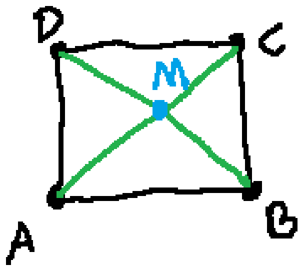
1. Determine o vértice D do quadrado no qual temos os seguintes vértices consecutivos: $A(-2,0)$, $B(3,2)$ e $C(1,7)$.



• Num paralelogramo, as diagonais se interceptam num ponto M que é ponto médio de cada uma das diagonais. Assim:

$$\rightsquigarrow M\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right) = M\left(\frac{x_B+x_D}{2}, \frac{y_B+y_D}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{0+7}{2}\right) = M\left(\frac{3+x_D}{2}, \frac{2+y_D}{2}\right)$$

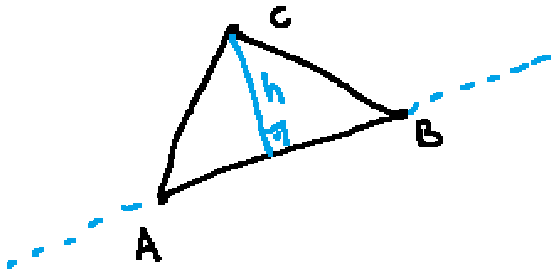
$$M\left(\frac{-1}{2}, \frac{7}{2}\right) = M\left(\frac{3+x_D}{2}, \frac{2+y_D}{2}\right)$$

Logo: • $\frac{-1}{2} = \frac{3+x_D}{2} \Rightarrow -1 = 3+x_D$
$\therefore x_D = -4$

• $\frac{7}{2} = \frac{2+y_D}{2} \Rightarrow 7 = 2+y_D$
$\therefore y_D = 5$

Portanto, $D(-4,5)$

2. Calcule a altura do triângulo ΔABC, de vértices em $A(1,2)$, $B(6,14)$ e $C(-2,0)$ em relação ao lado AB.



Note que calcular a altura h em relação à AB é equivalente à calcular a distância de C à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Assim: $h = dist_{C,\overleftrightarrow{AB}}$

• $\overleftrightarrow{AB}$: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 14 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y + 14 - 14x - y - 12 = 0 \Leftrightarrow -12x + 5y + 2 = 0$

Logo, $h = \dfrac{|-12\cdot(-2) + 5\cdot 0 + 2|}{\sqrt{(-12)^2 + 5^2}} = \dfrac{|24+2|}{\sqrt{144+25}} = \dfrac{26}{\sqrt{169}} = \dfrac{26}{13} = 2$

