UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM - 2023.1
PROFESSOR: WILLIKAT BEZERRA DE MELO
TURMA: 2Z

MONITOR: JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

ENCONTRO DE MONITORIA - 05/09/2023

PROBLEMAS

Problema 1. 63127 candidatos compareceram a uma prova do vestibular (25 questões de múltipla-escolha com 5 alternativas por questão). Considere a afirmação: "Pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico as k primeiras questões da prova". Qual é o maior valor de k para o qual podemos garantir que a afirmação acima é verdadeira?

Problema 2. Quantos grafos distintos com 7 vértices existem? e com n vértices?

Teorema (Lema dos apertos de mão)**.** *Em um grafo G com número de arestas igual a* $\mathrm{e}(G)$*, temos que*

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot \mathrm{e}(G)$$

Problema 3. Demonstre o teorema acima.

RESOLUÇÕES

Resolução do problema 1.

As sentenças abaixo serão garantidamente verdadeiras para os mesmos valores de $k \leq 25$:

(1) De 63127 candidatos, pelo menos dois deles responderam de modo idêntico as k primeiras questões da prova do vestibular.

(2) De 63127 candidatos, pelo menos dois deles responderam de modo idêntico uma prova de k questões de múltipla-escolha, com 5 alternativas por questão.

Desse modo, pode-se analisar quais valores de k vão satisfazer uma sentença e aplicar essa conclusão para a outra sentença.

Para uma prova com k questões de múltipla-escolha e 5 alternativas por questão, existem, pelo princípio multiplicativo, $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{k \text{ vezes}} = 5^k$ gabaritos distintos possíveis.

Assumindo que cada candidato só faz a prova uma única vez e não marca mais de uma alternativa por questão, cada candidato produzirá exatamente um gabarito. A quantidade de gabaritos produzidos é numericamente igual à quantidade de candidatos (podendo existir gabaritos iguais produzidos por candidatos diferentes).

Podemos representar cada gabarito produzido pelos candidatos como sendo um pombo e cada gabarito possível como sendo uma casa. Dessa maneira, haverão 63127 pombos e 5^k casas. Se $5^k < 63127$, então, pelo princípio da casa dos pombos, que existirá uma casa com pelo menos dois pombos. Em outras palavras, dois candidatos que responderam de modo idêntico as k questões da prova.

Essa afirmação sempre será verdadeira desde que $5^k < 63127$. Como foi pedido o maior valor de k que garante que a afirmativa é verdadeira, então devemos encontrar o maior valor de k (um número inteiro) tal que $5^k < 63127$. Temos que:

- $5^1 = 5 < 63127$
- $5^2 = 25 < 63127$
- $5^3 = 125 < 63127$
- $5^4 = 625 < 63127$
- $5^5 = 3125 < 63127$
- $5^6 = 15625 < 63127$
- $5^7 = 78125 > 63127$

Portanto, o maior valor de k que garante que a afirmação acima é verdadeira é $k = 6$.

Resolução do problema 2.

Um grafo G é definido de maneira única a partir do número de vértices e de como cada par de vértices do grafo interage (se o par forma uma aresta ou não). Vamos encontrar a quantidade de grafos para o caso geral, com n vértices.

Para um grafo de n vértices, existem $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ pares de vértices. Cada um deles pode ser (ou não) uma aresta. Assim, o número de arestas de um grafo é no mínimo zero e no máximo $\frac{n(n-1)}{2}$, podendo também ser qualquer inteiro entre esses dois valores.

