Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista do Programa de Residência Pedagógica da UFPE Jardel Cabral. Com o prof. André Costa como preceptor, seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do bolsista, do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

Atenção

- Este encontro será gravado por motivos pedagógicos.
- O aluno NÃO é obrigado a aparecer no vídeo.
- Pode haver a participação de licenciandos em matemática do programa de residência pedagógica sob a orientação do prof. André Costa.

JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

BOLSISTA DO PROGRAMA DE RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA DA UFPE

MATEMÁTICA V: VETORES - 11

EXERCÍCIOS

27/08/2021

RP.JARDELCABRAL@RECIFE.IFPE.EDU.BR

Exercícios

1. Determine k e m de modo que $u = (k+1, 2, -1)$ e $v = (9, 6, 2m - 1)$ sejam vetores paralelos (colineares, alinhados).

2. Dados os pontos $A(1,2,4)$, $B(2,3,1)$ e $C(3,1,-1)$. Determine possíveis pontos D, de modo que $ABCD$ seja um paralelogramo. Determine a área dos paralelogramos obtidos.

3. Determine, P', o ponto simétrico a $P(7,-3,4)$ em relação a $A(1,3,-2)$.

4. Sejam os pontos $A(2,4,2)$, $B(0,2,2)$ e $C(3,3,5)$.

a) Prove que $\widehat{BAC} = 90°$.

b) Determine a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.

c) Determine o pé da perpendicular da altura em relação a A.

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br

Exercícios

5. Determine todos os pontos equidistantes dos pontos $A(2,3,-1)$ e $B(-4,5,5)$. *(plano mediador)*

6. Mostre que se $(u+v) \perp (u-v)$, *então* $|u| = |v|$.

7. Sejam $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ *e* $C(x_C, y_C, z_C)$. *Determine as coordenadas de* G, ***baricentro de*** $\boldsymbol{ABC}$.

8. Sejam $A(-1,2,-2)$, $B(1,4,2)$ *e* $C(3,6,0)$. *Determine as equações paramétricas de* m_A *e* m_B *medianas em relação aos vértices* A *e* B. *Encontre* $G = m_A \cap m_B$, *baricentro de* ABC. *(verifique o resultado utilizando o resultado obtido em **7**)*

9. Sejam $A(-1,2,-2)$, $B(1,4,2)$ *e* $C(3,6,0)$. *Determine a medida da altura em relação ao vértice* A, h_A.

10. Verifique se os pontos $A(-2,-1,0)$, $B(1,1,1)$ *e* $C(7,5,3)$ *são colineares.*

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br

Exercícios

11. Calcule k *e* m *de modo que* $A(4,2,-1), B(2,6,2)$ *e* $C(k,m,8)$*, sejam colineares.*

12. Calcule a medida do ângulo $\widehat{B}$*, no triângulo* ABC*, com* $A(-1,-1,2)$*,* $B(-2,1,1)$ *e* $C(-3,2,1)$*.* *Geogebra*

13. Dado o vetor $v = (a,b,c)$ *determine o cosseno do ângulo,* α*, formado entre* v *e* $i = (1,0,0)$*.* *(*α *é denominado de ângulo diretor entre* v *e* Ox*, e* $\cos\alpha$ *é o cosseno diretor)*

14. Se α, β *e* γ *são os ângulos diretores, então o versor de* v *(vetor unitário na direção e sentido de* v*) pode ser obtido por:*

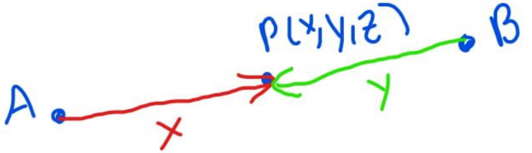
$$\frac{1}{|v|}v = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad \therefore \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br

Exercícios (soluções)

5. Determine todos os pontos equidistantes dos pontos $A(2,3,-1)$ e $B(-4,5,5)$. (plano mediador)

$P(x,y,z)$



temos que $x = y$

$$|\vec{AP}| = |\vec{BP}|$$

Calculando $\vec{AP}$ e $\vec{BP}$:

$$* \quad \vec{AP} = \vec{P} - \vec{A} = (x,y,z) - (2,3,-1) = (x-2, y-3, z+1) = \vec{AP}$$

$$* \quad \vec{BP} = \vec{P} - \vec{B} = (x,y,z) - (-4,5,5) = (x+4, y-5, z-5) = \vec{BP}$$

Lembre-se:

$$|\vec{AP}| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2}$$

$$|\vec{BP}| = \sqrt{(x+4)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2}$$

