Questão 10

Ainda não respondida

Vale 1,2 ponto(s).

Marcar questão

Editar questão

Considere a região R determinada pelas inequações:

$$R: \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{22} \geq 1 & (i) \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{22} \leq 1 & (ii) \\ y \geq 0 & (iii) \end{cases}$$

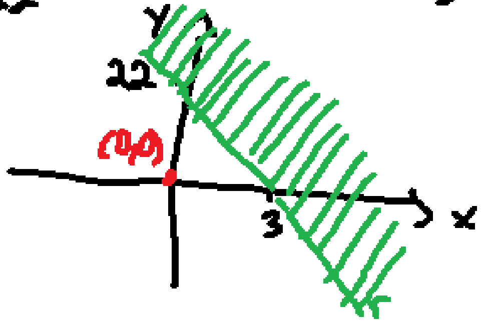
Seja $\mathcal{V}$ o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo Oy.

Qual o valor de $\frac{\mathcal{V}}{3\pi}$?

Resposta:

Vamos encontrar R. Para isso, esboçaremos as inequações (i), (ii) e (iii):

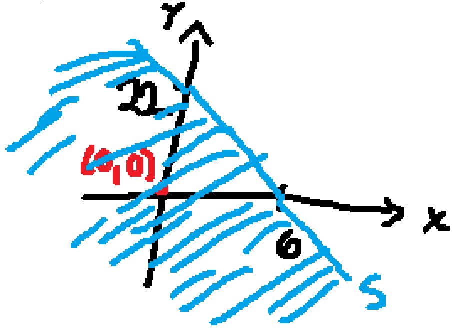
(i): $\frac{x}{3} + \frac{y}{22} \geq 1 \rightsquigarrow r: \frac{x}{3} + \frac{y}{22} = 1$



Note que (0,0) não satisfaz (i)

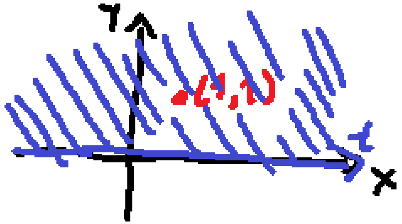
$\frac{0}{3} + \frac{0}{22} = 0 < 1$. Logo, o semiplano não contém (0,0).

(ii): $\frac{x}{6} + \frac{y}{22} \leq 1 \rightsquigarrow S: \frac{x}{6} + \frac{y}{22} = 1$



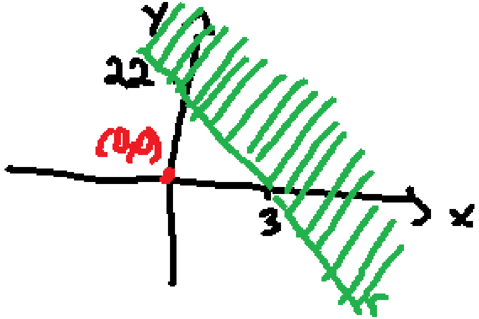
Note que (0,0) satisfaz (ii). Logo, o semiplano contém esse ponto.

(iii) $y \geq 0 \rightsquigarrow t: y = 0 \rightsquigarrow$ eixo x

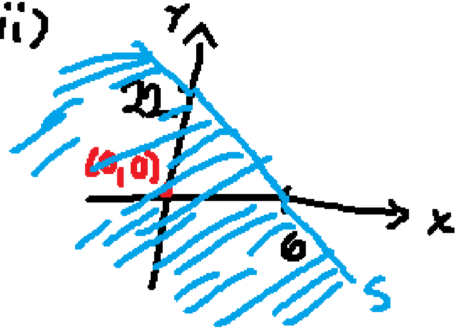


Note que (1,1) satisfaz (iii). Logo, o semiplano contém esse ponto.

