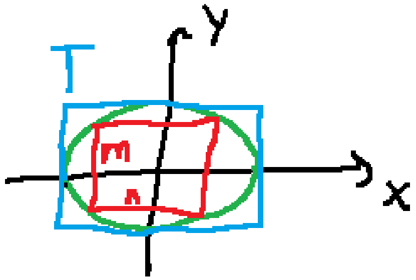
Qual é a área do retângulo R, inscrito à elipse

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1,$$

cujos lados são paralelos aos eixos coordenados e é semelhante ao retângulo circunscrito à mesma elipse, de lados paralelos aos lados de R?

Esboço:

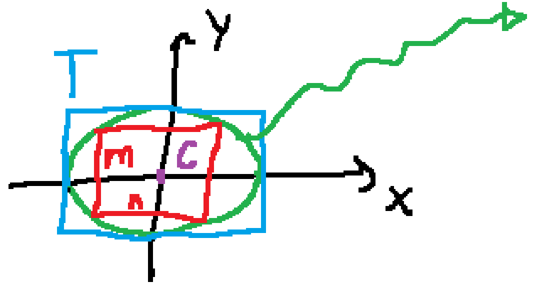


Queremos calcular a área de R, o retângulo vermelho.

Para isso, devemos encontrar as medidas de seus lados: m e n.

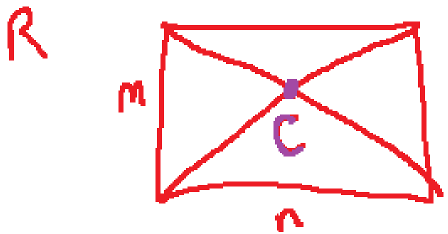
Podemos encontrá-las utilizando o fato de que R é semelhante a T, o retângulo azul:

Esboço:



$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \qquad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$$

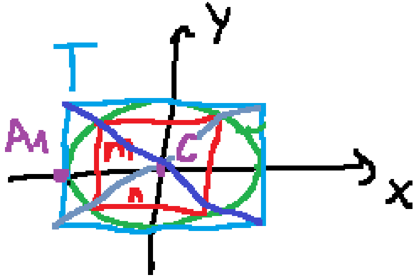
Por conta da simetria da elipse em relação aos eixos ordenados, qualquer retângulo inscrito na elipse cujos lados são paralelos aos eixos ordenados tem a característica de que suas diagonais se cruzam no centro da elipse. Em outras palavras: o centro da elipse é o centro do retângulo.



Note também que o centro de T, o retângulo circunscrito à elipse, é o centro da elipse.

Com isso podemos afirmar que as diagonais de R estão sobre as diagonais de T e, além disso, o centro da elipse é um ponto dos segmentos das diagonais.

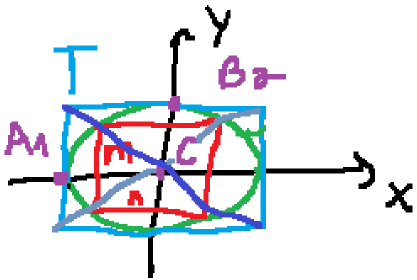
Esboço:



Encontrando um dos vértices de T, podemos encontrar a equação da reta suporte da diagonal que passa por esse vértice e fazendo a interseção da reta com a elipse, podemos encontrar os vértices de R.

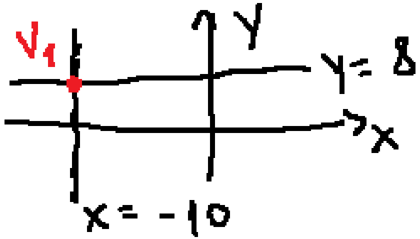
Através da equação da elipse temos que $a = 10$ e $b = 8$. Daí, podemos encontrar o vértice A_1 pois $A_1(-a, 0)$ (já que a elipse está centrada na origem e o eixo maior está sobre o eixo x).

Esboço:



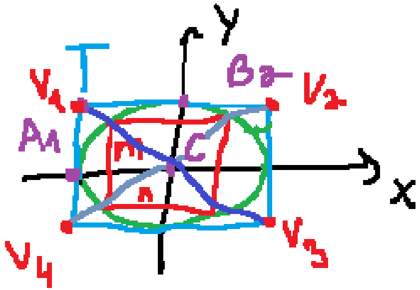
Assim, A_1 tem coordenadas $(-10,0)$. Como os lados de T são paralelos aos eixos ordenados, então o lado de T que contém A_1 tem reta suporte $x=-10$, uma reta vertical.