Questão 9

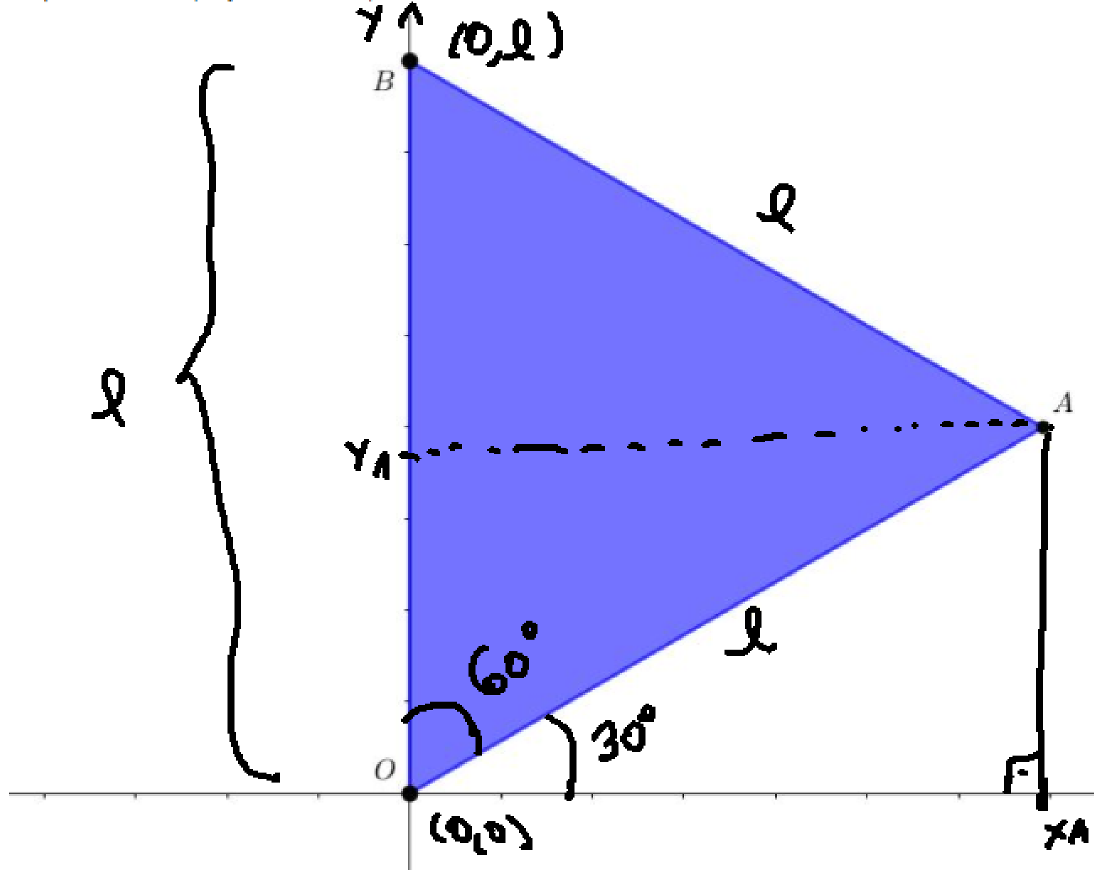
Ainda não respondida

Vale 1,2 ponto(s).

Marcar questão

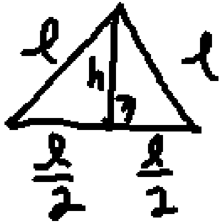
Editar questão

(SSA - UPE) Na figura a seguir, o triângulo equilátero OAB está representado em um sistema cartesiano ortogonal, e sua área mede $16\sqrt{3}$. Qual é a equação da reta suporte do lado AB?



Vamos determinar ℓ:

1



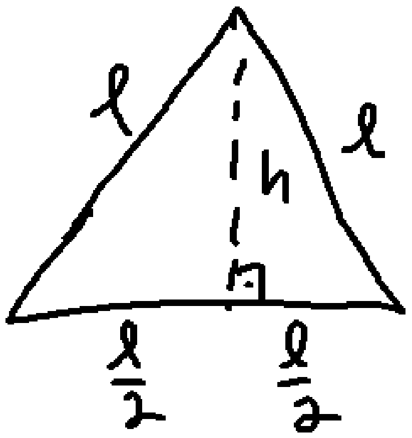
$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\ell^2}}{\sqrt{4}}$$

$$\therefore h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$



Vimos que $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$$A_\Delta = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2} \rightsquigarrow \frac{\ell \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Ou seja: A área de um triângulo equilátero pode ser calculada em função de seu lado ℓ: $A_\Delta = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

