1. Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO:

a) que começam por consoante e terminam por vogal?
b) que têm as letras C, A, P juntas nessa ordem?
c) que têm as letras C, A, P juntas em qualquer ordem?
d) que têm as vogais e as consoantes intercaladas?
e) que têm a letra C no 1º lugar e a letra A no 2º lugar?
f) que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar?
g) que têm a letra C no 1º lugar ou a letra A no 2º lugar ou a letra P no 3º lugar?

consoantes

(a) $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4$ vogais $= 4^2 \cdot 6! = 11520$

(b) $5 \cdot \boxed{CAP} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5! = 6! = 720$

maneiras de posicionar $\boxed{CAP}$

(c) $5 \; \boxed{CAP} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \cdot 6 \cdot 5! = 3! \, 6! = 4320$

$3!$

permutando C, A, P

(d)

(1) $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$ (começando por vogal)

(2) $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$ (começando por consoante)

$= (4!)^2 + (4!)^2 = 2 \cdot (4!)^2 = 1152$

(e) $1 \cdot 1 \cdot 6! = 6! = 720$

(f) $1 \cdot 7! + 7 \cdot 1 \cdot 6 \cdots = 7! + 7!$

(C em primeiro) (A em 2º)

Porém contabilizamos o caso de C em 1º e A em 2º 2X. Logo,

Resposta: $7! + 7! - 6! = 9360$

(g) $\underbrace{7!}_{C_1} + \underbrace{7!}_{A_2} + \underbrace{7!}_{P_3} - \underbrace{6!}_{C_1A_2} - \underbrace{6!}_{C_1P_3} - \underbrace{6!}_{A_2P_3} + \underbrace{5!}_{C_1A_2P_3} = 13080$

2. Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.

a) que lugar ocupa o número 62417? 81º

b) qual o número que ocupa o 66º lugar?

c) qual o 200º algarismo escrito?

d) qual a soma dos números assim formados?

2

(a) entre 73º e 96º. Vamos ordenar os números que começam com 6:

$\underbrace{\boxed{61}}_{3!}$ $\boxed{62}$ → $\underbrace{\boxed{621}}_{2!}$ $\boxed{624}$ ...

73 à 78

79 à 80

→ 62417 → 81º

→ 62471

$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 5!$ números formados

1

Começando com n:

$1 \cdot \underline{4!} = 4!$

1º d = 1 | 1º d = 2 | 1º d = 4 | 1º d = 6 | 1º d = 7

1º à 24º | 25º à 48 | 49 até 72 | 73 à 96 | 97 à 120

4! números | 4! ... | 4! ... | 4! | 4!

1 até n: n números

k até n: (1 até k-1) e (k até n) = k-1 + x = n

$\Rightarrow x = n - k + 1$

$\Rightarrow$ k até n: n-k+1 números

• k até n, sabendo de n-k+1 e k:

• k+(n-k+1)=n+1

a) que lugar ocupa o número 62417?
b) qual o número que ocupa o 66º lugar?
c) qual o 200º algarismo escrito?
d) qual a soma dos números assim formados?

(b) É algum número que começa por 4: 49º até 72º

$\boxed{41}$ $\boxed{42}$ $\boxed{46}$

3!

49 à 54 55 à 60 61 à 66

o último número dessa categoria:

46721

1

(c) Cada número: 5 algarismos

2

Assim,

1º número: 5 primeiros algarismos escritos

2º número: 6 à 10 algarismos escritos

em geral:

Kº número: 5k-4 à 5k algarismo escritos ⇒ 5K = 200 ⇒ K = 40

começa por 2: 25º à 48º

3! ← $\boxed{21}$ $\boxed{24}$ $\boxed{26}$

25 à 30 31 à 36 37 à 42

3

2! $\boxed{261}$ $\boxed{264}$ → 26471

37 à 38 39 à 40

4 o 200º algarismo foi o: 1 de 26471

a) que lugar ocupa o número 62417?

b) qual o número que ocupa o 66º lugar?

c) qual o 200º algarismo escrito?

d) qual a soma dos números assim formados?

• Somas dos números no k^o dígito:

#1: $\underline{1} \cdot 4!$ números => aparece 4! vezes no K^o dígito => Soma: $1 \cdot 4!$

4! vezes => Soma: $2 \cdot 4!$

#2: ...

⋮

=> Soma: $4 \cdot 4!$

=> Soma: $6 \cdot 4!$

=> Soma: $7 \cdot 4!$

no 5º dígito: $1 \cdot 4! + 2 \cdot 4! + 4 \cdot 4! + 6 \cdot 4! + 7 \cdot 4! = (1+2+4+6+7) \cdot 4! = 20 \cdot 4!$

no 4º dígito: $1 \leftrightarrow 10$, $2 \leftrightarrow 20$ etc: $10 \cdot (1+2+4+6+7) \cdot 4! = 10 \cdot 20 \cdot 4! = 200 \cdot 4!$

no 3º dígitos: $100(1+2+4+6+7) \cdot 4! = 100 \cdot 20 \cdot 4! = 2000 \cdot 4!$

no 2º dígito: $1000 \cdot 20 \cdot 4! = 20000 \cdot 4!$

no 1º dígito: $10000 \cdot 20 \cdot 4! = 200000 \cdot 4!$

$\Rightarrow (20 + 200 + 2000 + 200 \ldots) \cdot 4!$
$= 222220 \cdot 4! = 5333280$

Questão 3. De quantos modos é possível sentar 7 pessoas cm cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?

