736 y 1.737 se puede obtener el valor del coeficiente de transmisión:

$$2\cos\theta_i = \left[ \cos\theta_i + \frac{\gamma_2\mu_1}{\gamma_1\mu_2} \cos\theta_T \right] T_{21}$$

$$T_{21} = \frac{2\gamma_1\mu_2 \cos\theta_i}{\gamma_1\mu_2 \cos\theta_i + \gamma_2\mu_1 \cos\theta_T} \quad (1.738)$$

Para obtener el valor del coeficiente de reflexión se sustituye el valor obtenido de  $T_{21}$  en la ecuación 1.734:

$$R_{21} = T_{21} - 1$$

$$= \frac{2\gamma_1\mu_2 \cos\theta_i}{\gamma_1\mu_2 \cos\theta_i + \gamma_2\mu_1 \cos\theta_T} - 1$$

$$R_{21} = \frac{\gamma_1\mu_2 \cos\theta_i - \gamma_2\mu_1 \cos\theta_T}{\gamma_1\mu_2 \cos\theta_i + \gamma_2\mu_1 \cos\theta_T} \quad (1.739)$$

Si se compara estos valores con los obtenidos para los mismos coeficientes en el caso de la incidencia normal se puede observar que la única diferencia es la adición del coseno de los ángulos de incidencia y transmisión. Por lo tanto, si estos ángulos fueron de  $0^\circ$ , como es el caso de una incidencia normal, los valores expresados serían los mismos a los obtenidos en el tipo de incidencia mencionada.

Como se recordará, para el caso de dieléctricos-dieléctricos perfectos se tiene que:

$$\gamma_1 = \alpha_1 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$$

Por lo tanto, los coeficientes de reflexión y transmisión para un transversal magnético o polarización vertical se escribirán como:

$$R_{21} = \frac{\mu_2 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \cos \theta_i - \mu_1 \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \cos \theta_T}{\mu_2 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \cos \theta_i + \mu_1 \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \cos \theta_T} \quad (1.740)$$

$$T_{21} = \frac{2\mu_2 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \cos \theta_i}{\mu_2 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \cos \theta_i + \mu_1 \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \cos \theta_T} \quad (1.741)$$

En general, un material dieléctrico no es magnético, por lo que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , dejando a los coeficientes de reflexión y transmisión en función de la permitividad eléctrica:

$$R_{21} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_T}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_T} \quad (1.742)$$

$$T_{21} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_T} \quad (1.743)$$

La ley de Snell también quedaría como:

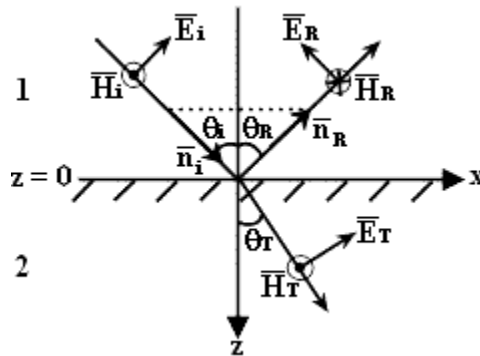
$$\theta_i = \theta_R$$

$$\gamma_1 \sin \theta_i = \gamma_2 \sin \theta_T$$

$$\omega \sqrt{\mu \epsilon_1} \sin \theta_i = \omega \sqrt{\mu \epsilon_2} \sin \theta_T$$

$$\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_T \quad (1.744)$$

La **polarización horizontal, paralela** o **transversal eléctrico** se puede visualizar en la siguiente gráfica:



Para este tipo de incidencia, el campo eléctrico tiene dos componentes mientras que el campo magnético sólo cuenta con una componente; por ende, es más sencillo trabajar con este último. El campo magnético incidente se ve entonces como:

$$\vec{H}_i = H_i e^{-i\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{r}} \vec{j} \quad (1.745)$$

que también puede verse como:

$$\vec{H}_i = \frac{\gamma_1}{\omega\mu} \vec{n} \times \vec{E} \quad (1.746)$$

Así mismo, los campos magnéticos reflejado y transmitido se pueden ver como:

$$\vec{H}_T = H_T e^{-i\vec{\gamma}_2 \cdot \vec{r}} \vec{j} \quad (1.747)$$

$$\vec{H}_R = -H_R e^{-i\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{r}} \vec{j} \quad (1.748)$$

Como se recordará, la ley de Amper (ecuaciones 1.566) dice que:

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = (\sigma + i\omega\varepsilon) \vec{E}$$

