Questões de Geometria Analítica

Jardel Felipe Cabral dos Santos

Abril de 2021

Uma breve contextualização

Essa lista de questões foi feita a pedido do professor André Costa, preceptor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco (IFPE) pelo Programa Institucional de Residência Pedagógica da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) do curso de Licenciatura em Matemática do campus Recife, em 2021, com o objetivo de poderem ser utilizadas pelo professor na disciplina de Matemática V que estava sendo ministrada pelo mesmo no Ambiente Virtual de Aprendizagem do IFPE através da plataforma Moodle.

A lista contém 21 questões. Elas foram selecionadas de provas olímpicas, livros e vestibulares como os da Universidade de Pernambuco (UPE) e da Olímpiada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (OBMEP) e algumas foram adaptadas ou elaboradas por mim. Logo abaixo do enunciado de cada questão será apresentada uma resolução para a mesma. Além disso, os problemas serão categorizados em relação a divisão de conteúdos feita pelo professor André Costa em Matemática V.

Divisão de um segmento em razão dada e Distância entre pontos no plano

1. Uma reta r passa pelo centro $C(9,9)$ e pelos pontos $A(2,2)$ e $B(X_B,Y_B)$ de uma circunferência. Sabendo disso, determine:

(a) o comprimento da circunferência (isto é: o perímetro do círculo).

(b) as coordenadas do ponto B.

Resolução:

(a) O comprimento de uma circunferência de raio R é numericamente igual a $2\pi R$. O raio é definido como a distância de um ponto da circunferência ao centro da circunferência, desse modo, ao calcularmos a distância de C até A, encontraremos a medida do raio.

$$R = d_{AC} = \sqrt{(9-2)^2 + (9-2)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}$$

Assim, o comprimento da circunferência será $2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot \sqrt{2} = 14\pi\sqrt{2}$

(b) Como os pontos A, B e C são pontos de uma mesma reta, eles são colineares. Note que $d_{BC} = R$ e que o ponto C está entre os pontos A e B (você consegue imaginar o porquê?). Assim, C será o ponto médio do segmento AB, pois o divide em dois segmentos de mesmo comprimento.

Sabemos que as coordenadas de um ponto médio de um segmento podem ser encontradas a partir das coordenadas dos pontos da extremidade do segmento. Em outras palavras, temos que:

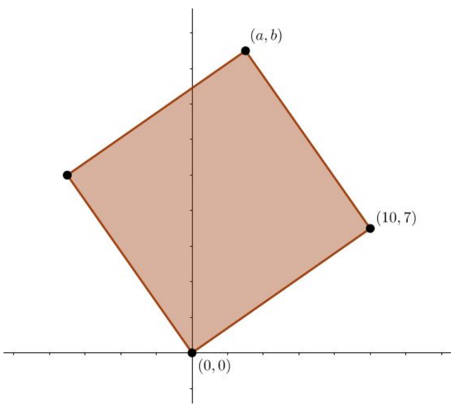
$$X_C = \frac{X_A + X_B}{2} \text{ e } Y_C = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

Logo,

$$9 = \frac{2 + X_B}{2} \quad \Rightarrow \quad 18 = 2 + X_B \quad \therefore \quad X_B = 16$$

Analogamente, $Y_B = 16$.

2. (OBMEP - 2009) O quadrado da figura tem um vértice na origem, outro no ponto $(10, 7)$ e um terceiro no ponto (a, b). Qual é o valor de $a + b$?



(A) 20 **(B)** 21 **(C)** 22 **(D)** 23 **(E)** 24

Resolução:

A resposta correta é a alternativa A. Duas resoluções para a questão podem ser encontradas clicando aqui. (Procure pela questão 6).

Determinação do baricentro de um triângulo

3. Se $A(1,4)$, $B(3,2)$ e $C(X_C, Y_C)$ são os vértices do triângulo ABC e $G(3,4)$ é o baricentro desse triângulo, determine as coordenadas do ponto C.

Resolução:

As coordenadas do baricentro de um triângulo podem ser calculadas com as coordenadas dos vértices do triângulo. De fato, temos que:

$$X_G = \frac{X_A + X_B + X_C}{3} \text{ e } Y_G = \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}$$

Logo,

$$3 = \frac{1 + 3 + X_C}{3} \quad \Rightarrow \quad 9 = 4 + X_C \quad \therefore \quad X_C = 5$$

Analogamente $Y_C = 6$.

Alinhamento de pontos

4. Demonstre que um ponto P de coordenadas $(p, 0)$ é colinear com os pontos $A(3,0)$ e $B(16,0)$ para qualquer $p \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Sabemos que três pontos A, B e P são colineares se, e somente se $|\triangle| = 0$, onde

$$\triangle = \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_P & Y_P & 1 \end{vmatrix} = X_A Y_B + X_P Y_A + X_B Y_P - X_P Y_B - X_B Y_A - X_A Y_P$$

Vamos calcular $|\triangle|$ utilizando as coordenadas fornecidas:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 + p \cdot 0 + 16 \cdot 0 - p \cdot 0 - 16 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$$

Esse resultado significa que os pontos são colineares. Note que o resultado independe do valor de p. Isso quer dizer que para todo $p \in \mathbb{R}$, A, B e P são colineares, como queríamos demonstrar.

5. Verifique se o ponto $C(3,16)$ é um ponto da reta r, que passa por $A(0,0)$ e $B(5,20)$.

Resolução:

Verificar se o ponto pertence a uma reta é equivalente a verificar se dois pontos da reta e esse ponto são colineares.

