Pêndulo Duplo

Jaqueline de Souza Ortiz
UFPR - CM103 - 2018s2
jaqueortiz13@gmail.com

PALAVRAS CHAVE. Pêndulo, Equações Diferenciais, Caos.

1. Introdução

Um pêndulo duplo, que consiste em um pêndulo simples suspenso em outro, é um sistema caótico. Isso significa que, uma pequena alteração nas condições iniciais dos parâmetros pode causar um efeito significativo sobre o movimento do pêndulo. Como resultado, o movimento de um pêndulo duplo é difícil de prever, pois exibe um comportamento aparentemente aleatório ou caótico. O movimento do pêndulo duplo pode ser descrito usando um sistema de equações diferenciais ordinárias, no entanto, como essas equações não possuem solução analítica, elas devem ser aproximadas numericamente com auxílio computacional.

2. O problema

Como dito anteriormente, um pêndulo duplo é um pêndulo simples suspenso em outro, como pode ser visto na figura 1.

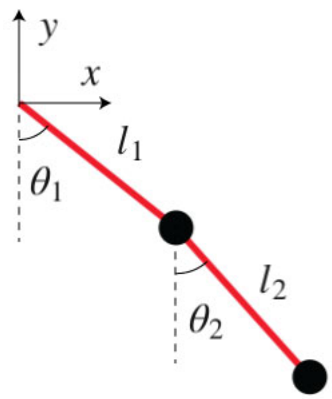

Figura 1

Diversas variáveis podem ser consideradas, na análise seguinte tomaremos $l_1 = l_2$ e $m_1 = m_2$, e consideramos que o pêndulo está no plano xy, coincidindo com (0,0) no ponto de suspensão.

2.1. Teoria

Podemos definir as coordenadas dos pêndulos com as seguintes relações:

$$x_1 = l_1 sin\theta_1$$

$$y_1 = -l_1 cos\theta_1$$

$$x_2 = l_1 sin\theta_1 + l_2 sin\theta_2$$

$$y_2 = -l_1 cos\theta_1 - l_2 cos\theta_2$$

Com as coordenadas das posições, podemos calcular a energia potencial do sistema, que é dada por

$$E_p = mgy$$

Como estamos trabalhando com um sistema, a energia potencial total é a soma da energia potencial no primeiro e no segundo pêndulo. Assim, temos:

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

$$E_p = m_1 g(-l_1 cos\theta_1) + m_2 g(-l_1 cos\theta_1 - l_2 cos\theta_2)$$

$$E_p = -(m_1 + m_2) l_1 g cos\theta_1 - m_2 g l_2 cos\theta_2$$

Agora, podemos calcular a energia cinética, que é dada por

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Para obtermos a velocidade, basta tomar a primeira derivada da posição com relação ao tempo, logo temos

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \, cos\theta_1$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \, sin\theta_1$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \, cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \, cos\theta_2$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \, sin\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \, sin\theta_2$$

Assim, podemos calcular $E_c = \frac{1}{2} \, m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \, m_2 v_2^2$

$$E_c = \frac{1}{2} \, m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} \, m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \, m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} \, m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \, \dot{\theta}_2 \, cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

Com ambas as energias calculadas, podemos obter a Lagrangiana. A Lagrangiana ($\mathscr{L}$) de um sistema é uma função expressa em termos das coordenadas generalizadas q_i, da taxa de variação dessas coordenadas e do tempo t, e é dada matematicamente pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial generalizada do sistema:

$$\mathscr{L} = E_c - E_p$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} \, m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \, m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \, \dot{\theta}_2 \, cos(\theta_1 - \theta_2)] + (m_1 + m_2) l_1 g cos\theta_1 + m_2 l_2 g cos\theta_2$$

2.2. As equações de Euler-Lagrange

Agora podemos escrever as equações de Euler-Lagrange, que devem ser verdadeiras para $\mathscr{L}$. A equação é dada por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = 0, q_i = \theta_1, \theta_2$$

Para θ_1, temos:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_1} = -l_1 g (m_1 + m_2) sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \, \dot{\theta}_2 \, sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 \ + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \ cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_2 \ + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \ cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \ sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1 \ - \dot{\theta}_2 \ )$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1+m_2)\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 sin(\theta_1-\theta_2) + (m_1+m_2) g sin\theta_1 = 0(1)$$

Fazendo o mesmo processo para θ_2

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sin(\theta_1-\theta_2) - l_2 m_2 g sin\theta_2$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_1 cos(\theta_1-\theta_2) - l_1\dot{\theta}_1^2 sin(\theta_1-\theta_2) + g sin\theta_2 = 0(2)$$

Note que das equações (1) e (2) formamos um sistema:

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 sin(\theta_1-\theta_2) + (m_1+m_2) g sin\theta_1 = 0 \\ l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_1 cos(\theta_1-\theta_2) - l_1\dot{\theta}_1^2 sin(\theta_1-\theta_2) + g sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Para resolução, isolamos $\ddot{\theta}_2$ na equação (2) e substituímos em (1), e vice-versa para (2). Assim, isolando $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$ obtemos as seguintes equações:
Considere: $m = (m_1+m_2)$, $\theta = (\theta_1-\theta_2)$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 sin\theta cos\theta + g m_2 sin\theta_2 cos\theta - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 sin(\theta) - m g sin\theta_1}{l_1 m - m_2 l_1 cos^2\theta}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 sin\theta cos\theta + g m sin\theta_1 cos\theta + m l_1 \dot{\theta}_1^2 sin\theta - g m sin\theta_2}{l_2 m - m_2 l_2 cos^2\theta}$$

As equações acima estão próximas da forma necessária para o método de Runge Kutta. A última etapa é converter essas duas equações de segunda ordem em quatro equações de primeira ordem. Assim, temos:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{-m_2 l_1 \omega_1^2 sin\theta cos\theta + g m_2 sin\theta_2 cos\theta - m_2 l_2 \omega_2^2 sin\theta - m g sin\theta_1}{l_1 m - m_2 l_1 cos^2\theta}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{m_2 l_2 \omega_2^2 sin\theta cos\theta + g m sin\theta_1 cos\theta + l_1 m \omega_1^2 sin\theta - g m sin\theta_2}{l_2 m - m_2 l_2 cos^2\theta}$$

Assim, temos a forma necessária para encontrar a solução numérica pelo método de Runge Kutta.

3. O método de Runge kutta de ordem 4

O método mais famoso de Runge Kutta é o de ordem 4, chamado de RK4. Seja um probelma de valor inicial

$$\dot{y} = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Então o método de RK4 é dado pelas seguintes equações:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Onde y_{n+1} é a aproximação por RK4 $y(t_{n+1})$, e

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right)$$

Como precisamos resolver para um sistema de equações, mudados os y's e os k's para vetores, obtendo a solução do sistema.

3.1. Algoritmos

Algorithm 1: RK4 para solução do sistema

Data: Y_0: vetor com as condições iniciais
f: vetor com as equações
tf: ponto final
t_0: ponto inicial
Result: Vetor solução Y
for *i=1 to n* **do**
  $k_1 = f(t_i, Y_i)$
  k$_2 = f(t_i + 0.5, Y_i + 0.5 * h * k_1)$
  k$_3 = f(t_i + 0.5, Y_i + 0.5 * h * k_2)$
  k$_4 = f(t_i + h, Y_i + h * k_3)$
  Y$_{i+1} = Y_i + (\frac{1}{6} * h) * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4)$

Algorithm 2: Pêndulo duplo

Defina os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2)
Define a variável $skip = div(n, 100)$
for *i = 1:skip:n* **do**
  pontos (x_1, x_2, y_1, y_2)
  "cordas"$([0; x_1; x_2], [0; y_1; y_2])$

4. Imagens

Na figura 2, temos o comportamento da velocidade angular ω_1 com os seguintes valores nas constantes: $m_1 = m_2 = 1.0$, $g = -1.0$, $l_1 = l_2 = 3.0$, $\omega_0 = 0$, $\theta_0 = 0.75\pi$, $t0, tf = 0, 60.0$ e $n = 10000$

