1. Se $A(-2,1)$, $B(8,3)$ e $C(X_C, Y_C)$ são os vértices do triângulo ABC e $G(3,4)$ é o baricentro desse triângulo, determine as coordenadas do ponto C.

Podemos calcular as coordenadas X_G e X_G do baricentro G do triângulo ΔABC como:

$$X_G = \frac{X_A + X_B + X_C}{3} \qquad Y_G = \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}$$

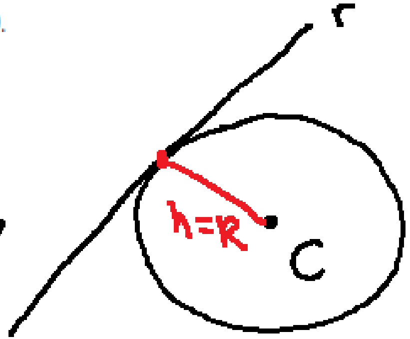
$$3 = \frac{-2+8+X_C}{3} \Rightarrow 3 \cdot 3 = 6 + X_C \ \therefore \ X_C = 3$$

e

$$4 = \frac{1+3+Y_C}{3} \Rightarrow 4 \cdot 3 = 4 + Y_C \ \therefore \ Y_C = 8$$

Portanto, $C(3,8)$

2. Determine o raio da circunferência de centro $C(2,1)$ tangente à reta $r:\ 8x - 6y + 3 = 0$.



Como r é tangente à circunferência, então:

$$\text{dist}_{C,r} = R$$

$$\Rightarrow R = \frac{|8\cdot 2 - 6\cdot 1 + 3|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{|16 - 6 + 3|}{\sqrt{64+36}} = \frac{|13|}{\sqrt{100}} = \frac{13}{10} = 1{,}3$$

3. Determine uma equação da(s) reta(s) que passa(m) por $P(-28,-21)$ e é (são) tangente(s) à circunferência $x^2+y^2+6x-8y=0$?

$\lambda: (x+3)^2+(y-4)^2=25$

$C(-3,4)$

$P \in \lambda$?

$(-28+3)^2+(-21-4)^2 \overset{?}{=} 25 \iff (-25)^2+(-25)^2 \neq 25$

Logo $P \notin \lambda$!

Seja M o ponto médio de P e C: $M\left(-\frac{31}{2}, -\frac{17}{2}\right)$

$(\overline{MC})^2 = \left(-3+\frac{31}{2}\right)^2+\left(4+\frac{17}{2}\right)^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2+\left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{625}{4}+\frac{625}{4}$

$= \frac{625}{2}$

Logo, os pontos de tangência de λ e $\gamma: \left(x+\frac{31}{2}\right)^2+\left(y+\frac{17}{2}\right)^2=\frac{625}{2}$ são:

$\begin{cases} x^2+y^2+6x-8y=0 \\ \left(x+\frac{31}{2}\right)^2+\left(y+\frac{17}{2}\right)^2=\frac{625}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+6x-8y=0 \\ x^2+y^2+31x+17y+\frac{961}{4}+\frac{289}{4}=\frac{1250}{4} \end{cases}$

$\iff 25x+25y+\frac{1250}{4}=\frac{1250}{4} \iff 25x+25y=0 \iff \boxed{y=-x} \Rightarrow x^2+x^2+6x+8x=0$

$\iff 2x^2+14x=0$

$x(x+7)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=-7$

Logo, os pontos de tangência são: $A(0,0)$ e $B(-7,7)$.

