UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM - 2023.1
PROFESSOR: WILLIKAT BEZERRA DE MELO
TURMA: 2Z

MONITOR: JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

ENCONTRO DE MONITORIA - 29/08/2023

PROBLEMAS

1. Demonstre por indução matemática:

(a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ **para todo** $n \in \mathbb{N}$

(b) $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ **para todo** $n \in \mathbb{N}$
Dica: utilize a igualdade do item (a)

2. Quantas arestas têm K_{16}**? e** K_n**?**

RESOLUÇÃO

1.

(a)

Caso base:

A igualdade é válida para $n = 1$?

Sim, pois, $1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$.

Hipótese de indução:

Suponha que a igualdade é válida para $n = k$, para algum $k \geq 1$, com $k \in \mathbb{N}$.

Passo de indução:

Queremos mostrar que a igualdade também é válida para $k + 1$, ou seja:

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Note que $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2} = \dfrac{k^2 + 3k + 2}{2}$.

Da hipótese de indução, temos que

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Adicionando $k + 1$ em ambos os lados da igualdade:

$$(1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \iff \tag{1}$$

$$\iff 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \mathbf{1} \cdot (k+1) \iff \tag{2}$$

$$\iff 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k^2 + k}{2} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}}(k+1) \iff \tag{3}$$

$$\iff 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k^2 + k}{2} + \frac{2k + 2}{2} \iff \tag{4}$$

$$\iff 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \iff \tag{5}$$

$$\iff 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \iff \tag{6}$$

$$\iff 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{7}$$

Portanto, a igualdade é válida para $k + 1$. Desse modo, pelo princípio da indução finita, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

(b)

Caso base:

A igualdade é válida para $n = 1$?

Sim, pois, $1^2 = 1^3$.

Hipótese de indução:

Suponha que a igualdade é válida para $n = k$, para algum $k \geq 1$, com $k \in \mathbb{N}$.

Passo de indução:

Queremos mostrar que a igualdade também é válida para $k+1$, ou seja:

$$[1 + 2 + \ldots + k + (k+1)]^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3$$

Vimos no item (a) que $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Assim,

$$[1 + 2 + \ldots + k + (k+1)]^2 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 =$$

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \frac{(k^2+2k+1)(k^2+4k+4)}{4} = \frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4}$$

Logo, devemos mostrar que

$$\frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4} = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3$$

Mostrando a igualdade acima:

Da hipótese de indução, temos que

$$(1 + 2 + \ldots + k)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3$$

Adicionando $(k+1)^3$ em ambos os lados da igualdade:

$$(\mathbf{1} + \mathbf{2} + \ldots + \mathbf{k})^{\mathbf{2}} + (k+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 \iff \tag{8}$$

$$\iff \left[\frac{\mathbf{k(k+1)}}{\mathbf{2}}\right]^{\mathbf{2}} + (k+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 \iff \tag{9}$$

$$\iff \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \mathbf{1} \cdot (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 \iff \tag{10}$$

$$\iff \frac{k^2(k^2+2k+1)}{4} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}} \cdot (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = 1^3 + \ldots + (k+1)^3 \iff \tag{11}$$

$$\iff \frac{k^4+2k^3+k^2}{4} + \frac{4k^3+12k^2+12k+4}{4} = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 \iff \tag{12}$$

$$\iff \frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4} = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 \tag{13}$$

Portanto, a igualdade é válida para $k+1$. Desse modo, pelo princípio da indução finita, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar.

2.

Por definição, cada vértice do grafo K_n forma uma aresta com os vértices restantes. Desse modo, a quantidade de arestas de K_n é numericamente igual à quantidade de pares distintos de vértices de K_n. Este último é igual a $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Portanto, existem

- $\dfrac{16 \times 15}{2} = 120$ arestas em K_{16}
- $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arestas em K_n