También se había visto la siguiente igualdad (ecuación 1.541):

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial \xi}$$

donde  $\vec{n}$  es el vector unitario en la dirección de propagación que, expresado con base en sus cosenos directores, se puede ver como:

$$\vec{n} = \text{sen}\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{k} \quad (1.749)$$

Si  $\vec{\gamma} \cdot \vec{r} = \gamma \vec{r}_u \vec{n} = \gamma \xi$ , entonces se puede escribir a  $\vec{H}$  como:

$$\vec{H} = H e^{-i\gamma \xi} \vec{j} \quad (1.750)$$

y su derivada sería igual a:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial \xi} = -i\gamma H e^{-i\vec{\gamma} \cdot \vec{r}} \vec{j} = -i\gamma H e^{-i\gamma \xi} \vec{j} \quad (1.751)$$

Por lo tanto, el rotacional del campo magnético se puede expresar como:

$$-i\gamma \vec{n} \times \vec{H} = (\sigma + i\omega\varepsilon) \vec{E} \quad (1.752)$$

Despejando esta ecuación obtendríamos un primer valor del campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{-i\gamma}{\sigma + i\omega\epsilon} \vec{n} \times \vec{H} \quad (1.753)$$

Si la multiplicamos el primer término de esta expresión por  $(-i\omega\mu)$  resultaría lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{-i\gamma\omega\mu}{-i(\sigma + i\omega\epsilon)\omega\mu} &= \frac{-i\gamma\omega\mu}{(\sigma\omega\mu + i\omega^2\mu\epsilon)(-i)} = \frac{-i\gamma\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - i\sigma\omega\mu} \\ &= -i \left[ \frac{\gamma\omega\mu}{\gamma^2} \right] = -i \frac{\omega\mu}{\gamma} \end{aligned} \quad (1.754)$$

De esta forma, el campo eléctrico se puede escribir como:

$$\vec{E} = -\frac{\omega\mu}{\gamma} \vec{n} \times \vec{H} \quad (1.755)$$

donde a  $Z = \frac{\omega\mu}{\gamma}$  es la impedancia intrínseca.

Si el vector normal incidente  $\vec{n}_i = \text{sen}\theta_i \vec{i} + \text{cos}\theta_i \vec{k}$ , entonces el producto cruz de este vector con el campo magnético incidente será igual a:

$$\begin{aligned} \vec{n}_i \times \vec{H}_i &= (\text{sen}\theta_i \vec{i} + \text{cos}\theta_i \vec{k}) \times \vec{j} H_i e^{-i\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{r}} \\ &= (\text{sen}\theta_i \vec{k} - \text{cos}\theta_i \vec{i}) H_i e^{-i\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{r}} \end{aligned} \quad (1.756)$$

ya que  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  y  $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ . Por lo tanto, el campo eléctrico incidente se expresará como:

$$\vec{E}_i = \frac{\omega\mu}{\gamma_1} (\text{cos}\theta_i \vec{i} - \text{sen}\theta_i \vec{k}) H_i e^{-i\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{r}} \quad (1.757)$$

De forma similar, si el producto cruz del vector normal reflejado y el campo magnético reflejado es igual a:

$$\vec{n}_R \times \vec{H}_R = (-\text{cos}\theta_i \vec{k} + \text{sen}\theta_i \vec{i}) \times H_R e^{-i\vec{\gamma}_1 \cdot \vec{r}} (-\vec{j}) \quad (1.758)$$

entonces el campo eléctrico reflejado se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_R &= -\frac{\omega\mu}{\gamma_1} \vec{n}_R \times \vec{H}_R \\
&= \frac{\omega\mu}{\gamma_1} (\cos\theta_R \vec{i} + \text{sen}\theta_R \vec{k}) H_R e^{-i\gamma_1 \cdot \vec{r}}
\end{aligned} \tag{1.759}$$

