Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

02/12/2021

Matemática 5 (Química)

Aula 10

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Recapitulação - Completar quadrados

Ex: $3x^2 + 7x - 5 = 0$

Passo-a-passo:

0) Verifica o coeficiente do x^2. Se for 1, vá para o passo seguinte. Se não for 1: divida a equação por ele

↳ $3x^2+7x-5=0 \xrightarrow{\div 3} x^2+\frac{7}{3}x-\frac{5}{3}=0$

1) Isole os termos com x:

$$x^2+\frac{7}{3}x-\frac{5}{3}=0 \longrightarrow x^2+\frac{7}{3}x=\frac{5}{3}$$

$$x^2 + \frac{7}{3}x = \frac{5}{3}$$

2) observe o sinal do termo que tem x para saber que produto notável utilizar.

2.1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2.2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Utilizaremos aquele que tem o termo com x de mesmo sinal

3) Faça $a = x$ e encontre o valor de b a partir do termo que tem x.

$a = x \Rightarrow (a+b)^2 = (x+b)^2 = x^2 + 2xb + b^2 \longrightarrow$

$x^2 + \frac{7}{3}x + \dots$

queremos que:

$2xb = \frac{7}{3}x \therefore b = \frac{7}{6}$

4) Daí, encontrado o valor de b, adicione b^2 a ambos os lados da equação que queremos completar o quadrado.

$a = x$
$b = \frac{7}{6}$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = \left(x+\frac{7}{6}\right)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{7}{6} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = x^2 + \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2$$

$$\left(x^2 + \frac{7}{3}x = \frac{5}{3}\right)$$

$$x^2 + \frac{7}{3}x = \frac{5}{3} \iff \underbrace{x^2 + \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2}_{\left(x+\frac{7}{6}\right)^2} = \frac{5}{3} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \iff \left(x+\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{5}{3} + \left(\frac{7}{6}\right)^2$$

Completamos o quadrado!

obs: método válido p/ eqs. de circunferência

Recapitulando - Equação reduzida da circunferência

Uma circunferência γ → "gama" com centro $C(x_0, y_0)$ e raio medindo R pode ser representada através da equação:

$$\gamma: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Obs: $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e $R > 0$.

Obs$_2$: $P(x_P, y_P) \in \gamma$?

↳ se $(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2 = R^2$, então $P \in \gamma$

↳ se $(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2 \neq R^2$, então $P \notin \gamma$

1. Encontre o centro e o raio da circunferência

$$\gamma: 2x^2+2y^2-6x+2y+3=0$$

Solução: Vamos completar quadrados para reescrever essa equação no formato da eq. reduzida.

$$2x^2+2y^2-6x+2y+3=0 \iff 2x^2-6x+2y^2+2y=-3$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2-3x+y^2+y=-\frac{3}{2} \rightsquigarrow x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2+y+\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$a=x$
$b=\frac{3}{2}$

$a=y$
$b=1/2$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$$

Assim, temos que $C(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2})$ e $R = 1$!

Equação Geral da circunferência

↳ formato: $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$

Obs: $A \neq 0$ e $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

↳ Desvantagem: Não conseguimos de imediato determinar o $C(x_0, y_0)$ e o raio R. Para isso, temos que reescrever na forma da eq. reduzida (completando quadrados)

Fato: Toda equação de circunferência pode ser representada no formato de eq. geral. (A recíproca é falsa!)

↳ Nem toda equação desse tipo representa uma circunferência

ex: $x^2+y^2-2x+6y+11=0$

justificando: vamos reescrever no formato de eq. reduzida:

$x^2-2x+1^2+y^2+6y+3^2=-11+1^2+3^2 \iff (x-1)^2+(y+3)^2=-1$

$R^2=-1$ Absurdo!

Assim, a eq. não representa uma circunferência!

Ou seja:

Se $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0 \overset{\text{reescrevendo}}{\rightsquigarrow} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

onde:

1) $R^2 > 0$: temos uma circunferecia (A eq. tem infinitas soluções)

2) $R^2 = 0$: temos o ponto (x_0, y_0) que <u>não</u> é uma circunferência (A equação tem <u>uma</u> única solução)

3) $R^2 < 0$: Não temos solução e não temos circunferência

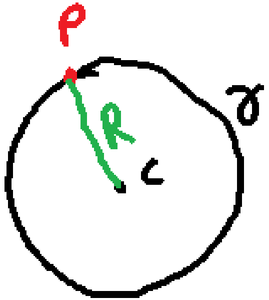
Posições relativas: Ponto e circunferência

Considere o ponto $P(x_P, y_P)$ e a circunferência γ de centro $C(x_0, y_0)$ e raio medindo R.