Questão 9

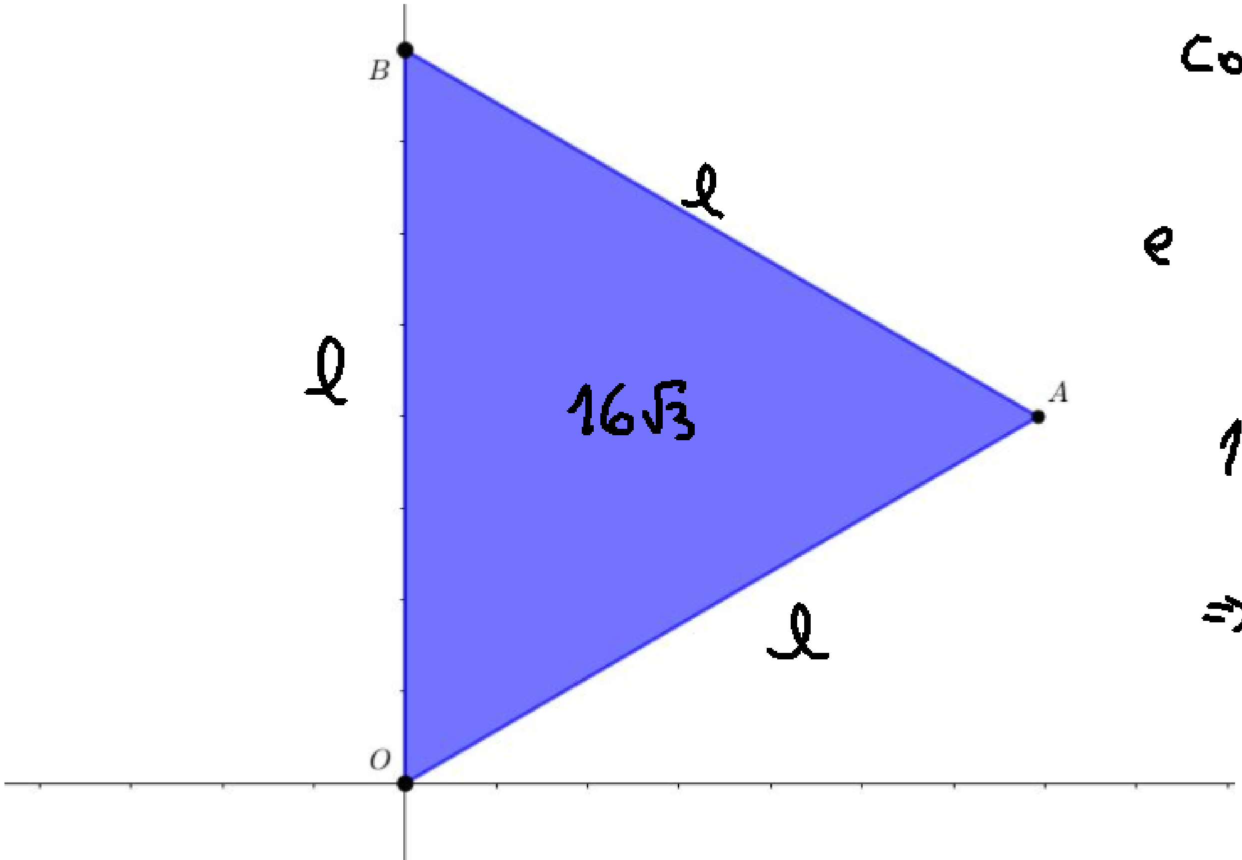
Ainda não respondida

Vale 1,2 ponto(s).

Marcar questão

Editar questão

(SSA - UPE) Na figura a seguir, o triângulo equilátero OAB está representado em um sistema cartesiano ortogonal, e sua área mede $16\sqrt{3}$. Qual é a equação da reta suporte do lado AB?



