Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

29/01/2022

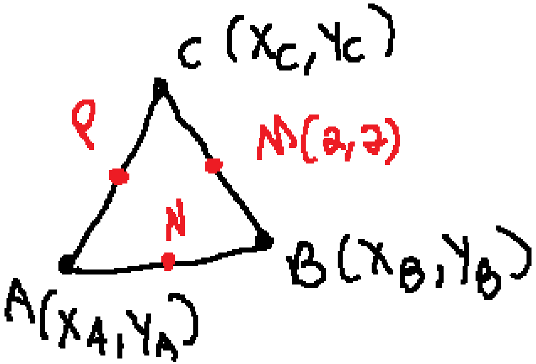
Matemática 5 (Química)

Aula 14.2

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

1. Os pontos médios dos lados de um triângulo ABC são $M(2,2)$, $N(-4,0)$ e $P(4,-6)$. Determine as coordenadas A, B e C dos vértices do triângulo.



• O ponto médio, M, de BC pode ser encontrado (as suas coordenadas) a partir das coordenadas de B e C:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \quad e \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$$

Assim, teremos:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \qquad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \qquad 2 = \frac{x_B + x_C}{2} \qquad 2 = \frac{y_B + y_C}{2}$$

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_N = \frac{y_A + y_B}{2} \quad \rightsquigarrow \quad -4 = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad 0 = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad y_P = \frac{y_A + y_C}{2} \qquad 4 = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad -6 = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$2 = \dfrac{x_B + x_C}{2}$ $\quad$ $2 = \dfrac{y_B + y_C}{2}$

$-4 = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ $\quad$ $0 = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ $\quad \rightsquigarrow$

$4 = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ $\quad$ $-6 = \dfrac{y_A + y_C}{2}$

$x_B + x_C = 4$ $\quad$ $y_B + y_C = 4$

$x_A + x_B = -8$ $\quad$ $y_A + y_B = 0$

$x_A + x_C = 8$ $\quad$ $y_A + y_C = -12$

Podemos encontrar as coordenadas ao resolver os sistemas de equações:

$$X: \begin{cases} x_B + x_C = 4 \\ x_A + x_B = -8 \\ x_A + x_C = 8 \end{cases} \quad e \quad Y: \begin{cases} y_B + y_C = 4 \\ y_A + y_B = 0 \\ y_A + y_C = -12 \end{cases}$$

$$X: \begin{cases} x_B + x_C = 4 \\ x_A + x_B = -8 \\ x_A + x_C = 8 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \underline{x_C} = \underline{4 - x_B} \\ x_A + x_B = -8 \\ x_A + \underline{x_C} = 8 \end{cases} \rightsquigarrow \left.\begin{cases} \underline{x_C} = \underline{4 - x_B} \\ x_A + x_B = -8 \\ x_A + \underline{(4 - x_B)} = 8 \end{cases}\right\} \text{Vamos focar nessas duas equações}$$

$$\rightsquigarrow \left.\begin{cases} x_C = 4 - x_B \\ x_A + x_B = -8 \\ x_A - x_B + 4 = 8 \end{cases}\right\} \text{Vamos somar as equações}$$

$$+$$

$$2x_A + 0x_B + 4 = -8 + 8$$

$$\Rightarrow 2x_A + 4 = 0 \Rightarrow 2x_A = -4$$

$$\therefore \underline{\underline{x_A = -2}}$$

$$\rightsquigarrow x_A + x_B = -8 \rightsquigarrow -2 + x_B = -8$$

$$\therefore \underline{\underline{x_B = -6}}$$

Por fim, $x_C = \overbrace{4-(-6)}^{4+6} \therefore \underline{\underline{x_C = 10}}$

Vamos resolver o sistema $Y: \begin{cases} Y_B + Y_C = 4 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Y_A + Y_C = -12 \end{cases}$ de maneira análoga:

$$Y: \begin{cases} Y_B + Y_C = 4 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Y_A + Y_C = -12 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} Y_B + Y_C = 4 \\ Y_A = -Y_B \\ Y_A + Y_C = -12 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} Y_B + Y_C = 4 \;\bullet \\ Y_A = -Y_B \\ -Y_B + Y_C = -12 \;\bullet \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Somando as equações indicadas por $\bullet$: $2Y_C = -8$ $\therefore \underline{\underline{Y_C = -4}}$