1) $P \in \gamma$

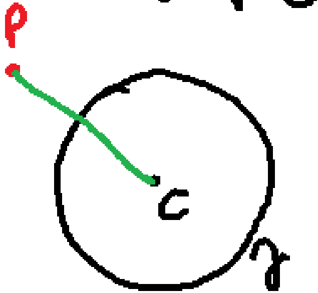
↳ como determinar?

$dist_{C,P} = R \iff$



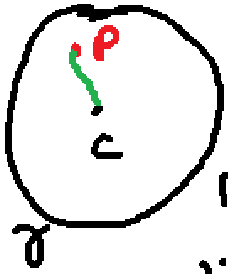
2) $P \notin \gamma$

2.1) P externo a γ



$dist_{C,P} > R \iff$

2.2) P interno a γ

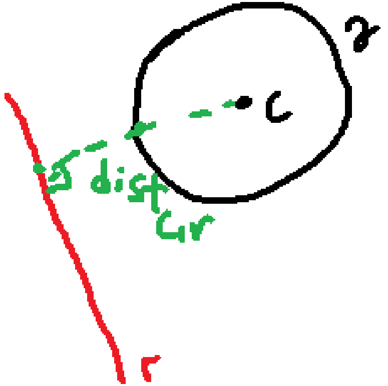


$\iff dist_{C,P} < R$

Posições relativas: retas e circunferências

Considere a circunferência $\gamma: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ e a reta $r: ax+by+c=0$

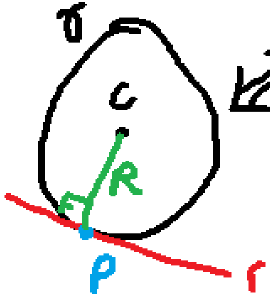
1) $r \cap \gamma = \emptyset$



$\iff \text{dist}_{C,r} > R$

2) $r \cap \gamma \neq \emptyset$

2.1) $r \cap \gamma = \{P\}$

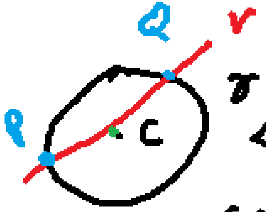


$\iff \text{dist}_{C,r} = R$

como determinar P?

$$P: \begin{cases} \gamma: (x-x_0)^2 + \dots \\ r: ax+by+\dots \end{cases}$$

2.2) $r \cap \gamma = \{P, Q\}$



$\iff \text{dist}_{C,r} < R$

como determinar P e Q?

$$P \text{ e } Q: \begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \\ ax+by+c=0 \end{cases}$$

Posições relativas entre circunferências

Sejam γ_1 e γ_2 duas circunferências de equações:

$\gamma_1: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$ (centro $C(x_0,y_0)$)

$\gamma_2: (x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = r^2$ (Centro $A(x_A,y_A)$)

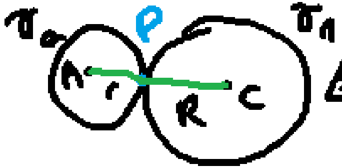
1) $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$

1.1) $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{P\} \Rightarrow$

Determinando P

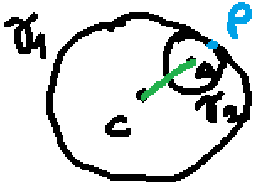
$P: \begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2 \\ (x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = r^2 \end{cases}$

1.1.A) tangente externa



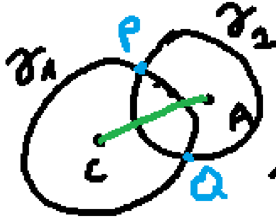
$\Leftrightarrow dist_{C,A} = R + r$

1.1.B) tangente interna



$\Leftrightarrow dist_{C,A} = |R-r|$

1.2) $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{P, Q\}$

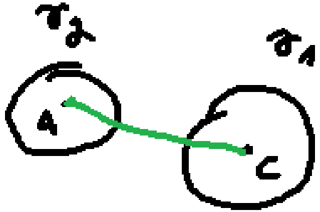


$\Leftrightarrow |R-r| < dist_{C,A} < R+r$

P e Q: $\begin{cases} (x-x_0)^2+\ldots \\ (x-x_A)^2+\ldots \end{cases}$

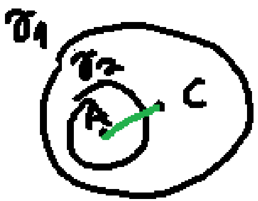
2) $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$

2.1) γ_1 e γ_2 externos:

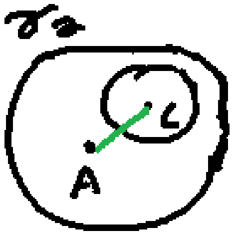


$$dist_{C,A} > R + r$$

2.2) γ_1 e γ_2 internos:



ou



$$dist_{C,A} < |R - r|$$

Obs: Se $dist_{C,A} = 0$, dizemos que γ_1 e γ_2 são concêntricas pois $C = A$.