Atenção

"O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes."

23/12/2021

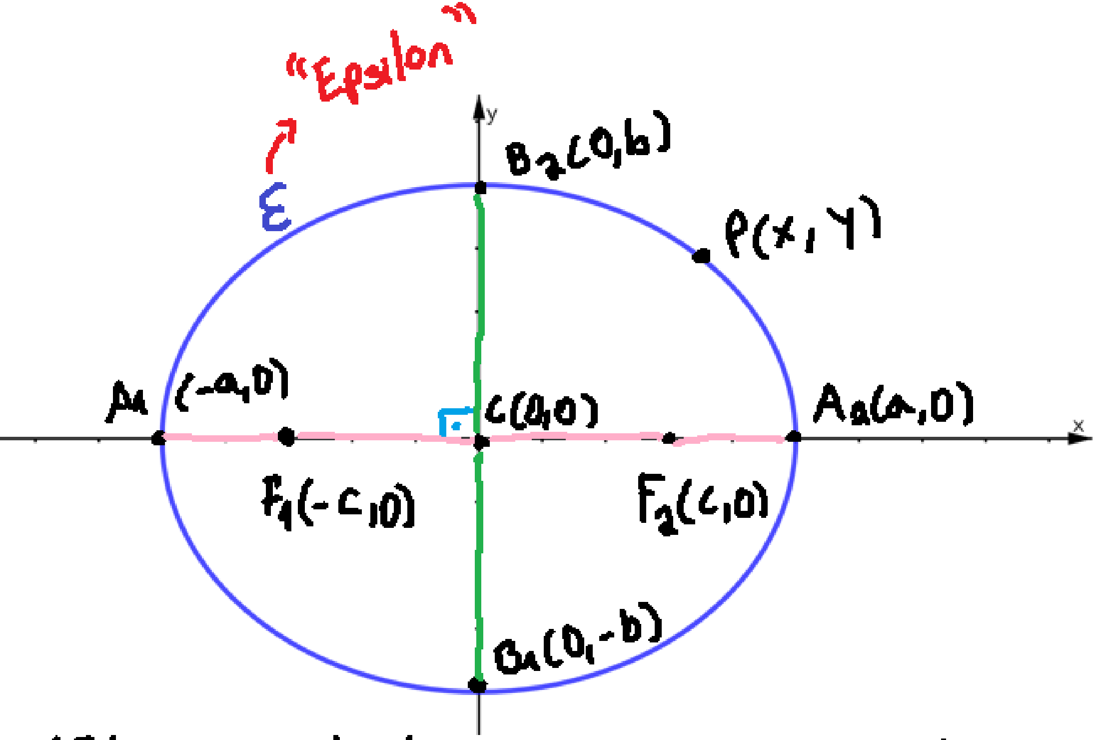
Matemática 5 (Química)

Aula 12

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Revisão sobre Elipse (na Geometria Analítica)



(Elipse centrada na origem com eixo maior sobre o eixo x)

- Focos: F_1 e F_2 (fixos)
- Centro: C (ponto médio dos focos)
- Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2

  ($A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{E}$)
- Eixos de simetria:

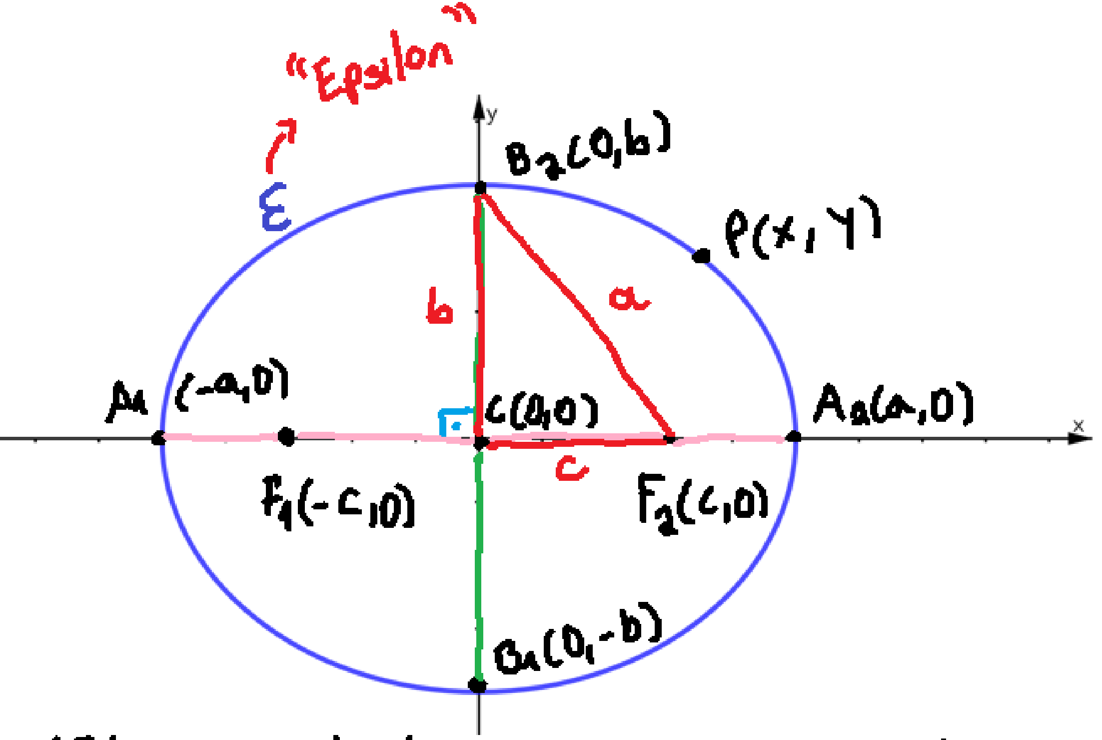
  — Maior: $\underline{A_1A_2}$ e mede $2a$ $\rightarrow$ $a > 0$