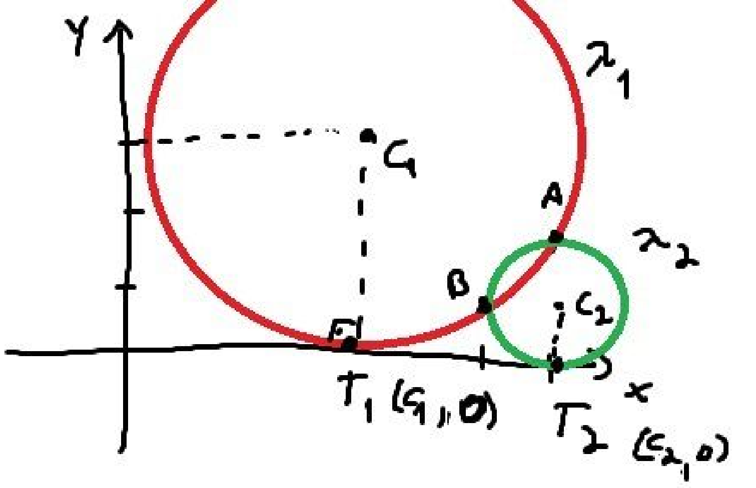
Assim, as retas tangentes $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$ são:

$$\overleftrightarrow{AP}: \ y = \frac{-21}{-28}x \iff y = \frac{3}{4}x \iff \underline{\underline{3x - 4y = 0}}$$

$$\overleftrightarrow{BP}: \ y - 7 = \frac{-21-7}{-28-(-7)}(x+7) \iff y - 7 = \frac{-28}{-21}(x+7) \iff y - 7 = \frac{4}{3}(x+7)$$

$$\iff 3y - 21 = 4x + 28 \iff \underline{\underline{4x - 3y + 49 = 0}}.$$

4. Determine uma equação da(s) circunferência(s) λ que passa(m) pelos pontos $A(9,2)$ e $B(8,1)$ e é (são) tangente(s) ao eixo Ox.



$\overleftrightarrow{C_1C_2}$ = mediatriz de A e B :

$$\overleftrightarrow{AB}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 9 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y - 7 = 0$$

Temos $\begin{cases} (9-x_0)^2 + (2-y_0)^2 = R^2 \\ (8-x_0)^2 + (1-y_0)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$(9-x_0)^2 + (2-y_0)^2 = (8-x_0)^2 + (1-y_0)^2$$

$$\iff x_0^2 - 18x_0 + 81 + y_0^2 - 4y_0 + 4 = x_0^2 - 16x_0 + 64 + y_0^2 - 2y_0 + 1$$

$$\iff 18x_0 - 16x_0 + 4y_0 - 2y_0 = 81 + 4 - 64 - 1$$

$\iff 2x_0 + 2y_0 = 20 \iff \boxed{x_0 + y_0 = 10}$. Logo, $y_0 = 10 - x_0 \Rightarrow C_1(x_1, 10 - x_1)$, $C_2(x_2, 10 - x_2)$

Também: $\overleftrightarrow{C_1C_2}: x + y - 10 = 0$.

Vimos que $C_1, C_2 \in x+y=10$. Note também que $y_0 = R$ pois as circunferências tem um raio indo do centro até o eixo x e que é perpendicular a ele.

Logo, $\begin{matrix} x_0 + y_0 = 10 \\ y_0 = R \end{matrix} \Rightarrow \boxed{x_0 = 10 - R}$. Substituindo numa das equações

da página anterior, temos: $(9-x_0)^2 + (2-y_0)^2 = R^2 \Rightarrow (9-10+R)^2 + (2-R)^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (-1-R)^2 + (2-R)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 - 2R + 1 + R^2 - 4R + 4 = R^2 \Leftrightarrow R^2 - 6R + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (R-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow R = 1$ ou $R = 5$

