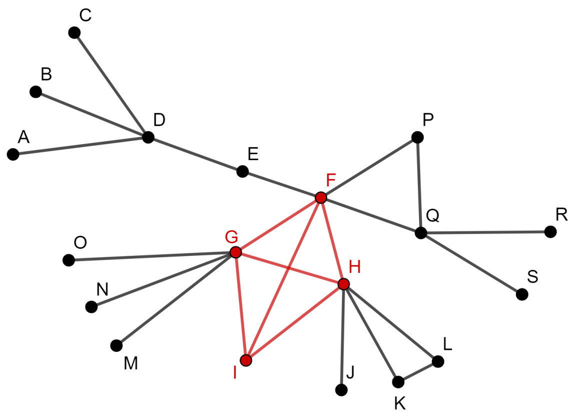
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRINCÍPIOS DE CONTAGEM - 2023.1
PROFESSOR: WILLIKAT BEZERRA DE MELO
TURMA: 2Z

MONITOR: JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

ENCONTRO DE MONITORIA - 25/08/2023

PROBLEMAS

1. No grafo G da figura abaixo:



(a) Dê o grau de cada um dos vértices.

(b) Qual a soma de todos os graus?

(c) Qual o número de arestas?

(d) Determine $\Delta(G)$.

(e) Determine $\delta(G)$.

(f) Verifique a desigualdade $\dfrac{v(G)}{\Delta(G)+1} \leq \alpha(G) \leq \dfrac{e(G)}{\delta(G)}$ neste grafo G.

RESOLUÇÃO

1.

(a)

1. $d_G(A) = 1$
2. $d_G(B) = 1$
3. $d_G(C) = 1$
4. $d_G(D) = 4$
5. $d_G(E) = 2$
6. $d_G(F) = 6$
7. $d_G(G) = 6$
8. $d_G(H) = 6$
9. $d_G(I) = 3$
10. $d_G(J) = 1$
11. $d_G(K) = 2$
12. $d_G(L) = 2$
13. $d_G(M) = 1$
14. $d_G(N) = 1$
15. $d_G(O) = 1$
16. $d_G(P) = 2$
17. $d_G(Q) = 4$
18. $d_G(R) = 1$
19. $d_G(S) = 1$

(b)

$$\sum_{v \in G} d_G(v) = 1+1+1+4+2+6+6+6+3+1+2+2+1+1+1+2+4+1+1 = 46$$

(c)

1. AD
2. BD
3. CD

4. DE
5. EF
6. FG
7. FH
8. FI
9. FP
10. FQ
11. GH
12. GI
13. GM
14. GN
15. GO
16. HI
17. HJ
18. HK
19. HL
20. KL
21. PQ
22. QR
23. QS

(d)
Por definição, $\Delta(G)$ é o maior grau de um vértice de G. Logo, $\Delta(G) = 6$.

(e)
Por definição, $\delta(G)$ é o menor grau de um vértice de G. Logo, $\delta(G) = 1$.

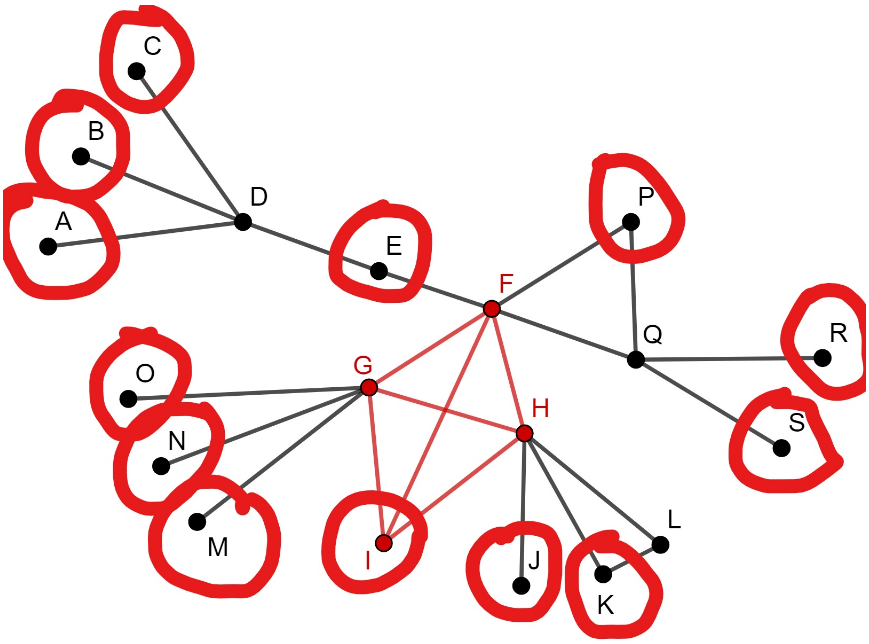
(f)
Vimos no item (a) que G tem 19 vértices. Logo, $v(G) = 19$. Já no item (c), vimos que G tem 23 arestas. Logo, $e(G) = 23$. Resta determinar $\alpha(G)$.

