

1. Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO:

- que começam por consoante e terminam por vogal?
- que têm as letras C, A, P juntas nessa ordem?
- que têm as letras C, A, P juntas em qualquer ordem?
- que têm as vogais e as consoantes intercaladas?
- que têm a letra C no 1º lugar e a letra A no 2º lugar?
- que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar?
- que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar ou a letra P no 3º lugar?

consoantes

$$(a) \quad 4 \cdot \underline{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4 = 4^2 \cdot 6! = 11520$$

Vogais

$$(b) \quad 5 \cdot \underline{CAP} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5! = 6! = 720$$

↳ maneiras de posicionar

$$(c) \quad 5 \cdot \underline{CAP} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \cdot 6 \cdot 5! = 3! \cdot 6! = 4320$$

↳ permutando C, A, P

$$(1) \quad 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \quad (\text{começando por vogal})$$

$$(2) \quad 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \quad (\text{começando por consoante})$$

$$= (4!)^2 + (4!)^2 = 2 \cdot (4!)^2 = 1152$$

$$(e) \quad \underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{6!} = 6! = 720$$

$$(f) \quad \underline{1} \cdot \underline{7!} + \underline{7} \cdot \underline{1} \cdot \underline{6!} = 7! + 7!$$

(C em primeiro) (A em 2º)

Porém contabilizamos o caso de C em 1º e A em 2º 2X. Logo,

Resposta: $7! + 7! - 6! = 9360$

↳ C, A, P

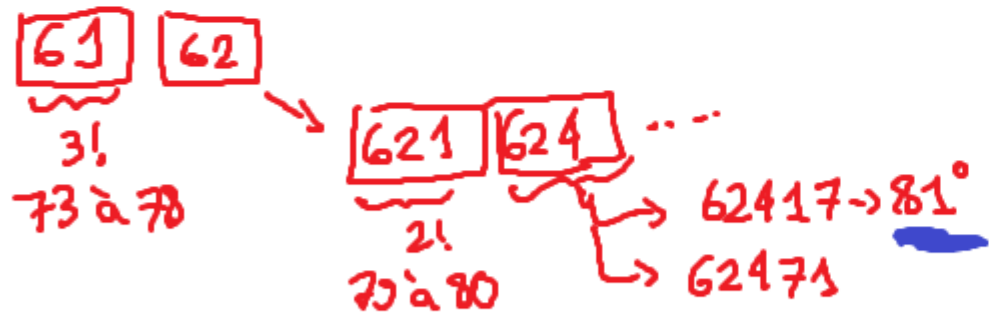
$$(g) \quad 7! + 7! + 7! - 6! - 6! - 6! + 5! = 13080$$

↳ C, A, P ↳ A, C, P ↳ P, C, A ↳ C, A, P ↳ A, C, P ↳ P, C, A

2. Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.

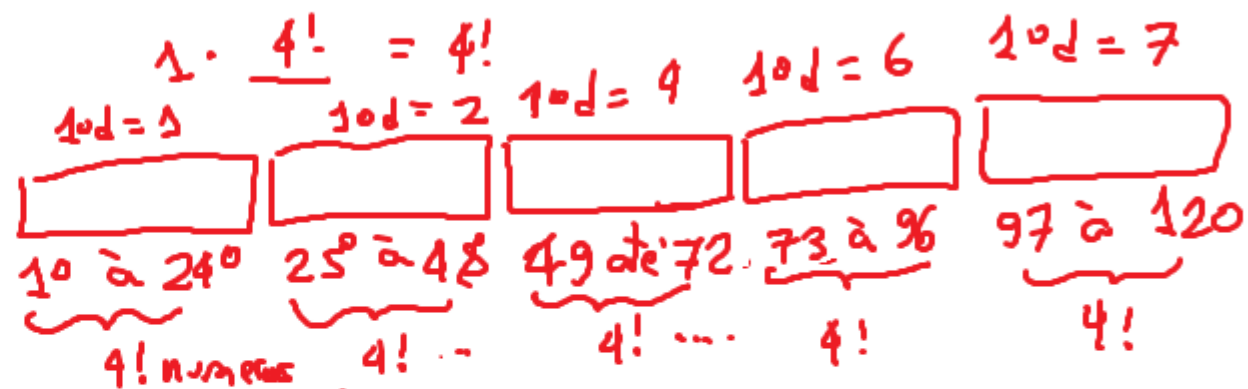
- que lugar ocupa o número 62417? 81º
- qual o número que ocupa o 66º lugar?
- qual o 200º algarismo escrito?
- qual a soma dos números assim formados?

