UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM - 2023.1
PROFESSOR: WILLIKAT BEZERRA DE MELO
TURMA: 2Z

MONITOR: JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

ENCONTRO DE MONITORIA - 08/08/2023

PROBLEMAS

1. Um homem tem 2 amigas e 4 amigos. Sua esposa tem 3 amigas e 3 amigos. De quantos modos eles podem convidar 3 amigas e 3 amigos, se cada um deve convidar 3 pessoas?

2. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 6 livros de cálculo, 3 livros de análise combinatória e 4 livros de álgebra linear, considerando todos os livros como sendo diferentes e de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

3. Quantas diagonais possui um prisma octagonal regular?

RESOLUÇÃO

1.
Teremos os seguintes cenários:

- **A mulher convida 3 amigas e seu marido convida e 3 amigos:**

  Nesse caso, existe apenas $C_3^3 = 1$ maneira de escolher as pessoas que a mulher irá convidar e $C_3^4 = 4$ maneiras de escolher as pessoas que o seu marido irá convidar. Assim, pelo princípio multiplicativo, há $1 \cdot 4 = 4$ maneiras de convidar os amigos.

- **A mulher convida 2 amigas e 1 amigos e seu marido convida 1 amiga e 2 amigos:**

  Nesse caso, existem $C_2^3 \times C_1^3 = 9$ maneiras de escolher os amigos da mulher e $C_1^2 \times C_2^4 = 12$ maneiras e de escolher os amigos do seu marido. (Por quê?) Assim, pelo princípio multiplicativo, há $9 \cdot 12 = 108$ maneiras de escolher os amigos.

- **A mulher convida 1 amiga e 2 amigos e seu marido convida 2 amigas e 1 amigo:**

  Nesse caso, existem $C_1^3 \times C_2^3 = 9$ maneiras de escolher os amigos da mulher e $C_2^2 \times C_1^4 = 4$ maneiras e de escolher os amigos do seu marido. (Por quê?) Assim, pelo princípio multiplicativo, há $9 \cdot 4 = 36$ maneiras de escolher os amigos.

Note que esses são os únicos cenários possíveis, dadas as condições impostas no enunciado. Portanto, pelo princípio aditivo, há $4+108+36 = 148$ maneiras de convidar as 6 pessoas.

2.
Ao final do processo, os livros ficarão enfileirados. Como os livros de um mesmo assunto permanecem juntos, poderemos dividir a fila em três outras filas menores:

(i) a fila dos livros de cálculo:
Há $P_6^6 = 6!$ maneiras de ordenar os lívros desta fila.

(ii) a fila dos livros de análise combinatória:
Há $P_3^3 = 3!$ maneiras de ordenar os lívros desta fila.

(iii) a fila dos livros de álgebra linear:
Há $P_4^4 = 4!$ maneiras de ordenar os lívros desta fila.

Após escolhida a ordem dos livros de cada fila, há $P_3^3 = 3!$ maneiras de ordenar as filas (i), (ii) e (iii). Desse modo, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de colocar os livros na prateleira, respeitando as condições impostas, é

$$6! \times 3! \times 4! \times 3! = (3!)^2 \times 4! \times 6! = 622080$$

3.
Uma diagonal de um polígono (caso 2D) é um segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos. Já uma diagonal de um poliedro (caso 3D) é um segmento que além de possuir essa propriedade, também possui a propriedade de não ser uma diagonal (2D) de qualquer uma de suas faces.

A figura possui 16 vértices e 24 arestas. Como cada par de vértices selecionado determina um único segmento, então contar quantos pares de vértices existem é equivalente a contar quantos segmentos podem ser traçados na figura. Logo, há $C_2^{16} = 120$ segmentos possíveis.

Nessa quantidade estão incluídos as diagonais do poliedro, diagonais das faces e as arestas, já que todas são segmentos. Calculando o número de diagonais de cada face:

Temos 8 faces retangulares e 2 faces octagonais, cada uma com 2 e 20 diagonais, respectivamente (Por quê?). Portanto, utilizando os princípios multiplicativo e aditivo, temos que o número de diagonais das faces é:

$$8 \cdot 2 + 2 \cdot 20 = 56$$

Desse modo, o número de diagonais do poliedro será igual a

$$\underbrace{120}_{\text{total de segmentos}} - \overbrace{56}^{\text{diagonais (faces)}} - \underbrace{24}_{\text{arestas}} = 40$$