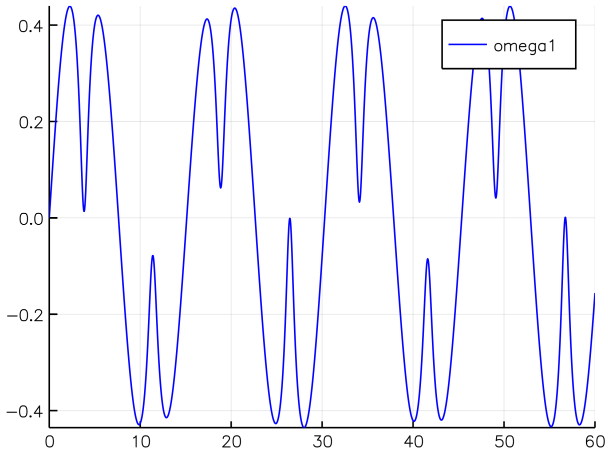

Figura 2

Na figura 3, a velocidade de ω_2 com as mesmas constantes

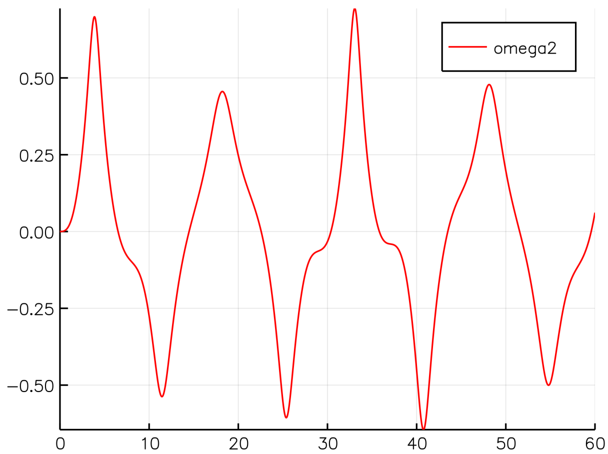

Figura 3

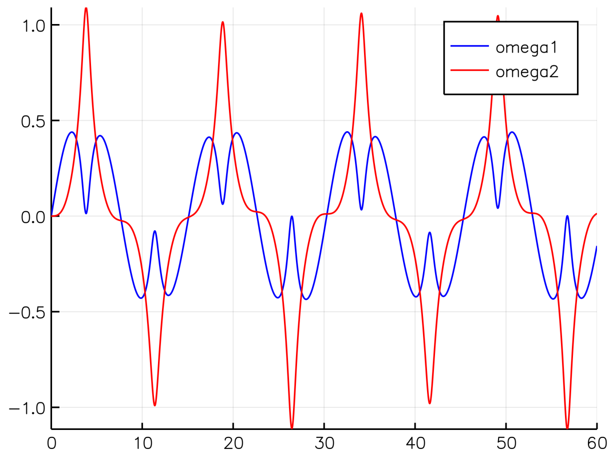

Figura 4

Na figura 5, o comportamendo de θ_1

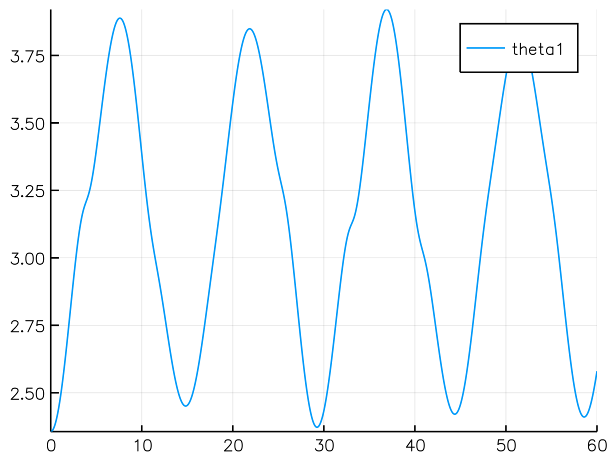

Figura 5

Figura 6, θ_2

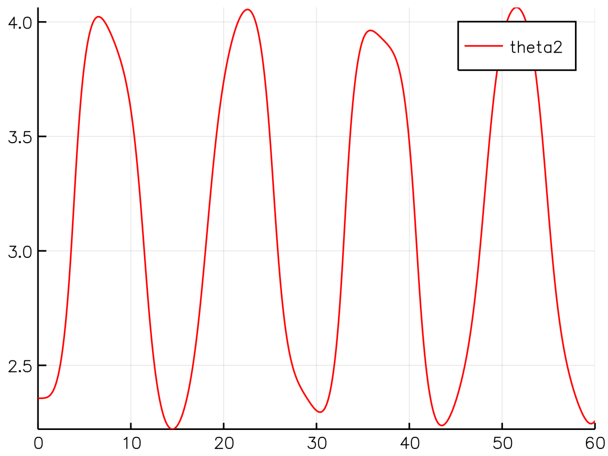

Figura 6

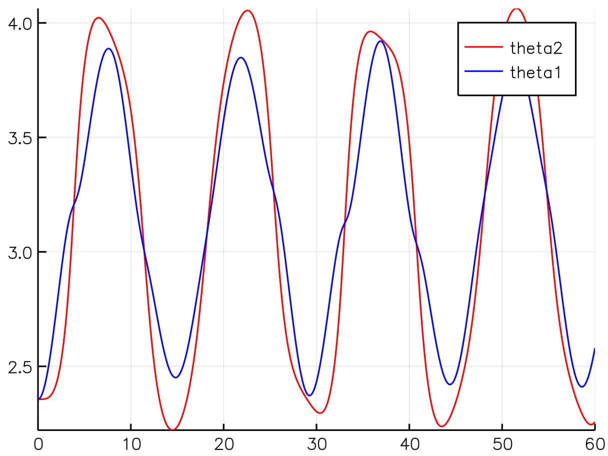

Figura 7

[1] [2] [3] [4]

Referências

[1] `https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2015/MS211/Aula14.pdf`. Acessado: 2018-11-22.

[2] (2007). `http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html`. Acessado: 2018-11-22.

[3] (2016). `https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_de_Lagrange`. Acessado: 2018-11-22.

[4] (2017). `https://scipython.com/blog/the-double-pendulum/`. Acessado: 2018-11-22.