Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

27/12/2021

Matemática 5 (Química)

Aula 12.1

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

1. Faça um esboço, encontre as coordenadas dos focos e calcule as excentricidades das elipses de equação:

c) $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$ no formato da eq. geral da elipse

Solução:

Para reescrevermos no formato da eq. reduzida, teremos que completar quadrados. Como fazer isso?

1º) Agrupar termos de mesma variável e isolar o termo independente:

$4x^2 + 8x \quad + y^2 - 4y \quad = -4$

$4(x^2 + 2x + \dots) \quad 1(y^2 - 4y + \dots)$ (colocamos o coeficiente de x^2 e y^2) em evidência

O que falta para completar os quadrados? Olhar apenas para dentro dos parênteses

1º) Agrupar termos de mesma variável e isolar o termo independente:

(i) $4x^2 + 8x \quad + y^2 - 4y \quad = -4$

$\underline{4}(x^2 + 2x + \ldots) \quad \underline{1}(y^2 - 4y + \ldots)$ (Colocamos o coeficiente de x^2 e y^2 em evidência)

O que falta para completar os quadrados? Olhar apenas para dentro dos parênteses

→ Para $(x^2 + 2x + \ldots)$ falta 1^2: $(x^2 + 2x + 1^2) = (x+1)^2$

→ Para $(y^2 - 4y + \ldots)$ falta 2^2: $(y^2 - 4y + 2^2) = (y-2)^2$

2º) Multiplique os números a serem adicionados com os respectivos fatores e adicione a ambos os lados da eq:

(i): $4x^2 + 8x + 4 \cdot 1^2 + y^2 - 4y + 1 \cdot 2^2 = -4 + 4 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2$

O que falta para completar os quadrados? Olhar apenas para dentro dos parênteses

→ Para $(x^2+2x+\dots)$ falta $\underline{\underline{1^2}}$: $(x^2+2x+1^2) = (x+1)^2$

→ Para $(y^2-4y+\dots)$ falta $\underline{\underline{2^2}}$: $(y^2-4y+2^2) = (y-2)^2$

2º) Multiplique os números a serem adicionados com os respectivos fatores e adicione a ambos os lados da eq:

(i): $4x^2+8x+\underline{4}\cdot 1^2 + y^2-4y+\underline{1}\cdot 2^2 = -4+\underline{4}\cdot 1^2+\underline{1}\cdot 2^2$

$\Rightarrow 4(x^2+2x+1) + 1\cdot(y^2-4y+4) = -4+4+4$

$\Rightarrow 4(x+1)^2 + 1\cdot(y-2)^2 = \underline{\underline{4}} \xrightarrow{\div 4} (x+1)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1 \iff \boxed{\dfrac{(x+1)^2}{1}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1}$

Continuaremos na próxima aula

Encontramos a eq. reduzida da elipse: $\frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

$\Updownarrow$

$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$

Comparando as equações, temos que:

$C(-1,2)$ e $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$

$\therefore a = 2$ $\therefore b = 1$

Encontrando c: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2^2 = 1^2 + c^2 \Rightarrow 4 = 1 + c^2 \Rightarrow c^2 = 3$

$\therefore c = \sqrt{3}$

Daí, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ⇝ Excentricidade

Vamos encontrar as coordenadas dos focos:

Como o centro C tem coordenadas $(-1,2)$ e a elipse tem eixo maior paralelo ao eixo y, os focos terão coordenadas:

$F_1(-1, 2-c)$ e $F_2(-1, 2+c)$. Portanto: $F_1(-1, 2-\sqrt{3})$

$F_2(-1, 2+\sqrt{3})$

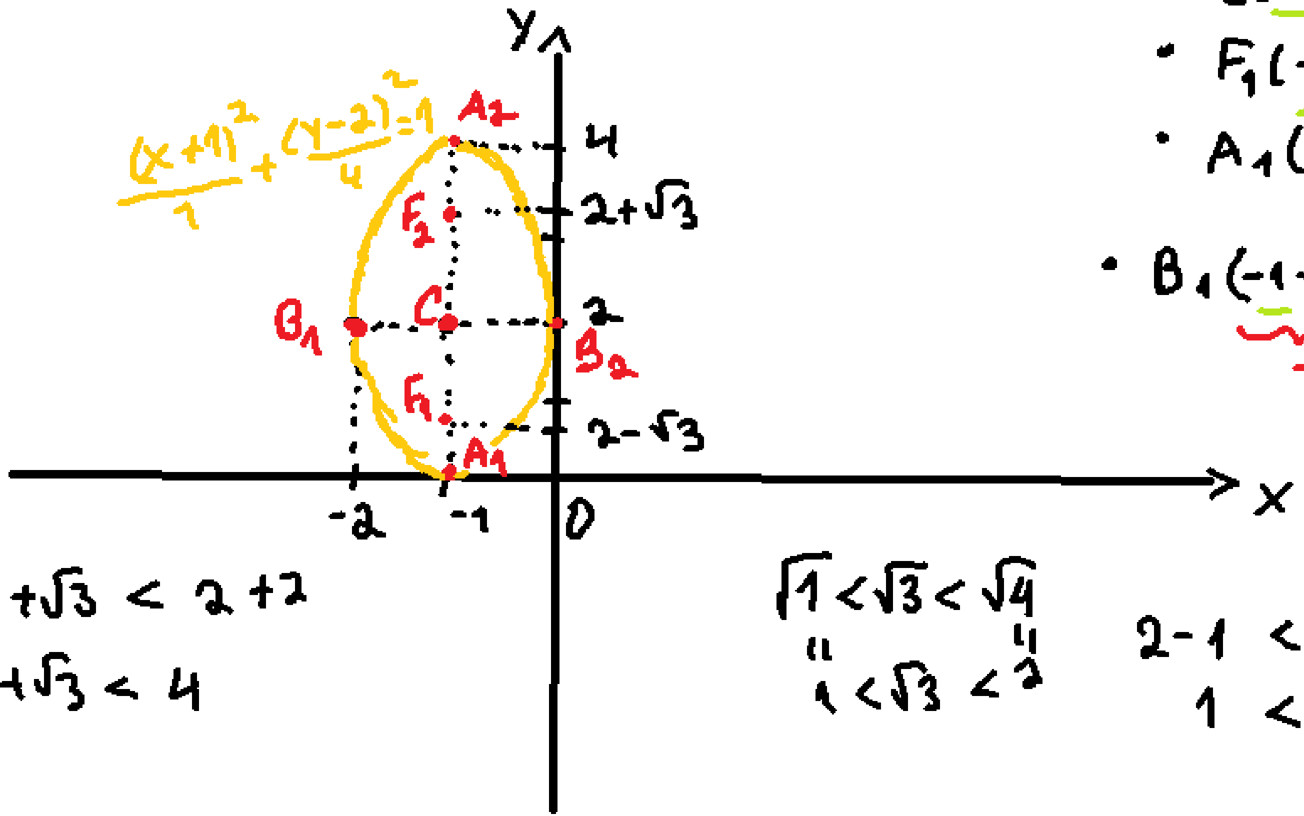
Obs: No caso geral, os focos tem coordenadas: $C(x_0, y_0)$

1) $F_1(x_0, y_0-c)$ e $F_2(x_0, y_0+c)$ ou 2) $F_1(x_0-c, y_0)$ e $F_2(x_0+c, y_0)$

↳ eixo maior paralelo ao eixo y

↳ eixo maior paralelo ao eixo x

Vamos esboçar a elipse:



- $\underline{a=2}$ $\underline{b=1}$ $\underline{c=\sqrt{3}}$
- $C(-1,2)$
- $F_1(-1,2-\sqrt{3})$ e $F_2(-1,2+\sqrt{3})$
- $A_1(-1,\underbrace{2-2}_{0})$ e $A_2(-1,\underbrace{2+2}_{4})$
- $B_1(\underbrace{-1-1}_{-2},2)$ e $B_2(\underbrace{-1+1}_{0},2)$

$2+1 < 2+\sqrt{3} < 2+2$

$3 < 2+\sqrt{3} < 4$

$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$

$1 < \sqrt{3} < 2$

$2-1 < 2-\sqrt{3} < 2-2$

$1 < 2-\sqrt{3} < 0$

Exercícios Propostos

1. Faça um esboço, encontre as coordenadas dos focos e calcule as excentricidades das elipses de equação:

b) $25x^2 + 9y^2 = 1$ (Exercício)

Dica de como resolver:

Encontrando a eq. reduzida, conseguimos resolver como a letra (c).

Comparando com a eq. reduzida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, observa-se que apenas está faltando reescrever $25x^2 + 9y^2$ como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

b) $25x^2 + 9y^2 = 1$

Note que $\frac{1}{1/25} = 25$ e $\frac{1}{1/9} = 9$.

De fato, $\frac{1}{1/25} = \frac{1/1}{1/25} = \frac{1}{1} \cdot \frac{25}{1} = \frac{25}{1} = 25$

Assim, $25x^2 + 9y^2 = \frac{x^2}{(1/25)} + \frac{y^2}{(1/9)}$. Logo, temos

$\frac{x^2}{(1/25)} + \frac{y^2}{(1/9)} = 1$. Daí, $C(0,0)$, $a^2 = 1/25$ e $b^2 = 1/9$

$\therefore a = 1/5$ $\therefore b = 1/3$

2. A eq. $16x^2 + 25y^2 + 96x - 300y + 644 = 0$ representa, no plano cartesiano, uma curva fechada. Qual é a área do retângulo, de lados paralelos aos eixos coordenados, circunscrito a essa curva?

