Primeira questão (2,0 pontos). Quantos são os números naturais de quatro dígitos que possuem pelos menos dois dígitos iguais?

Sejam U o conjunto de todos os números de 4 dígitos e A ($A \subset U$) o conjunto de números com todos os dígitos diferentes. Desse modo A^c é o conjunto de todos os números com pelo menos dois dígitos iguais. Note que $A \cap A^c = \emptyset$, ou seja, A e A^c são disjuntos.

Pelo princípio aditivo, $\#(A \cup A^c) = \#A + \#A^c$ e, devido a $A \cup A^c = U$, temos que:

↳ nº de elementos do conjunto $A \cup A^c$

↳ nº de elementos de A

↳ nº de elementos de A^c

$\#U = \#A + \#A^c \iff \#A^c = \#U - \#A$. Desse modo podemos encontrar $\#A^c$ através do cálculo de $\#U - \#A$.

- Calculando $\#U$: Para formar um número de 4 dígitos, temos 9 maneiras de escolher o primeiro algarismo: $1, 2, 3, \ldots, 8$ ou 9. Escolhido o primeiro algarismo, para a escolha dos outros dígitos temos 10 escolhas para cada dígito: $0, 1, 2, \ldots, 8$ ou 9. Desse modo, pelo princípio multiplicativo, temos $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ maneiras

- Calculando $\#U$: Para formar um número de 4 dígitos, temos 9 maneiras de escolher o primeiro algarismo: 1, 2, 3, ..., 8 ou 9. Escolhido o primeiro algarismo, para a escolha dos outros dígitos temos 10 escolhas para cada dígito: 0, 1, 2, ..., 8 ou 9. Desse modo, pelo princípio multiplicativo, temos $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ maneiras de formar um número de 4 dígito. Em outras palavras: existem 9000 números de 4 dígitos.

  Portanto, $\#U = 9000$

- Calculando $\#A$: Para formar um número de 4 dígitos com todos os algarismos diferentes, temos 9 maneiras de escolher o primeiro algarismo: 1, 2, ..., 8 ou 9. Escolhido o primeiro algarismo, não poderemos escolher o número escolhido anteriormente, porém, podemos escolher o zero. Logo, temos 9 escolhas para o segundo algarismo. Escolhido o segundo algarismo, teremos 8 escolhas para o terceiro algarismo, visto que esse algarismo deve ser distinto dos dois algarismos escolhidos anteriormente. Por fim, escolhido o terceiro algarismo, temos 7 escolhas para o quarto algarismo. Desse modo, pelo princípio multiplicativo, temos: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ maneiras de formar um número com a propriedade escolhida. De maneira análoga ao cálculo de $\#U$, teremos $\#A = 4536$.

- Calculando $\#A^c$: $\#A^c = \#U - \#A = 9000 - 4536 = 4464$

  Portanto, existem 4464 elementos de A^c.

Segunda questão (2,0 pontos). Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 10.240? 24

O número 10240 pode ser fatorado de maneira única como o produto de primos: $2^{11} \cdot 5$.
Todo número inteiro positivo da forma $2^x \cdot 5^y$, onde $x \in \{0,1,2,\dots,10,11\}$ e $y \in \{0,1\}$, é divisor de 10240. Ou seja: se um número inteiro positivo não pode ser fatorado como $2^x \cdot 5^y$, então ele não é divisor de 10240. Assim, contando quantos números podem ser fatorados dessa maneira é equivalente a contar quantos divisores possui 10240.

Note que temos 12 escolhas para o expoente x: $0, 1, 2, \dots, 10$ ou 11. Escolhido um valor para x, temos 2 escolhas para o expoente y: 0 ou 1. Desse modo, pelo princípio multiplicativo, temos
$12 \cdot 2 = 24$ maneiras de formar um número com a fatoração $2^x \cdot 5^y$. Portanto, o número 10240 tem 24 divisores inteiros positivos.

