Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

01/11/2021

Matemática 5 (Química)

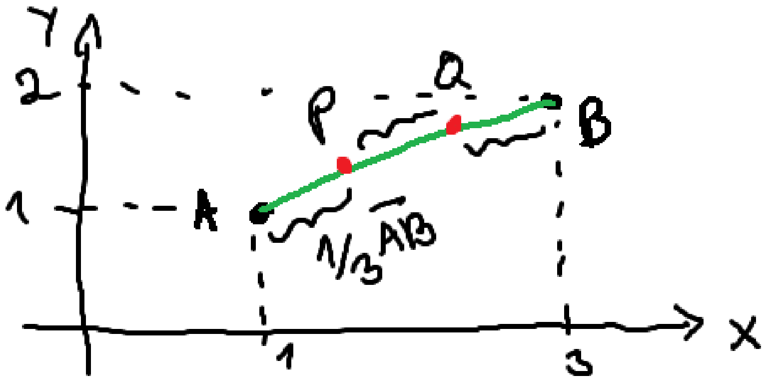
Aula 3

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

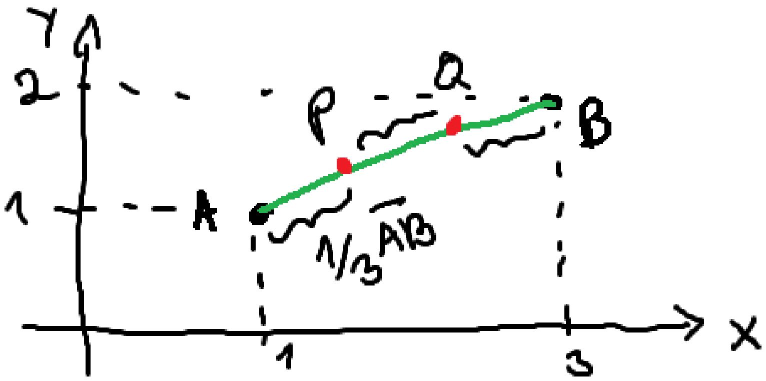
Divisão de um segmento de reta em uma determinada razão

Problema: Dado o segmento AB, onde $A(1,1)$ e $B(3,2)$, encontre os pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ de modo que:



$$\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{BQ}$$

Problema: Dado o segmento AB, onde $A(1,1)$ e $B(3,2)$, encontre os pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ de modo que:

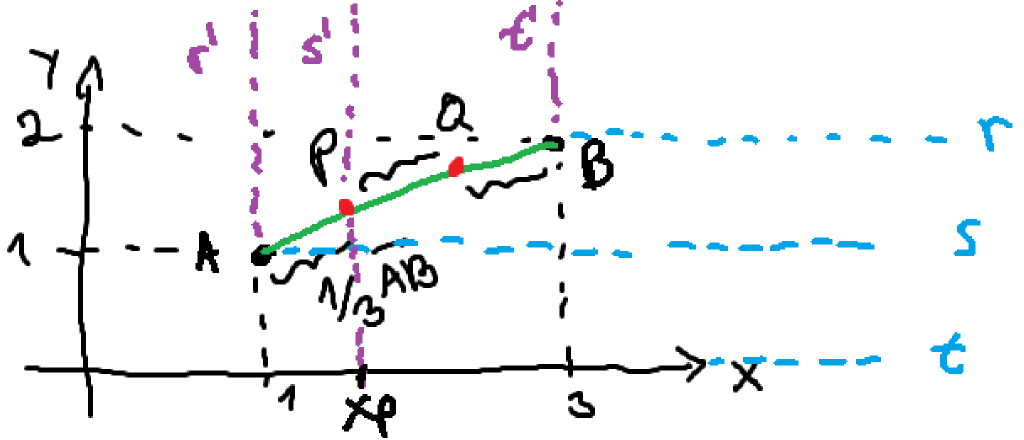


$$\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{BQ}$$

Note que: $\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ (visto que $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{BQ}$)

Daí, vamos reescrever essa igualdade como

$$\boxed{\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}}$$



(retas paralelas)

Perceba que pelo teorema de Tales $\boxed{*}$

Entendendo o teorema de Tales:

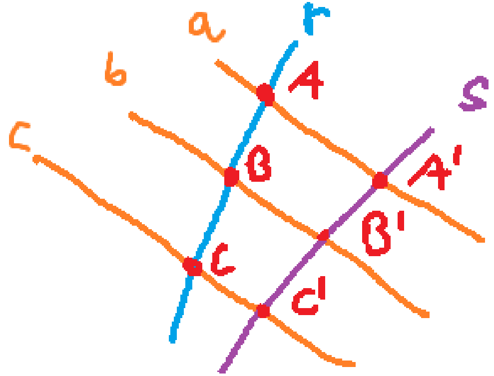
conjunto de reta que tem determinada propriedade