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

$$|\vec{AP}| = |\vec{BP}| \to \left(\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2+(z-5)^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = (x+4)^2+(y-5)^2+(z-5)^2$$

Produto notáveis: (*)

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{(x+4)}_{a}^2 - \underbrace{(x-2)}_{b}^2\right) + \left(\underbrace{(y-5)}_{a}^2 - \underbrace{(y-3)}_{b}^2\right) + \left(\underbrace{(z-5)}_{a}^2 - \underbrace{(z+1)}_{b}^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left((x+4)+(x-2)\right)\cdot\left((x+4)-(x-2)\right) + \left((y-5)+(y-3)\right)\cdot\left((y-5)-(y-3)\right) +$$

$$+ \left((z-5)+(z+1)\right)\cdot\left((z-5)-(z+1)\right) = 0$$

$$\Rightarrow (2x+2)\cdot 6 + (2y-8)(-2) + (2z-4)\cdot(-6) = 0$$

$$\Rightarrow 12x + 12 - 4y + 16 - 12z + 24 = 0 \Rightarrow 12x - 4y - 12z + 52 = 0 \quad \div 2$$

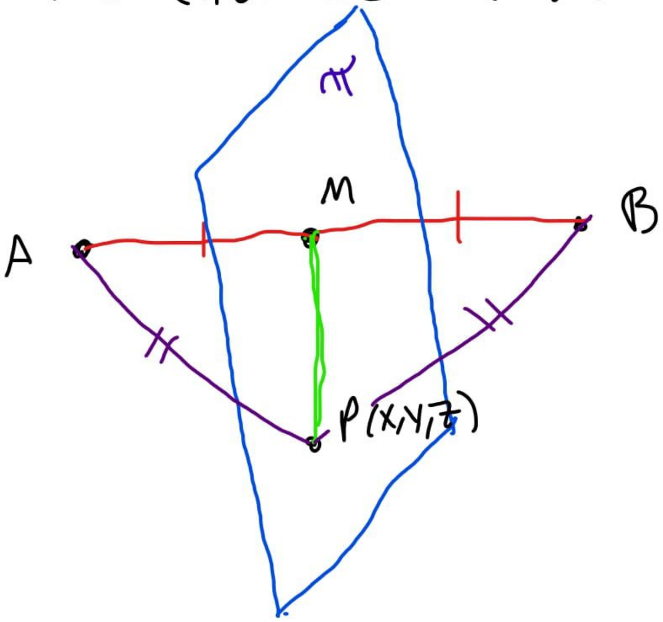
$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{6x - 2y - 6z + 13 = 0}}_{\text{Equação geral do plano mediador } \pi}$$

$\rightsquigarrow$ Note que, pela equação de π, temos que $v = (6, -2, -6)$ é perpendicular a π

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br

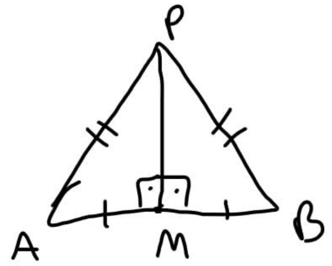
rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Outra maneira de resolver:



Note que por LLL, temos que $\Delta AMP \cong \Delta BMP$ (são congruentes).

Olhe para ΔAPB. Note que ΔAPB é isósceles.



Assim, $PM \perp AB$. Mas PM é um vetor qualquer no plano π. Desse modo, temos que, independentemente do $P \in \pi$ escolhido, temos que $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{AB}$.

Isso quer dizer que π tem o formato: $ax + by + cz + d = 0$, com $\overrightarrow{AB} = (a, b, c)$.

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Calculando $\overrightarrow{AB}$: $\vec{B} - \vec{A} = (-4,5,5) - (2,3,-1) = (-6,2,6)$

Logo, $\pi: -6x + 2y + 6z + d = 0$

↳ mas quem é d?

Para encontrar d, basta substituir as coordenadas de um ponto do plano na equação de π. Note que $M \in \pi$.

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) = (-1, 4, 2)$$

* Substituindo as coordenadas de M:

$$-6\cdot(-1) + 2\cdot 4 + 6\cdot 2 + d = 0 \Rightarrow 6 + 8 + 12 + d = 0 \Rightarrow d = -26$$

Assim, $\pi: -6x + 2y + 6z - 26 = 0$. Note que essa equação foi diferente da obtida anteriormente. Encontre o erro!

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Obs: $a \Rightarrow b$

"se a é verdade, então b também é"

Exercícios (soluções)

6. Mostre que se $(u+v) \perp (u-v)$, **então** $|u| = |v|$.

Demonstração:

Seja $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. Assim, temos que

$u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ e $u-v = (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$.