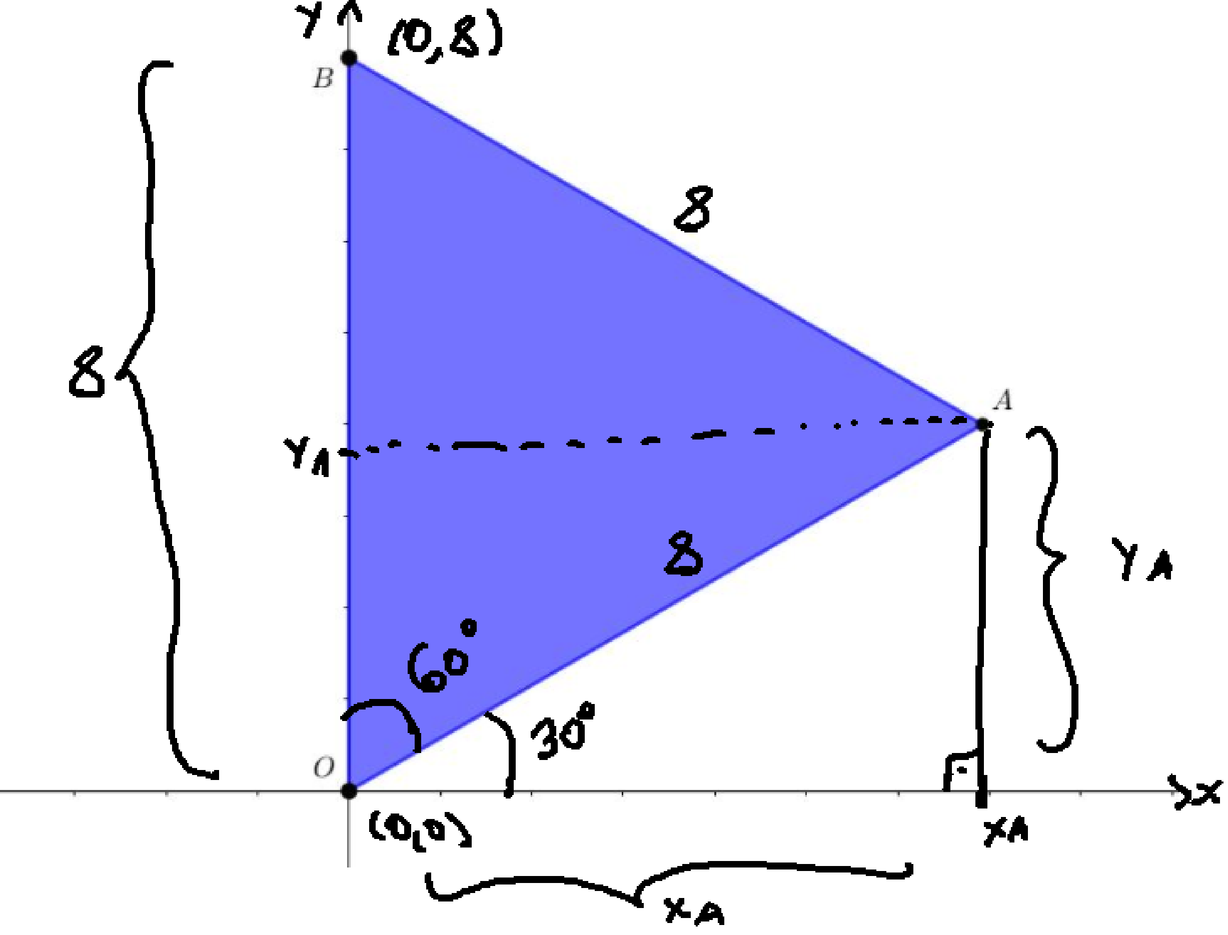
Como $A_{OAB} = 16\sqrt{3}$

e $A_{OAB} = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$, então

$$16\sqrt{3} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 4\cdot 16\sqrt{3} = \ell^2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 64\sqrt{3} = \ell^2\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 = 64$$

$$\therefore \ \underline{\underline{\ell = 8}}$$



Assim, $B(0,8)$.

Note que:

1) $\frac{y_A}{8} = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{y_A}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_A = \frac{8}{2} \therefore y_A = 4$

2) $\frac{x_A}{8} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{x_A}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_A = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Assim, $A(4\sqrt{3}, 4)$