(a) entre 73º e 96º. Vamos ordenar os números que começam com 6:



$$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 5! \text{ números formados}$$

Começando com 1:



1 até n : n números

$$k \text{ até } n: (1 \text{ até } k-1) + (k \text{ até } n) = k-1 + x = n \Rightarrow x = n - k + 1$$

$\Rightarrow k \text{ até } n: n - k + 1$ números

• $k \text{ até } n$, sabendo de $n - k + 1$ e k :

$$k + (n - k + 1) = n + 1$$

- a) que lugar ocupa o número 62417?
 b) qual o número que ocupa o 66º lugar?
 c) qual o 200º algarismo escrito?
 d) qual a soma dos números assim formados?

~> ^(b) É algum número que começa por 4: 49º até 72º

↳ Cada número: 5 algarismos

Assim,

1º número: 5 primeiros algarismos escritos

2º número: 6 a 10 algarismos escritos

em geral:

K º número: $5K-4$ a $5K$ algarismo escritos $\Rightarrow 5K = 200 \Rightarrow K = 40$

④ o 200º algarismo foi o: 1 de 26471

41 42 46

3! ↓
 49 a 54 55 a 60 61 a 66

↳ o último número da sua categoria:

46 721

①

começa por 2: 25º a 48º

3! < 21 24 26 ③

25 a 30 31 a 36 37 a 42

2! < 261 264 < 26471 ⑤

37 a 38 39 a 40

- que lugar ocupa o número 62417?
- qual o número que ocupa o 66º lugar?
- qual o 200º algarismo escrito?
- qual a soma dos números assim formados?

• Soma dos números no k° dígito:

#1: $\underline{1} \cdot 4!$ números \Rightarrow aparece 4! vezes no k° dígito \Rightarrow Soma: $1 \cdot 4!$
 #2: ... 4! vezes \Rightarrow Soma: $2 \cdot 4!$

⋮

\Rightarrow Soma: $4 \cdot 4!$

\Rightarrow Soma: $6 \cdot 4!$

\Rightarrow Soma: $7 \cdot 4!$

no 5º dígito: $1 \cdot 4! + 2 \cdot 4! + 4 \cdot 4! + 6 \cdot 4! + 7 \cdot 4! = (1+2+4+6+7) \cdot 4! = 20 \cdot 4!$

no 4º dígito: $1 \leftrightarrow 10, 2 \leftrightarrow 20$ etc: $10 \cdot (1+2+4+6+7) \cdot 4! = 10 \cdot 20 \cdot 4! = 200 \cdot 4!$

no 3º dígito: $100(1+2+4+6+7) \cdot 4! = 100 \cdot 20 \cdot 4! = 2000 \cdot 4!$

no 2º dígito: $1000 \cdot 20 \cdot 4! = 20000 \cdot 4!$

no 1º dígito: $10000 \cdot 20 \cdot 4! = 200000 \cdot 4!$

$\Rightarrow (20 + 200 + 2000 + 20000 + \dots) \cdot 4!$
 $= 22220 \cdot 4! = 533280$

Questão 3. De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

- P_1, P_2, \dots, P_7 • Dessas, P_1 e P_2 não podem ficar juntas
- Total: $P_7^7 = 7!$ (inclui P_1 e P_2 juntas)
- P_1 e P_2 juntas: $\boxed{P_8}, P_3, \dots, P_7 \rightarrow$ fica com 6 "pessoas": $P_6^6 = 6!$

\downarrow
 P_8

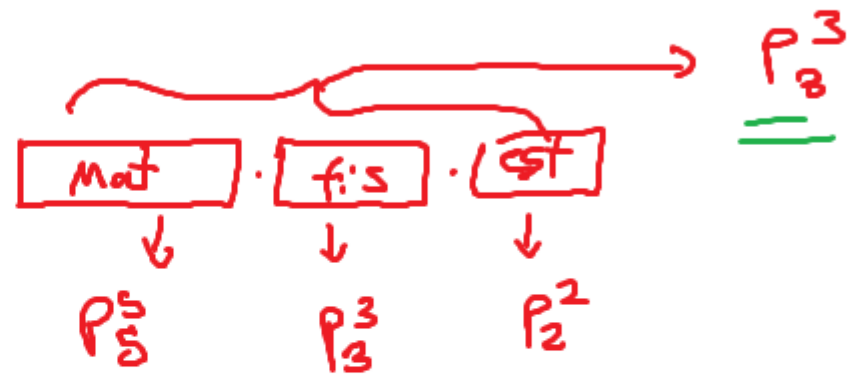
$\begin{matrix} 1^\circ & 2^\circ \\ P_1 & P_2 \end{matrix}$

\rightarrow porém, $P_1 P_2$ é diferente de $P_2 P_1$

Assim, a resposta é: $P_2^2 \cdot P_6^6 = 2! \cdot 6!$
- Resposta definitiva: $P_7^7 - P_2^2 \cdot P_6^6 = 7! - 2! \cdot 6!$