Si además se tiene que

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_i \cdot \vec{r} &= \gamma_1 \vec{n}_i \cdot \vec{r} = \gamma_1 [\text{sen}\theta_i \vec{i} + \cos\theta_i \vec{k}] \cdot [x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}] \\
&= \gamma_1 [x \text{sen}\theta_i + z \cos\theta_i]
\end{aligned} \tag{1.760}$$

y

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_R \cdot \vec{r} &= \gamma_1 \vec{n}_R \cdot \vec{r} = \gamma_1 [\text{sen}\theta_R \vec{i} - \cos\theta_R \vec{k}] \cdot [x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}] \\
&= \gamma_1 [x \text{sen}\theta_R - z \cos\theta_R]
\end{aligned} \tag{1.761}$$

entonces los campos eléctricos inducido y reflejado se pueden describir así:

$$\vec{E}_i = \frac{\omega\mu}{\gamma_1} (\cos\theta_i \vec{i} - \text{sen}\theta_i \vec{k}) H_i e^{-i\gamma_1 [x \text{sen}\theta_i + z \cos\theta_i]} \tag{1.762}$$

$$\vec{E}_R = \frac{\omega\mu}{\gamma_1} (\cos\theta_R \vec{i} + \text{sen}\theta_R \vec{k}) H_R e^{-i\gamma_1 [x \text{sen}\theta_R - z \cos\theta_R]} \tag{1.763}$$

El campo eléctrico transmitido se calcula de forma similar que el campo incidente, quedando finalmente como:

$$\vec{E}_T = \frac{\omega\mu}{\gamma_2} (\cos\theta_T \vec{i} - \text{sen}\theta_T \vec{k}) H_T e^{-i\gamma_2 [x \text{sen}\theta_T + z \cos\theta_T]} \tag{1.764}$$

Si sustituimos la misma equivalencia obtenida para los términos del exponente en la expresión de los campos magnéticos, estos se podrían ver así:

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z_1} H_i e^{-i\gamma_1 [x \text{sen}\theta_i + z \cos\theta_i]} \tag{1.765}$$

$$\vec{H}_R = \frac{1}{Z_1} H_R e^{-i\gamma_1 [x \text{sen}\theta_R - z \cos\theta_R]} \tag{1.766}$$

$$\vec{H}_T = \frac{1}{Z_2} H_T e^{-i\gamma_2 [x \text{sen}\theta_T + z \cos\theta_T]} \tag{1.767}$$

Para obtener los coeficientes de reflexión y transmisión, se recordará que la expresión inicial de los mismos es la siguiente:



$$\mathbf{R}_{21} = \frac{\mathbf{H}_R}{\mathbf{H}_i} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_{21} = \frac{\mathbf{H}_T}{\mathbf{H}_i}$$

y que las condiciones de frontera, para  $\mathbf{z} = 0$ , especifican que las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos son continuas:

$$\mathbf{E}_{t,1} = \mathbf{E}_{t,2}$$

$$\mathbf{H}_{t,1} = \mathbf{H}_{t,2}$$

De acuerdo con estas condiciones de frontera se debe de satisfacer que:

$$\mathbf{H}_i e^{-i\gamma_1 x \text{sen}\theta_i} - \mathbf{H}_R e^{-i\gamma_1 x \text{sen}\theta_R} = \mathbf{H}_T e^{-i\gamma_2 x \text{sen}\theta_T} \quad (1.768)$$

y que

$$\frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} \left[ \mathbf{H}_i \cos\theta_i e^{-i\gamma_1 x \text{sen}\theta_i} - \mathbf{H}_R \cos\theta_R e^{-i\gamma_1 x \text{sen}\theta_R} \right] = \frac{\gamma_2}{\omega\mu_2} \mathbf{H}_T \cos\theta_T e^{-i\gamma_2 x \text{sen}\theta_T} \quad (1.769)$$

Para que esto se satisfaga, se deben forzar las condiciones de frontera por medio de la aplicación de la Ley de Snell (ecuaciones 1.733), la cual dice que:

$$\text{sen}\theta_i = \text{sen}\theta_R$$

$$\theta_i = \theta_R$$

$$\gamma_1 \text{sen}\theta_i = \gamma_2 \text{sen}\theta_T$$

por lo que la ecuación 1.768 se convertiría en:

$$\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_R = \mathbf{H}_T \quad (1.770)$$

y la ecuación 1.769 en:

$$\frac{\gamma_1}{\omega\mu_1} [\mathbf{H}_i \cos\theta_i + \mathbf{H}_R \cos\theta_R] = \frac{\gamma_2}{\omega\mu_2} \mathbf{H}_T \cos\theta_T \quad (1.771)$$

Recordando la definición inicial de los coeficientes de reflexión y transmisión, las ecuaciones 1.770 y 1.771 se pueden volver a escribir así:

$$1 - \mathbf{R}_{21} = \mathbf{T}_{21} \quad (1.772)$$

$$\cos\theta_i + \mathbf{R}_{21} \cos\theta_R = \frac{\mu_1 \gamma_2}{\mu_2 \gamma_1} \mathbf{T}_{21} \cos\theta_T \quad (1.773)$$

