Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

16/11/2021

Matemática 5 (Saneamento)

Aula 6

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Recapitulando o que vimos anteriormente

Toda reta pode ser representada por pelo menos uma das equações abaixo.

- Equação geral da reta: $ax + by + c = 0$
- Eq. fundamental da reta: $y - y_A = m(x - x_A)$ (∇)
- Eq. reduzida da reta: $y = mx + n$ *
- Eq. segmentária da reta: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

$(a, b, c \in \mathbb{R}$ e se $a = 0$, $b \neq 0$; e se $b = 0$, $a \neq 0)$

m: coeficiente angular da reta
=
tg θ, onde θ é o ângulo que a reta faz com Ox no sentido anti-horário

↓
eixo x

(∇): Ponto $A(x_A, y_A)$ da reta (que conhecemos)

*: coeficiente linear da reta

Recapitulando o que vimos anteriormente

Toda reta pode ser representada por pelo menos uma das equações abaixo.

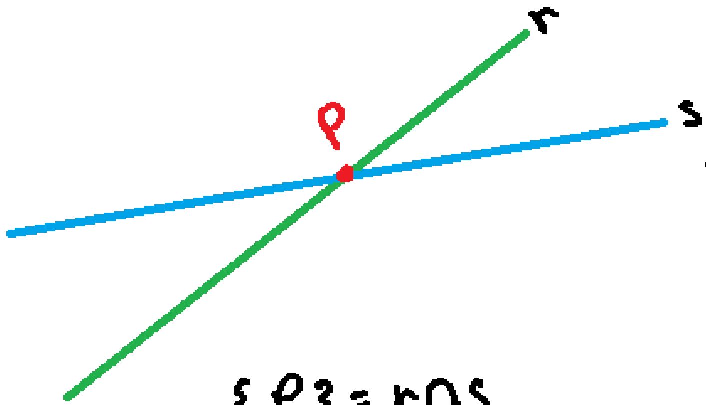
- Equação geral da reta: $ax + by + c = 0$
- Eq. fundamental da reta: $y - y_A = m(x - x_A)$ (∇)
- Eq. reduzida da reta: $y = mx + n^{*}$
- Eq. segmentária da reta: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ (O)

(O): Pontos $P(p,0)$ e $Q(0,q)$ da reta.

Obs: São pontos dos eixos ordenados

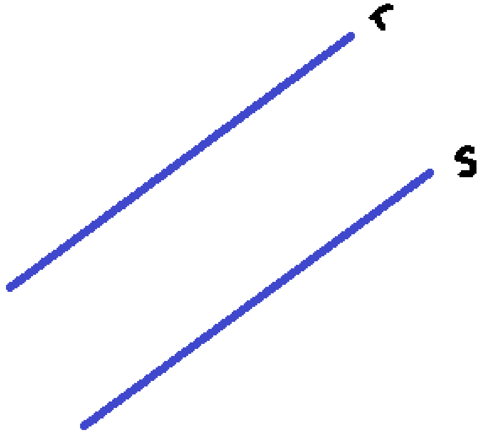
Posições relativas (no plano) entre retas

1) Retas concorrentes



$\{P\} = r \cap s$

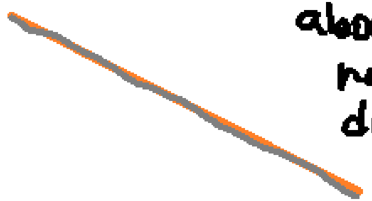
2) Retas paralelas



$r \parallel s$ $(r \mathbin{/\!/} s)$

3) Retas coincidentes

↳ Não será abordado na disciplina



Interseção de retas

$\downarrow$

Vamos assumir que as retas são concorrentes

Exemplo: $r: y = 3x+1$ $\quad s: 5x+10y-30=0$. Como determinar o ponto de interseção entre r e s?

Solução:

$$s: 5x+10y-30=0 \Rightarrow 10y = -5x+30 \Rightarrow y = \frac{-5}{10}x + \frac{30}{10} \Rightarrow y = \frac{-x}{2}+3$$

Note que $y = y$, daí, $3x+1 = \frac{-x}{2}+3 \xrightarrow{\cdot 2} 6x+2 = -x+6 \Rightarrow 7x = 4 \therefore x = \frac{4}{7}$ //

Para encontrar y, basta substituir o valor de x encontrado em uma das eqs.: $y = 3\left(\frac{4}{7}\right)+1 = \frac{19}{7}$ //

Assim, $P\left(\frac{4}{7}, \frac{19}{7}\right)$ é o ponto de interseção entre r e s!