Questão 4. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

- livros do mesmo assunto juntos:



\leadsto ordem das áreas
 \leadsto mat \leadsto fis \leadsto est

$$\underline{\underline{P_3^3}} \cdot (P_5^5 \cdot P_3^3 \cdot P_2^2) = 3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!$$

Questão 5. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

- (a) em dois grupos de 6?
- (b) em três grupos de 4?
- (c) em um grupo de 5 e um grupo de 7?
- (d) em seis grupos de 2?
- (e) em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

(a) G_1 e G_2 : $P_2^2 \rightarrow$ maneiras de permutar G_1 e G_2

$\downarrow \rightarrow$ integrantes de G_1

$\frac{P_{12}^{12}}{6}$ e $P_6^6 \rightarrow$ Escolhido G_1 , integrantes de G_2

$\frac{P_6^6}{6}$ $\frac{P_6^6}{6}$

\downarrow \downarrow

permutando os integrantes pela ordem não importa

resposta:

$$\frac{\left(\frac{P_{12}^{12}}{P_6^6} \right) \cdot \left(\frac{P_6^6}{P_6^6} \right)}{P_2^2} = \frac{\left(\frac{12!}{6!} \right) \cdot 1}{2!} = \frac{12!}{2!6!6!}$$

Questão 5. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

- (a) em dois grupos de 6?
- (b) em três grupos de 4?
- (c) em um grupo de 5 e um grupo de 7?
- (d) em seis grupos de 2 ?
- (e) em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

(b) $G_1, G_2, G_3 : p_3^3 \rightarrow$ maneiras de permutar

$\downarrow \rightarrow$ integrantes de G_1

$$\frac{p_{12}}{\frac{4}{p_4}} , \quad \frac{p_8}{\frac{4}{p_4}} ; \quad \frac{p_4}{\frac{4}{p_4}}$$

\downarrow

permutando os integrantes pela ordem nos
importante

resposta:

$$\frac{\left(\frac{p_{12}}{\frac{4}{p_4}} \right) \cdot \left(\frac{p_8}{\frac{4}{p_4}} \right) \cdot \left(\frac{p_4}{\frac{4}{p_4}} \right)}{p_3^3} = \frac{\frac{12!}{8!} \cdot \frac{8!}{4!} \cdot 1}{4! \cdot 4! \cdot 1} = \frac{12!}{3! (4!)^3}$$

Questão 5. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

- (a) em dois grupos de 6?
- (b) em três grupos de 4?
- (c) em um grupo de 5 e um grupo de 7?
- (d) em seis grupos de 2?
- (e) em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

(c) G_5 e G_7

$$\frac{P_{5,5}^{12}}{P_5^5} \cdot \frac{P_{7,7}^7}{P_7^7} \rightarrow \left(\frac{12!}{7!5!} \right) \cdot 1 = \frac{12!}{7!5!}$$

(d) $G_1, \dots, G_6 : P_6^6$

$$G_1: \frac{P_{2,2}^{12}}{P_2^2} \quad G_2: \frac{P_{2,2}^{10}}{P_2^2} \quad \dots \quad G_5: \frac{P_{2,2}^4}{P_2^2} \quad G_6: \frac{P_{2,2}^2}{P_2^2}$$

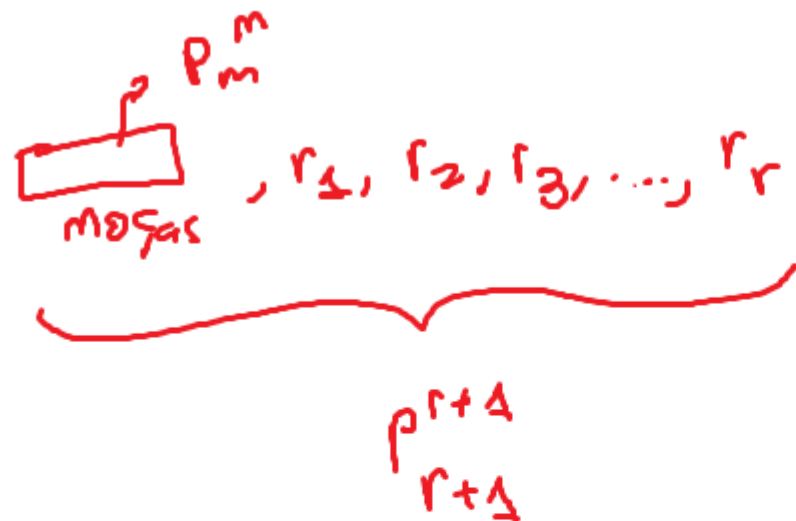
Total:

$$\frac{P_{2,2}^{12} \cdot P_{2,2}^{10} \cdot \dots \cdot P_{2,2}^4 \cdot P_{2,2}^2}{P_2^2 \cdot P_2^2 \cdot \dots \cdot P_2^2 \cdot P_2^2} = \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{12!}{(2!)^6}$$