  Obs: $F_1, F_2 \in \underline{A_1A_2}$

  — Menor: $\underline{B_1B_2}$ e mede $2b$ $\rightarrow$ $b > 0$

  Obs: $\underline{B_1B_2} \perp \underline{A_1A_2}$

Revisão sobre Elipse (na Geometria Analítica)



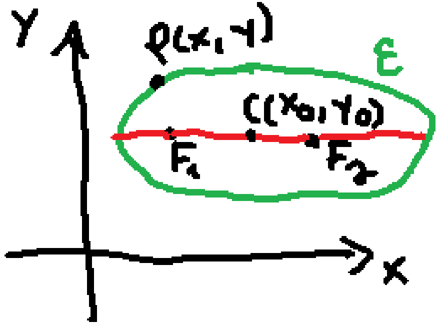
(Elipse centrada na origem com eixo maior sobre o eixo x)

- Distância focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$ ($c > 0$)
- Excentricidade (e): $e = \frac{c}{a}$
  ↳ mede o quão achatada é a elipse
- $\underline{a^2 = b^2 + c^2}$ (Relação entre a, b e c)
- $A_{\mathcal{E}} = \pi \cdot a \cdot b$ (Área da Elipse)
- $P \in \mathcal{E} \iff dist_{P,F_1} + dist_{P,F_2} = 2a$

Revisão sobre Elipse (na Geometria Analítica)

Obs: o que vimos no slide anterior está presente em todas as elipses.

1)

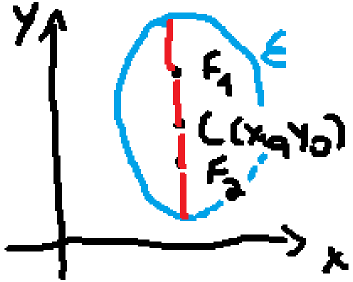


Eixo maior paralelo ao eixo x

$$\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Eqs. reduzidas da elipse

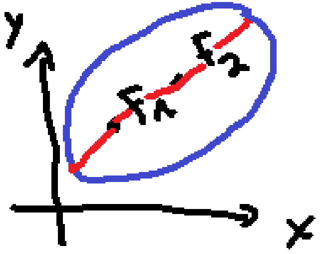
2)



Eixo maior Paralelo ao eixo y

$$\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

3)



Nem 1), nem 2)

Não será estudado na disciplina

Revisão sobre Elipse (na Geometria Analítica)

Equação geral da Elipse: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

$(A \text{ e } B \neq 0 \quad \text{e} \quad A, B, C, D, E \in \mathbb{R})$

↳ Podemos passar de uma eq. para a outra:

1) Eq. geral ⟶ Eq. reduzida : completar quadrados

2) Eq. reduzida → Eq. geral : reescrever no formato da eq. geral

Quando que $P(x_P, y_P)$ é ponto da Elipse $\mathcal{E}$?

$P \in \mathcal{E} \iff$ as coordenadas de P satisfazem uma eq. da elipse

Exercícios Propostos

1. Faça um esboço, encontre as coordenadas dos focos e calcule as excentricidades das elipses de equação:

a) $25x^2 + 9y^2 = 225$

b) $25x^2 + 9y^2 = 1$ (Exercício)

c) $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

1. Faça um esboço, encontre as coordenadas dos focos e calcule as excentricidades das elipses de equação:

a) $25x^2 + 9y^2 = 225$

Solução:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$ (um dos formatos da eq. reduzida)

