Questão 1. Há 3 linhas de ônibus entre as cidades A e B e 2 linhas de ônibus entre B e C. De quantas maneiras uma pessoa pode viajar:

(a) indo de A até C, passando por B ?

(b) indo e voltando entre A e C sempre passando por B ?

(a) E_1: Ir de A até B utilizando uma linha de ônibus

E_2: Ir de B até C utilizando uma linha de ônibus

Note que há 3 maneiras de E_1 acontecer e 2 maneiras de E_2 acontecer. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $3 \cdot 2 = 6$ maneiras de ir de A até C, passando por B.

(b) E_3: Ir de C até B utilizando uma linha de ônibus

E_4: Ir de B até A utilizando uma linha de ônibus

Note que há 2 maneiras de E_3 acontecer e 3 maneiras de E_4 acontecer. Logo, pelo P.M., existem $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ maneiras de E_1, E_2, E_3 e E_4 acontecerem. Ou seja, ir e voltar de A até C...

Questão 2. Quantos inteiros há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são distintos.

E_1: Escolher o primeiro dígito de n. $n \in \mathbb{Z}$, $10^3 < n < 9999$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 56 \\ \hline 486 \\ 405 \\ \hline (*) \end{array} \quad 4536$$

E_2: Após E_1 ter acontecido, escolher o segundo dígito de n.

E_3: Após E_1 e E_2 terem acontecido, escolher o terceiro dígito de n.

E_4: Após E_1, E_2 e E_3 terem acontecido, escolher o quarto dígito de n.

Há 9 escolhas para o primeiro algarismo de n: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Note que o algarismo zero foi desconsiderado. Após a escolha desse algarismo, há 9 escolhas para o segundo algarismo de n: Podemos escolher os algarismos de 0 a 9 porém devemos desconsiderar dessa lista o algarismo escolhido anteriormente. Caso contrário, n poderia ter dois algarismos iguais. Note que estamos considerando o algarismo zero como uma possível escolha. (...) Pelo P.M., há $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ inteiros que satisfazem essa condição.

$\hookrightarrow$ 10 escolhas

Questão 3. Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999 . Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

Não pode ser 0

$$\underset{1^\circ d}{\underline{\quad}} \quad \underset{2^\circ d}{\underline{\boxed{7}_1}} \quad \underset{\dots}{\underline{\boxed{7}_2}} \quad \underset{\dots}{\underline{\boxed{7}_3}}$$

1) escolhendo as posições dos 7's:

$$\underset{7_1}{\underline{4}} \cdot \underset{7_2}{\underline{3}} \cdot \underset{7_3}{\underline{2}}$$

2) Desconsiderando contagens múltiplas:

→ maneiras de permutar os 7, dada uma posição:

$$3 \cdot 2 \cdot 1$$

3) Escolhendo o algarismo que sobrou.

→ Não pode ser 7 nem zero:

$$\underline{8} \sim \{0,1,2,\dots,9\} - \{0,7\}$$

total: $\left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1}\right) \cdot 8 = 4 \cdot 8 = 32$

bilhetes

Questão 4. De quantas maneiras podemos selecionar duas cartas, sem reposição, de um baralho de 52 cartaz, de modo que:

(a) A primeira carta seja um valete e a segunda não seja uma dama?

(b) A primeira carta seja de copas e a segunda não seja um rei?

(a) $\underset{1^a c}{\underline{4}}$ → valetes $\underset{2^a c}{\underline{47}}$ → 52 - 4 damas - 1 valete $\Rightarrow 4 \cdot 47 = 188$