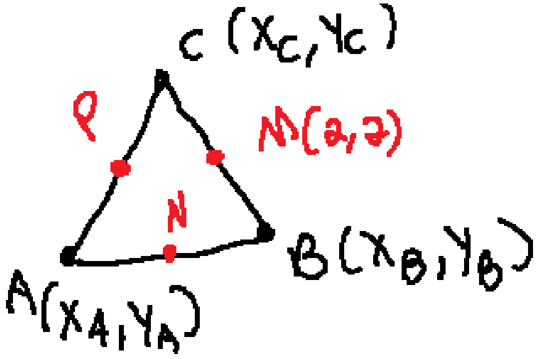
. Daí, $Y_B + Y_C = 4 \rightsquigarrow Y_B - 4 = 4 \therefore \underline{\underline{Y_B = 8}}$

Por fim, $Y_A = -Y_B \therefore \underline{\underline{Y_A = -8}}$

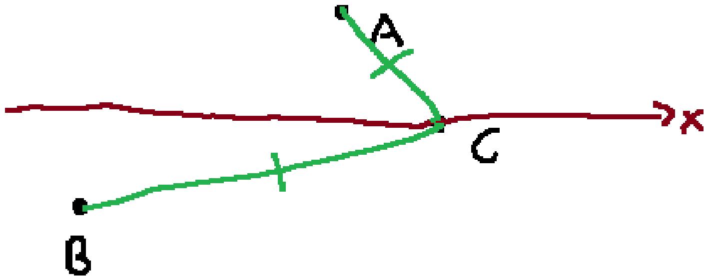
1. Os pontos médios dos lados de um triângulo ABC são $M(2,2)$, $N(-4,0)$ e $P(4,-6)$. Determine as coordenadas A, B e C dos vértices do triângulo.

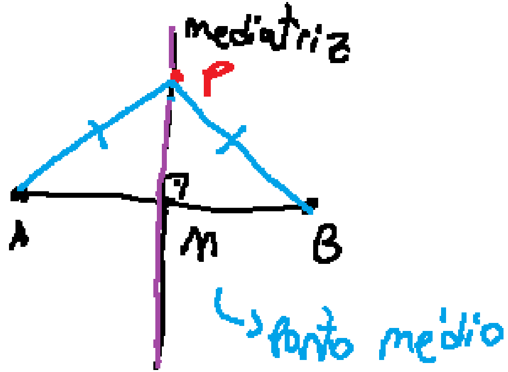
Desse modo, temos que:

$A(-2,-8)$, $B(-6,8)$ e $C(10,-4)$



3. Num triângulo ABC, sendo $A(4,5)$, $B(0,-3)$ e C um ponto pertencente ao eixo Ox com $\overline{BC} = \overline{AC}$. Determine as coordenadas do ponto C.





Como $\overline{BC} = \overline{AC}$, então C é um ponto da reta mediatriz do segmento AB. Além disso, como $C \in Ox$, então $C(x_C, 0)$.

↳ $y = 0$

Vamos encontrar a equação da mediatriz de AB:

3. Num triângulo ABC, sendo $A(4,5)$, $B(0,-3)$ e C um ponto pertencente ao eixo Ox com $\overline{BC} = \overline{AC}$. Determine as coordenadas do ponto C.

1) Encontrar a equação da reta suporte de AB:

$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 5x - 12 + 3x - 4y = 0 \iff 8x - 4y - 12 = 0$$

$$\iff 2x - y - 3 = 0$$

2) Encontrar a equação de s, perpendicular à $\overleftrightarrow{AB}$:

$s \perp \overleftrightarrow{AB} \iff a_s \cdot a_{\overleftrightarrow{AB}} + b_s \cdot b_{\overleftrightarrow{AB}} = 0$. Logo, $s: x + 2y + c = 0$ é perpendicular à $\overleftrightarrow{AB}$

Para valor de c escolhido, teremos uma reta s perpendicular à $\overleftrightarrow{AB}$! (Por quê?)

3) Encontrando a equação da mediatriz:

Como M, o ponto médio de AB, é um ponto da mediatriz, ao substituir as coordenadas de M na equação de s, encontraremos o "c" da reta mediatriz.