Por definição, $\alpha(G)$ é o número de elementos do maior conjunto de vértices de G que são independentes.

Recorde que um conjunto X de vértices de G é dito independente se para todo vértice $u, v \in X$, temos que a aresta uv não é aresta de G.

Argumentaremos que $\alpha(G) = 13$. Para isso, formaremos o maior conjunto de vértices independentes de G. É possível que exista mais de um conjunto com essa propriedade.

Denote por X o conjunto de vértices de G independentes que estamos construíndo. Temos que: $X = \{A, B, C, E, P, R, S, I, M, N, O, J, K\}$ é um conjunto de vértices de G independente. Além disso, $|X| = 13$.



Perceba que o conjunto X é maximal, pois não existe outro conjunto de vértices independentes $Y \subset G$ tal que $X \subset Y$.

O grafo G tem 19 vértices. Para qualquer conjunto de vértices independentes Y, temos que ou $D \in Y$, ou $D \notin Y$.

Situação 1: $D \in Y$

Se $D \in Y$, então $A, B, C, E \notin Y$. Assim, $|Y| \leq 15$ pois há 19 vértices e estamos desconsiderando 4 para formar Y. Podemos continuar com a investigação: ou $Q \in Y$, ou $Q \notin Y$.

Se $Q \in Y$, então $F, P, R, S \notin Y$. Assim, $|Y| \leq 11$. Desse modo, $|Y| < |X|$. Como queremos encontrar Y tal que $|X| < |Y|$, então devemos desconsiderar a hipótese de $Q \in Y$. Portanto, $Q \notin Y$. De maneira análoga, teremos que $G \notin Y$ e $H \notin Y$, pois caso contrário $|Y| \leq 9$ e $|Y| \leq 9$ respectivamente. Em ambos, $|Y| < |X|$.

Recapitulando: se $D \in Y$, para maximizar a quantidade de elementos de Y, teremos que ter $Q, G, H \notin Y$. Assim, $|Y| \leq 12$. Logo, não nunca teremos $|X| < |Y|$. Se quisermos encontrar um conjunto de vértices independentes maiores do que X, então não podemos ter $D \in Y$. Assim, ou $D \notin Y$, ou não existe tal Y.

Situação 2: $D \notin Y$

Com isso, $|Y| \leq 18$. Para garantir que não tenhamos $Y \subset X$, é necessário que Y possua pelo menos um elemento que não esteja em X. Caso $Y \subset X$ então $|Y| \leq |X|$.

Assim, é preciso que $F \in Y$ ou $Q \in Y$ ou $G \in Y$ ou $H \in Y$ ou $L \in Y$.

Se $F \in Y$, então $E, P, Q, G, I, H \notin Y$. Logo, $|Y| \leq 12$. Desse modo, $|Y| < |X|$. Assim, não podemos ter $F \in Y$. Portanto, $F \notin Y$. Daí, $|Y| \leq 17$.

Se $Q \in Y$, então $P, R, S \notin Y$. Logo, $|Y| \leq 14$. Note que $G \notin Y$ (caso contrário $|Y| \leq 9$). Daí teremos que $|Y| \leq 13 = |X|$. Assim, podemos desconsiderar o caso em que $Q \in Y$. Desse modo, $|Y| \leq 16$, já que $D, F, G \notin Y$.

Se $G \in Y$, então $O, M, N, I \notin Y$. Assim, $|Y| \leq 12$. Ou seja, $|Y| < |X|$. Portanto, não podemos ter $G \in Y$. Daí, $G \notin Y$ e $|Y| \leq 15$.

Analogamente, se $H \in Y$, teremos que $|Y| \leq 11$ (Por quê?). Assim, $H \notin Y$ e $|Y| \leq 14$. Porém, só sobra o caso em que $L \in Y$, que implica que $K \notin Y$. Daí, $|Y| \leq 13 = |X|$.

Logo, não nunca teremos $|X| < |Y|$. Então, concluí-se que não existe um conjunto de vértices independentes $Y \subset G$ tal que $|X| < |Y|$. Portanto, por definição,

$$\alpha(G) = |X| = 13$$

Com isso, temos que:

- $\dfrac{v(G)}{\Delta(G)+1} = \dfrac{19}{6+1} = \dfrac{19}{7} < \dfrac{21}{7} = 3$
- $\alpha(G) = 13$
- $\dfrac{e(G)}{\delta(G)} = \dfrac{23}{1} = 23$

Assim,

$$\frac{v(G)}{\Delta(G)+1} \leq \alpha(G) \leq \frac{e(G)}{\delta(G)}$$

Pois,

$$\frac{19}{7} \leq 13 \leq 23$$