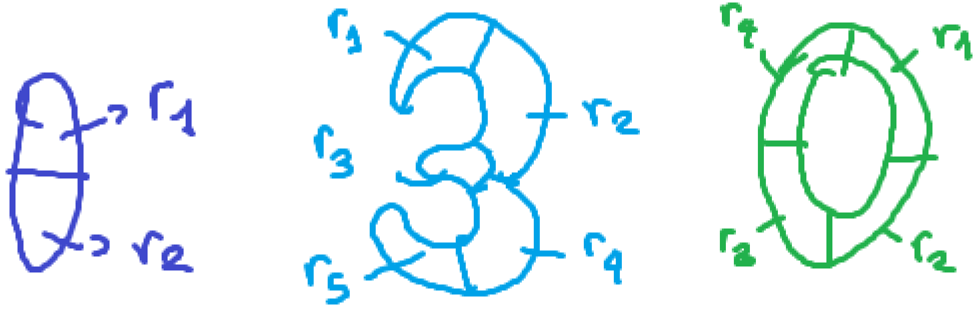
(b) (1) $\underset{1^a c}{\underline{12}}$ $\underset{2^a}{\underline{47}}$ → 52 - 4 reis - 1 copa $\Rightarrow 12 \cdot 47 = 564$

↓ Não rei de copas

(2) $\underset{\text{rei de copas}}{\underline{1}}$ $\underset{2^a}{\underline{48}}$ → 52 - 4 reis $\Rightarrow 48$

total: $48 + 564 = 612$

Questão 5. Juca quer pintar os algarismos do número 2013, como na figura abaixo, de modo que cada região seja pintada com uma das cores branca, cinza ou preta e que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



12

(a) Observe que Juca pode pintar o algarismo 2 de $3 \times 2 \times 2$ maneiras diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode pintar o algarismo 1?

1: $\underset{r_1}{\underline{3}} \cdot \underset{r_2}{\underline{2}} = 6$ maneiras

(b) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 3 ?

3: $\underset{r_1}{\underline{3}} \cdot \underset{r_2}{\underline{2}} \cdot \underset{r_3}{\underline{2}} \cdot \underset{r_4}{\underline{1}} \cdot \underset{r_5}{\underline{2}} = 3 \cdot 2^3 = 24$ maneiras

(c) De quantas maneiras diferentes Juca pode pintar o algarismo 0 ?

0: (1) $r_1 = r_3$: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$
(2) $r_1 \neq r_3$: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$
$\rightarrow$ 18 modos

(d) Escreva uma expressão numérica que permita calcular de quantas maneiras Juca pode pintar o número 2013.

$12 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 18 = 31104$ modos

Questão 6. O conjunto A possui 4 elementos e o conjunto B possui 7 elementos. Quantas são as funções $f : A \to B$? Quantas são as funções injetivas $f : A \to B$?

(a) $f: A \to B$

$\rightarrow$ elementos de B para se relacionar

$\underset{a_1}{\underline{7}} \cdot \underset{a_2}{\underline{7}} \cdot \underset{a_3}{\underline{7}} \cdot \underset{a_4}{\underline{7}} = 7^4 = 49^2 = (50-1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 + 1 = 2500 - 100 + 1$

$= 2401$

(b) $f: A \to B$ injetivas

$\underset{a_1}{\underline{7}} \cdot \underset{a_2}{\underline{6}} \cdot \underset{a_3}{\underline{5}} \cdot \underset{a_4}{\underline{4}} = 30 \cdot 28 = 30(30-2) = 900 - 60 = 840$

Questão 7. De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?

(1) 2ª carta: rei de copas

$\underset{1^{a}}{\underline{\quad}} \quad \underset{2^{a}}{\underline{1}} \quad \underset{3^{a}}{\underline{\quad}}$

(1)(a) 1ª carta: rainha de copas

$\underset{1^{a}}{\underline{1}} \cdot \underset{2^{a}}{\underline{1}} \cdot \underset{3^{a}}{\underline{47}} = 47$ ← 52 - 1 rei - 4 rainhas

(b) 1ª carta: copas e não-rainha

13 - 1 rei - 1 rainha → $\underset{1^{a}}{\underline{11}} \cdot \underset{2^{a}}{\underline{1}} \cdot \underset{3^{a}}{\underline{46}} = 11 \cdot 46 =$ ← 52 - 1 rei - 1 copas - 4 rainhas