3.1) Calculando M: $M\Big(\underbrace{\frac{x_A+x_B}{2}}_{x_M}, \underbrace{\frac{y_A+y_B}{2}}_{y_M}\Big) = M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{5+(-3)}{2}\right) = M(2,1)$

Daí, como $M \in s$: $x_M + 2\cdot y_M + c = 0 \Rightarrow 2 + 2\cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c+4=0 \therefore c=-4$

$s: x + 2y + c = 0$

Logo, a equação da mediatriz é: $s: x + 2y - 4 = 0$

Como $C \in s$, então: $x_c + 2 \cdot y_c - 4 = 0 \Rightarrow x_c + 2 \cdot 0 - 4 = 0$

$(x_c, 0)$ $\quad s: x + 2y - 4 = 0$

$\Rightarrow x_c - 4 = 0$

$\therefore x_c = 4$

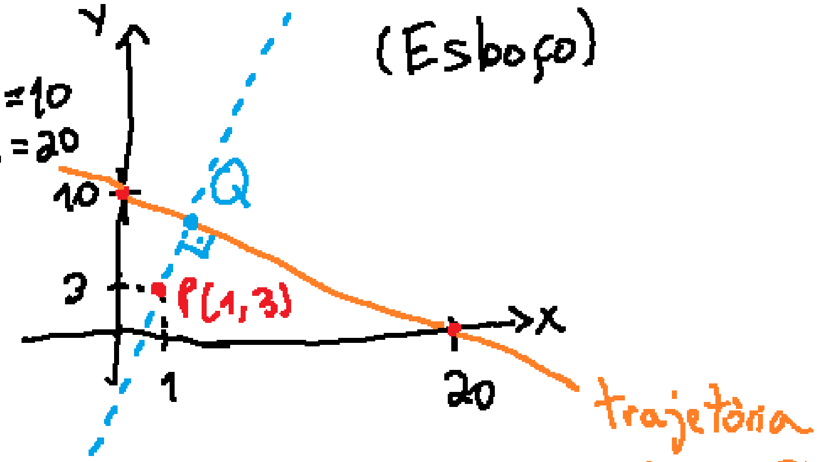
Logo, C é o ponto de coordenadas $(4, 0)$

5. Um mapa é localizado sobre um sistema de eixos cartesianos ortogonal, de modo que a posição de uma cidade é dada pelo ponto $P(1,3)$. Um avião descreve uma trajetória retilínea segundo a equação $x + 2y = 20$.

a) Em qual ponto da trajetória, o avião se encontra mais próximo da cidade?

b) Nas condições do item anterior, qual a distância da cidade ao avião?

- $x=0 \Rightarrow y=10$
- $y=0 \Rightarrow x=20$



a) O ponto Q (Por quê?). Vamos encontrá-lo:

~~no~~ vamos encontrar a reta que é perpendicular à trajetória e que passa por P:

$s \perp r \Leftrightarrow a_s \cdot a_r + b_s \cdot b_r = 0$. Logo, $s: -2x + y + c = 0$ é perpendi-

$(s: a_s x + b_s y + c_s = 0)$ -cular à $r: x + 2y = 20$. (Por quê?)

$(r: a_r x + b_r y + c_r = 0)$

Como queremos que $P \in s$, então: $-2 \cdot x_P + y_P + c = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 3 + c = 0$

$s: -2x + y + c = 0$ $\Rightarrow c + 1 = 0$

$\therefore c = -1$

Assim, $s: -2x + y - 1 = 0$. Podemos achar Q como sendo o ponto de interseção entre s e $r: x + 2y = 20$:

$$Q: \begin{cases} x + 2y = 20 & \cdot 2 \\ -2x + y - 1 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x + 4y = 40 \\ -2x + y - 1 = 0 \end{cases} \; +$$

$$0x + 5y - 1 = 40 \Rightarrow 5y - 1 = 40 \Rightarrow 5y = 41$$

$$\therefore y = \frac{41}{5}$$

Logo, $x + 2 \cdot \frac{41}{5} = 20 \xrightarrow{\cdot 5} 5x + 2 \cdot 41 = 100 \Rightarrow 5x + 82 = 100 \Rightarrow 5x = 18 \therefore x = \frac{18}{5}$. Logo, $Q\left(\frac{18}{5}, \frac{41}{5}\right)$

5. Um mapa é localizado sobre um sistema de eixos cartesianos ortogonal, de modo que a posição de uma cidade é dada pelo ponto $P(1,3)$. Um avião descreve uma trajetória retilínea segundo a equação $x + 2y = 20$.

a) Em qual ponto da trajetória, o avião se encontra mais próximo da cidade? $Q\left(\frac{18}{5}, \frac{41}{5}\right)$

b) Nas condições do item anterior, qual a distância da cidade ao avião?

b)

Podemos calcular a distância como: 1) $dist_{P,Q}$ ou 2) $dist_{P,r}$

↳ $x+2y=20$

Vamos calcular da segunda maneira: Note que r pode ser descrita como: $r: x+2y-20=0$ (formato da equação geral da reta).

$$dist_{P,r} = \frac{|x_P + 2 \cdot y_P - 20|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|1+2\cdot 3-20|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-13|}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}} = \frac{13\sqrt{5}}{5}$$