Terceira questão (2,0 pontos). De quantos modos podemos dividir 20 pessoas:

(a) em quatro grupos de 5? $\frac{20!}{4!5!5!5!5!}$

(b) em um grupo de 8 e dois grupos de 6? $\frac{20!}{8!2!6!6!}$

(a) Sejam $a_1, a_2, \dots, a_{19}$ e a_{20} as pessoas. Dividir as 20 pessoas em 4 grupos de 5 pessoas é equivalente à formar 4 conjuntos com 5 elementos cada. Sejam G_1, G_2, G_3 e G_4 os conjuntos. Para o primeiro elemento de G_1, temos 20 escolhas: $a_1, a_2, \dots, a_{19}$ ou a_{20}. Feita a escolha do primeiro integrante de G_1, para a escolha do segundo integrante, temos 19 escolhas. Analogamente, para as escolhas do terceiro, 4º e 5º integrante, temos 18, 17 e 16 escolhas respectivamente. Pelo princípio multi-plicativo, teremos $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$ modos de escolher os integrantes de G_1 nessas condições. Porém, note que esse não é o número que buscamos pois nessa contagem os conjuntos $G_1 = \{a_1, a_2, a_5, a_6, a_9\}$ e $G_1 = \{a_2, a_5, a_6, a_1, a_9\}$ são diferentes, mesmo representando o mesmo grupo de pessoas. Em outras palavras: a ordem dos elementos do conjunto não deve importar.

Dado $G_1 = \{a_x, a_y, a_z, a_w, a_t\}$, com $x, y, z, w, t \in \{1, 2, \ldots, 19, 20\}$, note que ele será contado uma quantidade de vezes numericamente igual à quantidade de maneiras de reordenar seus elementos.

- reordenando seus elementos: Temos 5 posições. Para a 1ª posição: 5 escolhas. Para a 2ª posição, após a escolha de qual elemento ficará na 1ª posição: 4 escolhas. Analogamente, para a 3ª, 4ª e 5ª posição, teremos 3, 2 e 1 escolhas respectivamente. Assim, pelo princípio multiplicativo, teremos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ maneiras de reordenar seus elementos. Assim, a resposta que procuramos é: $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5!}$

Esse número representa todas as maneiras de formar o grupo G_1, de 5 pessoas, dispondo de 20 pessoas.

Fazendo procedimentos análogos só que para os conjuntos G_2, G_3 e G_4, teremos:

$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5!}$ maneiras de formar o grupo G_2, considerando-se formado o grupo G_1

$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!}$ e $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5!}$ maneiras de formar G_3 e G_4, respectivamente, considerando formados os grupos anteriores.

Pelo princípio multiplicativo, temos $\left(\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{5!}\right)\cdot\left(\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{5!}\right)\cdot\left(\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5!}\right)\cdot\left(\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5!}\right) = \frac{20!}{(5!)^4}$

maneiras de formar os grupos G_1, G_2, G_3 e G_4. Porém, note que essa não é a resposta. Novamente contabilizados casos iguais como sendo diferentes. Por exemplo:

$$G_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}\ G_2 = \{a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}\ G_3 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}\}\ G_4 = \{a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}\}$$

sendo diferente do caso

$$G_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}\}\ G_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}\ G_3 = \{a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}\ G_4 = \{a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}\}$$

Cada caso foi contabilizado um total de vezes numericamente igual à quantidade de maneiras de reordenar G_1, G_2, G_3 e G_4. Essa quantidade é igual a: $4\cdot3\cdot2\cdot1 = 4!$ pois temos 4 escolhas para a primeira posição, 3 escolhas para a 2ª posição e 2 e 1 escolhas para a terceira e quarta posição respectivamente. Aplicando o princípio multiplicativo, chegamos em $4!$.

Portanto, a resposta final será: $\left[20!/(5!)^4\right]/4! = \frac{20!}{(5!)^4}\cdot\frac{1}{4!} = \frac{20!}{4!(5!)^4}$ //

Terceira questão (2,0 pontos). De quantos modos podemos dividir 20 pessoas:

(a) em quatro grupos de 5? $\frac{20!}{4!5!5!5!5!}$

(b) em um grupo de 8 e dois grupos de 6? $\frac{20!}{8!2!6!6!}$

Sejam G_1 o grupo de 8 pessoas e G_2 e G_3 os grupos de 6 pessoas cada. Vamos calcular a quantidade de maneiras de formar G_1. Estaremos representado as pessoas por $a_1, a_2, \dots, a_{20}$.

