1. Seja λ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ cuja a distância à $A(-4, 15)$ é o dobro da distância à $B(8, 6)$. Determine se λ corresponde a um conjunto vazio, um ponto, uma reta ou uma circunferência e, caso se tratar de uma dessas duas últimas, determine a equação geral que tem o coeficiente de x igual a 3.

Solução:

$$P \in \lambda \iff dist_{P,A} = 2 \cdot \underbrace{dist_{P,B}}_{\sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}}$$

$$\iff \sqrt{(x-(-4))^2 + (y-15)^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2} \quad)^2$$

Elevando ao quadrado

$$\iff (x+4)^2 + (y-15)^2 = 4 \cdot [(x-8)^2 + (y-6)^2]$$

$$\iff (x+4)^2 + (y-15)^2 = 4(x-8)^2 + 4(y-6)^2$$

$$\iff 4(x-8)^2 - (x+4)^2 + 4(y-6)^2 - (y-15)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{4(x-8)^2 - (x+4)^2} + \underbrace{4(y-6)^2 - (y-15)^2} = 0$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

$a = 2(x-8)$ $\qquad$ $a = 2(y-6)$

$b = x+4$ $\qquad$ $b = y-15$

$$\Leftrightarrow \quad \big(2(x-8)+(x+4)\big)\cdot\big(2(x-8)-(x+4)\big) + \big(2(y-6)+(y-15)\big)\cdot\big(2(y-6)-(y-15)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x-12)\cdot(x-20) + (3y-27)\cdot(y+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 72x + 240 + 3y^2 - 18y - 81 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 72x + 3y^2 - 18y + 159 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 72x + 3y^2 - 18y = -159 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 24x + y^2 - 6y = -53$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 24x + 12^2 + y^2 - 6y + 3^2 = -53 + 12^2 + 3^2 \Leftrightarrow (x-12)^2 + (y-3)^2 = 100$$

Assim, $P(x,y) \in \lambda \iff \underbrace{(x-12)^2 + (y-3)^2 = 100}_{\text{Equação reduzida da circunferência}}$

Logo, λ é uma circunferência com centro $C(12,3)$ e raio medindo $R = 10$. Vamos escrever a eq. de λ no formato de eq. geral:

$$(x-12)^2 + (y-3)^2 = 100 \Rightarrow x^2 - 24x + 144 + y^2 - 6y + 9 = 100$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 24x - 6y + 53 = 0$ (Eq. geral de λ)

Queremos que o coeficiente de x seja igual a 3. Logo, vamos dividir a eq. geral de λ por -8 :

$$x^2 + y^2 - 24x - 6y + 53 = 0 \xrightarrow{\div(-8)} \frac{x^2}{-8} + \frac{y^2}{-8} - \frac{24}{-8}x - \frac{6}{-8}y + \frac{53}{-8} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{-8} + \frac{y^2}{-8} + 3x + \frac{3}{4}y - \frac{53}{8} = 0}$$

↳ Equação geral de x que tem o coeficiente de x igual a 3