Si multiplicamos la ecuación 1.772 por  $\cos\theta_R$ :

$$\cos \theta_R - R_{21} \cos \theta_R = \cos \theta_R T_{21} \quad (1.774)$$

y posteriormente la sumamos a la ecuación 1.773, podemos obtener el valor del coeficiente de transmisión:

$$2 \cos \theta_i = \left[ \frac{\mu_1 \gamma_2}{\mu_2 \gamma_1} \cos \theta_T + \cos \theta_R \right] T_{21}$$

$$T_{21} = \frac{2 \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i}{\mu_1 \gamma_2 \cos \theta_T + \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i} \quad (1.775)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1.772 se obtiene al coeficiente de reflexión:

$$R_{21} = 1 - \frac{2 \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i}{\mu_1 \gamma_2 \cos \theta_T + \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i}$$

$$= \frac{\mu_1 \gamma_2 \cos \theta_T - \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i}{\mu_1 \gamma_2 \cos \theta_T + \mu_2 \gamma_1 \cos \theta_i} \quad (1.776)$$

Para el caso de dieléctricos-dieléctricos, donde  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$  y  $\gamma = \alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$  ya que  $\beta = 0$ , se tendría que los coeficientes de reflexión y refracción equivalen a:

$$T_{21} = \frac{2 \sqrt{\mu \epsilon_1} \cos \theta_i}{\sqrt{\mu \epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\mu \epsilon_2} \cos \theta_T} = \frac{2 \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_T} \quad (1.777)$$

$$R_{21} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon_2} \cos \theta_T - \sqrt{\mu \epsilon_1} \cos \theta_i}{\sqrt{\mu \epsilon_2} \cos \theta_T + \sqrt{\mu \epsilon_1} \cos \theta_i} = \frac{\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_T - \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_T + \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i} \quad (1.778)$$

Si por el contrario se hubiera partido del campo eléctrico para obtener los coeficientes, utilizando la siguiente relación:

$$\vec{E} = -\frac{\omega \mu}{\gamma} \vec{n} \times \vec{H} \quad (1.779)$$

donde la impedancia es  $Z = \frac{\omega \mu}{\gamma}$  y la *admitancia* es el inverso de la impedancia:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\gamma}{\omega \mu} \quad (1.780)$$

se tendría que el campo magnético es:

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} \vec{n} \times \vec{E} \quad (1.781)$$

Por lo tanto, resultaría que los campos electromagnéticos incidentes, reflejados y transmitidos se expresarían así:

$$\vec{E}_i = (\cos \theta_i \vec{i} - \sin \theta_i \vec{k}) E_i e^{-i\gamma_1 [x \sin \theta_i + z \cos \theta_i]} \quad (1.782)$$

$$\vec{E}_R = (\cos \theta_R \vec{i} + \sin \theta_R \vec{k}) E_R e^{-i\gamma_1 [x \sin \theta_R - z \cos \theta_R]} \quad (1.783)$$

$$\vec{E}_T = (\cos \theta_T \vec{i} - \sin \theta_T \vec{k}) E_T e^{-i\gamma_2 [x \sin \theta_T + z \cos \theta_T]} \quad (1.784)$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z_1} E_i e^{-i\gamma_1 [x \sin \theta_i + z \cos \theta_i]} \quad (1.785)$$

$$\vec{H}_R = -\frac{1}{Z_1} E_R e^{-i\gamma_1 [x \sin \theta_R - z \cos \theta_R]} \quad (1.786)$$

$$\vec{H}_T = \frac{1}{Z_2} E_T e^{-i\gamma_2 [x \sin \theta_T + z \cos \theta_T]} \quad (1.787)$$

De acuerdo con las condiciones de frontera se conoce que, en  $z = 0$ , las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos son continuas, por lo que se obtendría:

$$Z_1 \cos \theta_i E_i e^{-i\gamma_1 x \sin \theta_i} + Z_1 \cos \theta_R E_R e^{-i\gamma_1 x \sin \theta_R} = Z_2 \cos \theta_T E_T e^{-i\gamma_2 x \sin \theta_T} \quad (1.788)$$

y que

$$\frac{1}{Z_1} e^{-i\gamma_1 x \sin \theta_i} - \frac{E_R}{Z_1} e^{-i\gamma_1 x \sin \theta_R} = \frac{E_T}{Z_2} e^{-i\gamma_2 x \sin \theta_T} \quad (1.789)$$