Para o primeiro integrante, teremos 20 escolhas. Feito a escolha do primeiro integrante, teremos 19 escolhas para o segundo integrante. Repetindo o procedimento até o 8º integrante, pelo princípio multiplicativo, teremos $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$ maneiras de escolher os 8 integrantes em ordem. Essa não é a resposta que queremos, pois ela considera, por exemplo, os conjuntos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ e $\{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_1\}$ como sendo diferentes. Para os grupos a ordem dos integrantes não importa.

Assim, note que contabilizamos cada grupo um total de vezes numericamente igual à quantidade de maneiras de reordenar as 8 pessoas integrantes. Essa quantidade é igual a $8!$, como argumentamos na letra (a). Assim, a resposta é:

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{8!}$$

(Continua)

De maneira análoga, teremos:

$$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6!}$$ maneiras de formar G_2, considerando formado G_1

e

$$\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6!}$$ maneiras de forma G_3, considerando formados G_1 e G_2.

Assim, pelo princípio multiplicativo, teremos: $\left(\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{8!}\right)\cdot\left(\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6!}\right)\cdot\left(\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6!}\right)=\frac{20!}{8!(6!)^2}$

maneiras de formar G_1, G_2 e G_3. Porém, note que contabilizamos alguns casos mais de uma vez. Por exemplo: $G_2=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ $G_3=\{a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12}\}$ $G_1=\{\cdots\}$

e

$G_3=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ $G_2=\{a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12}\}$ $G_1=\{\cdots\}$

Isso aconteceu pois G_2 e G_3 tem a mesma quantidade de elementos. Logo, contabilizamos cada trio G_1, G_2 e G_3 um número de vezes numericamente igual à quantidade de maneiras e reordenar G_2 e G_3: $2!$, utilizando argumentos análogos aos que utilizamos na letra (a).

Assim, a resposta final é: $\dfrac{\left[\dfrac{20!}{8!(6!)^2}\right]}{2!} = \dfrac{20!}{8!(6!)^2} \cdot \dfrac{1}{2!} = \underline{\underline{\dfrac{20!}{2!\,8!\,(6!)^2}}}$

Quarta questão (2,0 pontos). Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada.

Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_{12}$ os clubes. Não foi especificado se a ordem dos times importa, mas iremos resolver considerando duas situações: (1) A ordem dos times importa. (2) A ordem dos times não importa.

(1) Pode acontecer se considerarmos o par (x, y) como representando um jogo em que o clube x joga em casa e o clube y joga como clube visitante. Calcular quantos jogos podem ser feitos é equivalente a calcular quantos pares (x, y) podem ser formados, considerando que acontecerão 6 jogos na rodada. Sejam J_1 o par de clubes que jogarão o jogo 1, J_2 o par de clubes que jogarão o jogo 2, ..., J_6 o par de clubes que jogarão o jogo 6. Note que para J_1, temos 12 escolhas para seu primeiro elemento, e, feito essa escolha, temos 11 escolhas para o segundo elemento. Assim, pelo princípio multiplicativo, há $12 \cdot 11$ maneiras de formar o par de J_1. Analogamente, há $10 \cdot 9$ maneiras de formar J_2, $8 \cdot 7$ maneiras de formar J_3, $6 \cdot 5$ maneiras de formar J_4, $4 \cdot 3$ maneiras de formar J_5 e $2 \cdot 1$ maneiras de formar J_6. Continua...

Assim, pelo princípio multiplicativo, há $12 \cdot 11$ maneiras de formar o par de J_1. Analogamente, há $10 \cdot 9$ maneiras de formar J_2, $8 \cdot 7$ maneiras de formar J_3, $6 \cdot 5$ maneiras de formar J_4, $4 \cdot 3$ maneiras de formar J_5 e $2 \cdot 1$ maneiras de formar J_6. Temos duas possibilidades:

(a) os jogos acontecem em horários diferentes (a ordem dos jogos importa):

Então, pelo princípio multiplicativo, há $(12 \cdot 11)(10 \cdot 9)(8 \cdot 7)(6 \cdot 5)(4 \cdot 3)(2 \cdot 1) = \underline{12!}$ maneiras de selecionar os jogos

(b) os jogos acontecem no mesmo horário (a ordem dos jogos não importa):

Nesse caso, note que as maneiras de selecionar os jogos obtida no item (a) contabiliza cada par mais de uma vez. Exemplo: $J_1 = (c_1, c_2)$ $J_2 = (c_3, c_4)$ $J_3 = (c_5, c_6)$ $J_4 = (c_7, c_8)$ $J_5 = (c_9, c_{10})$ $J_6 = (c_{11}, c_{12})$

