UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM - 2023.1
PROFESSOR: WILLIKAT BEZERRA DE MELO
TURMA: 2Z

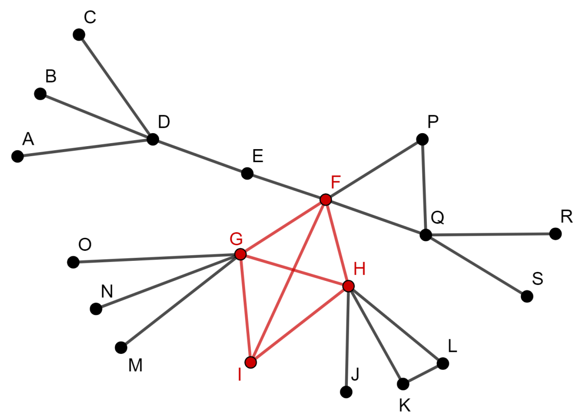
MONITOR: JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

## RESOLUÇÃO DA LISTA 6

## PROBLEMAS

**1. É possível que a soma dos graus dos vértices de um grafo seja ímpar?**

**2. No grafo $G$ da figura abaixo:**




**(a) Dê o grau de cada um dos vértices.**

**(b) Qual a soma de todos os graus?**

**(c) Qual o número de arestas?**

**(d) Determine $\Delta(G)$.**

**(e) Determine $\delta(G)$.**

**(f) Verifique a desigualdade $\dfrac{v(G)}{\Delta(G)+1} \leq \alpha(G) \leq \dfrac{e(G)}{\delta(G)}$ neste grafo $G$.**

**3. Mostre que todo grafo $G$ possui um número par de vértices de grau impar.**

**4. Quantas arestas têm $K_7$? e $K_{12}$? e $K_n$?**

**5. Quantos vértices tem um grafo completo de 105 arestas?**

## RESOLUÇÃO

**1.**
Não, pois o grau de um vértice, por definição, é numericamente igual ao número de arestas que tem ele como uma das extremidades. Indepentemente da paridade desse número, ao somar o grau dos vértices do grafo $G$, contaremos cada aresta do grafo duas vezes, uma para cada extremidade de uma aresta. Assim, a soma é igual à $2 \times e(G)$, um número par.

**2.**

**(a)**

1. $d_G(A) = 1$
2. $d_G(B) = 1$
3. $d_G(C) = 1$
4. $d_G(D) = 4$
5. $d_G(E) = 2$
6. $d_G(F) = 6$
7. $d_G(G) = 6$
8. $d_G(H) = 6$
9. $d_G(I) = 3$
10. $d_G(J) = 1$
11. $d_G(K) = 2$
12. $d_G(L) = 2$
13. $d_G(M) = 1$
14. $d_G(N) = 1$
15. $d_G(O) = 1$
16. $d_G(P) = 2$
17. $d_G(Q) = 4$
18. $d_G(R) = 1$
19. $d_G(S) = 1$

**(b)**

$$\sum_{v \in G} d_G(v) = 1+1+1+4+2+6+6+6+3+1+2+2+1+1+1+2+4+1+1 = 46$$

**(c)**

1. $AD$
2. $BD$
3. $CD$
4. $DE$
5. $EF$
6. $FG$
7. $FH$
8. $FI$
9. $FP$
10. $FQ$
11. $GH$
12. $GI$
13. $GM$
14. $GN$
15. $GO$
16. $HI$
17. $HJ$
18. $HK$
19. $HL$
20. $KL$
21. $PQ$
22. $QR$
23. $QS$

