Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

12/12/2021

Matemática 5 (Química)

Aula 10.3

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

6. (UFRS) Se os gráficos de $\underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{\lambda}$ e $\underbrace{x^2 + y^2 + 4x = m}_{\gamma}$ são circunferências tangentes, então m é igual a:

a) $3 \vee -5$ b) $-3 \vee 5$ c) 5 d) -3 e) 1

Solução:

2

Vamos reescrever as eqs. no formato da eq. reduzida:

$\lambda: x^2 + y^2 = 1$ (já está!)

$\hookrightarrow C(0,0)$ e $R_\lambda = 1$

$\gamma: x^2 + y^2 + 4x = m$

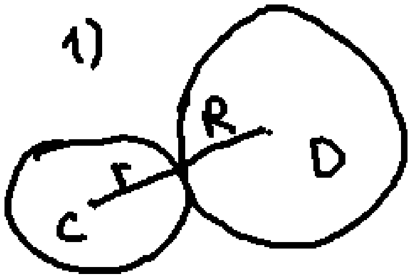
$\Rightarrow x^2 + 4x + 2^2 + y^2 = m + 2^2$

$\Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = m + 4$ $\hookrightarrow D(-2,0)$ e $R_\gamma^2 = m+4$

1

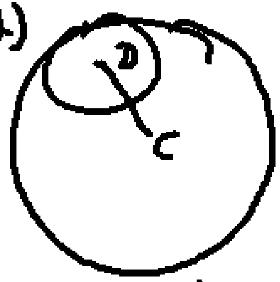
Circunferências são tangentes quando:

1)



$dist_{C,D} = r + R$

2)



$dist_{C,D} = |R - r|$

Vimos que: $\lambda: x^2+y^2=1 \rightsquigarrow C(0,0)$ e $R_\lambda=1$

$\gamma: (x+2)^2+y^2=m+4 \rightsquigarrow D(-2,0)$ e $R_\gamma^2=m+4$

$\therefore R_\gamma=\sqrt{m+4}$

Para γ e λ serem tangentes, precisamos que:

$$dist_{C,D}=R_\lambda+R_\gamma$$

$$\sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2}=1+\sqrt{m+4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-2)^2}=|-2|=2=1+\sqrt{m+4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{m+4}=2-1=1 \therefore \sqrt{m+4}=1$$

$$\xrightarrow{(\ )^2} m+4=1^2 \Rightarrow m+4=1 \therefore m=-3$$

ou

$$dist_{C,D}=|R_\lambda-R_\gamma|$$

$$\sqrt{(-2-0)^2+(0-0)^2}=|\sqrt{m+4}-1|$$

$$2=|\sqrt{m+4}-1|$$

$\sqrt{m+4}-1=2$ ou $\sqrt{m+4}-1=-2$

$\sqrt{m+4}=3$ ou $\sqrt{m+4}=-1$ ✗ ($\sqrt{a}\geq 0\ \forall a\in\mathbb{R}$)

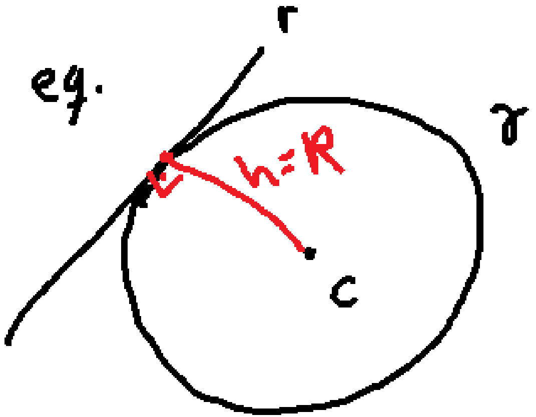
$$\xrightarrow{(\ )^2} m+4=9 \therefore m=5$$

3. (Fuvest) A reta $\overbrace{y = mx}^{r}$ $(m > 0)$ é tangente à circunferência $\underbrace{(x-4)^2 + y^2 = 4}_{\gamma}$. Determine o seno do ângulo que a reta forma com o eixo x.

a) $1/5$ b) $1/2$ c) $\sqrt{3}/2$ d) $\sqrt{2}/2$ e) $\sqrt{5}/5$

Solução (1):

Note que γ tem centro $C(4,0)$ e raio medindo $R=2$. Uma reta r é tangente a γ se, e só se, $d_{C,r} = R$.