Três pontos são colineares se, e somente se, $\triangle = 0$, onde

$$\triangle = \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix} = X_AY_B + X_CY_A + X_BY_C - X_CY_B - X_BY_A - X_AY_C$$

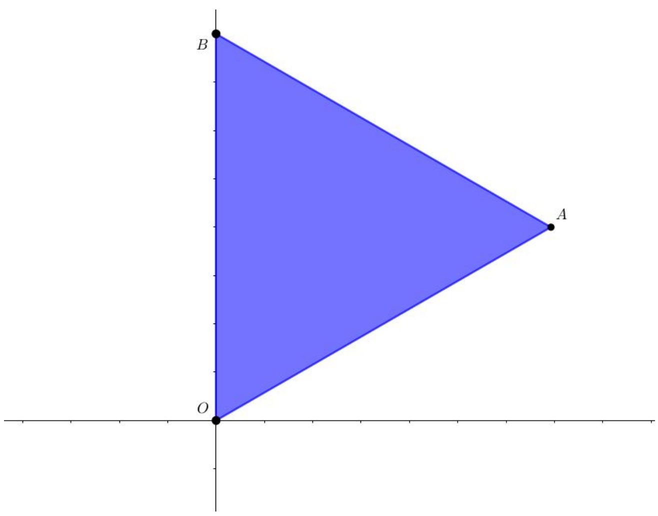
Para nosso caso, teremos:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 20 & 1 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 20 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 16 - 3 \cdot 20 - 5 \cdot 0 - 0 \cdot 16 = 20 \neq 0$$

Portando, o ponto C não é um ponto de r.

Equação Geral da Reta

6. (UPE - SSA3 - 2012) Na figura a seguir, o triângulo equilátero OAB está representado em um sistema cartesiano ortogonal, e sua área mede $16\sqrt{3}$. Qual é a equação da reta suporte do lado AB?



A) $\sqrt{3}x + 3y - 24 = 0$

B) $x + \sqrt{3}y - 16 = 0$

C) $-\sqrt{3}x + y - 8 = 0$

D) $2x - \sqrt{3}y - 10 = 0$

E) $3x - \sqrt{3}y - 12 = 0$

Resolução:

A área de um triângulo equilátero pode ser calculada, a partir da medida L de um de seus lados, através da expressão:

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Daí, podemos encontrar a medida L com a equação:

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \Rightarrow \frac{L^2}{4} = 16 \Rightarrow L^2 = 64 \Rightarrow L = 8$$

Se traçarmos um segmento perpendicular ao eixo x partindo de A, teremos a altura de um triângulo retângulo de vértices em A, O e a interseção do segmento que traçamos com o eixo x.

Daí, com as relações trigonométricas de seno e cosseno, podemos encontrar as coordenadas de A, pois $A(L\cos(\theta), L\sin(\theta))$, onde θ é o ângulo formado pelo eixo x e o segmento OA, que é $30°$. (Por quê?)

Assim, $A(8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 8 \cdot \frac{1}{2})$, ou $A(4\sqrt{3}, 4)$.

Você pode verificar que $B(0, 8)$. Basta agora determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B.

$$\triangle = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4\sqrt{3} & 4 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot 4 + (0) \cdot y + 8 \cdot 4\sqrt{3} - 0 \cdot 4 - 8 \cdot x - 4\sqrt{3} \cdot y = 0 \Rightarrow -4x - 4\sqrt{3}y + 32\sqrt{3} = 0$$

Multiplicando essa equação por $\frac{-\sqrt{3}}{4}$, teremos:

$$\sqrt{3}x + 3y - 24 = 0$$

Assim, a alternativa correta é a letra A.

Equação Fundamental e Equação Reduzida

7. Encontre o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta t que passa pelos pontos $A(1,4)$ e $B(3,2)$.

Resolução:

Uma equação reduzida de uma reta aparece na forma

$$y = mx + n$$

onde n é denominado de coeficiente linear e m é o coeficente angular, que pode ser calculado a partir de dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ da reta através da expressão:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Vamos calcular o valor de m:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

Assim, a equação reduzida será $y = -x + n$. Podemos calcular o valor de n ao subtistuir x e y pelas coordenadas de um dos pontos conhecidos e que pertencem à reta.

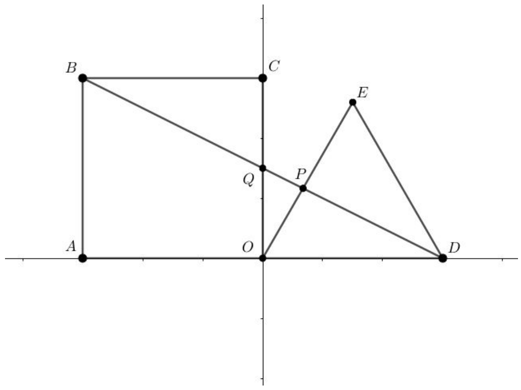
$$4 = -(1) + n \Rightarrow n = 5$$

Logo, $m = -1$ e $n = 5$

Você pode verificar se a resposta está correta ao substituir as coordenadas de um dos pontos na equação reduzida e ver se a equação é satisfeita.

Equação Geral da Reta, Equação Fundamental e Equação Reduzida

8. (UPE - SSA 3 - 2013 - Adaptado) Na figura a seguir, o quadrado $ABCO$ de lado 3 e o triângulo equilátero ODE, também de lado 3, estão representados num sistema cartesiano ortogonal Oxy.



