Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

25/11/2021

Matemática 5 (Química)

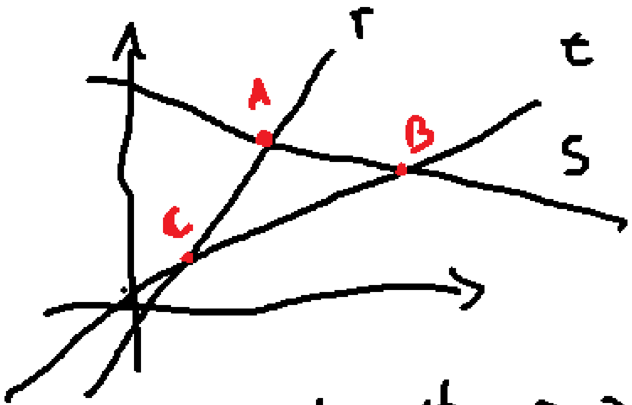
Aula 8.1

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

1. Calcule a área do triângulo formado pelas retas $r: x+5y-18=0$, $s: y=\frac{4}{3}x-1$ **e** $t: 5x+2y-44=0$

Solução



(Esboço da situação - meramente ilustrativo)

Vamos determinar os vértices do triângulo.

$$A: \begin{cases} x+5y-18=0 \\ y=\frac{4}{3}x-1 \end{cases} \rightsquigarrow x+5\cdot\left(\frac{4}{3}x-1\right)-18=0$$

$$x+\frac{20}{3}x-5-18=0 \quad \cdot 3$$

$$3x+20x-15-54=0$$

$$23x-69=0$$

$$\therefore x=3$$

Daí, $y=\frac{4}{3}\cdot 3-1=4-1$

$\therefore y=3$ Logo, $A(3,3)$

1. Calcule a área do triângulo formado pelas retas $r: x+5y-18=0$, $s: y=\frac{4}{3}x-1$ **e** $t: 5x+2y-44=0$

$$B: \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - 1 \\ 5x+2y-44=0 \rightsquigarrow 2y = -5x+44 \therefore y = -\frac{5}{2}x+22 \end{cases}$$

$$y = y \Rightarrow \frac{4}{3}x - 1 = -\frac{5}{2}x + 22 \Rightarrow \frac{4}{3}x + \frac{5}{2}x = 22+1 \xrightarrow{\cdot 6} \frac{6\cdot 4}{3}x + \frac{6\cdot 5}{2}x = 6\cdot 23$$

$$\Rightarrow 8x + 15x = 6\cdot 23 \Rightarrow 23x = 6\cdot 23 \Rightarrow x = \frac{6\cdot 23}{23} \therefore x = 6$$

Daí, temos que: $y = -\frac{5}{2}\cdot 6 + 22 = 22 - 15 = 7 \therefore y = 7$

Assim, $B(6,7)$

1. Calcule a área do triângulo formado pelas retas $r: x+5y-18=0$, $s: y=\frac{4}{3}x-1$ **e** $t: 5x+2y-44=0$

$$C: \begin{cases} x+5y-18=0 \\ 5x+2y-44=0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-5)} -5x-25y+90=0 \rightsquigarrow \begin{cases} -5x-25y+90=0 \\ 5x+2y-44=0 \end{cases}$$

$$0 \quad -23y+46=0$$

$$\Rightarrow 23y=46 \quad \therefore \underline{y=2}$$

Daí,

$$x+5\cdot\underline{2}-18=0 \Rightarrow x+10-18=0 \quad \therefore x=8$$

Logo, $C(8,2)$. Assim, temos $A(3,3)$, $B(6,7)$ e $C(8,2)$

$$A_{ABC} = \frac{|\Delta|}{2} = \frac{|-23|}{2} = \frac{23}{2} \text{ ou } 11{,}5$$

$*$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 57-80 = -23$$

2. Dada a reta $r : 11x - 2y - 1 = 0$ e o ponto $P(3, 16)$, determine uma equação da reta s que passa por P e é perpendicular a r.