Aplicando la ley de Snell, estas últimas dos ecuaciones se transformarían en:

$$\cos \theta_i + R_{21} \cos \theta_R = T_{21} \cos \theta_T \quad (1.790)$$

$$\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_1} R_{21} = \frac{1}{Z_2} T_{21} \quad (1.791)$$

Se multiplica a la ecuación 1.790 por  $(1/Z_1)$  y a la ecuación 1.792 por  $(\cos \theta_R)$  para obtener lo siguiente:

$$\frac{1}{Z_1} \cos \theta_i + \frac{1}{Z_1} R_{21} \cos \theta_R = \frac{1}{Z_1} T_{21} \cos \theta_T \quad (1.792)$$

$$\frac{1}{Z_1} \cos \theta_R - \frac{1}{Z_1} R_{21} \cos \theta_R = \frac{1}{Z_2} T_{21} \cos \theta_R \quad (1.793)$$

Al sumar las ecuaciones 1.792 y 1.793, tomando en cuenta la ley de Snell, se puede posteriormente despejar el valor del coeficiente de transmisión:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{Z_1} \cos \theta_i &= \left( \frac{\cos \theta_T}{Z_1} + \frac{\cos \theta_R}{Z_2} \right) T_{21} \\
\frac{2}{Z_1} \cos \theta_i &= \left( \frac{Z_2 \cos \theta_T + Z_1 \cos \theta_i}{Z_1 Z_2} \right) T_{21} \\
T_{21} &= \frac{2Z_1 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_T + Z_1 \cos \theta_i} \quad (1.794)
\end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1.791 se puede obtener el valor del coeficiente de reflexión:

$$\begin{aligned}
R_{21} &= Z_1 \left( \frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} T_{21} \right) = 1 - \frac{Z_1}{Z_2} T_{21} \\
&= 1 - \frac{Z_1}{Z_2} \frac{2Z_1 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_T + Z_1 \cos \theta_i} \\
R_{21} &= \frac{Z_2 \cos \theta_T - Z_1 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_T + Z_1 \cos \theta_i} \quad (1.795)
\end{aligned}$$

En general, se define a la impedancia como  $Z = \omega\mu/\gamma$ ; pero en dieléctricos perfectos se conoce que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  y que  $\gamma = \alpha$ , donde  $\alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  es la constante de fase en dieléctricos perfectos. Por lo tanto, la impedancia se puede expresar como:

$$Z = \frac{\omega\mu}{\alpha} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

De acuerdo con esto, los coeficientes de transmisión y reflexión serán los siguientes:

$$\begin{aligned}
T_{21} &= \frac{2\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_T + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i} \\
&= \frac{2\sqrt{\frac{1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon_2}} \cos \theta_T + \sqrt{\frac{1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i} \quad (1.796)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{21} &= \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_T - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_T + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i} \\
 &= \frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon_2}} \cos \theta_T - \sqrt{\frac{1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon_2}} \cos \theta_T + \sqrt{\frac{1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}
 \end{aligned} \tag{1.797}$$

Si multiplicáramos las ecuaciones 1.796 y 1.797 arriba y abajo por  $(\sqrt{\epsilon_2 \epsilon_1})$  obtendríamos los mismos valores de los coeficientes de transmisión y reflexión que se calcularon cuando se partió del campo magnético (ecuaciones 1.777 y 1.778).

En su forma más general, el coeficiente de transmisión se puede expresar así (ecuac. 1.794):

$$T_{21} = \frac{2Z_1 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_T + Z_1 \cos \theta_i}$$

Pero existen formas equivalentes de escribirla, dependiendo de la clasificación del medio existente:

$$T_{21} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_T + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}$$

$$T_{21} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon_2}} \cos \theta_T + \sqrt{\frac{1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}$$

$$T_{21} = \frac{2\sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_T + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_i}$$

Del mismo modo, la forma general del coeficiente de reflexión es la siguiente (ecuac. 1.795):

$$R_{21} = \frac{Z_2 \cos \theta_T - Z_1 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_T + Z_1 \cos \theta_i}$$

A su vez, también tiene ecuaciones equivalentes:

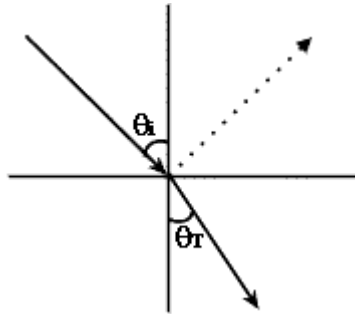
$$R_{21} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_T - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_T + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}$$

$$R_{21} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon_2}} \cos \theta_T - \sqrt{\frac{1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon_2}} \cos \theta_T + \sqrt{\frac{1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}$$

$$R_{21} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_T - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_T + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_i}$$

### Transmisión total

La transmisión total implica que, al incidir la onda, no existe reflexión. Al ángulo en el que esto ocurre se le conoce como *ángulo de Brewster* ( $\theta_i = \theta_B$ ).