Quantos grafos existem com n vértices e:

- 0 arestas? Existe 1 grafo com essa propriedade.
- 1 aresta? Há $\binom{n}{2}$ pares de vértices para escolher para ser a aresta do grafo. Desse modo, existem $\binom{n}{2}$ grafos com essa propriedade.
- 2 arestas? Há $\binom{n}{2}$ pares de vértices para escolher para ser a primeira aresta do grafo. Escolhida a primeira aresta, há $\binom{n}{2} - 1$ pares de vértices para escolher para ser a segunda aresta do grafo. Desse modo, como não existe uma ordem entre as arestas (primeira aresta, segunda aresta e etc.) e pelo princípio multiplicativo, a quantidade de grafos com 2 arestas é numericamente igual a

$$\frac{\binom{n}{2} \cdot \left[\binom{n}{2} - 1\right]}{2!}$$

- 3 arestas? Há $\binom{n}{2}$ pares de vértices para escolher para ser de a primeira das arestas do grafo. Escolhida a primeira aresta, há $\binom{n}{2} - 1$ pares de vértices para escolher para ser a segunda aresta do grafo. Escolhidas a primeira e segunda arestas, há $\binom{n}{2} - 2$ pares de vértices para escolher para ser a terceira aresta do grafo. Desse modo, como não existe uma ordem entre as arestas (primeira aresta, segunda aresta e etc.) e pelo princípio multiplicativo, a quantidade de grafos com 3 arestas é numericamente igual a

$$\frac{\binom{n}{2} \cdot \left[\binom{n}{2} - 1\right] \cdot \left[\binom{n}{2} - 2\right]}{3!}$$

$$\vdots$$

- k arestas (com $k < \frac{n(n-1)}{2}$)? Como não existe uma ordem entre as arestas (primeira aresta, segunda aresta e etc.) e pelo princípio multiplicativo, a quantidade de grafos com k arestas é numericamente igual a

$$\frac{\binom{n}{2} \cdot \left[\binom{n}{2} - 1\right] \cdot \ldots \cdot \left[\binom{n}{2} - (k-1)\right]}{k!}$$

$$\vdots$$

- $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas? Existe 1 grafo com essa propriedade (o grafo completo K_n).

Denotando $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ por m, se o número de arestas for k, com $0 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$, então a quantidade de grafos com essa quantidade de arestas pode ser reescrita como

$$P^m_{m-k} = (m-k)!\binom{m}{m-k} \qquad \text{onde } P^n_r \text{ é a } r\text{-permutação de } n$$

Portanto, a quantidade de grafos distintos com n vértices é igual a

$$P_m^m + P_{m-1}^m + P_{m-2}^m + \ldots + P_1^m + P_0^m = \sum_{i=0}^{m} P_i^m \qquad \text{com } m = \binom{n}{2}$$

Encontramos a resposta para o caso geral. Para o caso particular em que $n = 7$, teremos a quantidade de grafos sendo

$$\sum_{i=0}^{21} P_i^{21} = P_0^{21} + P_1^{21} + \ldots + P_{21}^{21} \qquad \text{com } m = \binom{7}{2} = 21$$

Resolução do problema 3.

Para demonstrar o teorema, utilizaremos o seguinte lema:

Lema (Princípio da inclusão-exclusão para n conjuntos)**.** *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de Ω. Observação: $|X|$ é a quantidade de elementos do conjunto X. Assim, defina*

- $S = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$
- $S_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$
- $S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|$
- $S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$

  $\vdots$
- $S_n = |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

Então,

$$S = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots + (-1)^{n+1} S_n$$

Entendendo o que o lema diz:

O lema nos permite encontrar a quantidade de elementos da união entre os conjuntos a partir da quantidade de elementos de cada conjunto e de suas interseções. Se $n = 2$, pelo lema teremos que $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - (|A_1 \cap A_2|)$. Já se $n = 3$, então $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

Uma demonstração do lema pode ser encontrada no apêndice 1 do livro "Análise Combinatória e Probabilidade" de Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez.

A notação que será utilizada:

- v: um vértice v do grafo G.
- $V(G)$: o conjunto de vértices do grafo G.

- $E(G)$: o conjunto de arestas e do grafo G.
- $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$: uma aresta do grafo G formada pelo par de vértices v_i e v_j, com $i \neq j$.
- $\mathrm{e}(G)$: o número de arestas que o grafo G possui.
- $|X|$: a quantidade de elementos do conjunto X.
- $d_G(v)$: o grau do vértice v do grafo G.

