2. Determine k para que a equação $3x^2 + 3y^2 + 18x - 9y + k = 0$:

(a) represente uma circunferência.

(b) represente uma circunferência de raio $R = 3$

Solução:

(a) Vamos reescrever a eq. no formato da eq. reduzida:

$$3x^2 + 3y^2 + 18x - 9y + k = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 + 6x + 3^2 + y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{k}{3} = 0 + 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{k}{3} = 9 + \frac{9}{4} \Rightarrow (x+3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9 + \frac{9}{4} - \frac{k}{3}$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{135 - 4k}{12} \rightarrow R^2 .$$

Precisamos que $R > 0$, ou seja $R^2 > 0$.

$$R^2 > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{135-4K}{12} > 0 \Rightarrow 135-4K > 0 \Rightarrow -4K > -135$$

$$\xrightarrow{\div -4} \frac{-4K}{-4} < \frac{-135}{-4} \Rightarrow K < \frac{135}{4} = 33,75$$

Ou seja, sempre que $K < \frac{135}{4}$, teremos a equação representando uma circunferência!

(b) $R = 3 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow \frac{135-4K}{12} = 9 \Rightarrow 135-4K = 9 \cdot 12 \Rightarrow 4K = 135 - 9 \cdot 12$

$$\Rightarrow 4K = 27 \therefore K = \frac{27}{4}$$