Seria contado como sendo diferente de

$J_1 = (c_3, c_4)$ $J_2 = (c_1, c_2)$ $J_3 = (c_5, c_6)$ $J_4 = (c_7, c_8)$ $J_5 = (c_9, c_{10})$ $J_6 = (c_{11}, c_{12})$

Cada par foi contado uma quantidade de vezes numericamente igual à quantidade de reordenações de J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 e J_6: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ Assim, a resposta será: $12!/6!$

Já (2) pode acontecer se considerarmos o par $\{x, y\}$ como representando um jogo em que o clubes x e y jogam em um campo neutro. Calcular quantos jogos podem ser feitos é equivalente a calcular quantos pares $\{x, y\}$ podem ser formados, considerando que acontecerão 6 jogos na rodada. Sejam J_1 o par de clubes que jogarão o jogo 1, J_2 o par de clubes que jogarão o jogo 2, ..., J_6 o par de clubes que jogarão o jogo 6. Note que para J_1, temos 12 escolhas para seu primeiro elemento, e, feito essa escolha, temos 11 escolhas para o segundo elemento. Assim, pelo princípio multiplicativo, há $12 \cdot 11$ maneiras de formar o par de J_1. Analogamente, há $10 \cdot 9$ maneiras de formar J_2, $8 \cdot 7$ maneiras de formar J_3, $6 \cdot 5$ maneiras de formar J_4, $4 \cdot 3$ maneiras de formar J_5 e $2 \cdot 1$ maneiras de formar J_6. Porém, como a ordem dos clubes não importa, então para cada quantidade obtida, devemos desconsiderar as repetições. Cada par foi contado uma quantidade de vezes numericamente igual à quantidade de maneiras de reordenar os dois elementos: $2 \cdot 1 = 2!$. Assim, temos: $\frac{12 \cdot 11}{2!}$ maneiras para J_1, $\frac{10 \cdot 9}{2!}$ maneiras para J_2, $\frac{8 \cdot 7}{2!}$ maneiras para J_3, $\frac{6 \cdot 5}{2!}$ maneiras para J_4, $\frac{4 \cdot 3}{2!}$ maneiras para J_5 e $\frac{2 \cdot 1}{2!}$ maneiras para J_6.

Analogamente à (1), teremos duas possibilidades:

(a) os jogos acontecem em horários diferentes (a ordem dos jogos importa):

Então, pelo princípio multiplicativo, há $\left(\frac{12\cdot 11}{2!}\right)\left(\frac{10\cdot 9}{2!}\right)\left(\frac{8\cdot 7}{2!}\right)\cdot\left(\frac{6\cdot 5}{2!}\right)\cdot\left(\frac{4\cdot 3}{2!}\right)\left(\frac{2\cdot 1}{2!}\right) = \frac{12!}{(2!)^6}$ maneiras de selecionar os jogos

(b) os jogos acontecem no mesmo horário (a ordem dos jogos não importa):

Nesse caso, note que as maneiras de selecionar os jogos obtida no item (a) contabiliza cada par mais de uma vez. Exemplo: $J_1 = \{C_1, C_2\}$ $J_2 = \{C_3, C_4\}$ $J_3 = \{C_5, C_6\}$ $J_4 = \{C_7, C_8\}$ $J_5 = \{C_9, C_{10}\}$ $J_6 = \{C_{11}, C_{12}\}$

seria contado como sendo diferente de

$J_1 = \{C_3, C_4\}$ $J_2 = \{C_1, C_2\}$ $J_3 = \{C_5, C_6\}$ $J_4 = \{C_7, C_8\}$ $J_5 = \{C_9, C_{10}\}$ $J_6 = \{C_{11}, C_{12}\}$

Cada par foi contado uma quantidade de vezes numericamente igual à quantidade de reordenações de J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 e J_6: $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 6!$ Assim, a resposta será: $\frac{\left[\frac{12!}{(2!)^6}\right]}{6!} = \frac{12!}{(2!)^6}\cdot\frac{1}{6!} = \frac{12!}{(2!)^6\cdot 6!}$

Quinta questão (2,0 pontos). Quantos são os números naturais de 8 dígitos nos quais o dígito 3 figura exatamente 3 vezes e o dígito 5 exatamente 2 vezes? 273280