Analogamente, temos $A_2(10,0)$, $B_1(0,-8)$ e $B_2(0,8)$. Daí, o lado de T que contém B_2 tem reta suporte $y=8$, uma reta horizontal.



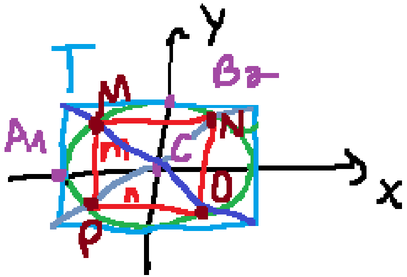
Assim, o vértice de T, V_1, tem coordenadas $V_1(-10,8)$. Analogamente: $V_2(10,8)$, $V_3(10,-8)$ e $V_4(-10,-8)$.

Esboço:



Vamos encontrar a equação da reta $\overleftrightarrow{V_1C}$:

$$\overleftrightarrow{V_1C}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -10y - 8x = 0 \Rightarrow y = \frac{-8}{10}x \Leftrightarrow y = \frac{-4}{5}x$$

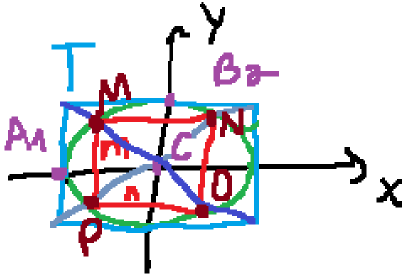


Daí, podemos encontrar M e O, dois dos vértices de R, calculando a interseção:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \\ y = \frac{-4}{5}x \end{cases} \leadsto \frac{x^2}{100} + \frac{\left(\frac{-4}{5}x\right)^2}{64} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{\frac{16}{25}x^2}{64} = 1$$

(continua)



Daí, podemos encontrar M e O, das dos vértices de R, calculando a interseção:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1 \\ y = -\dfrac{4}{5}x \end{cases} \rightsquigarrow \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{\left(-\frac{4}{5}x\right)^2}{64} = 1$$

$$\Rightarrow \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{\frac{16}{25}x^2}{64} = 1$$

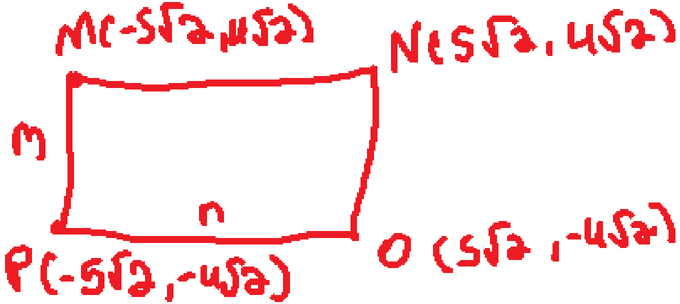
$$\xrightarrow{\cdot 100 \cdot 64} \quad 64x^2 + 100\left(\frac{16}{25}x^2\right) = 100 \cdot 64 \Rightarrow 64x^2 + 64x^2 = 100 \cdot 64$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 64x^2 = 100 \cdot 64 \Rightarrow x^2 = \frac{100 \cdot 64}{2 \cdot 64} \Rightarrow x^2 = 50 \quad \therefore x = \pm\sqrt{50} \begin{cases} \to x_1 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \\ \to x_2 = -\sqrt{50} = -5\sqrt{2} \end{cases}$$

Daí, como $y = -\frac{4}{5}x$, então $\begin{cases} \to y_1 = -4\sqrt{2} \\ \to y_2 = 4\sqrt{2} \end{cases}$. Desse modo temos $M(-5\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ e $O(5\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

É fácil ver que $N(x_1, y_2) = (5\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ e $P(x_2, y_1) = (-5\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$.

Daí, podemos calcular os lados m e n de R:



Note que $\underline{m} = dist_{M,P} = 4\sqrt{2} - (-4\sqrt{2}) = \underline{8\sqrt{2}}$

e $\underline{n} = dist_{P,O} = 5\sqrt{2} - (-5\sqrt{2}) = \underline{10\sqrt{2}}$

Assim, $A_R = m \cdot n = (8\sqrt{2})(10\sqrt{2}) = 80 \cdot 2 = \underline{160}$