(2) 2ª carta: rei de outro naipe

$\underset{1^{a}}{\underline{\quad}} \quad \underset{2^{a}}{\underline{3}} \quad \underset{3^{a}}{\underline{\quad}}$

(2)(a) 1ª carta: " " "

$\underline{1} \cdot \underline{3} \cdot \underline{47} = 3 \cdot 47 =$ ← 52 - 1 rei - 4 rainhas

(2)(b)

13 - - rainha → $\underline{12} \cdot \underline{3} \cdot \underline{46} = 12 \cdot 3 \cdot 46 =$ ← 52 - rei - copas - 4 rainhas

total: 2350

Questão 8. Considerando os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e 8 , responda:

(a) Quantos números de quatro algarismos podemos formar?

8^4 (repetição) $\quad$ (sem repet.)

$\underset{1^\circ}{\underline{8}} \cdot \underset{2^\circ}{\underline{8}} \cdot \underline{8} \cdot \underline{8}$ ou $\underline{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}$

(b) Quantos números pares de quatro algarismos podemos formar?

$\underline{8} \cdot \underline{8} \cdot \underline{8} \cdot \underline{4} \rightarrow \{2,4,6,8\}$ ou $\underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4}$

(c) Quantos números ímpares de quatro algarismos distintos podemos formar?

$\underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \rightarrow \{1,3,5,7\}$

(d) Quantos números de quatro algarismos distintos são divisíveis por 5 ?

$\underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{1} \rightarrow \{5\}$

(a) $8^4 = 4096$ e $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

(b) $8^3 \cdot 4 = 2048$ e $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

(c) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

(d) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 = 210$

Questão 9. Responda:

(a) Quantos números de cinco algarismos existem?

Exclui o zero ← $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 9 \cdot 10^4 = 90000$

(b) Quantos números ímpares de cinco algarismos existem?

Exclui o zero $\underline{9} \cdot \underbrace{\underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10}}_{\text{sem restrições}} \cdot \underline{5} \rightarrow 1, 3, 5, 7, 9$

$= 45 \cdot 10^3 = 45000$

(c) Quantos números de cinco algarismos são maiores que 71265 ?

(1) 1º dígito = 7

$\underset{1^\circ}{\underline{1}}$ _ _ _ _

→ 2º d: > 1

$1 \cdot \underline{8} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 8000$

→ 2º d: = 1

$1 \cdot 1 \cdot$ → 3º d > 2

$\underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{7} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 700$

→ 3º d = 2

$\underline{1}\ \underline{1}\ \underline{1}$ → 4º d > 6

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10 = 30$

→ 4º d < 6

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$

(2) 1º dig > 7

$\underline{2}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10} = 20000$

total: 28734

Questão 10. Determine o número de divisores inteiros positivos de 17640.

$$\begin{array}{r|l} 17640 & 2 \\ 8820 & 2 \\ 4410 & 2 \\ 2205 & 3 \\ 735 & 3 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$

todo n da forma

$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, com $a \in \{0, 1, 2, 3\}$
$b, d \in \{0, 1, 2\}$
$c \in \{0, 1\}$

é divisor de 17640

quantos n's existem?

nº valores para a

$\underset{a}{\underline{4}} \cdot \underset{b}{\underline{3}} \cdot \underset{c}{\underline{2}} \cdot \underset{d}{\underline{3}} = 72$ divisores

Questão 11. Um estudante está procurando soluções inteiras da equação $2x = a + b$. Sabendo que $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de quantas maneiras o estudante poderá escolher a e b para obter soluções inteiras?

$(x \in \mathbb{Z})$ $\quad 2x = a+b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow$ a+b for par $\Longleftrightarrow$ a e b pares ou a e b ímpares

(1) a e b par:

$$\underset{a}{2} \cdot \underset{b}{2} = 4$$

(2) a e b ímpar:

$$3 \cdot 3 = 9$$

total: $4+9=13$