(e) $G_{4,1} G_{4,2} \left\{ G_{2,1} G_{2,2} \right\}$

$$\frac{P_{4,4}^{12} \cdot P_{4,4}^8}{P_4^4 \cdot P_4^4} \cdot \frac{P_{2,2}^4 \cdot P_{2,2}^2}{P_2^2 \cdot P_2^2} = \frac{12!}{(2!)^2 (4!)^2}$$

Questão 6. De quantos modos r rapazes e m moças podem se colocar em fila de modo que as moças fiquem juntas?



Resposta: $P_m^m \cdot P_{r+1}^{r+1} = m! \cdot (r+1)!$

Questão 7. Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

B e P juntos

E e I separados

• B e P juntos: $\boxed{BP} \underbrace{p_1 p_2 \dots p_8}_{p_8^8} \leadsto 2! \cdot 8! \text{ (induzi E e I juntos)}$

$\nearrow p_2^2 = 2!$

• E e I juntos: $\boxed{EI} \boxed{BP} p_1 p_2 \dots p_6 \leadsto 2! \cdot 2! \cdot 7!$

(com B e P)

$\downarrow p_2^2 \quad \downarrow p_2^2$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{p_7^7}$

Resposta: $2! \cdot 8! - 2! \cdot 2! \cdot 7!$

Questão 8. Quantas são as permutações dos números $\{1, 2, \dots, 10\}$ nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

Caso mais simples: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Permutando o $1, 4$: $2!$ maneiras

colocando o 2 3 e 5: total:

$\begin{array}{c} _ \quad _ \\ _ 1 _ 4 _ \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \geq 0 \text{ número} \quad \geq 0 \text{ números} \quad \geq 0 \text{ números} \end{array}$

$$X + Y + Z = 3 \leadsto \frac{5!}{3! \cdot 2!} \text{ maneiras}$$

uma solução:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 5 & 3 & & 1 & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ & & \uparrow & & & \\ 2 & 5 & & & 1 & 3 & 4 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\{1, 2, \dots, 10\}$$

1) ~~colocando~~ os números de 1 à 10 fora 0, 2, 3 e 5:
Permutando. $7!$

$$2) \quad = n_1 - n_2 - n_3 - n_4 - n_5 - n_6 - n_7 =$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{3! \cdot 7!}$$

$$\text{total: } 7! \cdot \left(\frac{10!}{3! \cdot 7!} \right) = \frac{10!}{3!}$$

Questão 9. Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos de primeira rodada?

Ordem dos times não importa

$$J_1: \frac{P_2^{12}}{P_2^2} \quad J_2: \frac{P_2^{10}}{P_2^2} \quad \dots \quad J_5: \frac{P_2^4}{P_2^2} \quad J_6: \frac{P_2^2}{P_2^2}$$

Resposta: $\frac{P_2^{12}}{P_2^2} \cdot \frac{P_2^{10}}{P_2^2} \cdot \dots \cdot \frac{P_2^2}{P_2^2}$

$$= \frac{12!}{(2!)^6} \quad \text{ou} \quad \frac{12!}{6!(2!)^6}$$

Ordem dos jogos não importa \leftarrow

Ordem jogos importa \rightarrow

Ordem dos times importa

\rightarrow ordem dos jogos importa

$$P_2^{12} \cdot \dots \cdot P_2^2 = 12!$$

$$\sim \frac{12!}{6!}$$

\sim ordem dos jogos não importa

Questão 10. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \dots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k -ésima posição é inferior a $k+4$, para todo k ?

• elemento que ocupa a 1ª posição: tem que ser menor que $1+4=5 < n$

↳ candidatos: $1, 2, 3, 4 \leadsto 4$ escolhas

⋮

$n-6$ pos: $\leadsto < n-2$

↳ 1 até $n-3 - (n-7) = 4$ escolhas

$n-5$: $< n-1$

↳ 1 até $n-2 - (n-6) = 4$ escolhas

$n-4$: $< n$
1 até $n-1 - (n-5) = 4$ escolhas

$n-3$: $< n+1$
1 até $n - (n-4) = 4$ escolhas

• $n-2$: $< n+2$

1 até $n - (n-3) = 3$ escolhas

$n-1$: $< n+3$

1 até $n - (n-2) = 2$

n : $< n+4$

1 até $n - (n-1) = 1$

Resposta: $4 \cdot 4!$ $\leadsto \begin{matrix} (n \geq 3) \\ \leadsto n=1 \Rightarrow 1! \\ \leadsto n=2 \Rightarrow 2! \end{matrix}$