$\swarrow \qquad \downarrow$

$x_0 = 9 \qquad x_0 = 5$

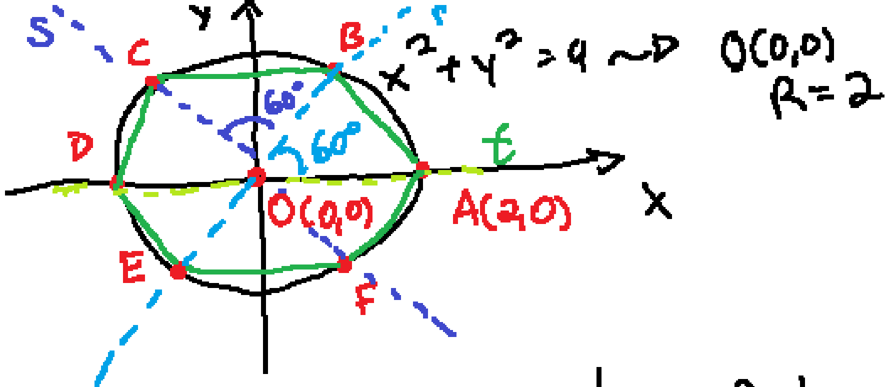
$y_0 = 1 \qquad y_0 = 5$

Logo, $\lambda_1 : (x-9)^2 + (y-1)^2 = 1$ e $\lambda_2 : (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

5. Determine os vértices de um hexágono regular inscrito na circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = 4$$

sabendo que um dos vértices é o ponto $A(2, 0)$.



Note que podemos encontrar os vértices do hexágono a partir das interseções da circunferência com as retas coloridas r, s e t. Podemos encontrar a equação dessas retas pois conhecemos o ângulo que elas fazem com o eixo Ox e sabendo que elas passam pela origem. Logo,

$$r: \ (y - 0) = \operatorname{tg} 60^\circ (x - 0) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}\,x$$

$$s: \ (y - 0) = \operatorname{tg} 120^\circ (x - 0) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}\,x$$

$$t: \ y - 0 = \operatorname{tg} 0^\circ (x - 0) \Leftrightarrow y = 0$$

Daí,

B e E: $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 4$

$x^2 + 3x^2 = 4 \Rightarrow 4x^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 = 1 \therefore x_1 = 1$

$x_2 = -1$

$\Rightarrow y_1 = \sqrt{3} \cdot 1 \therefore y_1 = \sqrt{3}$

$y_2 = \sqrt{3} \cdot (-1) \therefore y_2 = -\sqrt{3}$

Logo, $B(1, \sqrt{3})$ e $E(-1, -\sqrt{3})$

A e D: $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x_1 = 2$

$x_2 = -2$

Logo, $A(2,0)$

e

$D(-2,0)$

C e F: $\begin{cases} y = -\sqrt{3}x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + (-\sqrt{3}x)^2 = 4$

$x^2 + 3x^2 = 4 \Rightarrow 4x^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

$x_2 = -1$

$\Rightarrow y_1 = -\sqrt{3} \cdot 1 \therefore y_1 = -\sqrt{3}$

$y_2 = -\sqrt{3} \cdot (-1) \therefore y_2 = \sqrt{3}$

Logo, $C(1, -\sqrt{3})$ e $F(-1, \sqrt{3})$

6. Identifique e escreva a cônica dada na forma padrão, encontre as coordenadas do(s) foco(s) e faça um esboço.

$$x^2 - 10x + 2y + 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + 2y + 23 = 25 \Leftrightarrow (x-5)^2 + 2y + 23 = 25$$

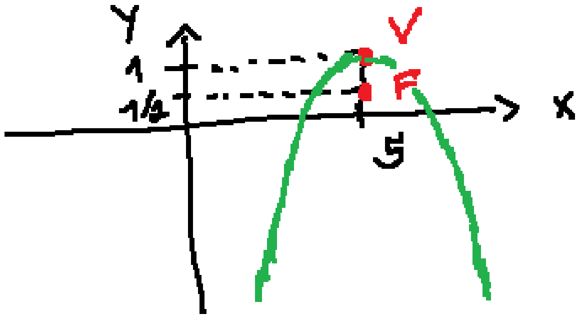
$$\Leftrightarrow (x-5)^2 = -2y + 2 \Leftrightarrow (x-5)^2 = \underbrace{-2}_{4c}(y-1)$$

→ Parábola de Vértice $V(5,1)$

Côncava para baixo!

