Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

06/12/2021

Matemática 5 (Química)

Aula 10.1

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Resolução de problemas

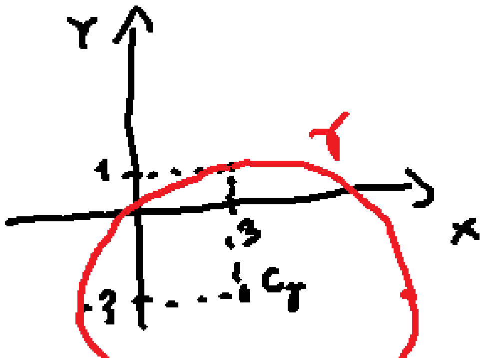
↳ "gama"

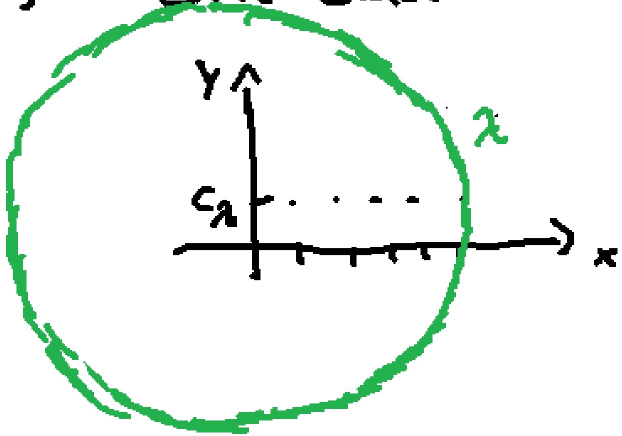
1. Considere as circunferências $\gamma: (x-3)^2+(y+3)^2=16$.

$\lambda: x^2+(y-1)^2=25$

↳ "Lambda"

Determine os pontos de interseção entre elas.





(Esboço das circunferências)

$\gamma: (x-3)^2 + (y+3)^2 = 16$

$\lambda: x^2 + (y-1)^2 = 25$

Solução:

Para encontrar os pontos de interseção de γ e λ, basta resolver o sistema: $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+3)^2 = 16 \\ x^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \rightsquigarrow - \begin{cases} (x-3)^2 + (y+3)^2 = 16 \\ x^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases}$

$$\underbrace{(x-3)^2 - x^2} + \underbrace{(y+3)^2 - (y-1)^2} = 16 - 25$$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$\Rightarrow ((x-3)+x)\cdot((x-3)-x) + ((y+3)+(y-1))\cdot((y+3)-(y-1)) = -9$

$\Rightarrow (2x-3)(-3) + (2y+2)\cdot(4) = -9 \Rightarrow -6x + 9 + 8y + 8 = -9$

$\Rightarrow -6x + 8y + 17 = -9 \Rightarrow -6x + 8y = -26 \Rightarrow 8y = 6x - 26 \Rightarrow \boxed{y = \frac{6}{8}x - \frac{26}{8}}$

Vimos que $y = \frac{6}{8}x - \frac{26}{8} = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$

$\gamma: (x-3)^2 + (y+3)^2 = 16$

$\lambda: x^2 + (y-1)^2 = 25$

Vamos substituir esse valor na equação de λ:

$$x^2 + \left(\left(\frac{3}{4}x - \frac{13}{4}\right) - 1\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{17}{4}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{3}{4}x\right)\cdot\left(\frac{17}{4}\right) + \left(\frac{17}{4}\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{51}{8}x + \left(\frac{17}{4}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{9}{16}\right)x^2 - \frac{51}{8}x + \left(\frac{17}{4}\right)^2 - 25 = 0 \Rightarrow \left(\frac{25}{16}\right)x^2 - \frac{51}{8}x + \left(\frac{17}{4}\right)^2 - 25 = 0$$

$$\left(\frac{25}{16}\right)x^2 - \frac{51}{8}x + \left(\frac{17}{4}\right)^2 - 25 = 0$$

$$x_1 = \frac{816}{625} - \frac{4\sqrt{110991}}{625}$$

$$x_2 = \frac{816}{625} + \frac{4\sqrt{110991}}{625}$$

Para finalizar, basta substuir esses valores em uma das equações (2, 3 ou $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$) para encontrar y_1 e y_2 com $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

Obs: Podemos utilizar esse método para todo cálculo de interseção de circunferências. Basta que as equações estejam no formato da eq. reduzida. Se não estiver, basta reescrevê-las de modo que estejam!

2. Determine k para que a equação $3x^2 + 3y^2 + 18x - 9y + k = 0$:

(a) represente uma circunferência.

(b) represente uma circunferência de raio $R = 3$

Solução:

(a) Vamos reescrever a eq. no formato da eq. reduzida:

$$3x^2 + 3y^2 + 18x - 9y + K = 0 \xrightarrow{\div 3} \underline{\underline{x^2 + 6x + 3^2}} + \underline{\underline{y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} + \frac{K}{3} = 0 + 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(x+3)^2}} + \underline{\underline{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}} + \frac{K}{3} = 9 + \frac{9}{4} \Rightarrow (x+3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9 + \frac{9}{4} - \frac{K}{3}$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{135 - 4K}{12} \rightarrow R^2.$$

Precisamos que $R > 0$, ou seja $R^2 > 0$.

$$R^2 > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{135-4K}{12} > 0 \Rightarrow 135-4K > 0 \Rightarrow -4K > -135$$

$$\xrightarrow{\div -4} \frac{-4K}{-4} < \frac{-135}{-4} \Rightarrow K < \frac{135}{4} = 33{,}75$$

Ou seja, sempre que $K < \frac{135}{4}$, teremos a equação representando uma circunferência!

(b) $R = 3 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow \frac{135-4K}{12} = 9 \Rightarrow 135-4K = 9 \cdot 12 \Rightarrow 4K = 135 - 9 \cdot 12$

$$\Rightarrow 4K = 27 \therefore K = \frac{27}{4}$$