Com base nas informações acima, analise as seguintes afirmativas:

I. A ordenada do ponto E é igual a $2\sqrt{3}$.

II. A equação da reta suporte do segmento BD é $3x + 3y - 1 = 0$.

III. A reta suporte do segmento OE tem declividade igual a $\sqrt{3}$.

IV. O ponto Q tem coordenadas $(0, \frac{3}{2})$.

Está CORRETO o que se afirma em:

(a) I e II **(B) II e III** **(C) II e IV** **(D) III e IV** **(E) I, II e III**

Resolução:

Vamos analisar as afirmativas e ver quais estão corretas:

I - A ordenada do ponto E é o valor de y desse ponto. Se traçarmos um segmento perpendicular ao lado OD e que passa por E, teremos um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{OE}$. Por hipótese:

1 - $\overline{OE} = 3$

2 - $\widehat{DOE} = 60°$

Podemos utilizar a relação trigonométrica de seno para calcular a altura do segmento perpendicular que, por construção, corresponde à ordenada do ponto E.

$$\sin(60°) = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \neq 2\sqrt{3}$$

Logo, a afirmação é falsa.

II - Como A se encontra sobre o eixo x e $\overline{AO} = 3$, então $A(-3, 0)$ (Por quê?). Analogamente, $C(0, 3)$. Portanto $B(-3, 3)$, pois se encontra logo acima de A e logo à esquerda de C. De maneira análoga, $D(3, 0)$.

Para encontrar a equação geral da reta que passa pelos pontos D e B, podemos utilizar a equação $\triangle = 0$ e um ponto qualquer $P(x, y)$. Desse modo,

$$\triangle = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot 0 + (-3) \cdot y + 3 \cdot 3 - (-3) \cdot 0 - 3 \cdot x - 3 \cdot y = 0 \Rightarrow 3x - 6y + 9 = 0$$

Note que essa equação é diferente da que a afirmativa apresenta. Logo a afirmação é falsa.

Portanto, a alternativa correta, por eliminação, é a alternativa D.

Você pode verificar que as afirmativas III e IV estão corretas.

Equação Fundamental, Equação Reduzida e Equação Segmentária

9. (UPE - 2011 - Matemática I) Sobre a equação reduzida da reta que intercepta o eixo y no ponto $(0, 4)$ e o eixo x no ponto $(2, 0)$, é CORRETO afirmar que o coeficiente angular

(A) da reta será um número positivo ímpar.

(B) da reta será um número positivo par.

(C) da reta será um número negativo cujo módulo é um número ímpar.

(D) da reta será um número negativo cujo módulo é um número par.

(E) da reta é nulo.

Resolução:

Dado os pontos $P(p, 0)$ e $Q(0, q)$, com p e q números reais não nulos, a reta que passa por esses pontos tem equação

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Essa equação é denominada de equação segmentária de uma reta.

A partir dela, após algumas manipulações algébricas, poderemos chegar na equação reduzida de uma reta e determinar o coeficiente angular a partir dela. Substindo os valores teremos:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + 2y = 4 \Rightarrow 2y = -4x + 4 \Rightarrow y = -2x + 2$$

Comparando com a equação reduzida $y = mx + n$, vemos que $m = -2$. Logo a alternativa correta é a letra D.

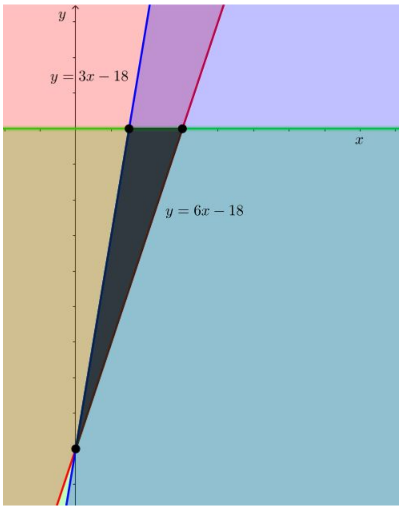
Inequações e os semiplanos

10. Determine a medida da área da região R, onde

$$R : \begin{cases} y \leq 0 \\ \dfrac{y}{3} - x \geq -6 \\ \dfrac{y}{3} - 2x \leq -6 \end{cases}$$

Resolução:

Esboçando a região R, obtemos a figura:



Para encontrar a medida da área de R, basta encontrar a medida da área do triângulo que delimita R. O triângulo terá dois vértices no eixo x e um vértice no eixo y.

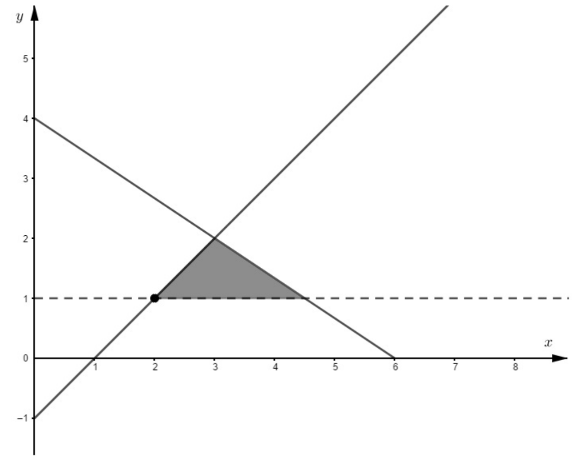
O vértice no eixo y terá coordenadas $(0, -18)$. os vértices no eixo x terão coordenadas $(3, 0)$ e $(6, 0)$.

Se $A(3, 0)$, $B(6, 0)$, $O(0, 0)$ e $C(0, -18)$, então a área do triângulo ABC pode ser encontrada fazendo:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{OC}}{2} = \frac{3 \cdot 18}{2} = 27 \text{ u.a.}$$

Interseção entre retas

11. (UPE - SSA 3 - 2016 - Adaptado) Qual é a medida da área do triângulo destacado na figura abaixo?



