Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

08/11/2021

Matemática 5 (Química)

Aula 4

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Recapitulando os conteúdos vistos

→ Distância entre dois pontos no plano: $dist_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$A(x_A, y_A)$ $\quad$ $B(x_B, y_B)$

→ Cálculo da área de um triângulo com vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$: $A_{ABC} = \frac{1}{2}\underbrace{|\Delta|}_{\text{módulo}}$, onde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_B & 1 \end{vmatrix}$

→ Determinando o ponto médio M do segmento AB, com $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad e \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

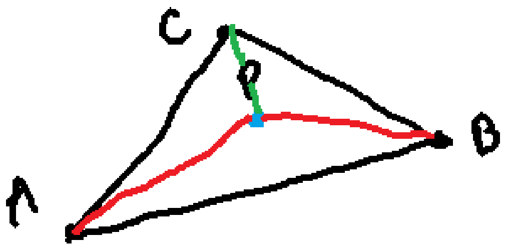
Obs: $M(x_M, y_M)$

→ Determinando o baricentro G do triângulo ΔABC, com $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad e \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

obs: $G(x_G, y_G)$

Dever de casa: Qual ponto notável do triângulo tem a propriedade de que quando ligado a dois vértices quaisquer, forma um triângulo com a mesma área (se comparar com um triângulo formado por esse ponto e dois outros vértices)? Por que isso acontece?

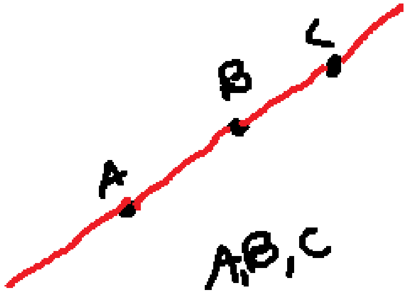


(ou seja: $A_{APC} = A_{APB} = A_{BPC}$)

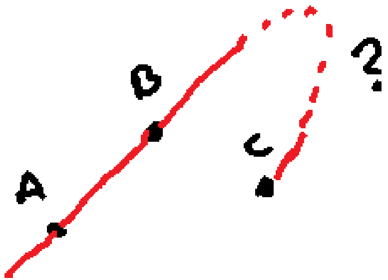
Alinhamento de pontos

O que quer dizer?

Significa que por esses pontos passam uma única reta



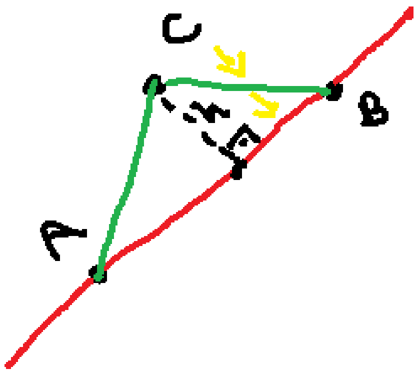
A,B,C
alinhados



A,B,C
não alinhados

Dizemos que pontos alinhados são pontos colineares.

Que condição garante que os A, B e C são colineares?



$$A_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2}$$

Note que quando C se aproxima de AB, h diminui e A_{ABC} também. Quando $C \in AB$, temos $h = 0$ e

$A_{ABC} = 0$

É fato que: A, B, C colineares $\Rightarrow A_{ABC} = 0$

↳ "se ..., então" ou "implica"

e

$A_{ABC} = 0 \Rightarrow A, B, C$ colineares

"se e somente se"

Assim, temos a equivalência ($\Leftrightarrow$) e podemos utilizá-la como a condição de alinhamento dos pontos:

Ou seja, $\underline{\underline{A, B, C \text{ colineares}}} \Leftrightarrow A_{ABC} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\Delta| = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\Delta = 0}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}} = 0$

Problema Proposto: Determine se os pontos $A(0,0)$, $B(3,1)$ e $C(6,2)$ são colineares.

Resolução:

$$A, B, C \text{ colineares} \iff \overbrace{\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{0+0+6-6+0+0=0}}^{\Delta} = 0$$

Assim, de fato $\Delta = 0$

Portanto A, B, C são colineares!

Equação geral da reta

O que é uma reta?

↳ um conjunto de pontos colineares

Uma propriedade importante de retas:

Por dois pontos passa uma única reta

intersecção

(ou seja: $A \in r \cap s$ e $B \in r \cap s \Rightarrow r = s$)

reta s

reta r

Como representar retas utilizando a Geometria Analítica?

Esse questionamento tem a ver com o seguinte problema:

Dados $A(0,0)$, $B(3,1)$ e $C(x,y)$, quando que A, B e C são colineares?

$$A, B, C \text{ colineares} \iff \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 0+0+3y-x+0+0=0$$

$$\iff 3y-x=0 \; *$$

*: Todo ponto C que satisfazer a equação * será um ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$

Assim, podemos representar $\overleftrightarrow{AB}$ como $\{(x,y) \,/\, 3y - x = 0\}$

"O conjunto de todos os pares ordenados (x,y) que satisfazem a equação $3y - x = 0$" $\longrightarrow$ o conjunto solução da equação

Podemos simplesmente representar $\overleftrightarrow{AB}$ pela equação $3y - x = 0$

"reta $\overleftrightarrow{AB}$"

Notação: $\overleftrightarrow{AB} : 3y - x = 0$

"de equação $3y - x = 0$"

Equações do tipo: $ax + by + c = 0$ são denominadas equações gerais da reta, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $(a = 0 \Rightarrow b \neq 0)$
e $(b = 0 \Rightarrow a \neq 0)$

É fato que:

1) Toda reta pode ser representada por uma equação do tipo
$ax + by + c = 0$ (Verifique! Solução na HiperApostila, pág. 18)

2) Toda equação desse tipo representa uma única reta

Obs: o fato 2) ser verdade não significa que uma reta pode ser representada por apenas 1 equação.

De fato,

ex: $3x = 6$ $\quad S = \{x=2\}$ ou seja $S = S'$ (Equações de uma variável)

$\cdot 3$

$9x = 18$ $\quad S' = \{x=2\}$

$\underbrace{3y}_{}-x=\underbrace{0}_{}$ (*)

$\cdot 2$

$6y-2x=0$

Note que $\overbrace{6y-2x=0}^{\Delta} \Rightarrow \underbrace{2\cdot\overbrace{(3y-x)}^{(*)}}_{\Delta}=0$. Assim $S_\Delta = S_{(*)}$ e se trata da mesma reta!

$\neq 0$ $\quad$ $= 0$

(Equações de duas var.)

Resumindo:

→ Equação geral da reta:

- tem formato: $ax+by+c=0$ (com $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a=0 \Rightarrow b \neq 0$
e $b=0 \Rightarrow a \neq 0$)

- Pode ser encontrada a partir de dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$ ⇝ calculamos o determinante para encontrar a equação da reta

Problemas Propostos:

1) Encontre uma equação de reta para os eixos ordenados (eixo x e o eixo y). Mais informações sobre o problema:

HiperApostila, p. 20

2) Dados A(3,3) e B(3,2) encontre uma equação de reta para a reta $\overleftrightarrow{AB}$.