Questão 8

Ainda não respondida

Vale 1,2 ponto(s).

Marcar questão

Editar questão

Uma hipérbole tem focos $F_1(-5,0)$ e $F_2(5,0)$ e passa pelos pontos $P(3,0)$ e $Q(4,y)$, com $y>0$. Qual é a área do triângulo com vértices em F_1, P e Q?

- $\frac{4\sqrt{7}}{3}$
- $\frac{3\sqrt{7}}{4}$
- $\frac{8\sqrt{7}}{3}$
- $\frac{8\sqrt{7}}{5}$
- $\frac{32\sqrt{7}}{3}$
- $\frac{16\sqrt{7}}{3}$
- $\frac{16\sqrt{7}}{5}$

Pelas coordenadas dos focos, conclui-se que o eixo real é paralelo ao eixo x. Logo, P(3,0) só pode ser um dos vértices reais da hipérbole. Além disso, é fácil ver que o centro C da hipérbole é a origem (ponto médio dos focos).

Baseando-se nessas informações, temos que:

- $c = 5$
- $a = 3$

Utilizando a relação $c^2 = a^2 + b^2$ podemos encontrar o valor de b: $25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16 \therefore b = 4$. Assim, a equação da hipérbole é: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Vamos encontrar as coordenadas do ponto Q:

$H: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\qquad Q(4, y) \in H \quad (y > 0)$

Assim, $\frac{4^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ (as coordenadas de Q satisfazem a equação de H).

$\Rightarrow \frac{16}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \xrightarrow{\cdot 9 \cdot 16} 16 \cdot 16 - 9y^2 = 9 \cdot 16 \Rightarrow 9y^2 = 16 \cdot 16 - 9 \cdot 16$

$\Rightarrow 9y^2 = (16-9) 16 \Rightarrow 9y^2 = 7 \cdot 16 \Rightarrow y^2 = \frac{7 \cdot 16}{9} \Rightarrow y = \underbrace{+}_{y>0}\sqrt{\frac{7 \cdot 16}{9}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt{9}} \therefore y = \frac{4\sqrt{7}}{3}$

Logo, $Q(4, \frac{4\sqrt{7}}{3})$. Agora vamos calcular a área de $\Delta F_1 P Q$:

$$A_{\Delta F_1PQ} = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{1}{2}\left|\frac{32\sqrt{7}}{3}\right| = \frac{\frac{32\sqrt{7}}{3}}{2} = \frac{32\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{32\sqrt{7}}{6} = \frac{16\sqrt{7}}{3}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & \frac{4\sqrt{7}}{3} & 1 \end{vmatrix} = 4\sqrt{7} + \frac{20\sqrt{7}}{3} = \frac{12\sqrt{7}}{3} + \frac{20\sqrt{7}}{3} = \frac{32\sqrt{7}}{3}$$