(a) $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{1}{3}$ **(c)** $\frac{3}{4}$ **(d)** $\frac{4}{5}$ **(e)** $\frac{5}{4}$

Resolução:

A figura nos diz que uma das retas passa por $(2,1)$ e por $(1,0)$. Logo a equação que descreve essa reta será $y = \dfrac{1-0}{2-1} \cdot (x-1) \Rightarrow y = x - 1$. Chamaremos essa reta de r

Analogamente, uma equação que descreve a reta que passa por $(0,4)$ e por $(6,0)$ será $y = \dfrac{-2}{3} \cdot (x-6)$. Chamaremos essa reta de s.

A reta pontilhada que passa por $(2,1)$ pode ser descrito pela equação $y = 1$. Chamaremos essa reta de t

Assim, podemos encontrar os pontos em comum entre as retas (tomadas duas a duas) que são os vértices do triângulo cinza.

Seja $A = r \cap t$, $B = s \cap t$ e $C = r \cap s$. Assim, $A(2,1)$, $B(\frac{9}{2},1)$ e $C(3,2)$.

Podemos calcular a área do triângulo ABC calculando:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \frac{9}{2} & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

Assim, a resposta é a alternativa E.

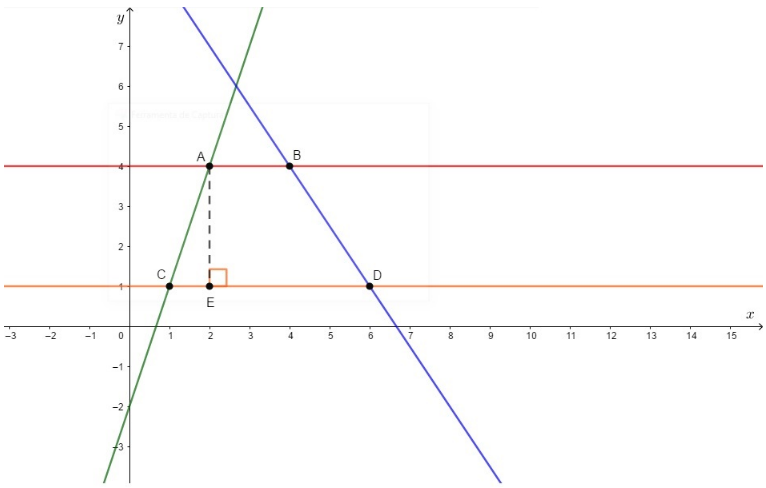
Interseção entre retas e Distância de um ponto à uma reta

12. (UPE - SSA 3 - 2017) Qual é a medida da área do quadrilátero limitado pelas retas $(r)\quad y = 4$**;** $(s)\quad 3x - y - 2 = 0$**;** $(t)\quad y = 1$ **e** $(u)\quad 3x + 2y - 20 = 0$**?**

(a) $7,5$ **(b)** $9,0$ **(c)** $10,5$ **(d)** 11 **(e)** 12

Resolução:

Esboçando as retas, obtemos a seguinte figura:



O quadrilátero em questão é um trapézio com bases AB e CD. A sua área será numericamente igual à:

$$\frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AE}}{2} = \frac{(2+5) \cdot 3}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$$

Assim, a resposta é a alternativa C

Equação reduzida da circunferência

13. (UPE - SSA 3 - 2018) Qual é a razão entre a medida da área e do comprimento da circunferência que, no plano cartesiano, passa pelos pontos $A(-4, 1)$**,** $B(-1, -2)$ **e** $C(2, 1)$**?**

(a) $0,5$ **(b)** 1 **(c)** $1,5$ **(d)** 2 **(e)** $2,5$

Resolução:

A medida da área e do comprimento de uma circunferência são numericamente iguais a, respectivamente, πR^2 e $2\pi R$, onde R é a medida do raio da circunferência. Como foi pedido da razão da primeira grandeza pela segunda, queremos

$$\frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$$

A equação reduzida da circunferência vai ter o formato:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Substituindo x e y pelas coordenadas de A, B e C, obteremos as equações:

$$\begin{cases} (-4 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = R^2 \\ (-1 - x_0)^2 + (-2 - y_0)^2 = R^2 \\ (2 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

Esse sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} x_0^2 + 8x_0 + 16 + y_0^2 - 2y_0 + 1 = R^2 & (i) \\ x_0^2 + 2x_0 + 1 + y_0^2 + 4y_0 + 4 = R^2 & (ii) \\ x_0^2 - 4x_0 + 4 + y_0^2 - 2y_0 + 1 = R^2 & (iii) \end{cases}$$

Subtraindo a equações (ii) da equação (i), obtemos: $6x_0 + 15 - 6y_0 - 3 = 0$. Essa equação pode ser reescrita como $6y_0 = 6x_0 + 12 \Rightarrow y_0 = x_0 + 2$.

Analogamente, subtraindo (iii) de (ii), obtemos: $6x_0 - 3 + 6y_0 + 3 = 0 \Rightarrow y_0 = -x_0$.

Podemos igualar as duas equações obtidas:

$$-x_0 = x_0 + 2 \Rightarrow 2x_0 = -2 \Rightarrow x_0 = -1$$

Daí, como $y_0 = -x_0$, então $y_0 = 1$.

Subtituindo esses valores de x_0 e y_0 na equação (iii), obtemos:

$(-1)^2 - 4(-1) + 4 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = R^2 \Rightarrow 1 + 4 + 4 + 1 - 2 + 1 = R^2 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$

Logo, a razão será $\dfrac{3}{2} = 1,5$.