Vamos contar quantas maneiras de formar um número do 8 dígitos que satisfaz a propriedade mencionada. Note que temos duas possibilidades:

(1) O primeiro dígito não é 3 nem 5

(2) O primeiro dígito é 3 ou é 5

Calculando (1): Para a escolha do 1º dígito, temos 7 opções: 1,2,4,6,7,8,9. Feita essa escolha, sobram 7 dígitos para colocarmos os três 3's e os dois 5's. Colocando os 3's: Temos 7 posições para o primeiro número 3, 6 posições para o segundo e 5 posições para o terceiro número 3. Colocando os 5's: Temos 4 posições para o primeiro número 5 e 3 posições para o segundo. Porém, como os números 3 e 5 são idênticos entre si, estaremos contando os números mais de uma vez. Exemplo: $1 3_1 2 3_2 3_3 5_1 5_2 6$ e $1 3_2 2 3_1 3_3 5_2 5_1 6$ que foram contados como números diferentes. A quantidade de vezes que cada número foi contado é numericamente

Exemplo: $1\,3_1\,2\,3_2\,3_3\,5_1\,5_2\,6$ e $1\,3_2\,2\,3_1\,3_3\,5_2\,5_1\,6$ que foram contados como números diferentes. A quantidade de vezes que cada número foi contado é numericamente igual à quantidade de reordenações dos números 3 e 5: $3\cdot2\cdot1=6$ e $2\cdot1=2$ respectivamente. Assim, pelo princípio multiplicativo, teremos $\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=7\cdot5$ maneiras de posicionar os números 3 no número de 8 dígitos e $\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=2\cdot3$ maneiras de posicionar os números 5, tendo sido feito o posicionamento dos números 3.

Por fim, restam dois dígitos e, para ambos, temos 8 opções de números: 0, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9. Desse modo, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números que satisfazem (1) é:

$$(7)\cdot(7\cdot5)\cdot(2\cdot3)\cdot8\cdot8 = 8^2\cdot7^2\cdot6\cdot5 = 94080$$

Para calcular quantos números satisfazem (2), vamos dividir em dois casos:

(a) o número começa com 3

(b) o número começa com 5

Calculando (2)(a): o primeiro dígito está fixo e é igual a 3. Vamos posicionar os dois números 3 restantes e os dois números 5: para o primeiro número 3, temos 7 posições nas quais podemos colocá-lo. Para o segundo, temos 6 posições. Permutações entre os 3's: $2 \cdot 1 = 2$. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $\frac{7 \cdot 6}{2} = 7 \cdot 3$ maneiras de posicionar os 3's.

↪ supondo que já posicionamos os 3's

Analogamente, teremos $\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 2$ maneiras de posicionar os 5's. Restaram três dígitos e, para cada um, temos 8 escolhas: 0,1,2,4,6,7,8,9. Assim, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números que satisfazem as propriedades de (2) e (a) são: $(7 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 2) \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ $= 107520$.

Calculando (2)(b): o primeiro dígito está fixo e é igual a 5. Vamos posicionar os três números 3 restantes e o único número 5: para o primeiro número 3, temos 7 posições nas quais podemos colocá-lo. Para o segundo, temos 6 posições. Para o terceiro: 5 posições. Permutações entre os 3's: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 7 \cdot 5$ maneiras

Calculando (2)(b): O primeiro dígito está fixo e é igual a 5. Vamos posicionar os três números 3 restantes e o único número 5: para o primeiro número 3, temos 7 posições nas quais podemos colocá-lo. Para o segundo, temos 6 posições. Para o terceiro: 5 posições. Permutações entre os 3's: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 7 \cdot 5$ maneiras

→ Supondo que já posicionamos os 3's

Analogamente, teremos 4 maneiras de posicionar o 5. Restaram três dígitos e, para cada um temos 8 escolhas: 0,1,2,4,6,7,8,9. Assim, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de números que satisfazem as propriedades de (2) e (b) são: $(7 \cdot 5) \cdot (4)\, 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 71680$

números que satisfazem (1): 94080

números que satisfazem $(2)_{(a)}$: 107520

número que satisfazem $(2)_{(b)}$: 71680

Resposta final: $94080 + 107520 + 71680 = 273280$ números de 8 dígitos com três 3's e dois 5's