Questão 9

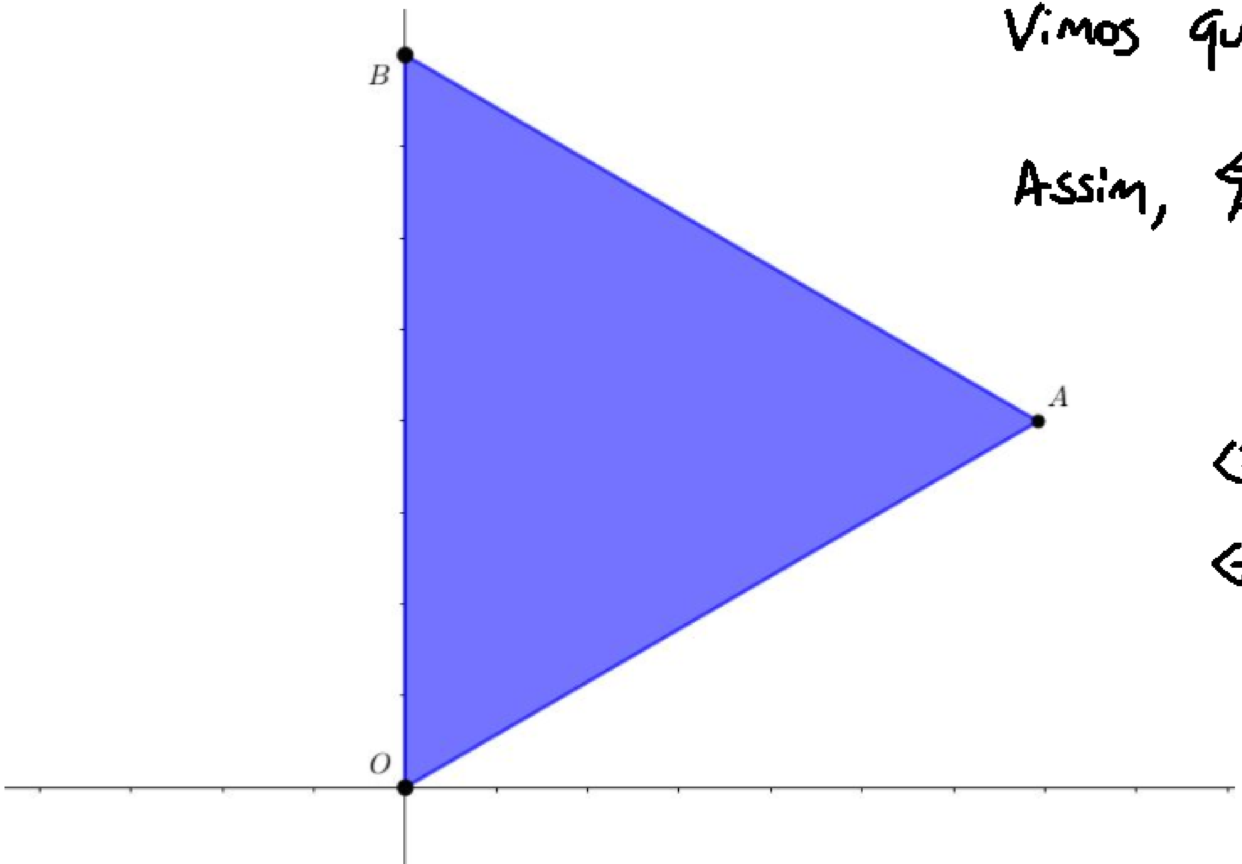
Ainda não respondida

Vale 1,2 ponto(s).

Marcar questão

Editar questão

(SSA - UPE) Na figura a seguir, o triângulo equilátero OAB está representado em um sistema cartesiano ortogonal, e sua área mede $16\sqrt{3}$. Qual é a equação da reta suporte do lado AB?



Vimos que $B(0,8)$ e $A(4\sqrt{3},4)$

Assim, $\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 8 & 1 \\ 4\sqrt{3} & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 8x + 4\sqrt{3}y - 32\sqrt{3} - 4x = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 4\sqrt{3}y - 32\sqrt{3} = 0$

4. Considere as circunferências $\lambda_1 : x^2 + (y-1)^2 = 25$ e $\lambda_2 : 3x^2 + 3y^2 - 36x + 12y + 90 = 0$.

a) Determine as coordenadas do centro e as medidas do raio e da área de cada circunferência.

b) Faça um esboço das circunferências e determine a posição relativa entre as circunferências (se são externas, internas, tangentes externas, tangentes internas ou secantes). Caso elas tenham pontos em comum, encontre-os.

a) λ_1: Como a equação está no formato da equação reduzida, é fácil ver que $C_1(0,1)$ e $R_1 = 5$. Logo, como $A_1 = \pi \cdot R_1^2$, então $A_1 = 25\pi$

λ_2: Vamos reescrever a equação no formato da equação reduzida:

$$3x^2+3y^2-36x+12y+90=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-12x+y^2+4y+30=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-12x+36+y^2+4y+4+30=36+4 \Leftrightarrow (x-6)^2+(y+2)^2+30=40 \therefore (x-6)^2+(y+2)^2=10$$

Daí, temos: $C_2(6,-2)$ e $R_2 = \sqrt{10}$. Logo, como $A_2 = \pi \cdot R_2^2$, então $A_2 = 10\pi$

4. Considere as circunferências $\lambda_1 : x^2 + (y-1)^2 = 25$ e $\lambda_2 : 3x^2 + 3y^2 - 36x + 12y + 90 = 0$.

a) Determine as coordenadas do centro e as medidas do raio e da área de cada circunferência.

b) Faça um esboço das circunferências e determine a posição relativa entre as circunferências (se são externas, internas, tangentes externas, tangentes internas ou secantes). Caso elas tenham pontos em comum, encontre-os.