Vamos reescrever a equação de r no formato da eq. geral:

$$y = mx \Rightarrow mx - y = 0$$ (Eq. geral de r)

Daí, como $d_{C,r} = 2$, então:

$$\frac{|m \cdot 4 - 0|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$

Vimos que: $\dfrac{|m\cdot 4-(0)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$*$: $|x|^2=x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{|4m|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \Rightarrow |4m|^{*}=2\sqrt{m^2+1} \xrightarrow{(\ )^2} (4m)^2=\left(2\cdot\sqrt{m^2+1}\right)^2$

$\Rightarrow 16m^2=4\cdot(m^2+1) \Rightarrow 16m^2=4m^2+4 \Rightarrow 16m^2-4m^2=4$

$\Rightarrow 12m^2=4 \xrightarrow{\div 12} m^2=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow m^2=\dfrac{1}{3} \therefore m=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

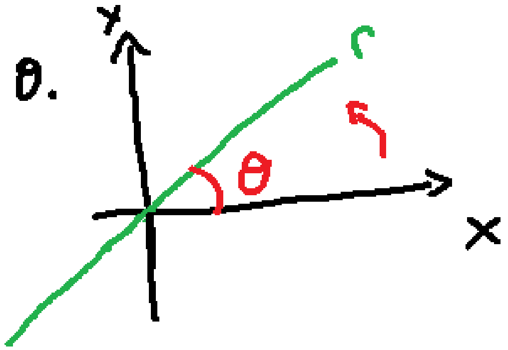
$\therefore m=+\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ou $m=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$. Logo $\underline{\underline{m}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ //

$\times\ (m>0)$

3. (Fuvest) A reta $y = mx$ $(m > 0)$ é tangente à circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. Determine o seno do ângulo que a reta forma com o eixo x.

a) $1/5$ ~~b)~~ $1/2$ c) $\sqrt{3}/2$ d) $\sqrt{2}/2$ e) $\sqrt{5}/5$

Encontramos que $m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Queremos determinar θ.



Note que $m = \operatorname{tg} \theta$. Daí, temos que $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Logo, $\theta = 30^\circ$ (ou $\frac{\pi}{6}$).

Daí, $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} 30^\circ = 1/2$

Pergunta: se $m = tg\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quanto seria $sen\,\theta$?

Solução:

Vamos obter uma relação entre a $tg\,\theta$ e o $sen\,\theta$. Para isso, consideraremos que: 1) $tg\,\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}$

2) $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$ (*)

Elevaremos ao quadrado a eq. 1): $tg^2\theta = \left(\frac{sen\,\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}$

Daí, por (*), temos que: $tg^2\theta = \frac{sen^2\theta}{1 - sen^2\theta} \Rightarrow sen^2\theta = (1 - sen^2\theta)\cdot tg^2\theta$

$$\text{sen}^2\theta = (1-\text{sen}^2\theta)\cdot tg^2\theta \Rightarrow \text{sen}^2\theta = tg^2\theta - \text{sen}^2\theta\cdot tg^2\theta$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\theta + \text{sen}^2\theta\cdot tg^2\theta = tg^2\theta \Rightarrow \text{sen}^2\theta(1+tg^2\theta) = tg^2\theta$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\theta = \frac{tg^2\theta}{1+tg^2\theta} \overset{*}{\Rightarrow} \text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{tg^2\theta}{1+tg^2\theta}}$$

