Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

29/11/2021

Matemática 5 (Química)

Aula 9

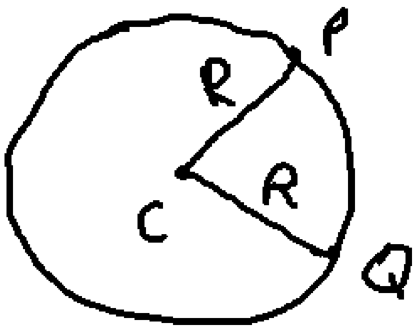
Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Circunferências

O que é?

um conjunto de pontos que estão a uma mesma distância R de um ponto fixo C (chamado de centro da circunferência)



Uma propriedade importante:

Um segmento formado por C e um ponto da circunferência recebe o nome de raio. Cada raio tem a mesma medida (R)

Como representar uma circunferência utilizando a Geometria Analítica?

Problema: Determine todos os pontos nos quais a distância até $C(3,2)$ seja igual a 5.

Solução: Seja $P(x,y)$ um ponto com essa propriedade.

Daí,

$$dist_{P,C} = 5$$

Elevando ao quadrado

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 5 \xrightarrow{\wedge 2} \underline{\underline{(x-3)^2+(y-2)^2 = 25}}$$

Essa equação obtida representa todos os pontos da circunferência de centro $C(3,2)$ e raio medindo 5 (a recíproca é verdadeira!). Denominaremos equações do tipo de equação reduzida da circunferência.

"gama"

Caso geral: circunferência γ com centro $C(x_0, y_0)$ e raio medindo R.

$$\boxed{\gamma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

↳ Eq. reduzida de γ

$(x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e $R \in \mathbb{R}^+_*)$

Exercícios (Hiper Apostila - pág. 49)

$\gamma: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
onde $C(x_0,y_0)$ é o centro e R é o raio de γ

1. Determine o **centro** e o **raio** das circunferências dadas pelas e equações abaixo.

a) $(x-4)^2+(y+4)^2=4$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

Sol: $-x_0=-4$ $\therefore x_0=4$; $-y_0=4$ $\therefore y=-4$; $R^2=4$ $\therefore R=2$

Assim, $C(4,-4)$ e $R=2$!

b) $(x+1)^2+y^2=2$

Sol: $-x_0=1$ $\therefore x_0=-1$; $-y_0=0$ $y_0=0$; $R^2=2$ $R=\sqrt{2}$

Assim, $C(-1,0)$ e $R=\sqrt{2}$!

e) $2x^2+2y^2-6x+2y+3=0$

Sol: Vamos fazer algumas manipulações algébricas para converter a equação no formato da eq. reduzida:

$$2x^2+2y^2-6x+2y+3=0$$
$$2x^2-6x+2y^2+2y=-3$$

Vamos revisar o conteúdo de completar quadrados!

Revisão - completar quadrados (Pág. 64 - HiperApostila)

Princípios por trás:

1) $x = y$ é equivalente a $x + d = y + d$

2) • $(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$
• $(x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$

Vamos completar quadrados!

Ex: $x^2 - 2x = 0$

Sol: $x^2 - 2xy + y^2$

$-2xy = -2x$

$y = \frac{-2x}{-2x} = 1$

$\rightsquigarrow x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 = (x-1)^2$

$x^2 - 2x = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1$

Vamos resolver a equação $x^2 - 6x + 8 = 0$ completando quadrados:

①

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 \underbrace{- 6x} = -8$$

$$(x-y)^2 = x^2 \underbrace{- 2xy} + y^2$$

$$\underbrace{-6x} = \underbrace{-2xy} \Rightarrow y = \frac{-6x}{-2x} = 3$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$$

$$(x-3)^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{1}$$

②

$$\underbrace{\sqrt{(x-3)^2}}_{\overset{*}{=}\,|x-3|} = \underbrace{\sqrt{1}}_{=1}$$

$$|x-3| = 1$$

$x - 3 = 1$ ou $x - 3 = -1$

$x = 1 + 3$ | $x = -1 + 3$

$\therefore x = 4$ | $\therefore x = 2$

*: $\sqrt{x^2} = |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Mais um exemplo de completar quadrados:

$$2x^2 - 6x + 15 = 0$$

Sol: vamos manipular a equação de modo que o coeficiente do x^2 seja 1:

$$2x^2 - 6x + 15 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 3x + \frac{15}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = -\frac{15}{2}$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$-3x = -2xy$$

$$y = \frac{-3x}{-2x} = \frac{3}{2}$$

$$\rightsquigarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

Sol: Vamos manipular a equação de modo que o coeficiente do x^2 seja 1:

$$2x^2-6x+15=0 \xrightarrow{\div 2} x^2-3x+\frac{15}{2}=0 \Rightarrow \underbrace{x^2-3x}=-\frac{15}{2}$$

$$(x-y)^2=x^2\underbrace{-2xy}+y^2$$

$$-3x=-2xy$$

$$y=\frac{-3x}{-2x}=\frac{3}{2} \rightsquigarrow x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=x^2-3x+\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$x^2-3x=-\frac{15}{2} \Leftrightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}=-\frac{15}{2}+\frac{9}{4} \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{21}{4}$$