UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM - 2023.1
PROFESSOR: WILLIKAT BEZERRA DE MELO
TURMA: 2Z

MONITOR: JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

ENCONTRO DE MONITORIA - 22/08/2023

PROBLEMAS

1. Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \ldots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é inferior a $k+4$, para todo k?

2. Quantas são as permutações dos números $\{1, 2, \ldots, 10\}$ nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

RESOLUÇÃO

1.
Se $1 \leq n \leq 4$ então existem $P_n^n = n!$ maneiras de permutar os números. Já para $n > 4$, temos que:

Para o número que ocupa a primeira posição, há 4 escolhas possíveis, visto que o número deve ser menor do que $1 + 4 = 5$.

Feita essa escolha, há 4 escolhas possíveis para o número que ocupa a segunda posição. Isso porque o número deve ser menor do que 6, então ele pode ser os números de 1 até 5, porém devemos desconsiderar, entre esses números, o número que foi escolhido anteriormente para ocupar a primeira posição.

De maneira análoga, considerando feitas as escolhas das posições anteriores a um dado k, se $k+4 \leq n+1$ (ou seja, se $k \leq n-3$), então teremos 4 escolhas possíveis para o número que ocupa a posição k.

De fato, podemos escolher os números de 1 até $k+3$, já que o número deve ser menor que $k+4$. Porém, devemos desconsiderar, dentre esses números, os $k-1$ números escolhidos anteriormente. Assim, teremos $(k+3)-(k-1) = 4$ escolhas para o número da posição k.

Supondo escolhidos os primeiros $n-3$ números, para os demais, prosseguiremos da seguinte maneira:

Para a posição $n-2$, devemos escolher um número que seja menor que $(n-2)+4=n+2$. Podemos escolher dentre os números de 1 até n. Porém, devemos desconsiderar, dentre esses, os números escolhidos anteriormente para as $n-3$ primeiras posições. Então, temos $n-(n-3)=3$ escolhas para o número que se encontra na posição $n-2$.

Analogamente, para a posição $n-1$, devemos escolher um número que seja menor que $(n-1)+4=n+3$. Podemos escolher dentre os números de 1 até n. Porém, devemos desconsiderar, dentre esses, os números escolhidos anteriormente para as $n-2$ primeiras posições. Então, temos $n-(n-2)=2$ escolhas para o número que se encontra na posição $n-1$.

Por fim, teremos apenas 1 escolha para o número que se encontra na posição n. (Por quê?)

Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $\underbrace{4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 4}_{n-3 \text{ vezes}}\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4^{n-4}\times 4!$ maneiras de permutar os números respeitando as condições impostas.

2.

Formaremos uma permutação que respeita essas regras da seguinte maneira:

(1) Retire os elementos 2, 5 e 3 do conjunto e permute os demais elementos do conjunto. Há $P_7^7 = 7!$ maneiras de permutar os elementos.

(2) Dada uma permutação $n_1n_2n_3n_4n_5n_6n_7$, coloque os números restantes em uma ou mais posições abaixo.

$$\underbrace{\ldots}_{\text{pos. } 1} n_1 \underbrace{\ldots}_{\text{pos. } 2} n_2 \underbrace{\ldots}_{\text{pos. } 3} n_3 \underbrace{\ldots}_{\text{pos. } 4} n_4 \underbrace{\ldots}_{\text{pos. } 5} n_5 \underbrace{\ldots}_{\text{pos. } 6} n_6 \underbrace{\ldots}_{\text{pos. } 7} n_7 \underbrace{\ldots}_{\text{pos. } 8}$$

Cada posição pode ter de 0 à 3 números. É preciso impor que o 2 sempre esteja numa posição anterior (não necessariamente consecutiva) à posição do 5 e o 5 sempre esteja numa posição anterior (não necessariamente consecutiva) à posição do 3. Assim, se colocamos um número na posição 6, um número na posição 1 e um número na posição 8, então necessariamente o número da posição 1 é 2, o número da posição 6 é 5 e o número da posição 8 é 3. Nesse caso, teremos as permutações do tipo: $2n_1n_2n_3n_4n_55n_6n_73$.

Por outro lado, se existe mais de um número numa mesma posição, por exemplo: dois números na posição 1 e um número na posição 7, então os números que estão na posição 1 serão 2 e 5, nessa ordem, e o número na posição 7 será 3. Ou seja, os três números sempre devem respeitar a ordem entre eles, imposta no enunciado. Nesse caso, teremos as permutações do tipo: $25n_1n_2n_3n_4n_5n_63n_7$.

A soma do total de números em cada posição deve ser igual a 3. Tendo isso em mente, note que podemos associar, de maneira única, uma lista ordenada de oito entradas para cada posicionamento dos três números. Por exemplo: $(1,0,0,0,1,0,0,1)$ para as permutações do tipo $2n_1n_2n_3n_4n_55n_6n_73$ e $(2,0,0,0,1,0,1,0)$ para as permutações do tipo $25n_1n_2n_3n_4n_5n_63n_7$.

Além disso, cada lista associada a um posicionado dos três números, corresponde a uma solução inteira não-negativa da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 3$$

Desse modo, podemos associar, de maneira biunívoca, cada lista ordenada com uma solução da equação. Assim, contar de quantas maneiras podemos colocar os números 2, 5 e 3 em pelo menos uma das oito posições disponíveis, respeitando a condição estabelecida, é equivalente a contar quantas soluções inteiras não negativas possui a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 3$$

Vimos, no encontro de monitoria do dia 11/08/2023, uma fórmula para contar quantas soluções uma equação do tipo possui. Sendo 7 a quantidade de sinais "+" e 3 o resultado da soma, a equação possuirá uma quantidade de soluções inteiras não-negativas igual a

$$P_{(10;3,7)} = \frac{10!}{3! \times 7!}$$

Logo, temos $P_{(10;3,7)}$ maneiras de realizar a etapa (2).

Portanto, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de permutações que respeitam a condição imposta no enunciado é igual a

$$7! \times \left(\frac{10!}{3! \times 7!} \right) = \frac{10!}{3!} = P_3^7 = 840$$