Assim, a resposta é a alternativa C.

Equação reduzida da circunferência e Equação geral da circunferência

14. (UPE - SSA 3 - 2017) Em qual das alternativas a seguir, o ponto P pertence à circunferência β?

(A) $P(5,6)$**;** $\beta : (x-3)^2 + (y-6)^2 = 4$**.**

(B) $P(1,2)$**;** $\beta : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$**.**

(C) $P(1,5)$**;** $\beta : x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$**.**

(D) $P(1,3)$**;** $\beta : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$**.**

(E) $P(3,1)$**;** $\beta : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$**.**

Resolução:

Para verificar se um ponto P pertencer a uma circunferência β, basta substituir as coordenadas (x,y) de P na equação (geral ou reduzida) de β e ver se a equação é satisfeita. A equação é satifeita se, e só se, $P \in \beta$.

Fazendo isso para a alternativa A, obtemos:

$$(5-3)^2 + (6-6)^2 = 4 \Rightarrow 2^2 + 0^2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$$

Logo, $P \in \beta$. Portanto, a alternativa A é a correta (é possível verificar que para as outras alternativas teremos sempre $P \notin \beta$).

15. (UPE - SSA 3 - 2020) Para que valor(es) de B **a equação** $x^2+y^2-2x+6y+B = 0$ **representa uma circunferência?**

(a) $B > 10$ **(b)** $B < 10$ **(c)** $B = 10$ **(d)** $B > 1$ **(e)** $B = 1$

Resolução:

Talvez não esteja tão claro de se ver para que valores de B teremos uma circunferência. Vamos reescrever a equação completando quadrados e ver se uma relação fica mais clara:

$$x^2+y^2-2x+6y+B = 0 \Rightarrow x^2-2x+y^2+6y = -B \Rightarrow x^2-2x+1-1+y^2+6y+9-9 = -B \Rightarrow$$

$$(x-1)^2-1+(y-3)^2-9 = -B \Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2-10 = -B \Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2 = 10-B.$$

Vamos comparar essa equação com a equação reduzida de uma circunferência

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2,$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas do centro da circunferência e R é o raio da circunferência.

É necessário que $R > 0$ (e portanto: $R^2 > 0$), pois se $R \leq 0$ não teremos uma circunferência. Na equação que encontramos, temos $R^2 = 10 - B$. Então queremos que:

$$10 - B > 0 \Rightarrow -B > -10 \Rightarrow B < 10$$

Portanto, a alternativa correta é a alternativa B.

Posições relativas: ponto, reta e circunferência

Ponto e circunferência

16. Determine se o centro da circunferência $x^2 - 6x + y^2 + 12y - 55 = 0$ é um ponto interior da circunferência $3x^2 + 3y^2 = 27$.

Resolução:

Para um ponto P ser um ponto interior de uma circunferência λ de centro C e raio R, basta que $d_{CP} < R$. Vamos encontrar as coordenadas do centro P da circunferência $\lambda_1 : x^2 - 6x + y^2 + 12y - 55 = 0$ reescrevendo a equação de λ_1 na forma de uma equação reduzida de uma circunferência:

$$x^2 - 6x + y^2 + 12y - 55 = 0 \Rightarrow (x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 12y + 36) - 36 - 55 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y+6)^2 = 100$$

Daí, temos que $P(3, -6)$. Agora iremos encontrar as coordenadas do centro da circunferência e a medida do raio de $\lambda_2 : 3x^2 + 3y^2 = 27$. Dividiremos a equação por 3, desse modo obtendo a equação equivalente:

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2$$

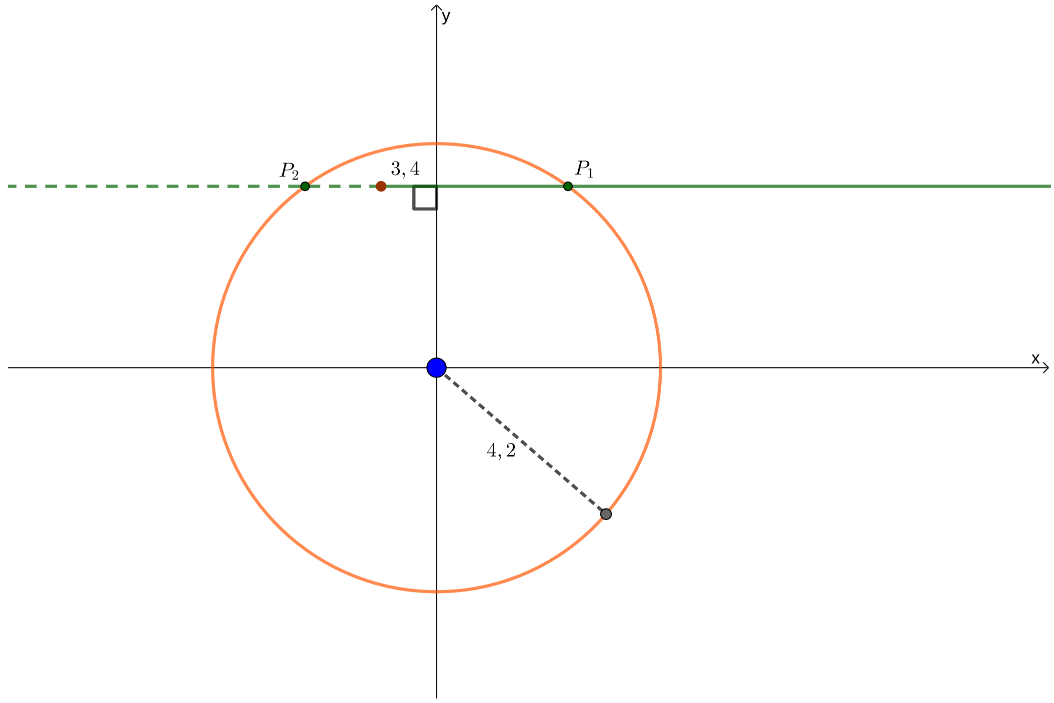
Logo, $C(0,0)$ e $R = 3$. Por fim, precisamos verificar se $d_{CP} < R$. Note que:

$$d_{CP} = \sqrt{(3-0)^2 + (-6+0)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$R = 3 < 3\sqrt{5}$ pois $\sqrt{5} > 1$, logo. Concluímos que P não é um ponto interior da circunferência. Fica como exercício para o(a) leitor(a) descrever a posição de P em relação a λ_2.

