UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM - 2023.1
PROFESSOR: WILLIKAT BEZERRA DE MELO
TURMA: 2Z

MONITOR: JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

ENCONTRO DE MONITORIA - 22/09/2023

PROBLEMAS

Problema 1. Demonstre que uma árvore com n vértices tem no mínimo $n-1$ vértices.

Problema 2. Quantas folhas uma árvore com 7 vértices pode ter no máximo?

RESOLUÇÕES

Resolução do problema 1.

Para demonstrar esta afirmação, precisaremos de dois teoremas:

Teorema 1: Se G é um grafo conexo com n vértices, então $\mathrm{e}(G) \geq n-1$.

Teorema 2: Seja G um grafo conexo com n vértices. Se $\mathrm{e}(G) = n-1$, então G é acíclico.

Estes teoremas aparecem nas notas de aula e são demonstrados na página 41 e 42 da mesma. Ver lema 3 e proposição 8.

Demonstração. Faremos a demonstração em duas etapas:

(1) Mostraremos a existência de uma árvore com n vértices e com $n-1$ arestas.

(2) Argumentaremos que não existe árvores com n vértices e com menos de $n-1$ arestas.

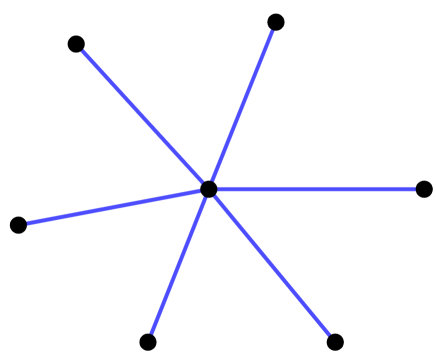
Seja G um grafo conexo com n vértices. Pelo teorema 1, temos que $\mathrm{e}(G) \geq n-1$. Ou seja, o número de arestas de G é pelo menos $n-1$. Para ser uma árvore, G precisa ser acíclico. Suponha que $\mathrm{e}(G) = n-1$ (o teorema 1 garante que isso é possível). Logo, pelo teorema 2, temos que G é acíclico. Portanto, por definição, G é uma árvore. Desse modo, existe uma árvore com n vértices e com $n-1$ arestas.

Como toda árvore é um grafo conexo, então, dada uma árvore A com n vértices, pelo teorema 1, temos que $\mathrm{e}(A) \geq n-1$. Logo, o número mínimo de arestas que uma árvore com n vértices pode ter é $n-1$ arestas.

□

Resolução do problema 2.

Observe na figura a abaixo uma árvore com 7 vértices e 6 folhas:



Afirmação: Uma árvore com 7 vértices tem no máximo 6 folhas.

Para demonstrar esta afirmação, utilizaremos o seguinte lema:

Lema: Um grafo G é conexo se e somente se para quaisquer $x, y \in \mathrm{V}(G)$, existe um caminho de x a y.

Este lema aparece nas notas de aula e é demonstrado na página 40 da mesma. Ver lema 2.

Demonstração da afirmação. Suponha, para efeito de absurdo, que exista uma árvore G com 7 vértices e com mais de 6 folhas. Pela definição de folha, o número de vértices de grau 1 é igual à quantidade de folhas da árvore. Logo, G deve ter 7 folhas pois só possui 7 vértices.

Considere $u, v, w \in \mathrm{V}(G)$ tais que $u \neq v$, $u \neq w$ e $v \neq w$. Por ser uma árvore, temos que G é conexo. Desse modo, pelo lema, para quaisquer $x, y \in \mathrm{V}(G)$, existe um caminho de x a y. Sejam A e B sequências de vértices de G que descrevem um caminho de u a v e u a w, respectivamente. Temos duas possibilidades:

(i) ou a sequência A tem exatamente dois termos. ($A = (u, v)$)

(ii) ou a sequência A tem mais de dois termos.

Note que (ii) não pode acontecer, pois implicaria que existe um vértice de G que tem grau maior do que 1 (esse vértice seria uma "ponte" que ligaria dois vértices no caminho) e contradiria a hipótese de G ter 7 folhas. Assim, necessariamente (i) deve acontecer.

De maneira análoga, podemos concluir que B é uma sequência com exatamente dois termos, ou seja: $B = (u, w)$. Porém, isso significa que existem as arestas $e_1 = \{u, v\}$ e $e_2 = \{u, w\}$ na árvore G (caso contrário os caminhos entre os vértices não existiriam). Daí, pela definição de grau de um vértice, temos que o grau do vértice u é pelo menos 2. Desse modo, u não é uma folha de G. Absurdo! pois supomos que todo vértice de G é uma folha.

O absurdo aconteceu pois supomos a existência das sequências de vértices A e B. Logo, conclui-se que não existem tais sequências e, portanto, não existem caminhos de u a v e de u a w. Assim, pelo lema, G não é conexo. Absurdo! pois supomos que G é uma árvore e toda árvore é conexa.

Conclui-se que tal árvore G não pode existir. Ou seja, não existe uma árvore com 7 vértices e mais de 6 folhas.

$\square$