*: poderíamos encontrar uma solução atribuindo um valor para uma das variáveis

Solução

Maneira 1: Suponha que s tem equação $ax+by+c=0$. Vamos determinar a, b e c de modo que $r \perp s$. Vimos que:

$$a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s = 0 \iff r \perp s \quad \left(\text{com } \begin{array}{l} r: a_r x + b_r y + c_r = 0 \\ s: a_s x + b_s y + c_s = 0 \end{array} \right).$$

Daí,

Como queremos $r \perp s$, devemos ter: $a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s = 0$. Daí,

$11 \cdot a + (-2) \cdot b = 0 \iff 11a - 2b = 0$. Note que $a = -(-2) = 2$ e $b = 11$ é uma solução*. Assim, uma equação para s é: $2x + 11y + c = 0$

Encontramos o formato da equação geral de s:

$$2x + 11y + c = 0$$

Queremos que $P(3,16) \in s$. Logo, P satisfaz a equação de s:

$$2 \cdot 3 + 11 \cdot 16 + c = 0 \Rightarrow \underbrace{6 + 176}_{182} + c = 0 \therefore c = -182$$

Portanto $s: +2x + 11y - 182 = 0$

$r: 11x - 2y - 1 = 0$

obs: Note que podemos encontrar uma reta perpendicular trocando os coeficientes e mudando o sinal de um deles.

2. Dada a reta $r : 11x - 2y - 1 = 0$ e o ponto $P(3, 16)$, determine uma equação da reta s que passa por P e é perpendicular a r.

Solução:

2ª maneira:

Vamos reescrever a equação de r p/ o formato da equação reduzida: $11x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = 11x - 1 \therefore y = \frac{11}{2}x - \frac{1}{2}$

m_r

A reta s tem equação fundamental:

$$y - \underset{y_0}{16} = m_s(x - \underset{x_0}{3})$$

Pela condição B) de perpendicularismo: $m_r \cdot m_s = -1 \Leftrightarrow r \perp s$

Assim, como queremos que $r \perp s$, então $\underset{\frac{11}{2}}{\underset{\downarrow}{m_r}} \cdot m_s = -1$

Daí,

$$\frac{11}{2} \cdot m_s = -1 \Rightarrow 11 m_s = -2 \Rightarrow \underline{m_s = \frac{-2}{11}}$$

Portanto:

$$s: \; y - 16 = \frac{-2}{11}(x - 3)$$

3. **Dada a reta $r: 4x - 3y - 3 = 0$, determine uma equação da reta t que passa pela origem e é paralela a r.**

Solução

1ª maneira: Suponha que $t: ax + by + c = 0$. Para que $r // t$, pela condição A') de paralelismo, temos que: $\frac{a_r}{a_t} = \frac{b_r}{b_t} \rightarrow \frac{4}{a} = \frac{-3}{b}$

Note que se * $a = 4$ e $b = -3$, temos que $\frac{a_r}{a_t} = \frac{b_r}{b_t}$ (pois $\frac{4}{4} = \frac{-3}{-3}$).

Daí, considere $a = 4$ e $b = -3$.

Logo, $t: 4x - 3y + c = 0$

*: poderíamos encontrar uma solução atribuindo um valor para a (ou b)

3. **Dada a reta $r: 4x - 3y - 3 = 0$, determine uma equação da reta t que passa pela origem e é paralela a r.**

Vimos que $t: 4x - 3y + c = 0$. Se t passa pela origem, então $O(0,0) \in t$. Logo, $O(0,0)$ satisfaz a equação de t:

$$4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow 0 + c = 0 \therefore c = 0$$

Portanto $t: 4x - 3y = 0$

$r: 4x - 3y - 3 = 0$

Obs: Podemos obter uma reta paralela se repetimos os valores de a e b ($r: ax + by + c = 0$)

3. **Dada a reta $r : 4x - 3y - 3 = 0$, determine uma equação da reta t que passa pela origem e é paralela a r.**

Solução:

2a maneira: Vamos reescrever a eq. de r no formato da eq. reduzida:

$$4x - 3y - 3 = 0 \iff 3y = 4x - 3 \quad \therefore r: y = \underbrace{\frac{4}{3}}_{m_r}x - 1$$

considerando $t: y - y_0 = m_t(x - x_0)$, com $P_0(x_0, y_0) \in t$, temos que $r \parallel t \iff m_r = m_t \iff m_t = \frac{4}{3}$. Daí, como $O(0,0) \in t$, temos:

$$t: y = \frac{4}{3}x$$

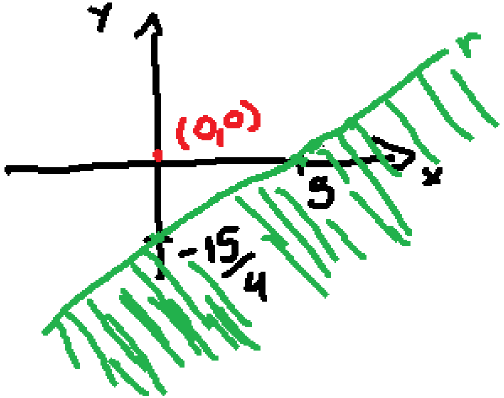
4. **Calcule a área da região determinada pelo sistema de inequações:**

$$R: \begin{cases} 3x - 4y - 15 \geq 0 & \text{(i)} \\ x \leq 10 & \text{(ii)} \\ y \geq 0 & \text{(iii)} \end{cases} \rightsquigarrow$$

Solução:

Vamos esboçar o gráfico de cada inequação:

(i)

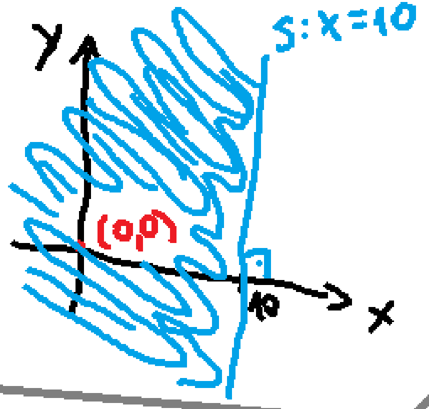


$r: 3x - 4y - 15 = 0$

Note que $(0,0) \notin r$. Vamos verificar se ele satisfaz (i): $\underbrace{3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 15}_{-15 < 0} \overset{?}{\geq} 0$

Logo, (0,0) não satisfaz (i)

(ii) $x \leq 10$



Vamos verificar se (0,0) satisfaz (ii):

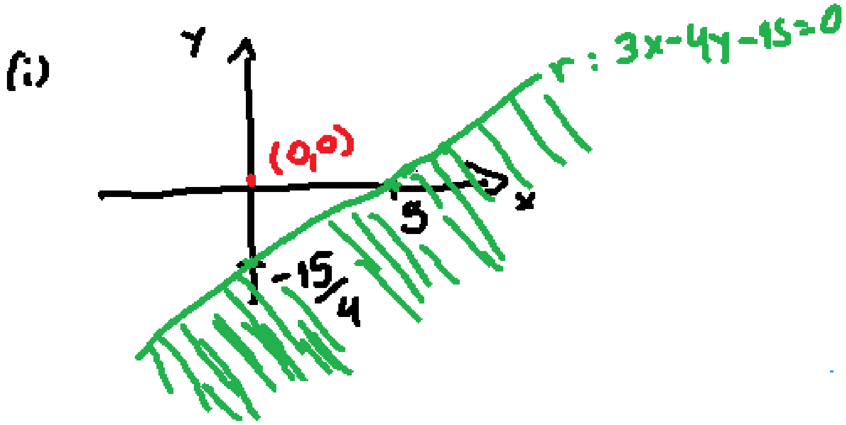
$0 \overset{?}{\leq} 10$ Sim! Logo, (0,0) satisfaz (ii)

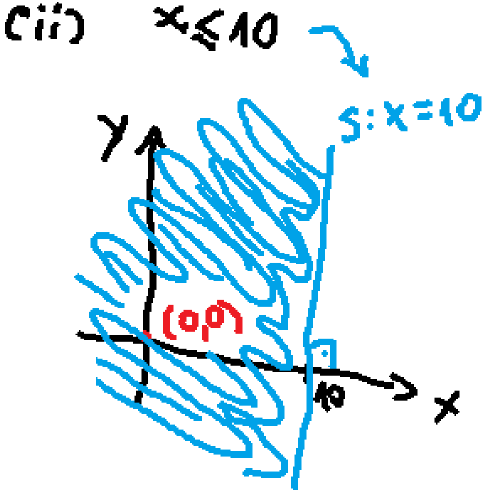
(iii) $y \geq 0$

Vamos verificar se (1,1) satisfaz (iii):