Como $m = tg\,\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos que: $\text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{(1/\sqrt{2})^2}{1+(1/\sqrt{2})^2}} = \sqrt{\frac{1/2}{1+1/2}}$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1/2}{3/2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

*: válida para $tg\,\theta \geq 0$. Caso contrário, $\text{sen}\,\theta = -\sqrt{\frac{tg^2\theta}{1+tg^2\theta}}$

3. (Fuvest) A reta $y = mx$ $(m > 0)$ é tangente à circunferência $\underbrace{(x-4)^2 + y^2 = 4}_{\gamma}$. Determine o seno do ângulo que a reta forma com o eixo x.

a) $1/5$ b) $1/2$ c) $\sqrt{3}/2$ d) $\sqrt{2}/2$ e) $\sqrt{5}/5$

$\boxed{\begin{array}{l} \star: b^2 - 4ac = \Delta \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array}}$

Solução (2):

Se $\begin{cases} y = mx & (i) \\ (x-4)^2 + y^2 = 4 & (ii) \end{cases}$ tiver apenas uma solução, então $r: y = mx$ é tangente à γ.

Substituindo o valor de y da eq. (i) no valor de y de (ii), temos:

$(x-4)^2 + (mx)^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + m^2x^2 = 4 \Rightarrow (1+m^2)x^2 - 8x + 12 = 0$

como queremos que o sistema tenha uma única solução, então a eq. também deve ter uma única solução (ou seja: $\Delta^{\star} = 0$) (Fica como exercício terminar!)

22. (Uel) A trajetória de um móvel no plano cartesiano pode ser descrita, em função do tempo t, pelas equações

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \end{cases}$$

Essa trajetória determina uma reta

a) que contém os pontos $(3;\ 9)$ e $(-2;\ 6)$.

b) paralela à reta de equação $6x - 2y - 1 = 0$.

c) perpendicular à reta de equação $3x - y + 1 = 0$.

d) que contém os pontos $(1;\ 3)$ e $(7;\ 3)$.

e) perpendicular à reta de equação $5x - y = 0$.

Solução (1):

Podemos reescrever as equações paramétricas como uma equação cartesiana:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \end{cases} \rightsquigarrow t = \frac{y}{3} \rightsquigarrow x = 2 + \frac{y}{3} \xrightarrow{\cdot 3} 3x = 6 + y \Rightarrow \underline{\underline{y = 3x - 6}}$$

(Eq. reduzida de r)

22. (Uel) A trajetória de um móvel no plano cartesiano pode ser descrita, em função do tempo t, pelas equações

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \end{cases}$$

Vimos que $r: y = 3x - 6$. Vamos analisar as afirmativas.

Essa trajetória determina uma reta

a) que contém os pontos $(3;\ 9)$ e $(-2;\ 6)$. F

b) paralela à reta de equação $6x - 2y - 1 = 0$. → s V

c) perpendicular à reta de equação $3x - y + 1 = 0$. ← t

d) que contém os pontos $(1;\ 3)$ e $(7;\ 3)$.

e) perpendicular à reta de equação $5x - y = 0$.

(a) $(3, 9) \in r$ e $(-2, 6) \in r$?

Verificando: $9 \stackrel{?}{=} 3 \cdot 3 - 6 \Leftrightarrow 9 = 3$ Falso!

(b) Vamos reescrever $s: 6x - 2y - 1 = 0$ no formato da eq. reduzida:

$s: y = 3x - \frac{1}{2}$. Note que $m_r = m_s$. Portanto $r \parallel s$ $\boxed{*: y = mx + n}$

(c) Note que $t: 3x - y + 1 = 0$ tem eq. reduzida: $t: y = 3x + 1$

$r \perp t \Leftrightarrow m_r = -1/m_t$ $(m_r \cdot m_t = -1)$. Porém, $3 \neq -1/3$. Logo: $r \not\perp t$

É fácil verificar que (d) e (e) também são falsas.

Portanto a alternativa (b) é a única verdadeira!