Cuando el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia, al tener una transmisión total, se dice que el coeficiente de reflexión no existiría:

$$R_{21} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_T - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_T + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i} = 0 \quad (1.798)$$

Para que esto suceda, aplicando la ley de Snell, se llegaría a que el seno del ángulo de incidencia es igual a:

$$\text{sen}\theta_i = \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}} \quad (1.799)$$

Como el seno del ángulo máximo no puede ser mayor que 1, implicaría que:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \leq \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Pero en dieléctricos ocurre que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , por lo que

$$\text{sen}\theta_i = \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1}{0}} = \infty \quad (1.800)$$

Esto nos indicaría que no se presenta el fenómeno de transmisión total cuando el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia, ya que no existe ningún ángulo real cuyo seno sea igual a infinito.

Cuando el campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia, recordando que el coeficiente de reflexión es:

$$R_{21} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_T - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_T + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_i}$$

se tendría que, aplicando la ley de Snell, el seno del ángulo de incidencia se puede expresar así:

$$\text{sen}\theta_i = \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}} \quad (1.801)$$

El seno de un ángulo real sólo puede ser igual o menor a 1, por lo que se debe de cumplir que:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \leq \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \leq \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Sin embargo, en la mayoría de los dieléctricos se tiene que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , por lo que

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \leq 1$$

De esta forma, se tendría que el seno del ángulo de incidencia sería:

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta_i &= \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_1}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1}}{\frac{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1 (\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2)}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}} \end{aligned} \quad (1.802)$$

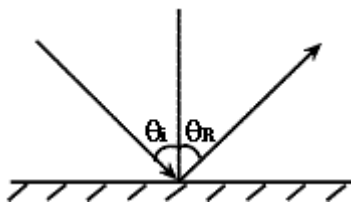
donde  $(\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2) = (\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 + \epsilon_1)$ . Así, el ángulo de Brewster se puede obtener a partir de:

$$\theta_i = \theta_B = \text{sen}^{-1} \left[ \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}} \right] = \cos^{-1} \left[ \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \right] = \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \right] \quad (1.803)$$

Esto significa que, en el momento en que un frente de onda incide con este ángulo, no habría reflexión sino que todo se transmitiría. Para que esto suceda, la transmisión se debe de dar a  $60^\circ$ . A este ángulo se le llama ángulo de Brewster.

## Reflexión total

La reflexión total implica que no existe transmisión al incidir el frente de onda plano. Al ángulo de incidencia en el que sucede esto se le conoce como *Ángulo de Crítico* ( $\theta_i = \theta_c$ ).



Cuando el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia, si la reflexión es total, se tendría que el coeficiente de reflexión es igual a 1:



$$\mathbf{R}_{21} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_T}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_T} = 1 \quad (1.804)$$

Para que esta igualdad se cumpla, se requeriría que el coseno del ángulo de transmisión fuera:

$$\cos \theta_T = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_T} \quad (1.805)$$

Aplicando la ley de Snell, el coseno del ángulo de transmisión se define como:

$$\cos \theta_T = \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \text{sen}^2 \theta_i} \quad (1.806)$$

Para que deje de existir el ángulo de transmisión bastaría con que:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \text{sen}^2 \theta_i &> 1 \\ \text{sen}^2 \theta_i &> \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \end{aligned}$$

ya que resultaría un número imaginario y, por lo tanto, toda la onda se estaría reflejando. Si

$$\text{sen}^2 \theta_i = \frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} \quad (1.807)$$

tomando en cuenta que en dieléctricos  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , se podría obtener que el ángulo crítico se puede obtener a través de:

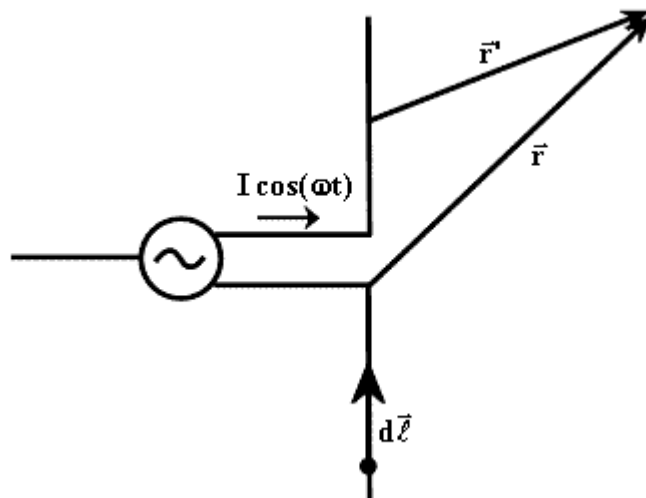
$$\theta_i \geq \theta_c = \text{sen}^{-1} \left[ \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \right] \quad (1.808)$$

Esto significa que se va a tener un ángulo crítico cuando una onda viaja de medios de menor permitividad eléctrica a mayor permitividad eléctrica. Esta misma expresión 1.808 se obtiene para cuando el campo eléctrico es paralelo al ángulo de incidencia.

## RADIACIÓN

### DIPOLO ELÉCTRICO

Un *dipolo eléctrico* o antena es un elemento de cable finito que es alimentado por una corriente alterna  $I$ . Al viajar la corriente por el elemento cable, se va presentar una concentración de carga en una de las esquinas. Las cargas variables que suben y bajan por el elemento de cable o la antena están aceleradas. Cuando una carga experimenta una aceleración, emite radiación electromagnética; cuanto mayor sea la aceleración, mayor será la radiación que emite (Bueche y Jerde, 1996).



Por otro lado, se sabe que el campo magnético puede provenir del rotacional de una función vectorial:

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$$

y que  $\vec{A}$  satisface, para el espacio libre (sin fuente), la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.809)$$

La solución de esta ecuación en el dominio de las frecuencias es:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\vec{J}(\vec{r}) e^{-i\gamma r}}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\ell \quad (1.810)$$

donde  $\vec{J}$  es la corriente espacial y  $\mathbf{R}$  es un vector de posición. De acuerdo con esto, al tener corriente, el campo magnético se puede expresar en el dominio del tiempo como:

$$\vec{H} = -\frac{1}{4\pi} \int \left[ \frac{I_0 \sin \omega(t - \alpha r)}{r^2} + \frac{I_0 \omega \cos(t - \alpha r)}{r/\alpha} \right] \vec{r}_u \times d\vec{\ell} \quad (1.811)$$

donde  $\alpha$  es la constante de fase y la constante de atenuación  $\beta = 0$  en el espacio vacío. Cuando el producto

$$\gamma r \ll 1$$

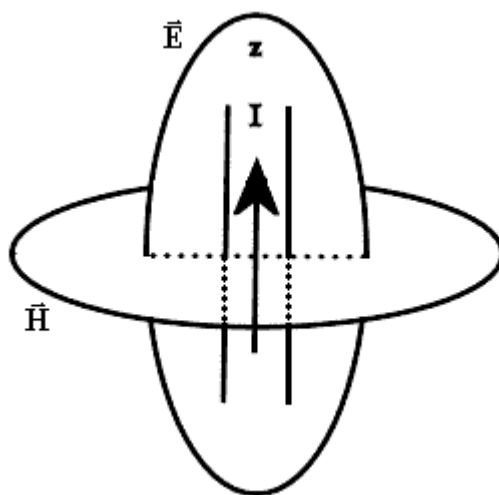
se dice que se encuentra en una **zona de inducción**. En esta zona los campos pueden resolverse como si estuvieran en un régimen estacionario, sin variación en el tiempo, ya que estos se mantienen relativamente constante. Cuando

$$\gamma r \gg 1$$

se dice que uno está en la **zona de radiación**. En esta zona, el campo puede estudiarse como un frente de onda plano, ya que las ondas electromagnéticas ya son transversales a la dirección de propagación. Si el punto se encuentra muy lejos de la fuente,  $\mathbf{R}$  se mantendría relativamente constante y sería aproximadamente igual a la  $\mathbf{r}$  de posición ( $\mathbf{R} \cong \mathbf{r}$ ). Por ende, únicamente en la zona de radiación, el potencial se comportaría como un dipolo eléctrico:

$$\vec{A} = \frac{I}{4\pi} \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \int_L \frac{\vec{J}(\vec{r}) e^{-i\gamma r}}{R(\vec{r}, \vec{r}')} d\ell \quad (1.812)$$

Un dipolo eléctrico se caracteriza por no poder tener una componente de campo magnético en la dirección en que la corriente viaja. En otras palabras, la corriente está viajando sobre la antena en la dirección  $\mathbf{Z}$ , por lo tanto no puede tener componente en  $\mathbf{Z}$ . Entonces, el campo eléctrico sigue a la corriente en un plano paralelo a la antena mientras el campo magnético está supeditado a viajar en círculos en un plano perpendicular a la antena.