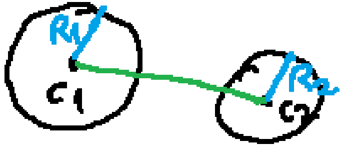
$C_1(0,1) \quad R_1 = 5$

$C_2(6,-2) \quad R_2 = \sqrt{10}$

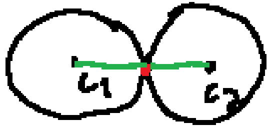
Para determinar a posição relativa entre as circunferências vamos calcular a distância entre seus centros:

$$d = \underline{\text{dist}\ C_1C_2} = \sqrt{(6-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$$

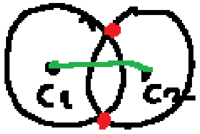
→ Possíveis posições entre as circunferências

1) 

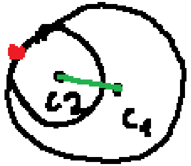
$d > R_1 + R_2$

2) 

$d = R_1 + R_2$

3) 

$|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$

4) 

$d = |R_1 - R_2|$

5) 

$d < |R_1 - R_2|$

Note que: $R_1+R_2 = 5+\sqrt{10}$.

- $5+\sqrt{10} > 5+\sqrt{9} = 5+3 = 8$
- $5+\sqrt{10} < 5+\sqrt{16} = 5+4 = 9$

$\Rightarrow R_1+R_2 \approx 8$

$|R_1-R_2| = |5-\sqrt{10}| = 5-\sqrt{10}$

- $5-\sqrt{10} < 5-\sqrt{9} = 5-3 = 2$
- $5-\sqrt{10} > 5-\sqrt{16} = 5-4 = 1$

$\Rightarrow |R_1-R_2| \approx 1$

Note que: $d = \sqrt{45}$ e $\sqrt{36} = 6 < \sqrt{45} < \sqrt{49} = 7$. Assim, temos $\sqrt{45} \approx 7$

Portanto, $|R_1-R_2| < d < R_1+R_2$. Logo, as circunferências são secantes (caso 3)

Como elas são secantes então elas terão pontos em comum. Vamos encontrá-los:

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=25 & (i) \\ (x-6)^2+(y+2)^2=10 & (ii) \end{cases} \xrightarrow{(ii)-(i)} (x-6)^2+(y+2)^2-x^2-(y-1)^2=10-25$$

$$\Rightarrow (x-6)^2-x^2+(y+2)^2-(y-1)^2=-15 \qquad a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$$

$$[(x-6)+x]\cdot[(x-6)-x]+[(y+2)+(y-1)]\cdot[(y+2)-(y-1)]=-15$$

$$\Rightarrow (2x-6)\cdot(-6)+(2y+1)\cdot 3=-15 \xrightarrow{\div 3} (-2)\cdot(2x-6)+(2y+1)=-5$$

$$\Rightarrow -4x+12+2y+1=-5 \Rightarrow -4x+2y+13+5=0 \Rightarrow -4x+2y+18=0 \xrightarrow{\div 2}$$

$$\Rightarrow -2x+y+9=0 \Rightarrow y=2x-9. \quad \text{Daí,} \quad x^2+[\underbrace{(2x-9)}_{y}-1]^2=25 \Rightarrow x^2+(2x-10)^2=25$$

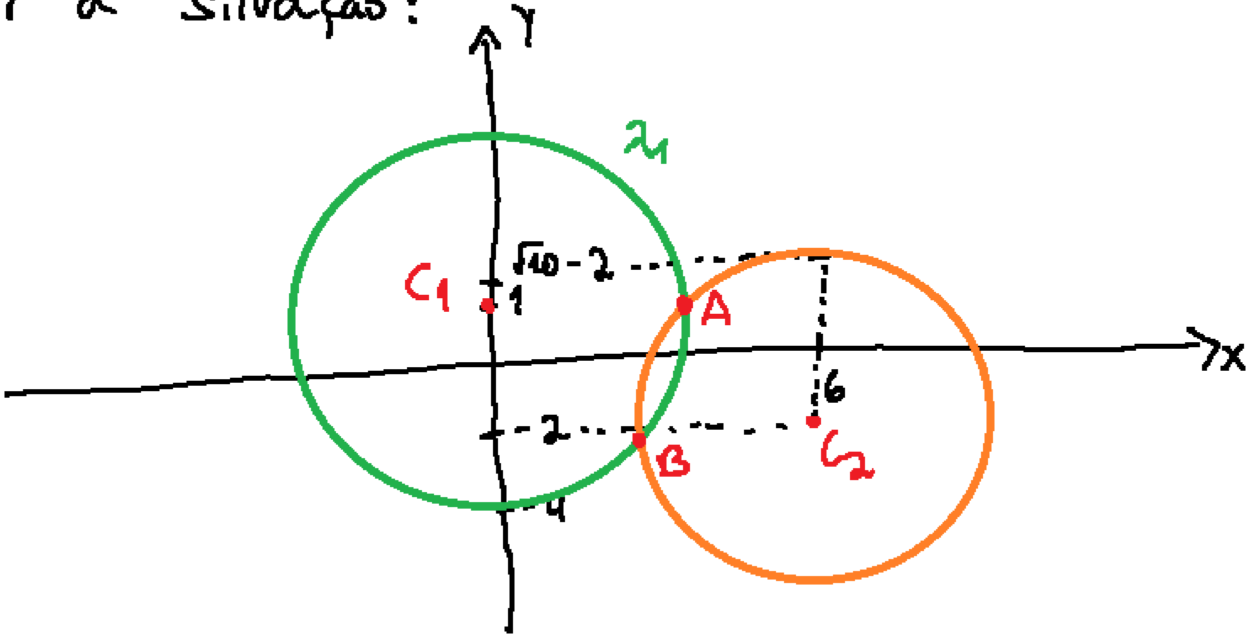
$$\Rightarrow x^2+4x^2-40x+100=25 \Leftrightarrow 5x^2-40x+75=0 \xrightarrow{\div 5} x^2-8x+15=0$$