$\boxed{*}$: Em um feixe de retas paralelas com duas retas r e s que interceptam esse feixe nos pontos A, B, C,... e A', B', C',... respectivamente, teremos que $\boxed{\overline{AB}/\overline{A'B'} = \overline{BC}/\overline{B'C'}}$ (e por aí vai) (continua) conjunto de reta que tem determinada propriedade

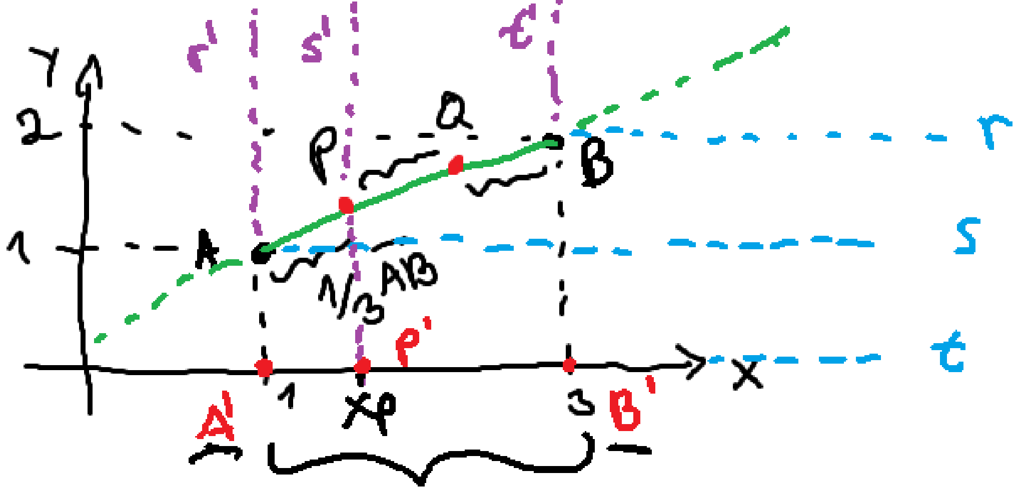
Entendendo o teorema de Tales:

$\boxed{*}$: Em um feixe de retas paralelas com duas retas r e s que interceptam esse feixe nos pontos A, B, C,... e A', B', C',... respectivamente, teremos que $\boxed{\overline{AB}/\overline{A'B'} = \overline{BC}/\overline{B'C'}}$ (e por aí vai) (continua)

Ou seja:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$



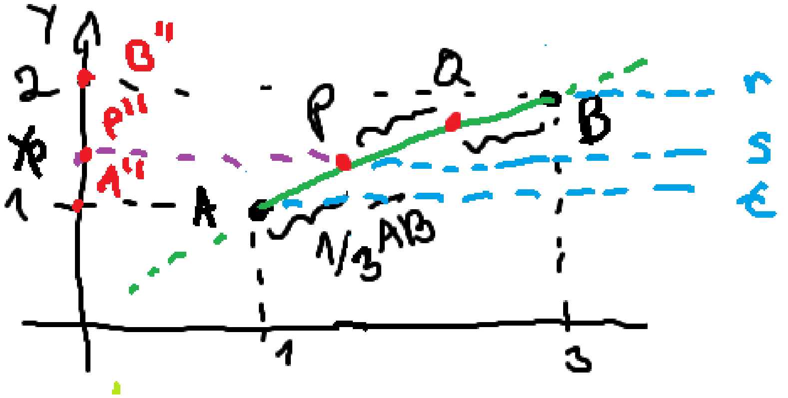
(retas paralelas)

Perceba que pelo teorema de Tales $\boxed{*}$ que $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

Podemos reescrever essa relação como: $\dfrac{1}{3} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'P'}}{\overline{A'B'}}$ $\begin{matrix} \leadsto x_P - 1 \\ \leadsto 3 - 1 = 2 \end{matrix}$

Logo, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{x_P - 1}{2} \Rightarrow 3x_P - 3 = 2 \Rightarrow 3x_P = 5 \therefore x_P = \dfrac{5}{3}$ // $\leadsto P\left(\dfrac{5}{3}, y_P\right)$

(continua)



Encontramos $x_P = 5/3$. Vamos utilizar um raciocínio análogo para calcular Y_P:

Pelo teorema de Tales, teremos que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{A''P''}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} \Rightarrow \underbrace{\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}}_{1/3 =} = \frac{\overline{A''P''} \rightsquigarrow Y_P - 1}{\overline{A''B''} \rightsquigarrow 2-1=1}$$

Ou seja: $\frac{1}{3} = \frac{Y_P - 1}{1} = 3Y_P - 3 = 1 \Rightarrow 3Y_P = 4 \therefore Y_P = \frac{4}{3}$

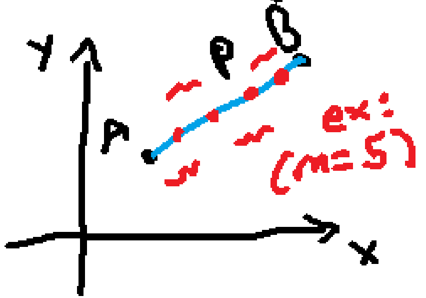
Assim, $P(5/3, 4/3)$

Exercício: Encontre as coordenadas do ponto Q.