Pro caso geral, com $r: ax+by+c=0$ e $s: Ax+By+C=0$, podemos encontrar o ponto $P(x,y)$ de interseção entre as retas ao resolver o sistema de equações:

$$P: \begin{cases} ax+by+c=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$

Note que foi o que fizemos de maneira implícita no exemplo!

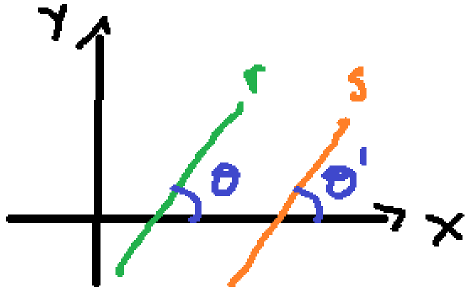
Retas Paralelas

Para as retas: $r: y = mx + n$ e $s: y = m'x + n'$, teremos que:
(na eq. reduzida)

$$\underbrace{r \parallel s}_{\text{"r paralelo a s"}} \overset{\text{"se, e somente se"}}{\Longleftrightarrow} m = m'$$

(condição de paralelismo)

Lembrando que $m = tg\,\theta$, onde θ é o ângulo que r faz com o eixo x



Para $r \parallel s$, precisamos que $\theta = \theta'$

Retas Paralelas

Para as retas: $r: ax+by+c=0$ e $s: Ax+By+C=0$, teremos que:
(na eq. geral)

"se, e somente se"

$$\underbrace{r \parallel s}_{\text{"r paralelo a s"}} \iff \frac{a}{A} = \frac{b}{B}$$

(condição de paralelismo)

Questões propostas

1) Determine se as retas $r: 3x+6y-18=0$ e $s: \sqrt{5}x+\sqrt{20}y-16=0$ são paralelas.

2) Determine K para que $r: y=5x-2$ e $s: Kx+3y-5=0$ sejam paralelas.

Questões Propostas

1) Determine se as retas $r: 3x + 6y - 18 = 0$ e $s: \sqrt{5}x + \sqrt{20}y - 16 = 0$ são paralelas.

Solução:

Vamos verificar se $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{20}}$ (condição de paralelismo p/ retas na eq. geral)

Verificando:

$$\frac{3^{\times 2}}{\sqrt{5}_{\times 2}} = \frac{6}{2\sqrt{5}}{}^{*} = \frac{6}{\sqrt{20}} \checkmark$$

Então $r \parallel s$!

$*$:

② $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5}$
$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5}$
$= 2 \cdot \sqrt{5}$

①

20	2
10	2
5	5
	$2^2 \cdot 5$

2) Determine K para que $r: y = \underbrace{5}_{m}x - 2$ e $s: Kx + 3y - 5 = 0$ sejam paralelas.

Solução:

Note que $Kx + 3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = -Kx + 5 \Rightarrow y = \overbrace{\frac{-K}{3}}^{m'}x + \frac{5}{3}$

Pela condição de paralelismo para eq. reduzidas, temos que

$$m = m' \Leftrightarrow 5 = \frac{-K}{3} \Leftrightarrow -K = 15 \therefore \underline{K = -15}$$

Assim, se $K = -15$, $r \parallel s$!

Retas perpendiculares (Caso particular de retas concorrentes)

- Condições de perpendicularismo:

A) $r: y = mx + n$ e $s: y = m'x + n'$

$r \perp s \iff m' = -\dfrac{1}{m}$ ⇝ consequência de ângulos entre retas (Assunto que pode ser visto na Hiper-Apostila)

"r perpendicular a s"

A') $r: ax + by + c = 0$ e $s: Ax + By + C = 0$

$r \perp s \iff a \cdot A + b \cdot B = 0$ ⇝ Pode ser deduzida da condição A)

Questões Propostas

1) Verifique se as retas $r: 6x + 2y - 5 = 0$ e $s: y = \frac{-x}{3} + 10$ são perpendiculares.

2) Determine $\underline{L}$ para que as retas $r: y = 5x - 1$ e $s: 7x + \underline{L}y - 9 = 0$ sejam perpendiculares.