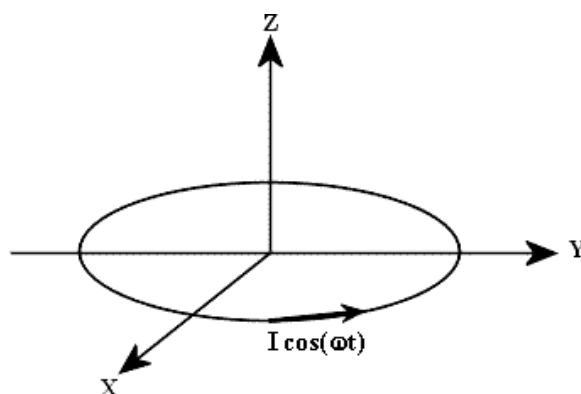


En Geofísica siempre se va a observar los fenómenos en la zona de radiación, nunca en la de inducción, ya que es en la primera zona en la que los campos son transversales a la

dirección de propagación. Otra cuestión es que, en Geofísica, no se utiliza el dipolo eléctrico vertical ya que se ha comprobado que no produce onda reflejada. Por ejemplo, cuando el dipolo eléctrico vertical está sobre en la interfase Tierra-Aire, la componente se anula y no hay radiación, ya que la respuesta de la Tierra y la respuesta de la antena se anulan mutuamente. En cambio, si existe respuesta en un dipolo eléctrico horizontal. Por ejemplo, radar de penetración terrestre utiliza una antena que polariza en la dirección horizontal para obtener la respuesta del subsuelo.

## DIPOLO MAGNÉTICO

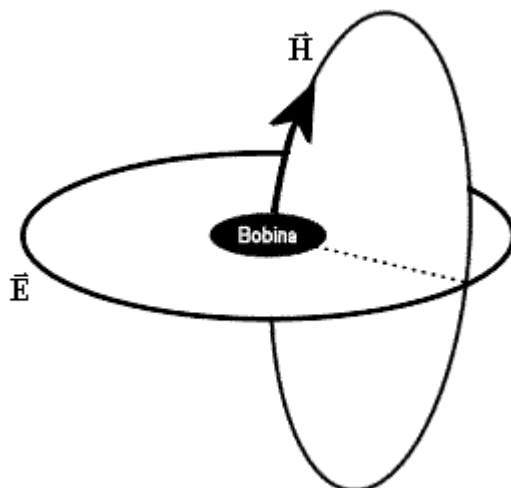
En el dipolo magnético se tiene a una bobina que es alimentada con una corriente variable.



La solución del potencial vectorial sería la misma que en el dipolo eléctrico, sólo ahora se tendría una componente circular. Lo único que cambia en el dipolo magnético es que se invierte con respecto al eléctrico. Es decir, en el dipolo magnético, el campo eléctrico está dado por una expresión de este tipo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi V_f^2} \int \frac{I_0 \omega \cos(\omega t - \omega \alpha r)}{r} d\vec{\ell} \quad (1.813)$$

donde  $V_f$  es la velocidad de fase. En este caso, el campo magnético va a seguir el patrón de las corrientes.



Entonces, en un dipolo magnético, el campo eléctrico tiene componente radial y componente en  $\phi$  y el campo magnético tiene solamente una componente en  $Z$ :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_r \vec{r}_u + E_\phi \vec{\phi}_u \\ \vec{H} &= H_z \vec{k}\end{aligned}\tag{1.814}$$

En la gran mayoría de los métodos electromagnéticos, excepto en GPR, las fuentes que utilizan son dipolos magnéticos, tanto horizontales como verticales. Algunos otros utilizan dipolos eléctricos horizontales, más nunca verticales. Básicamente, un dipolo magnético produce una sola componente vertical al plano del dipolo, y un dipolo eléctrico únicamente produce una componente de campo eléctrico en la dirección en que está orientada la antena o el dipolo. Los métodos electromagnéticos están diseñados para observar desde la zona de radiación (campo lejano); para lograr esto, el aparato envía un campo y luego corta la fuente, dejando pasar un tiempo para poder detectar posteriormente al campo secundario producido en el subsuelo sin el problema de la presencia del campo primario.