Questão 9

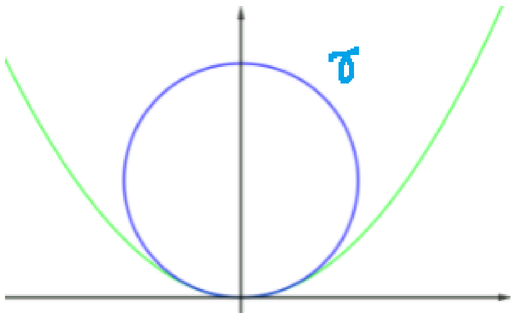
Ainda não respondida

Vale 1,2 ponto(s).

Marcar questão

Editar questão

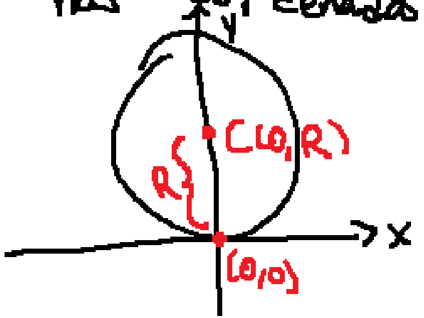
A figura mostra, no plano cartesiano, o gráfico da parábola de equação $22y = x^2$, e uma circunferência com centro no eixo Oy e tangente ao eixo Ox no ponto $O(0,0)$.



Calcule o raio da maior circunferência, nas condições acima, que tem um único ponto de interseção com a parábola.

Resposta:

Como o centro da circunferência γ está em um dos eixos ordenados e é tangenciada pelo outro eixo ordenado, então a medida do raio R estará presente nas coordenadas do centro:



Logo, concluímos que a equação de γ terá formato:

$$\gamma: x^2 + (y-R)^2 = R^2$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Vamos utilizar a informação de que a interseção de γ com a parábola é o ponto $O(0,0)$:

Podemos encontrar a interseção entre as curvas ao resolver o sistema:

$$\begin{cases} 22y = x^2 \\ x^2 + (y-R)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow 22y + (y-R)^2 = R^2 \Rightarrow 22y + (y-R)^2 - R^2 = 0$$

$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

$$\Rightarrow 22y + [(y-R)+R]\cdot[(y-R)-R] = 0 \Rightarrow 22y + y\cdot(y-2R) = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 2Ry + 22y = 0 \Leftrightarrow \underline{y^2 + (22-2R)y = 0}.$$ Como foi dito que só havia um ponto em comum entre as curvas, então a equação em roxo também deve ter uma única solução. Como ela se trata de uma equação quadrática então devemos ter $\Delta = 0$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$

$(ax^2 + bx + c = 0)$

Logo, como $\Delta = 0$, temos: $\underbrace{(22-2R)^2 - 4\cdot 1\cdot 0}_{\Delta} = 0 \Rightarrow (22-2R)^2 = 0$

$\xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{(22-2R)^2} = \sqrt{0} \Rightarrow |22-2R| = 0 \Leftrightarrow 22-2R = 0$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2R = 22$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{R = 11}}$