**(d)**
Por definição, $\Delta(G)$ é o maior grau de um vértice de $G$. Logo, $\Delta(G) = 6$.

**(e)**
Por definição, $\delta(G)$ é o menor grau de um vértice de $G$. Logo, $\delta(G) = 1$.

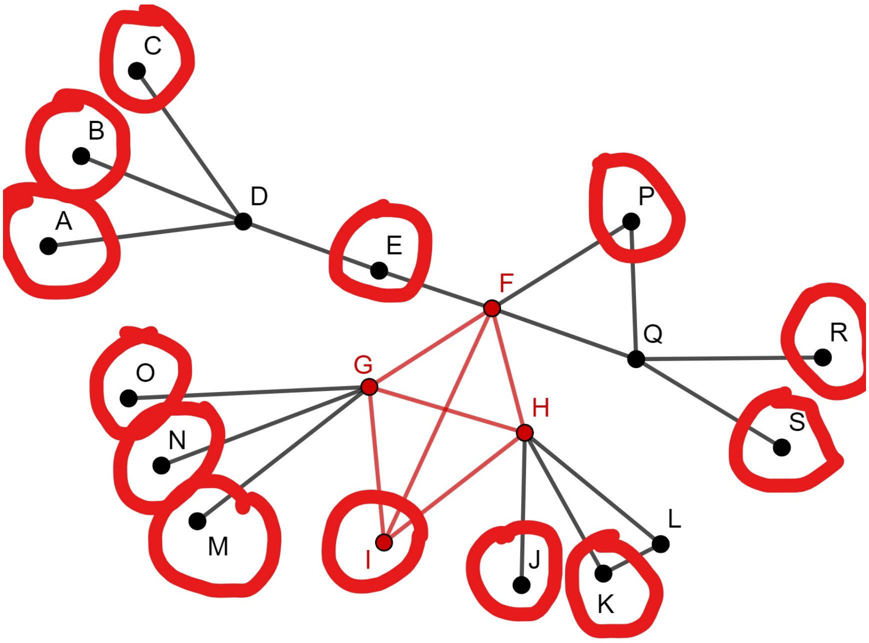
**(f)**
Vimos no item (a) que $G$ tem 19 vértices. Logo, $v(G) = 19$. Já no item (c), vimos que $G$ tem 23 arestas. Logo, $e(G) = 23$. Resta determinar $\alpha(G)$.

Por definição, $\alpha(G)$ é o número de elementos do maior conjunto de vértices de $G$ que são independentes.

Recorde que um conjunto $X$ de vértices de $G$ é dito independente se para todo vértice $u, v \in X$, temos que a aresta $uv$ não é aresta de $G$.

Argumentaremos que $\alpha(G) = 13$. Para isso, formaremos o maior conjunto de vértices independentes de $G$. É possível que exista mais de um conjunto com essa propriedade.

Denote por $X$ o conjunto de vértices de $G$ independentes que estamos construíndo. Temos que: $X = \{A, B, C, E, P, R, S, I, M, N, O, J, K\}$ é um conjunto de vértices de $G$ independente. Além disso, $|X| = 13$.




Perceba que o conjunto $X$ é maximal, pois não existe outro conjunto de vértices independentes $Y \subset G$ tal que $X \subset Y$.

O grafo $G$ tem 19 vértices. Para qualquer conjunto de vértices independentes $Y$, temos que ou $D \in Y$, ou $D \notin Y$.

Situação 1: $D \in Y$

Se $D \in Y$, então $A, B, C, E \notin Y$. Assim, $|Y| \leq 15$ pois há 19 vértices e estamos desconsiderando 4 para formar $Y$. Podemos continuar com a investigação: ou $Q \in Y$, ou $Q \notin Y$.

Se $Q \in Y$, então $F, P, R, S \notin Y$. Assim, $|Y| \leq 11$. Desse modo, $|Y| < |X|$. Como queremos encontrar $Y$ tal que $|X| < |Y|$, então devemos desconsiderar a hipótese de $Q \in Y$. Portanto, $Q \notin Y$. De maneira análoga, teremos que $G \notin Y$ e $H \notin Y$, pois caso contrário $|Y| \leq 9$ e $|Y| \leq 9$ respectivamente. Em ambos, $|Y| < |X|$.

Recapitulando: se $D \in Y$, para maximizar a quantidade de elementos de $Y$, teremos que ter $Q, G, H \notin Y$. Assim, $|Y| \leq 12$. Logo, não nunca teremos $|X| < |Y|$. Se quisermos encontrar um conjunto de vértices independentes maiores do que $X$, então não podemos ter $D \in Y$. Assim, ou $D \notin Y$, ou não existe tal $Y$.

Situação 2: $D \notin Y$

Com isso, $|Y| \leq 18$. Para garantir que não tenhamos $Y \subset X$, é necessário que $Y$ possua pelo menos um elemento que não esteja em $X$. Caso $Y \subset X$ então $|Y| \leq |X|$.

Assim, é preciso que $F \in Y$ ou $Q \in Y$ ou $G \in Y$ ou $H \in Y$ ou $L \in Y$.