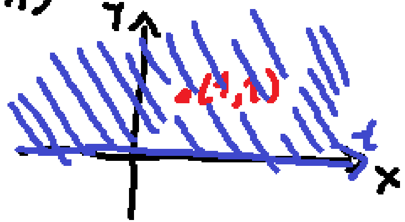
(i)

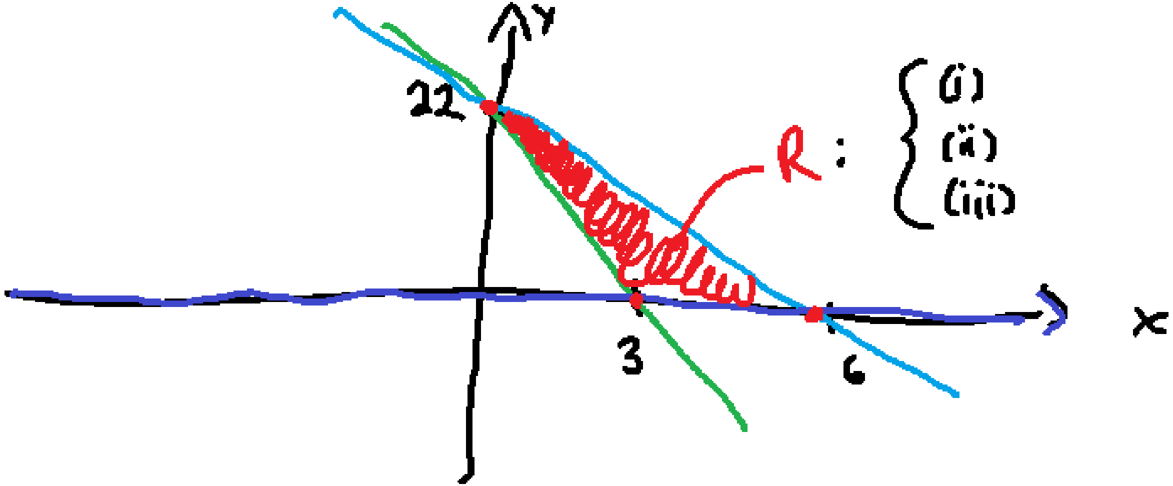


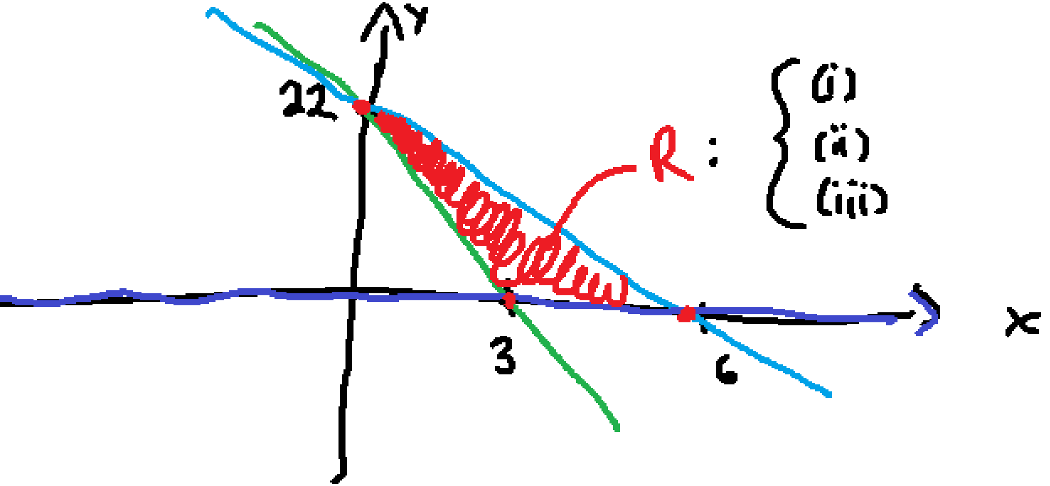
(ii)



(iii)