Suponha que $(u+v) \perp (u-v)$. Lembre-se que $a \perp b \Leftrightarrow \langle a,b \rangle = 0$.

Assim, por hipótese, $\langle (u+v), (u-v) \rangle = 0$. Expandindo, temos:

$$(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2) + (y_1+y_2)\cdot(y_1-y_2) + (z_1+z_2)\cdot(z_1-z_2) = 0$$

Veja (*)

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + z_1^2 - z_2^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

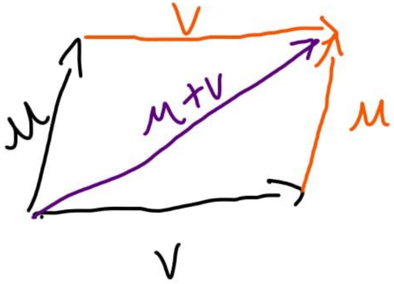
$$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \Rightarrow |u| = |v|.$$

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br

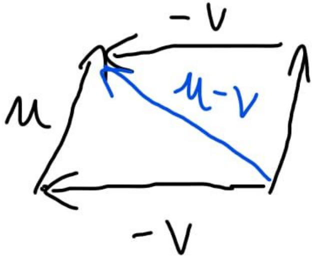
rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Maneira alternativa de resolver:

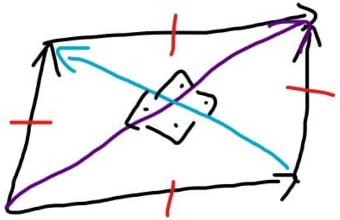
Suponha que $(u+v) \perp (u-v)$. Lembre-se que podemos formar um paralelogramo com u e v:



(1) Diagonal 1



(2) Diagonal 2



(3) losango (por hipótese)

Note que $u+v$ e $u-v$ são as diagonais do paralelogramo

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Assim, pela hipótese de que $u+v \perp u-v$, temos que o paralelogramo formado por u e v é um losango.

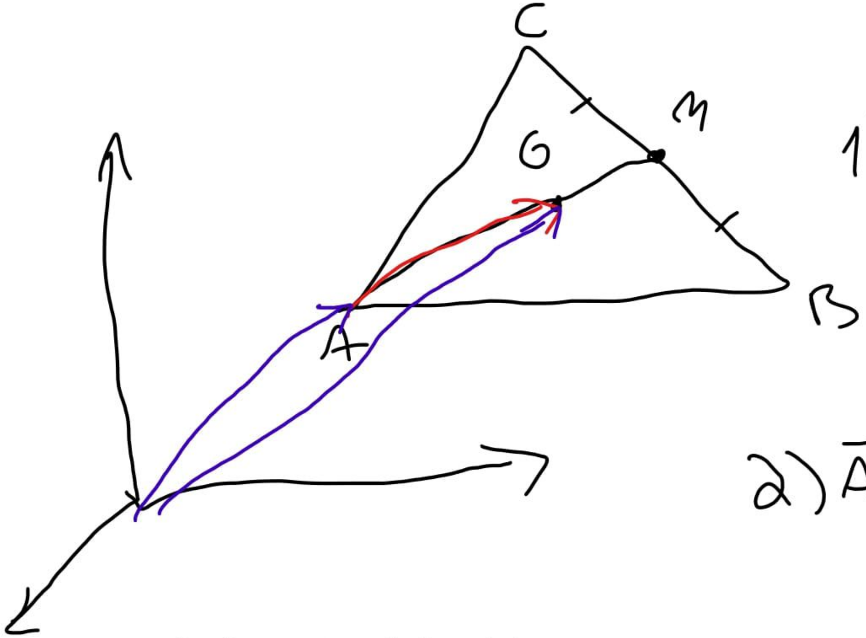
Daí, temos que os lados do paralelogramo terá a mesma medida. Assim, com os lados medem $|u|$ e $|v|$ (por construção), temos que $|u| = |v|$, como queríamos demonstrar.

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Exercícios (soluções)

7. Sejam $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ e $C(x_C, y_C, z_C)$. Determine as coordenadas de G, baricentro de ABC.

Dica de como resolver:



$$1)\ \begin{cases} \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM} \\ \overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{AM} \end{cases}$$

$$2)\ \vec{A} + \vec{AG} = \vec{G} = (x, y, z)$$

prof.andrecosta@recife.ifpe.edu.br

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Obrigado pela atenção!

JARDEL FELIPE CABRAL DOS SANTOS

BOLSISTA DO PROGRAMA DE RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA DA UFPE

MATEMÁTICA V: VETORES - 11

EXERCÍCIOS

27/08/2021

RP.JARDELCABRAL@RECIFE.IFPE.EDU.BR