Soma: 8
Produto: 15 $\Rightarrow$ $x_1=5 \Rightarrow y_1=1$
$x_2=3 \Rightarrow y_2=-3$

Logo, os pontos de interseção entre as circunferências são:

$$A(5, 1) \quad e \quad B(3, -3)$$

Vamos esboçar a situação:



5. Determine o valor de K de forma que a circunferência cuja equação é $x^2 + y^2 = K$ seja tangente à reta cuja equação é $x + y = 8$.

Uma reta r é tangente a uma circunferência γ de centro C e raio medindo R se e só se: $dist_{C,r} = R$.

No caso do problema $r: x + y = 8 \Leftrightarrow x + y - 8 = 0$

$\gamma: x^2 + y^2 = K \quad (\ C(0,0) \ \text{e} \ R^2 = K \Rightarrow R = \sqrt{K}\ )$

Como $dist_{C,r} = R$, temos: $\dfrac{|x_c + y_c - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = R \Rightarrow \dfrac{|0 + 0 - 8|}{\sqrt{2}} = \sqrt{K} \Rightarrow \dfrac{|-8|}{\sqrt{2}} = \sqrt{K}$

$\Rightarrow \dfrac{8}{\sqrt{2}} = \sqrt{K} \xrightarrow{(\ )^2} \dfrac{64}{2} = K \Rightarrow K = 32$

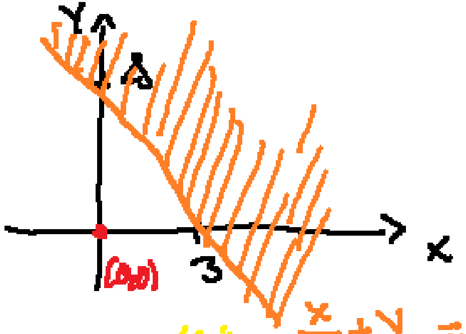
6. Seja R a região determinada pelas inequações

$$R: \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{8} \geq 1 & \text{(i)} \\ 8x + 6y - 48 \leq 0 & \text{(ii)} \\ y \geq 0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

Esboce R e determine sua área.

Vamos esboçar separadamente as regiões (i), (ii) e (iii):

(i):

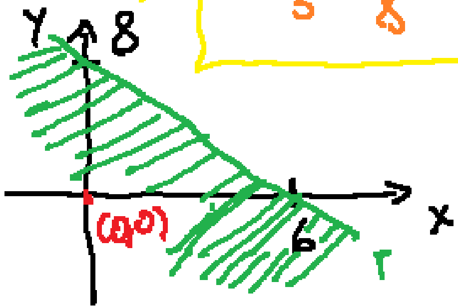


$\frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 1$

O ponto (0,0) satisfaz a inequação de (i)?

$\frac{0}{3} + \frac{0}{8} \overset{?}{\geq} 1 \iff 0 \geq 1$ Falso!