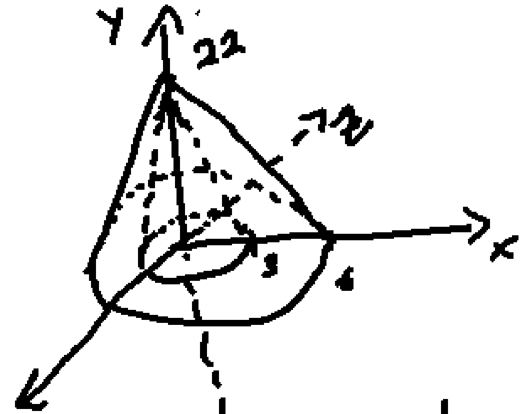




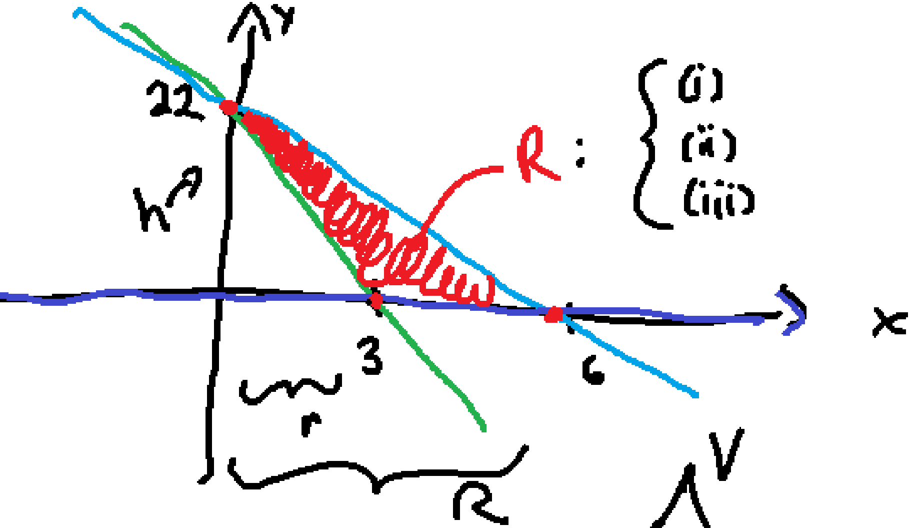


Para obter o sólido, precisamos rotacionar em torno do eixo y:

(Esboço)

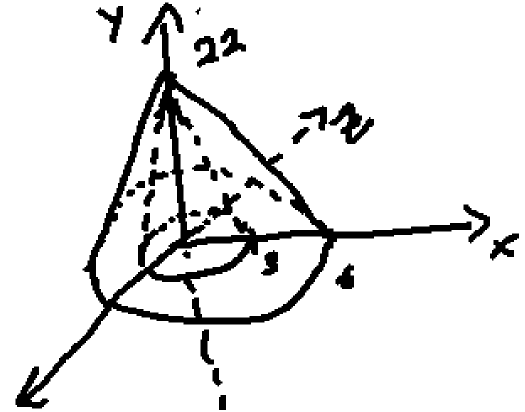


Assim, o sólido é a junção de dois cones que compartilham o mesmo vértice e altura mas que o raio de sua base é diferente

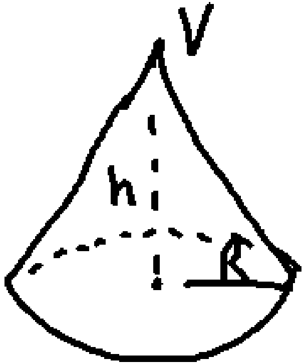


$$R: \begin{cases} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{cases}$$

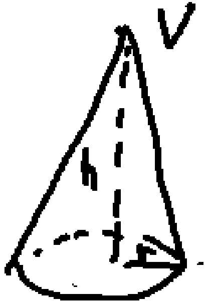
(Esboço)



Cone 1:



Cone 2:



$$V = V_{cone1} - V_{cone2}$$

$$= \frac{1}{3} A_{bc_1} \cdot h - \frac{1}{3} A_{bc_2} \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} h \left(A_{bc_1} - A_{bc_2} \right)$$

$$V = V_{cone_1} - V_{cone_2}$$

$$= \frac{1}{3} A_{bc_1} \cdot h - \frac{1}{3} A_{bc_2} \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} h \left(A_{bc_1} - A_{bc_2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} h \left(\pi R^2 - \pi r^2 \right)$$

$$= \frac{1}{3} h \pi \big(\underbrace{R^2 - r^2}_{(R+r)(R-r)} \big) = \frac{\pi h}{3} (R+r)(R-r)$$

$$= \frac{\pi \cdot 22}{3} (6+3)(6-3) = \frac{\pi \cdot 22}{3} \cdot 9 \cdot 3 = 198\pi$$

$h = 22$

$r = 3$

$R = 6$

A_{bc_1} e A_{bc_2}: Área de circunferências de raio 6 e 3 respectivamente

Logo, $\frac{V}{3\pi} = \frac{198\pi}{3\pi} = 66$