• $P_1, P_2, \dots, P_7$ • Dessas, P_1 e P_2 não podem ficar juntas

• Total: $P_7^7 = 7!$ (inclui P_1 e P_2 juntas)

• P_1 e P_2 juntas: $\underbrace{\boxed{P_1P_2}}_{P_8}, P_3, \dots, P_7$ ⇝ fila com 6 "pessoas": $P_6^6 = 6!$

⇝ porém, $\overset{1^{\underline{o}}}{P_1}\ \overset{2^{\underline{o}}}{P_2}$ é diferente de $\overset{1^{\underline{o}}}{P_2}\ \overset{2^{o}}{P_1}$

Assim, a resposta é: $P_2^2 \cdot P_6^6 = 2! \cdot 6!$

• Resposta definitiva: $P_7^7 - P_2^2 \cdot P_6^6 = 7! - 2! \cdot 6!$

Questão 4. De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática. 3 de física e 2 de estatística, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

- livros do mesmo assunto juntos:

$$\boxed{\text{mat}} \cdot \boxed{\text{fis}} \cdot \boxed{\text{est}} \to P_3^3$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$P_5^5 \quad P_3^3 \quad P_2^2$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{P_3^3}_{\text{ordem das áreas}} \cdot \left(\underbrace{P_5^5}_{\text{mat}} \cdot \underbrace{P_3^3}_{\text{fis}} \cdot \underbrace{P_2^2}_{\text{est}}\right) = 3!\,5!\,3!\,2!$$

Questão 5. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

(a) em dois grupos de 6?

(b) em três grupos de 4?

(c) em um grupo de 5 e um grupo de 7?

(d) em seis grupos de 2 ?

(e) em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

(a) G_1 e G_2 : P_2^2 → maneiras de permutar G_1 e G_2

$\dfrac{P_6^{12}}{P_6^6}$ → integrantes de G_1

e $\dfrac{P_6^6}{P_6^6}$ → Escolhido G_1, integrantes de G_2

Permutando os integrantes pois ordem não importa

resposta:

$$\frac{\left(\frac{P_6^{12}}{P_6^6}\right)\cdot\left(\frac{P_6^6}{P_6^6}\right)}{P_2^2} = \frac{\left(\frac{\frac{12!}{6!}}{6!}\right)\cdot 1}{2!} = \frac{12!}{2!6!6!}$$

Questão 5. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

(a) em dois grupos de 6?

(b) em três grupos de 4?

(c) em um grupo de 5 e um grupo de 7?

(d) em seis grupos de 2 ?

(e) em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

(b) G_1, G_2, G_3 : $P_3^3 \rightarrow$ maneiras de permutar

$\downarrow \rightarrow$ integrantes de G_1

$$\frac{P_4^{12}}{P_4^4}, \quad \frac{P_4^8}{P_4^4}; \quad \frac{P_4^4}{P_4^4}$$

Permutando os integrantes pois ordem não importa

resposta: $$\frac{\left(\frac{P_4^{12}}{P_4^4}\right)\cdot\left(\frac{P_4^8}{P_4^4}\right)\left(\frac{P_4^4}{P_4^4}\right)}{P_3^3} = \frac{\frac{\frac{12!}{8!}\cdot\frac{8!}{4!}\cdot 1}{4!\cdot 4!\cdot}}{3!} = \frac{12!}{3!(4!)^3}$$

Questão 5. De quantos modos podemos dividir 12 pessoas:

(a) em dois grupos de 6?

(b) em três grupos de 4?

(c) em um grupo de 5 e um grupo de 7?

(d) em seis grupos de 2 ?

(e) em dois grupos de 4 e dois grupos de 2?

(c) G_5 e G_7

$$\frac{P^{12}_5}{P^5_5}\cdot\frac{P^7_7}{P^7_7} \to \left(\frac{\frac{12!}{7!}}{5!}\right)\cdot 1 = \frac{12!}{7!\,5!}$$

(d) $G_1, \dots, G_6 : P^6_6$

$G_1: \frac{P^{12}_2}{P^2_2}$ $\quad G_2: \frac{P^{10}_2}{P^2_2}$ $\quad \dots \quad G_5: \frac{P^4_2}{P^2_2}$ $\quad G_6: \frac{P^2_2}{P^2_2}$