Dica: $\overline{AQ} = \frac{2}{3}\overline{AB}$

Generalizando: Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Queremos encontrar um ponto $P(x_P, y_P)$, no segmento AB, de modo que:

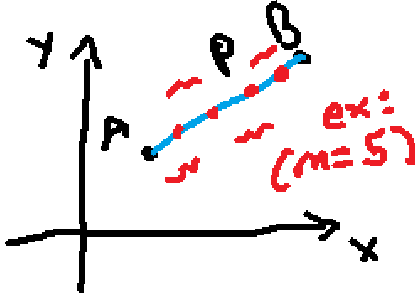


- Dividemos AB em m partes
- $\overline{AP} = \frac{n}{m}\overline{AB}$ (com $0 \leq n \leq m$ e com $n, m \in \mathbb{N}$)

Perceba que no exemplo anterior, dividimos AB em $m=3$ partes e que para P, $n=1$ e para Q, $n=2$.

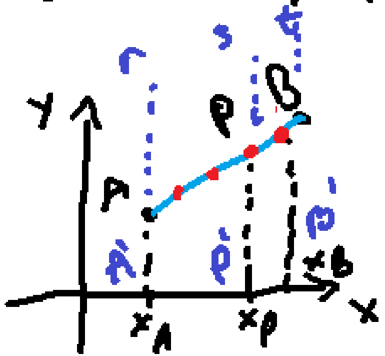
Generalizando: Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Queremos encontrar um ponto $P(x_P, y_P)$, no segmento AB, de modo que:



- Dividemos AB em m partes
- $\overline{AP} = \frac{n}{m}\overline{AB}$ (com $0 \le n \le m$ e com $n, m \in \mathbb{N}$)

Solução: Note que podemos reescrever $\overline{AP} = \frac{n}{m}\overline{AB}$ como $\boxed{\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{n}{m}}$.



Pelo teorema de Tales, $\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \overset{n/m}{\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}} = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'B'}}$

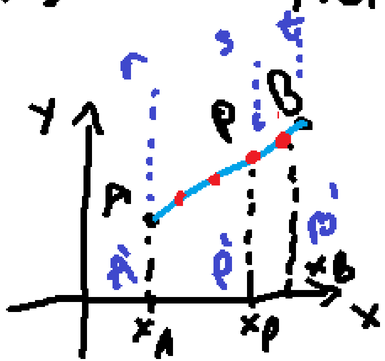
$\overline{A'P'} \to x_P - x_A$

$\overline{A'B'} \to x_B - x_A$

Daí, $\frac{n}{m} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m x_P - m x_A = n x_B - n x_A$

(continua)

Solução: Note que podemos reescrever $\overline{AP} = \frac{n}{m}\overline{AB}$ como $\boxed{\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{n}{m}}$.



Pelo teorema de Tales,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \overset{n/m}{\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}} = \frac{\overline{A'P'} \rightsquigarrow x_P - x_A}{\overline{A'B'} \rightsquigarrow x_B - x_A}$$

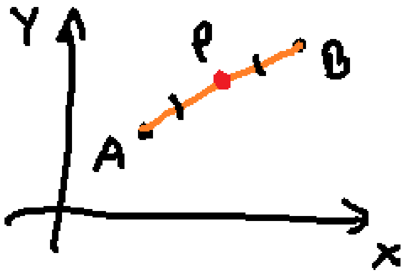
Daí, $\frac{n}{m} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m x_P - m x_A = n x_B - n x_A$

$$\Rightarrow m x_P = n x_B + m x_A - n x_A \Rightarrow m x_P = n x_B + (m-n)x_A \therefore \boxed{x_P = \frac{n x_B + (m-n)x_A}{m}}$$

Analogamente, teremos que: $\boxed{y_P = \frac{n y_B + (m-n)y_A}{m}}$ (Exercício: Verifique!)

Aplicação da fórmula:

Vamos encontrar o ponto médio do segmento AB, com $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$:



Solução: Note que: 1) Dividimos AB em $m=2$ partes

2) temos que $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ (ou seja $n=1$)

Daí, como vimos anteriormente:

$$x_P = \frac{n \cdot x_B + (m-n)x_A}{m} = \frac{x_B + x_A}{2} \quad \text{e} \quad y_P = \frac{n \cdot y_B + (m-n)x_A}{m} = \frac{y_B + y_A}{2}$$