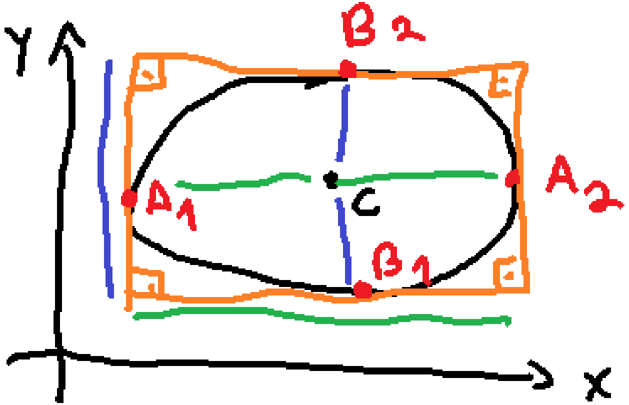


Ilustração da situação

$$16x^2 + 25y^2 + 96x - 300y + 644 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{16x^2 + 96x}_{16\cdot(x^2+6x)} + \underbrace{25y^2 - 300y}_{25\cdot(y^2-12y)} = -644$$

Preciso adicionar 3^2 a (x^2+6x) para torná-lo no quadrado perfeito $(x+3)^2$. Analogamente, preciso adicionar 6^2 a (y^2-12y) para torná-lo no quadrado perfeito $(y-6)^2$.

(continua)

Logo, adicionando $\underline{\underline{16}} \cdot 3^2$ e $\underline{\underline{25}} \cdot 6^2$ à eq. original, conseguiremos fatorar as expressões:

$$16x^2 + 25y^2 + 96x - 300y + 644 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{16x^2 + 96x}_{\underline{\underline{16}} \cdot (x^2 + 6x)} + \underbrace{25y^2 - 300y}_{\underline{\underline{25}} \cdot (y^2 - 12y)} = -644$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 96x + \underline{\underline{16}} \cdot 3^2 + 25y^2 - 300y + \underline{\underline{25}} \cdot 6^2 = -644 + \underline{\underline{16}} \cdot 3^2 + \underline{\underline{25}} \cdot 6^2$$

$$\Rightarrow 16(x^2 + 6x + 3^2) + 25(y^2 - 12y + 6^2) = -644 + 16 \cdot 9 + 25 \cdot 36$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 96x + 16\cdot 3^2 + 25y^2 - 300y + 25\cdot 6^2 = -644 + 16\cdot 3^2 + 25\cdot 6^2$$

$$\Rightarrow 16(x^2 + 6x + 3^2) + 25(y^2 - 12y + 6^2) = -644 + 16\cdot 9 + 25\cdot 36$$

$$\Rightarrow 16(x+3)^2 + 25\cdot(y-6)^2 = 400$$

$$\xrightarrow{\div 400} \frac{16(x+3)^2}{400} + \frac{25(y-6)^2}{400} = \frac{400}{400} \Rightarrow \boxed{\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-6)^2}{16} = 1}$$

Assim, temos $C(-3,6)$, $a^2 = 25$ $\therefore a = 5$ e $b^2 = 16$ $\therefore b = 4$

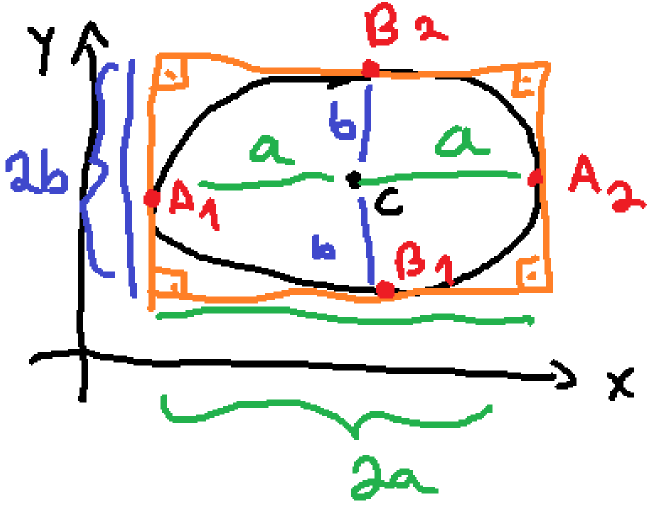


Ilustração da situação

Note que a área do retângulo pode ser calculada como

$A = \underbrace{(2b)\cdot(2a)}_{\text{Base} \times \text{Altura}}$. Como $a = 5$ e $b = 4$, temos: $A = (2\cdot 4)\cdot(2\cdot 5)$

$= 4\cdot 4\cdot 5 = 80$