Total: $$\frac{P^{12}_2 \cdot P^{10}_2 \cdot \ldots \cdot P^4_2 \cdot \cancel{P^2_2}}{P^2_2\, P^2_2 \ldots P^2_2 \cdot \cancel{P^2_2}} \Big/ P^6_6 = \frac{\frac{12!}{\cancel{10!}}\cdot\frac{\cancel{10!}}{8!}\cdots\frac{\cancel{4!}}{2!}}{(2!)^5} \Big/ 6! = \frac{12!}{6!\,(2!)^6}$$

(e) $\underbrace{G_{41}\; G_{42}}_{2!}$ $\quad \underbrace{G_{21}\; G_{22}}_{2!}$

$$\frac{\frac{P^{12}_4 \cdot P^8_4}{P^4_4 \cdot P^4_4}}{2!} \cdot \frac{\frac{P^4_2 \cdot \cancel{P^2_2}}{P^2_2 \cdot \cancel{P^2_2}}}{2!} = \frac{12!}{(2!)^2\,(4!)^2}$$

Questão 6. De quantos modos r rapazes e m moças podem se colocar em fila de modo que as moças fiquem juntas?

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{}}^{P_m^m}_{\text{moças}}, r_1, r_2, r_3, \ldots, r_r}_{P_{r+1}^{r+1}}$$

Resposta: $P_m^m \cdot P_{r+1}^{r+1} = m! \cdot (r+1)!$

Questão 7. Delegados de 10 países devem se sentar em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e o do Iraque e o dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

B e P juntos
e
E e I separados

• B e P juntos: $\underbrace{\overset{\to P_2^2 = 2!}{\boxed{BP}} \; P_1 \; P_2 \; \ldots \; P_8}_{P_9^9}$ $\rightsquigarrow$ $2!\,9!$ (inclui E e I juntos)

• E e I juntos: (com B e P) $\underbrace{\underset{P_2^2}{\boxed{EI}} \; \underset{P_2^2}{\boxed{BP}} \; P_1 \; P_2 \ldots P_6}_{P_7^7}$ $\rightsquigarrow$ $2!\,2!\,7!$

Resposta: $2!\,9! - 2!\,2!\,7!$

Questão 8. Quantas são as permutações dos números $\{1, 2, \ldots, 10\}$ nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

Caso mais simples: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Permutando o 1 e 4 : $2!$ maneiras

colocando o 2 3 e 5:

total:

_ 1 _ 4 _

≥ 0 número

≥ 0 números

≥ 0 números:

uma solução:

$X + Y + Z = 3 \rightsquigarrow \frac{5!}{3!\,2!}$ maneiras

2 5 3
• • • 1 4

2 5 3
• • 1 • 4

$\{1, 2, \ldots, 10\}$

1) ~~[illegible]~~ os números de 1 à 10 fora 0, 2, 3 e 5:
Permutando.

$7!$

2)

$$\_\, n_1 \,\_\, n_2 \,\_\, n_3 \,\_\, n_4 \,\_\, n_5 \,\_\, n_6 \,\_\, n_7 \,\_$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{3!\,7!}$$

total: $7! \cdot \left(\frac{10!}{3!\,7!}\right) = \frac{10!}{3!}$

Questão 9. Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos de primeira rodada?

ordem dos times não importa

$J_1 = \frac{P^{12}_2}{P^2_2}$ $J_2 = \frac{P^{10}_2}{P^2_2}$ $\cdots$ $J_5 = \frac{P^4_2}{P^2_2}$ $J_6 = \frac{P^2_2}{P^2_2}$

Resposta: $\frac{P^{12}_2}{P^2_2} \cdot \frac{P^{10}_2}{P^2_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{P^2_2}}{\cancel{P^2_2}}$

$= \frac{12!}{(2!)^6}$ ou $\frac{12!}{6!(2!)^6}$

ordem dos jogos não importa

ordem jogos importa

ordem dos times importa

$\cdots$ ordem dos jogos importa

$P^{12}_2 \cdots P^2_2 = 12!$

ou

$\frac{12!}{6!}$ ordem dos jogos não importa

Questão 10. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \ldots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k - ésima posição é inferior a $k + 4$, para todo k ?

• elemento que ocupa a 1ª posição: tem que ser menor que $1+4=5 < n$

↳ candidatos: 1, 2, 3, 4 ⤳ 4 escolhas

⋮

$n-6$ pos: $< n-2$

↳ 1 até $n-3 - (n-7) =$ 4 escolhas

$n-5$: $< n-1$

⤳ 1 até $n-2 - (n-6) =$ 4 escolhas

$n-4$: $< n$

1 até $n-1 - (n-5) =$ 4 escolhas

$n-3$: $< n+1$

1 até $n - (n-4) =$ 4 escolhas

• $n-2$: $< n+2$

1 até $n - (n-3) =$ 3 escolhas

$n-1$: $< n+3$

1 até $n - (n-2) = 2$

n : $< n+4$

1 até $n - (n-1) = 1$

Resposta: $4^{n-4} \cdot 4!$ $(n \geq 3)$

⤳ $n=1 \Rightarrow 1!$

⤳ $n=2 \Rightarrow 2!$