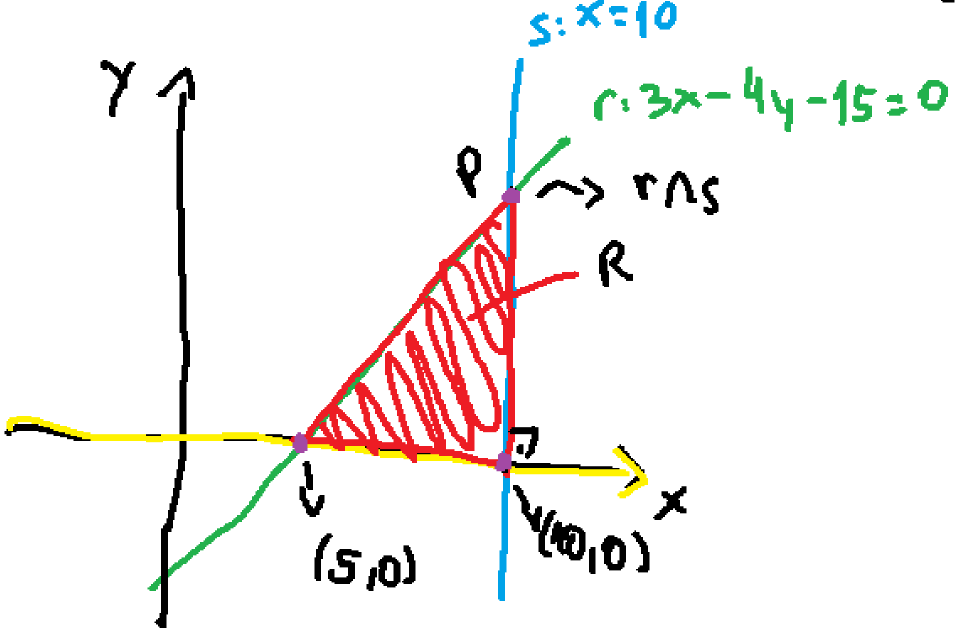
$1 \overset{?}{\geq} 0$ Sim! Logo, (1,1) satisfaz (iii)

Regiões obtidas





Não é difícil ver que a região R: $\begin{cases} 3x-4y-15 \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$ é representada por:



Vamos determinar

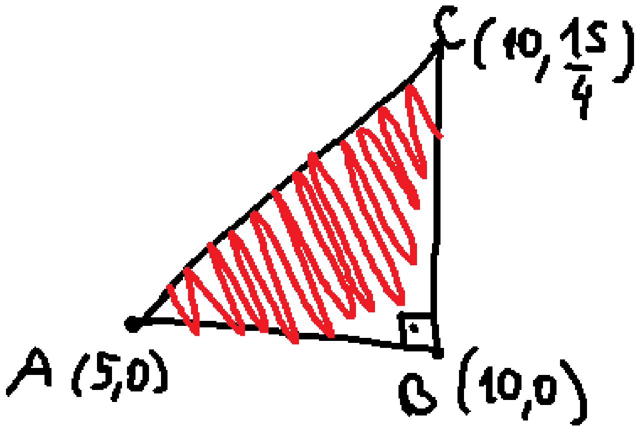
$P: \begin{cases} 3x-4y-15=0 \\ x=10 \end{cases} \rightsquigarrow 3\cdot 10-4y-15=0$

$\Rightarrow 30-4y-15=0$

$4y=15$

$y=\frac{15}{4}$

Assim, $P\left(10,\frac{15}{4}\right)$



Podemos determinar a área de ΔABC por $\frac{|\Delta|}{2}$:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \\ 10 & \frac{15}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{150}{4} - \frac{75}{4} = \frac{75}{4}$$

$$A_{ABC} = \frac{|\Delta|}{2}$$

$$= \frac{\left|\frac{75}{4}\right|}{2} = \frac{\frac{75}{4}}{2} = \frac{75}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{75}{8}$$

Assim, a área de R é $\frac{75}{8}$