  Observação: o grau de um vértice v é a quantidade de arestas que tem v como um de seus componentes.

Começando a demonstração:

Um grafo G que possui uma quantidade de arestas igual a $\mathrm{e}(G)$ pode ter um número infinitos de vértices. Isso ocorre quando ele possui um número infinito de vértices de grau zero e um número finito de vértices de grau maior do que zero. Suponha que G seja um grafo que possui uma quantidade de arestas igual a $\mathrm{e}(G)$.

Defina o conjunto $V'(G) := \{v \in G : d_G(v) > 0\}$, ou seja, o conjunto de todos os vértices de G que possuem grau maior do que zero. Como a quantidade de elementos de $V'(G)$ é finita, suponha que $|V'(G)| = n$. Podemos denotar cada elemento de $V'(G)$ com um índice i tal que $1 \leq i \leq n$. Assim, sem perda de generalidade, $V'(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Defina agora os conjuntos:

- $A_1 := \{e \in E(G) : v_1 \in e\}$
- $A_2 := \{e \in E(G) : v_2 \in e\}$

  $\vdots$
- $A_n := \{e \in E(G) : v_n \in e\}$

Ou seja, A_i é o conjunto das arestas e do grafo G tal que o vértice v_i é um dos componentes de e. Em outras palavras, $e_{ix} = \{v_i, v_x\}$ para algum $i, x \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Note que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E(G)$, pois todas as arestas de G são formadas a partir dos vértices de $V'(G)$. Logo, temos que

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |E(G)| = \mathrm{e}(G)$$

Pelo lema, temos que

$$\mathrm{e}(G) = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots + (-1)^{n+1} S_n$$

Porém, $e \in A_i$ e $e \in A_j$ se, e somente se, $e = \{v_i, v_j\}$. Desse modo, $A_i \cap A_j$ tem no máximo 1 elemento pois cada aresta é definida a partir de um par de vértices. Assim, teremos que: ou $A_i \cap A_j = \varnothing$, ou $A_i \cap A_j = \{e_{ij}\}$.

Em ambas as situações, qualquer interseção formada por três ou mais dos conjuntos A_i, com $1 \leq i \leq n$, não possuirá elementos, por conta da definição dos conjuntos A_i. Logo,

$$S_3 = S_4 = S_5 = \ldots = S_n = 0$$

Assim,

$$\mathrm{e}(G) = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = S_1 - S_2$$

Da maneira que definimos cada conjunto A_i, teremos que $|A_i| = d_G(v_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$. Portanto,

$$S_1 = \sum_{v \in V'(G)} d_G(v) = \sum_{i=1}^{n} d_G(v_i)$$

Também, por conta da definição dos conjuntos A_i, teremos que $S_2 = \mathrm{e}(G)$ pois cada aresta de G é contada exatamente uma vez em S_2.

Logo, teremos

$$\mathrm{e}(G) = S_1 - S_2 = \sum_{v \in V'(G)} d_G(v) - \mathrm{e}(G) \iff \sum_{v \in V'(G)} d_G(v) = \mathrm{e}(G) + \mathrm{e}(G) = 2 \cdot \mathrm{e}(G)$$

Por fim, note que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{v \in V'(G)} d_G(v) \quad + \sum_{v \in V(G) \setminus V'(G)} d_G(v)$$

Por definição de $V'(G)$, teremos que $V(G) \setminus V'(G)$ será o conjunto de todos os vértices de G que possuem grau igual a zero. Assim,

$$\sum_{v \in V(G) \setminus V'(G)} d_G(v) = 0$$

Portanto,

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{v \in V'(G)} d_G(v) \quad + \sum_{v \in V(G) \setminus V'(G)} d_G(v) = 2 \cdot \mathrm{e}(G) + 0$$

O que implica que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot \mathrm{e}(G)$$

■