(ii):



$\bullet$ r: $8x + 6y - 48 = 0$

$\hookrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 8$

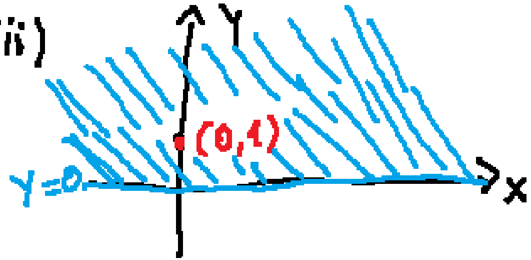
$\hookrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 6$

O ponto (0,0) satisfaz a inequação de (ii)?

$8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 48 \overset{?}{\leq} 0 \iff -48 \leq 0$

Verdadeiro!

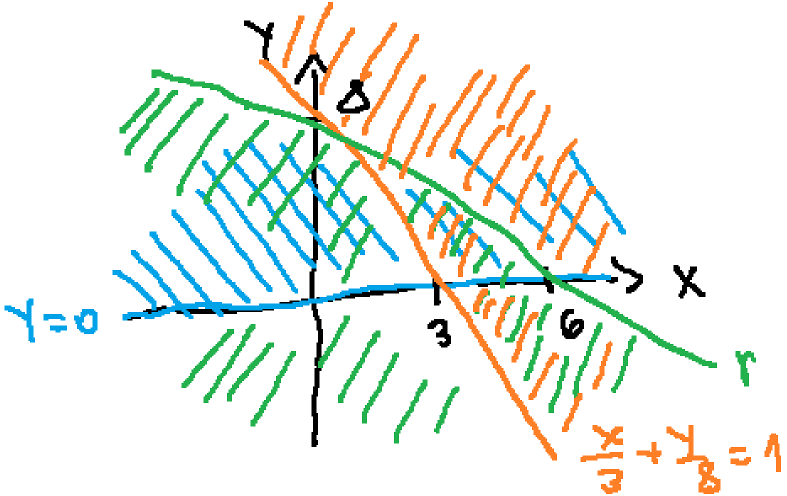
iii)



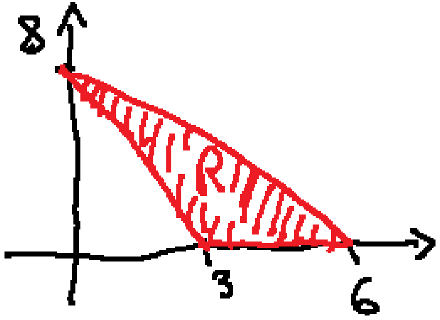
O ponto (0,1) satisfaz a inequação de (iii)?

$1 \overset{?}{\geq} 0$ Verdadeiro!

juntando as três regiões em um único gráfico, temos:



$\rightsquigarrow$



Note que a região R é um triângulo.

$A_R = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2} = \frac{3 \cdot 8}{2}$

$\Rightarrow A_R = 12$

7. Determine as equações das retas tangentes à circunferência de equação $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ considerando que essas retas são paralelas à reta de equação $4x-3y+5=0$.

- Vamos reescrever a equação da circunferência no formato da equação reduzida para encontrar a medida R de seu raio e as coordenadas de seu centro C:

$$x^2+y^2-2x-4y+1=0 \iff x^2-2x+1+y^2-4y+4=-1+1+4 \iff (x-1)^2+(y-2)^2=4$$

Logo, $C(1,2)$ e $R=2$.

- Sejam r e s as retas paralelas à $t: 4x-3y+5=0$ e tangentes à circunferência. Logo, r e s terão equação do tipo: $4x-3y+K=0$.

- Podemos achar as equações dessas retas ao utilizar o fato de que elas são tangentes à circunferência, e, portanto: $dist_{C,r}=dist_{C,s}=R$

$$dist_{C,r} = R \Rightarrow \frac{|4x_c - 3y_c + K|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|4\cdot 1 - 3\cdot 2 + K|}{\sqrt{16+9}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4-6+K|}{\sqrt{25}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|-2+K|}{5} = 2 \Leftrightarrow |-2+K| = 10 \Leftrightarrow -2+K = 10 \quad \text{ou} \quad -2+K = -10$$

$$\therefore K = 12 \qquad \therefore K = -8$$

Os valores de K encontrados correspondem ao coeficiente K das retas r e s. Assim,

$$r: 4x - 3y + 12 = 0 \; //$$

$$s: 4x - 3y - 8 = 0 \; //$$