Reta e circunferência

17. Na noite de 15 de fevereiro de 2013, o asteroide *2012 DA 14*, com 130.000 toneladas, passou a 34.000 km do centro da Terra, cruzando em linha reta a órbita de alguns dos nossos satélites de comunicação. Se um desses satélites tinha órbita circular com 42.000 km de raio, concêntrica com a Terra, e a trajetória do asteroide foi secante a essa órbita, é possível conhecer as posições desses objetos, em cada instante, associando ao plano de suas trajetórias um sistema cartesiano cuja origem O seja tal que $1\ u = 10.000\ km$, o eixo das ordenadas seja perpendicular à trajetória do asteroide e o primeiro ponto P_1 de interseção da trajetória do asteroide com a órbita do satélite S esteja no primeiro quadrante. Calcule em quanto tempo o asteroide percorreu a distância $\overline{P_1P_2}$, se sua velocidade (constante) era de $7,8\ km/s$.



Resolução:

Como a velociade é constante, temos a seguinte relação entre a velocidade do asteriode(v), a distância percorrida (em um determinado intervalo de tempo) (ΔS) e o intervalo de tempo (Δt) através da equação:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{v}$$

Assim, se encontrarmos ΔS conseguiremos resolver o problema. Note que $\Delta S = \overline{P_1P_2}$. Logo, precisamos encontrar as coordenadas de P_1 e P_2.

Pelas informações do enunciado, temos que os pontos P_1 e P_2 se encontram sobre a reta $y = 3,4$. Essa reta é secante à circunferência $\lambda : x^2 + y^2 = (4,2)^2$ que descreve a órbita do satélite em relação à Terra. Desse modo, se resolvermos o sistema de equações, encontraremos as coordenadas dos pontos P_1 e P_2:

$$\begin{cases} y = 3,4 \\ x^2 + y^2 = (4,2)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (3,4)^2 = (4,2)^2 \Rightarrow x^2 = (4,2)^2 - (3,4)^2 \Rightarrow x^2 = (4,2+3,4) \cdot (4,2-3,4) \Rightarrow$$

$$x^2 = (7,6) \cdot (0,8) = 6,08 \therefore x = +\sqrt{6,08} \vee x = -\sqrt{6,08}$$

Portanto, $P_1(\sqrt{6,08}; 3,4)$ e $P_2(-\sqrt{6,08}; 3,4)$. Daí, $\overline{P_1P_2} = d_{P_1P_2} = 2\sqrt{6,08}$ (Por quê?)

Vimos que $\Delta t = \dfrac{\Delta S}{v}$. Note que as unidades de medidas são não compatíveis:

$$\Delta S = 2\sqrt{6,08}\ u \text{ e } v = 7,8\ km/s$$

Converteremos $2\sqrt{6,08}\ u$ para km:

$$2\sqrt{6,08}\ u = 2 \cdot 10000\sqrt{6,08}\ km = 20000\sqrt{6,08}\ km \text{ (Por quê?)}$$

$$\text{Por fim, } \Delta t = \frac{20000\sqrt{6,08}\ km}{7,8\ km/s} = \frac{10000\sqrt{6,08}}{3.9}\ s\ \simeq\ 6322,5s \text{ ou } 1h\ 45min\ 22s$$

Elipse

18. Uma indústria produz dois tipos de refrigerante, A e B. Para a produção diária de x quilolitros de A e y quilolitros de B, tem-se que o custo diário de produção por quilolitro do tipo A é $100 - x$, para $x \leq 60$, e do tipo B é $120 - \frac{y}{4}$, para $y \leq 260$. Sob essas condições, represente por uma equação a produção diária de x quilolitros do tipo A e y quilolitros do tipo B, de modo que o custo total da produção seja $R\$\ 16.800,00$.

Resolução:

Note que se multiplicarmos a produção diária de A, $(x)\ kL$, pelo custo diário de produção por quilolitro de A, $(100 - x)\ R\$/kL$, obteremos:

$$(x)\ kL \cdot (100 - x)\ R\$/kL = (100x - x^2)\ R\$, \text{ o custo total de produção de } A.$$

