UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM - 2023.1
PROFESSOR: WILLIKAT BEZERRA DE MELO
TURMA: 2Z

MONITOR: JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

ENCONTRO DE MONITORIA - 15/09/2023

PROBLEMAS

Problema 1. Quantos vértices tem um grafo completo de 190 arestas?

Problema 2. Mostre que dados dois vértices u e v, com $u \neq v$, de um grafo G, existe um caminho ligando u a v se e somente se existe um passeio ligando u a v.

Problema 3. Explique a diferença entre subgrafo induzido e subgrafo não induzido.

RESOLUÇÕES

Resolução do problema 1.

Vimos no encontro do dia 29/08/2023 que o número de arestas de um grafo completo (K_n) de n vértices é $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Como o grafo completo mencionado tem 190 arestas, então queremos encontrar $x \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x(x-1)}{2} = 190$.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 190 \iff x(x-1) = 380 \iff x^2 - x = 380 \iff x^2 - x - 380 = 0 \iff$$

$$\iff (x-20)(x+19) = 0 \iff x = 20 \text{ ou } x = -19$$

Assim, o grafo completo K_x tem 20 vértices. Logo, $K_x = K_{20}$.

Resolução do problema 2.

Uma demonstração mais simples pode ser vista na página 39 das notas de aula.

Primeiro vamos mostrar que se existe um caminho ligando u a v em G, então existe um passeio ligando u a v:

Suponha que existe um caminho ligando u a v. Por definição, todo caminho é um passeio. Portanto, existe um passeio ligando u a v.

Resta mostrar que se existe um passeio ligando u a v em G, então existe um caminho ligando u a v:

Suponha que existe um passeio ligando u a v. Sem perda de generalidade, suponha que o passeio é descrito pela sequência $(u, v_1, \ldots, v_n, v)$, onde $u, v, v_i \in V(G)$ para todo $i \in \mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vamos construir um caminho de u a v a partir deste passeio.

Considere o conjunto $V_0 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e defina

$$r_0 = \min\{i \in \mathbb{N}_n : v_i = v_j, \quad \text{para algum j tal que } i < j, \quad v_i, v_j \in V_0\}$$

$$s_0 = \max\{j \in \mathbb{N}_n : v_{r_0} = v_j, \quad r_0 \neq j, \quad v_{r_0}, v_j \in V_0\}$$

Por construção e pela definição de passeio, a sequência

$$A_0 = (u, v_1, \ldots, v_{r_0-1}, v_{s_0}, v_{s_0+1}, \ldots, v)$$

descreve um passeio de u à v.

Se o passeio descrito por A_0 é um caminho, então a demonstração está concluída. Assim, suponha que o passeio descrito pela sequência A_0 não é um caminho.

Daí, existe $i, j \in \{1, \ldots, r_0 - 1, s_0, s_0 + 1, \ldots, n\}$ tal que $i \neq j$ e $v_i = v_j$. Por conta da construção de A_0 e pela definição de r_0 e s_0, que temos que $i, j \notin \{1, \ldots, r_0 - 1, s_0\}$. Desse modo, $i, j \in \{s_0 + 1, s_0 + 2, \ldots, n\}$.

Sejam $C_1 = \{s_0+1, s_0+2, \ldots, n\}$ e $V_1 = \{v_{s_0+1}, v_{s_0+2}, \ldots, v_n\}$. Defina

$$r_1 = \min\{i \in C_1 : v_i = v_j, \quad \text{para algum j tal que } i < j, \quad v_i, v_j \in V_1\}$$

$$s_1 = \max\{j \in C_1 : v_{r_1} = v_j, \quad r_1 \neq j, \quad v_{r_1}, v_j \in V_1\}$$

Por construção e pela definição de passeio, a sequência

$$A_1 = (u, v_1, \ldots, v_{r_0-1}, v_{s_0}, \ldots, v_{r_1-1}, v_{s_1}, \ldots, v)$$

descreve um passeio de u à v.

Se o passeio descrito por A_1 é um caminho, então a demonstração está concluída. Assim, suponha que o passeio descrito pela sequência A_1 não é um caminho. De maneira análoga ao que foi feito na construção de A_1, teremos que:

Existe $i, j \in \{s_1+1, s_1+2, \ldots, n\}$ tal que $i \neq j$ e $v_i = v_j$. Denotando por C_2 o conjunto $\{s_1+1, s_1+2, \ldots, n\}$ e $V_2 = \{v_{s_1+1}, v_{s_1+2}, \ldots, v_n\}$. Pode-se definir

$$r_2 = \min\{i \in C_2 : v_i = v_j, \quad \text{para algum j tal que } i < j, \quad v_i, v_j \in V_2\}$$

$$s_2 = \max\{j \in C_1 : v_{r_2} = v_j, \quad r_2 \neq j, \quad v_{r_2}, v_j \in V_1\}$$

Por construção e pela definição de passeio, a sequência

$$A_2 = (u, v_1, \ldots, v_{r_0-1}, v_{s_0}, \ldots, v_{r_1-1}, v_{s_1}, \ldots, v_{r_2-1}, v_{s_2}, \ldots, v)$$

descreve um passeio de u à v.

Se o passeio descrito por A_2 é um caminho, então a demonstração está concluída. Caso não seja, pode-se repetir o algoritmo uma quantidade finita de vezes até obter um caminho levando de u a v.

De fato, cada vez que construímos um passeio a partir do passeio anterior, obtemos uma nova sequência com pelo menos 1 termo a menos que a sequência anterior, que é finita.

Em determinado momento, para algum $k \geq 2$, teremos uma sequência com todos os termos distintos. Essa sequência descreve, por definição, um caminho de u até v. Portanto, se existe um passeio de u a v, então existe um caminho de u até v.

$\blacksquare$

Resolução do problema 3.

Dado um grafo G e conjunto $X \subset V(G)$, dizemos que o subgrafo de G induzido por X é o grafo no qual $V(X) = X$ e $E(X) = \{(u,v) : u, v \in X\}$. Se $E(X) \subsetneq \{(u,v) : u, v \in X\}$, então dizemos que o subgrafo é não induzido.