UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM - 2023.1
PROFESSOR: WILLIKAT BEZERRA DE MELO
TURMA: 2Z

MONITOR: JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

ENCONTRO DE MONITORIA - 04/08/2023

PROBLEMAS

1. Tem-se 8 pontos sobre uma reta r e 11 pontos sobre uma reta r' paralela a r. Quantos quadriláteros não-convexos com vértices em 4 desses 19 pontos existem?

2. Quantos são os anagramas da palavra SORRIR? Quantos deles tem a letra S no primeiro lugar ou a letra O no segundo lugar?

3. De quantos modos podemos dividir 16 pessoas em dois grupos de 4 pessoas e um grupo de 8 pessoas?

RESOLUÇÃO

1.
Um quadrilátero pode ser determinado a partir de 4 pontos (seus vértices) que não sejam colineares quando considerados três-a-três. A quantidade de maneiras de selecionar 4 dos 19 pontos das retas é $C_4^{19} = 3876$. Porém, note que nem todo conjunto de quatro pontos contabilizado formará um quadrilátero. Se 3 dos quatros pontos estiverem na mesma reta, então não teremos um quadrilátero. A quantidade de maneiras escolher 3 pontos em uma reta e um ponto na outra reta é

$$C_3^8 \times C_1^{11} + C_1^8 \times C_3^{11} = 616 + 1320 = 1936$$

O primeiro produto é a quantidade de maneiras que 3 pontos são escolhidos na reta r e 1 ponto é escolhido na reta r'. Já o segundo produto é a quantidade de maneiras que 1 ponto é escolhido na reta r e 3 pontos são escolhidos na reta r'.

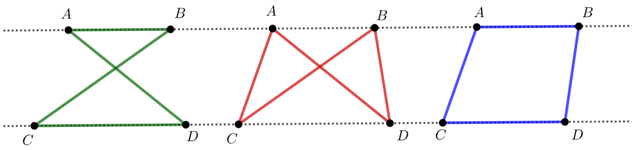
Além disso, se os 4 pontos estão na mesma reta, também não teremos um quadrilátero. A quantidade de maneiras que isso acontece é $C_4^8 + C_4^{11} = 70 + 330 = 400$. (Por quê?)

Desse modo, a expressão

$$C_4^{19} - [(C_3^8 \times C_1^{11} + C_1^8 \times C_3^{11}) + (C_4^8 + C_4^{11})] = 3876 - (1936 + 400) = 1540$$

nos diz a quantidade de maneiras de selecionar 4 pontos que formam um quadrilátero. Porém, note que essa não é a resposta, já que queremos que os quadriláteros formados sejam não-convexos. Para isso, é necessário analisar: dado 4 pontos que formam um quadrilátero, quantos quadriláteros não-convexos diferentes podemos formar?

A resposta dessa pergunta é: 2 quadriláteros não-convexos. Veja abaixo uma figura que contém todos os quadriláteros que podem ser formados a partir de 4 pontos fixos, porém arbitrários.



Sendo assim, cada conjunto de quatro pontos forma 2 quadriláteros não-convexos. Portanto, a quantidade de quadriláteros com a propriedade desejada é $2 \cdot 1540 = 3080$.

2.
(a) Calculando quantos anagramas possui a palavra SORRIR:

Note que há repetição da letra R. Assim, utilizando a ideia de permutação com repetição, a quantidade de anagramas de SORRIR é:

$$P_{(6;1,1,3,1)} = \frac{6!}{1! \times 1! \times 3! \times 1!} = 120$$

(b) Calculando quantos deles começam com S ou tem segunda letra sendo O:

Sejam A e B conjuntos tais que A é o conjunto de todos os anagramas de SORRIR que começam com S e B é o conjunto de todos os anagramas de SORRIR que tem segunda letra sendo O. Utilizaremos a notação $|X|$ para indicar a quantidade de elementos de um conjunto X. Desse modo, a resposta do item (b) será $|A \cup B|$.

De modo geral, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Calcularemos abaixo $|A|$, $|B|$ e $|A \cap B|$:

(i) Calculando $|A|$:
Temos 1 maneira de escolher a posição do S (que seria a primeira letra do anagrama). Escolhida ela, podemos escolher as demais letras de $P_{(5;1,3,1)} = 20$ maneiras. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $1 \cdot 20 = 20$ maneiras de formar um anagrama de SORRIR que comece com S. Portanto, $|A| = 20$.

(ii) Calculando $|B|$:
Temos 1 maneira de escolher a posição do O (que seria a segunda letra do anagrama). Escolhida ela, podemos escolher as demais letras de $P_{(5;1,3,1)} = 20$ maneiras. Assim, de

maneira análoga ao calculo de (i), temos $|B| = 1 \cdot 20 = 20$.

(iii) Calculando $|A \cap B|$:
Temos 1 maneira de escolher a posição do S e do O (que seriam, respectivamente, a primeira e segunda letra do anagrama). Feito essa escolha, podemos escolher as demais letras de $P_{(4;3,1)} = 4$ maneiras. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $|A \cap B| = 1 \cdot 4 = 4$.

Desse modo,

$$|A \cup B| = 20 + 20 - 4 = 36$$

3.
Podemos formar um grupo de 8 pessoas de C_8^{16} maneiras. Tendo sido formado um grupo de 8 pessoas, queremos formar dois grupos de 4 pessoas com as 8 pessoas que sobraram. Para o primeiro grupo, temos C_4^8 maneiras de formá-lo. Já para o segundo grupo, temos C_4^4 maneiras.

Pelo princípio multiplicativo, $C_4^8 \times C_4^4$ representa a quantidade de maneiras de formar os dois grupos de 4 pessoas de modo que seja possível distinguir cada grupo. Por exemplo: o primeiro grupo tem um nome diferente do segundo grupo. Desse modo, escolher os integrantes do primeiro grupo como sendo $\{a, b, c, d\}$, e do segundo grupo como sendo $\{e, f, g, h\}$, é contabilizado como sendo diferente de escolher os integrantes do primeiro grupo como sendo $\{e, f, g, h\}$ e do segundo grupo como sendo $\{a, b, c, d\}$.

Porém, para o problema, não há uma ordem ou hierarquia para os grupos. Desse modo, cada caso é contando uma quantidade de vezes que é numericamente igual à quantidade de maneiras de permutar os dois grupos: P_2^2. Portanto, a resposta deve ser

$$\frac{C_4^8 \times C_4^4}{P_2^2}$$

Daí, pelo princípio multiplicativo, a resposta do problema 3 será:

$$C_8^{16} \times \left(\frac{C_4^8 \times C_4^4}{P_2^2} \right) = \frac{16!}{2! \times 8! \times 4! \times 4!}$$