Analogamente, podemos encontrar o custo total de produção para B:

$$(y)\ kL \cdot (120 - \frac{y}{4})\ R\$/kL = (120y - \frac{y^2}{4})\ R\$$$

Assim, uma equação que representa o custo total da produção de A e B sendo $R\$16.800,00$ é:

$$(100x - x^2) + (120y - \frac{y^2}{4}) = 16800\ \Rightarrow\ (x^2 - 100x) + (\frac{y^2}{4} - 120y) = -16800\ \Rightarrow$$

$$(x^2 - 100x + 50^2) - 50^2 + \frac{1}{4} \cdot (y^2 - 480y) = -16800\ \Rightarrow$$

$$(x - 50)^2 - 50^2 + \frac{1}{4} \cdot (y^2 - 480y + 240^2 - 240^2) = -16800\ \Rightarrow$$

$$(x - 50)^2 - 2500 + \frac{1}{4} \cdot [(y - 240)^2 - 240^2] = -16800\ \Rightarrow$$

$$(x - 50)^2 + \frac{(y - 240)^2}{4} = -16800 + 2500 + \frac{240^2}{4}\ \Rightarrow$$

$$(x - 50)^2 + \frac{(y - 240)^2}{4} = 100\ \Rightarrow$$

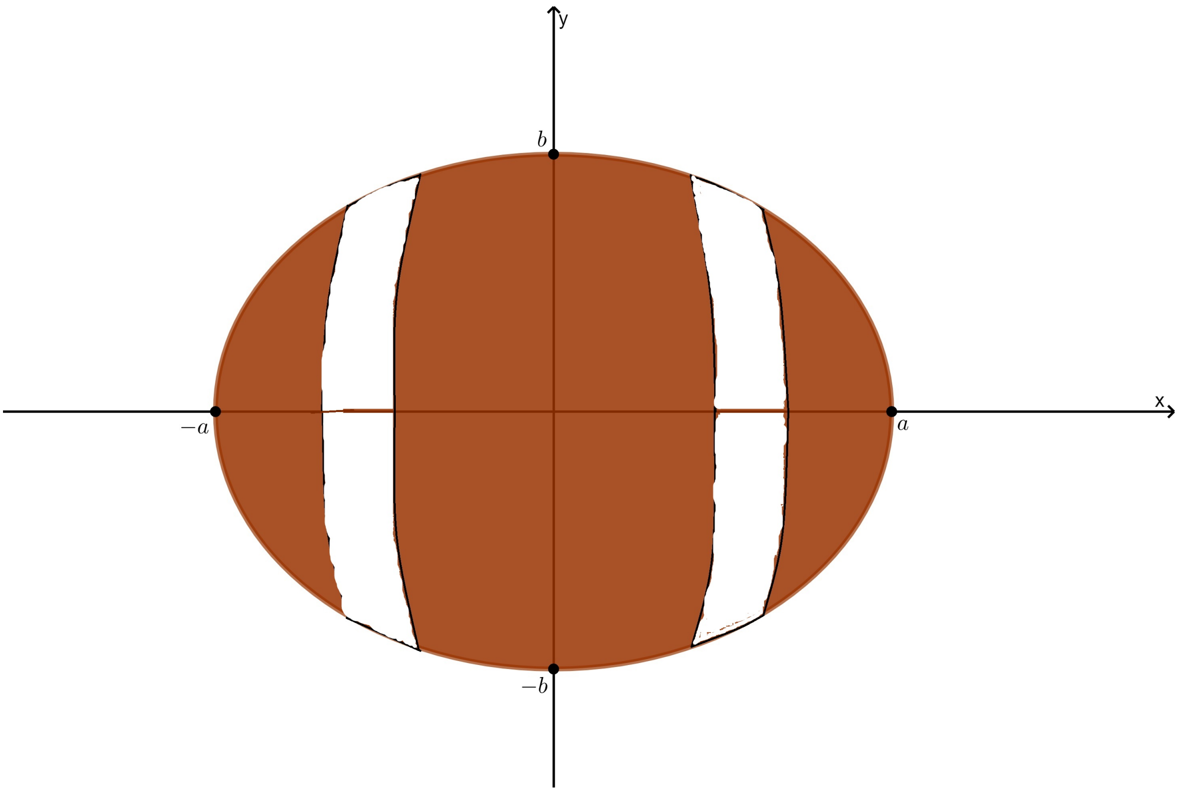
$$\frac{(x - 50)^2}{100} + \frac{(y - 240)^2}{400} = 1$$

Vamos comparar essa equação com a equação reduzida de uma elipse com centro $C(x_0, y_0)$, semieixo maior b e semieixo maior a:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2}$$

Note que a equação que obtivemos é uma equação de uma elipse com o eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas, centrada no ponto $C(50, 240)$ e com semieixo maior igual a 20 e semieixo maior 10, o que está de acordo com as restrições postas sobre x e y no enunciado. (por quê?)

19. A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores a e b são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical. Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$. O volume dessa bola, em função apenas de b, é dado por



(a) $8b^3$ **(b)** $6b^3$ **(c)** $5b^3$ **(d)** $4b^3$ **(e)** $2b^3$

Resolução:

Pelo enunciado:

$$a - b = \frac{b}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{b}{2} + b \;\therefore\; a = \frac{3b}{2}$$

Sabemos que $V = 4ab^2$, substituindo o valor de a pelo valor que encontramos, teremos:

$$V = 4 \cdot (\frac{3b}{2}) \cdot b^2 = 4 \cdot \frac{3b^3}{2} = 2 \cdot 3b^3 = 6b^3$$

Logo, a alternativa correta é a B.