Se $F \in Y$, então $E, P, Q, G, I, H \notin Y$. Logo, $|Y| \leq 12$. Desse modo, $|Y| < |X|$. Assim, não podemos ter $F \in Y$. Portanto, $F \notin Y$. Daí, $|Y| \leq 17$.

Se $Q \in Y$, então $P, R, S \notin Y$. Logo, $|Y| \leq 14$. Note que $G \notin Y$ (caso contrário $|Y| \leq 9$). Daí teremos que $|Y| \leq 13 = |X|$. Assim, podemos desconsiderar o caso em que $Q \in Y$. Desse modo, $|Y| \leq 16$, já que $D, F, G \notin Y$.

Se $G \in Y$, então $O, M, N, I \notin Y$. Assim, $|Y| \leq 12$. Ou seja, $|Y| < |X|$. Portanto, não podemos ter $G \in Y$. Daí, $G \notin Y$ e $|Y| \leq 15$.

Analogamente, se $H \in Y$, teremos que $|Y| \leq 11$ (Por quê?). Assim, $H \notin Y$ e $|Y| \leq 14$. Porém, só sobra o caso em que $L \in Y$, que implica que $K \notin Y$. Daí, $|Y| \leq 13 = |X|$.

Logo, não nunca teremos $|X| < |Y|$. Então, concluí-se que não existe um conjunto de vértices independentes $Y \subset G$ tal que $|X| < |Y|$. Portanto, por definição,

$$\alpha(G) = |X| = 13$$

Com isso, temos que:

- $\dfrac{v(G)}{\Delta(G)+1} = \dfrac{19}{6+1} = \dfrac{19}{7} < \dfrac{21}{7} = 3$
- $\alpha(G) = 13$
- $\dfrac{e(G)}{\delta(G)} = \dfrac{23}{1} = 23$

Assim,

$$\frac{v(G)}{\Delta(G)+1} \leq \alpha(G) \leq \frac{e(G)}{\delta(G)}$$

Pois,

$$\frac{19}{7} \leq 13 \leq 23$$

**3.**

Seja $G$ um grafo. Daí, note que

$$\sum_{v \in G} d_G(v) = \sum_{v \in G}^{d_G(v) \text{ par}} d_G(v) \quad + \sum_{v \in G}^{d_G(v) \text{ ímpar}} d_G(v)$$

Ou seja,

$$\sum_{v \in G}^{d_G(v) \text{ ímpar}} d_G(v) = \sum_{v \in G} d_G(v) - \sum_{v \in G}^{d_G(v) \text{ par}} d_G(v)$$

Mostramos na questão 1 que

$$\sum_{v \in G} d_G(v) = 2e(G)$$

Porém, temos que $\sum_{v \in G}^{d_G(v) \text{ par}} d_G(v)$ é par, pois cada parcela da soma é par, então o somatório também será par.

Assim, $\sum_{v \in G}^{d_G(v) \text{ ímpar}} d_G(v)$ é igual à diferença entre dois números pares. Portanto, é par.

Como cada parcela do somatório é um número ímpar, para que o somatório seja par, é necessário que haja uma quantidade par de parcelas, portanto, $G$ possuirá um número par de vértices de grau ímpar.

$\blacksquare$

**4.**
Por definição, cada vértice do grafo $K_n$ forma uma aresta com os vértices restantes. Desse modo, a quantidade de arestas de $K_n$ é numericamente igual à quantidade de pares distintos de vértices de $K_n$. Este último é igual a $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Portanto, existem

- $\dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ arestas em $K_7$
- $\dfrac{12 \times 11}{2} = 66$ arestas em $K_{12}$
- $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arestas em $K_n$

**5.**
Vimos na questão anterior que o número de arestas de um grafo completo de $n$ vértices ($K_n$) é igual a $\frac{n(n-1)}{2}$. Como o grafo completo mencionado tem 105 arestas, então queremos encontrar $x \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x(x-1)}{2} = 105$.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 105 \iff x(x-1) = 210 \iff x^2 - x = 210 \iff x^2 - x - 210 = 0 \iff$$

$$\iff (x-15)(x+14) = 0 \iff x = 15 \text{ ou } x = -14$$

Assim, o grafo completo $K_x$ tem 15 vértices. Logo, $K_x = K_{15}$.