Vamos dividir a equação a) por 225:

$$25x^2 + 9y^2 = 225 \xrightarrow{\div 225} \frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = \frac{225}{225} \Rightarrow \frac{\cancel{25}x^2}{\cancel{25}\cdot 9} + \frac{\cancel{9}y^2}{25\cdot\cancel{9}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1}$$ (Eq reduzida da elipse). Logo, $C(0,0)$, $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$

$\therefore a = 5$ $\therefore b = 3$

1. Faça um esboço, encontre as coordenadas dos focos e calcule as excentricidades das elipses de equação:

a) $25x^2 + 9y^2 = 225$

Solução:

Vimos que a elipse tem eq. reduzida: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

*: pois a^2 está sobre y^2 visto que $a^2 > b^2$ e $a > b$

Daí, encontramos $C(0,0)$, $a = 5$ e $b = 3$. Além disso, o eixo maior é paralelo ao eixo y*. Vamos encontrar as coordenadas dos focos:

Como $C(0,0)$ e o eixo maior é paralelo ao eixo y, então $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$. Podemos encontrar c utilizando o fato de que: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \therefore c = \sqrt{a^2 - b^2}$

1. Faça um esboço, encontre as coordenadas dos focos e calcule as excentricidades das elipses de equação:

a) $25x^2 + 9y^2 = 225$

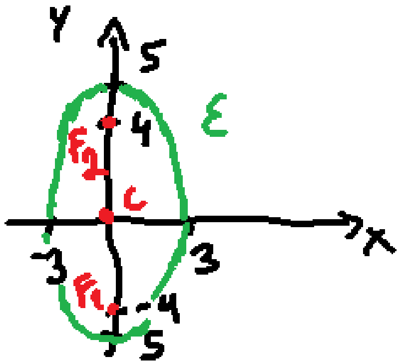
Solução:

Daí, $c = \sqrt{\underbrace{5}_{a}^2 - \underbrace{3}_{b}^2} = \sqrt{(5+3)(5-3)} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} \therefore c = 4$

Logo, $F_1(0,-4)$ e $F(0,4)$. A excentricidade é calculada como:

$$e = \frac{c}{a} \rightsquigarrow \underline{\underline{e = \frac{4}{5} = 0{,}8}}$$

Esboço:



1. Faça um esboço, encontre as coordenadas dos focos e calcule as excentricidades das elipses de equação:

c) $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$ no formato da eq. geral da elipse

Solução:

Para reescrevermos no formato da eq. reduzida, teremos que completar quadrados. Como fazer isso?

1º) Agrupar termos de mesma variável e isolar o termo independente:

$4x^2 + 8x \quad + y^2 - 4y \quad = -4$

$4(x^2 + 2x + \dots) \quad 1(y^2 - 4y + \dots)$ (colocamos o coeficiente de x^2 e y^2 em evidência)

O que falta para completar os quadrados? Olhar apenas para dentro dos parênteses

1º) Agrupar termos de mesma variável e isolar o termo independente:

(i) $4x^2 + 8x \quad + y^2 - 4y \quad = -4$

$\underline{4}(x^2 + 2x + \ldots) \quad \underline{1}(y^2 - 4y + \ldots)$ (Colocamos o coeficiente de x^2 e y^2) em evidência

O que falta para completar os quadrados? Olhar apenas para dentro dos parênteses

→ Para $(x^2 + 2x + \ldots)$ falta $\underline{\underline{1^2}}$: $(x^2 + 2x + 1^2) = (x+1)^2$

→ Para $(y^2 - 4y + \ldots)$ falta $\underline{\underline{2^2}}$: $(y^2 - 4y + 2^2) = (y-2)^2$

2º) Multiplique os números a serem adicionados com os respectivos fatores e adicione a ambos os lados da eq:

(ii): $4x^2 + 8x + \underline{4} \cdot 1^2 + y^2 - 4y + \underline{1} \cdot 2^2 = -4 + \underline{4} \cdot 1^2 + \underline{1} \cdot 2^2$

O que falta para completar os quadrados? Olhar apenas para dentro dos parênteses

→ Para $(x^2+2x+\dots)$ falta 1^2 : $(x^2+2x+1^2) = (x+1)^2$

→ Para $(y^2-4y+\dots)$ falta 2^2 : $(y^2-4y+2^2) = (y-2)^2$

2º) Multiplique os números a serem adicionados com os respectivos fatores e adicione a ambos os lados da eq:

(i): $4x^2+8x+4\cdot 1^2 + y^2-4y+1\cdot 2^2 = -4+4\cdot 1^2+1\cdot 2^2$

$\Rightarrow 4(x^2+2x+1) + 1\cdot(y^2-4y+4) = -4+4+4$

$\Rightarrow 4(x+1)^2 + 1\cdot(y-2)^2 = 4 \xrightarrow{\div 4} (x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{(x+1)^2}{1}+\frac{(y-2)^2}{4}=1}$

Continuaremos na próxima aula