Hipérbole e Parábola

20. Encontre as equações das assíntotas da hipérbole $16x^2 - y^2 - 160x + 399 = 0$

Resolução:

Vamos reescrever a equação da hipérbole na forma de uma equação reduzida:

$$16x^2 - y^2 - 160x + 399 = 0 \;\Rightarrow$$

$$16(x^2 - 10x) - y^2 = -399 \;\Rightarrow$$
$$16(x^2 - 10x + 25 - 25) - y^2 = -399 \;\Rightarrow$$
$$16[(x-5)^2 - 25] - y^2 = -399 \;\Rightarrow$$
$$16(x-5)^2 - y^2 = -399 + 16 \cdot 25 \;\Rightarrow$$
$$16(x-5)^2 - y^2 = 1 \;\Rightarrow$$
$$\frac{(x-5)^2}{\frac{1}{16}} - y^2 = 1$$

Para encontrar as equações das assíntotas, que são as retas que se tornam muito próximas dos ramos da hipérbole à medida que nos afastamos da origem, podemos reescrever a equação encontrada como:

$$\frac{(x-5)^2}{\frac{1}{16}} = 1 + y^2$$

Note que quando x e y forem números muitos grandes (estamos nos afastando do centro da hipérbole), a parcela 1 que está sendo somada a y^2 não contribuirá de forma significante ao valor da soma. Desse modo, podemos afirmar que $1 + y^2 \sim y^2$, ou seja, $1 + y^2$ é aproximadamente y^2. Logo, temos equação se torna:

$$\frac{(x-5)^2}{\frac{1}{16}} = 1 + y^2 \;\sim\; \frac{(x-5)^2}{\frac{1}{16}} = y^2 \;\Rightarrow$$

$$|\frac{(x-5)}{\frac{1}{4}}| = |y| \;\Rightarrow$$

$$\frac{(x-5)}{\frac{1}{4}} = -y \;\vee\; \frac{(x-5)}{\frac{1}{4}} = y$$

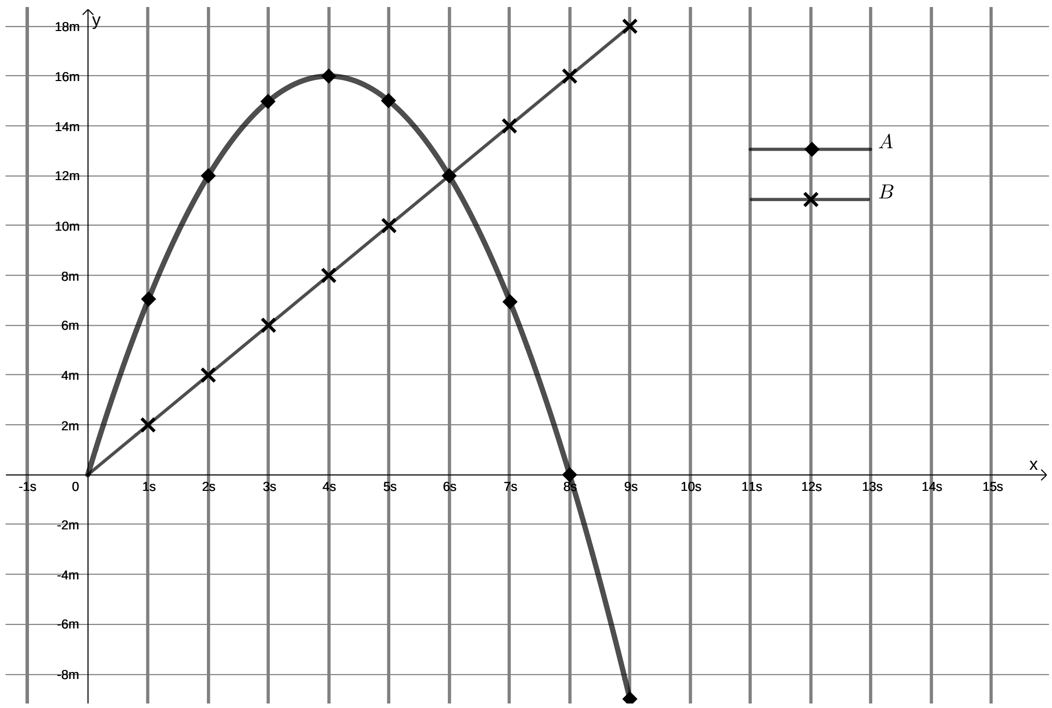
Assim, as equações das retas assíntotas são:

$$y = \frac{(x-5)}{\frac{1}{4}} = 4(x-5) = 4x - 20$$

e

$$y = -4x + 20$$

21. Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) diminuir em 2 unidades

b) diminuir em 4 unidades

c) aumentar em 2 unidades

d) aumentar em 4 unidades

e) **aumentar em 8 unidades**

Resolução:

Queremos comparar os coeficientes angulares de retas que descrevem a trajetória de B. Vamos encontrar a equação da reta que é representada no gráfico:

$$B_1 : y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_0)$$

$$B_1 : y = \frac{12}{6} \cdot x = 2x$$

Agora temos que achar a reta B_2 que passa pela origem e pelo vértice da parábola $V(4, 16)$. É fácil verificar que

$$B_2 : y = \frac{16}{4} x = 4x$$

Comparando os coeficientes angulares de B_1 e B_2, vemos que é necessário aumentar o coeficiente de B_1 em duas unidades para alcançar o objetivo desejado. Assim, a resposta correta é a alternativa C.

Fica como exercício encontrar o foco F da parábola e a equação de sua reta diretriz d.

Referências

- COSTA, A.; "HiperApostila: Geometria Analítica Plana", IFPE, Recife, 2020.
- Questão 2
- Questão 6
- Questão 8
- Questão 9
- Questão 11
- Questão 12
- Questão 13
- Questão 14
- Questão 15
- **Questões 17 (p. 193 questão 9 - adaptada), 18 (p. 208 questão 8 - adaptada) e 20 (p. 230 questão 9):** Matemática: Paiva / Manoel Paiva, volume 3 / Moderna. – 3.ed. – São Paulo : Moderna, 2015.
- **Questões 19 (p. 9 questão 13) e 21 (p. 9 questão 15):** 360º matemática : caderno de atividades : ENEM e vestibular, volume 3 / FTD. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2017.