• $4c = -2 \therefore c = -\frac{1}{2}$. Logo, o foco será: $F\left(5, 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \underline{\underline{F\left(5, \frac{1}{2}\right)}}$

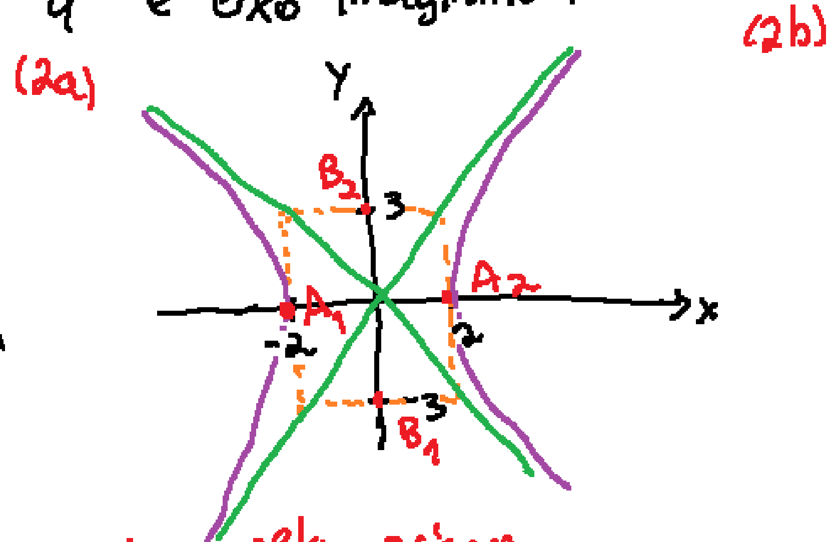


(Esboço)

7. Determine as equações de todas as retas do plano que passam pela origem do sistema de coordenadas e que não interceptam a curva do plano dada pela equação

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$\rightsquigarrow$ Hipérbole centrada na origem com eixo real medindo 4 e eixo imaginário medindo 6



• Note que as assíntotas e a reta suporte do eixo imaginário (o eixo y) são retas que passam pela origem e que não interceptam a hipérbole. Para encontrar as demais retas vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = mx \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$ $\rightsquigarrow$ formato de equação de reta que passa pela origem

$$\Rightarrow \begin{cases} y = mx \\ 9x^2 - 4y^2 = 36 \end{cases}$$ (multiplicou por 36) $\Rightarrow 9x^2 - 4(mx)^2 = 36$

$$9x^2 - 4(mx)^2 = 36 \iff 9x^2 - 4m^2x^2 = 36 \iff (9-4m^2)x^2 - 36 = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$ (equação quadrática)

Queremos que essa equação não tenha solução para encontrar as retas que não interceptam a curva. Logo, $\Delta < 0 \Rightarrow 0^2 - 4\cdot(9-4m^2)\cdot(-36) < 0$

$\hookrightarrow b^2 - 4ac$

$$\iff 144(9-4m^2) < 0 \iff 9 - 4m^2 < 0 \iff -4m^2 < -9 \quad \cdot(-1)$$

$$\iff 4m^2 > 9 \iff m^2 > \frac{9}{4} \overset{\sqrt{}}{\iff} \sqrt{m^2} > \sqrt{\frac{9}{4}} \iff |m| > \frac{3}{2}$$

$$\iff \underline{\underline{m > \frac{3}{2}}} \text{ ou } \underline{\underline{m < -\frac{3}{2}}} \text{ (inequação modular).}$$

Assim a solução é:

- as retas assíntotas: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} \Leftrightarrow y^2 = \frac{9}{4}x^2$ $\nearrow$ $\underline{y = \frac{3}{2}x}$ $\searrow$ $\underline{y = -\frac{3}{2}x}$
- eixo y: $\underline{x = 0}$
- retas $\underline{y = mx}$, com $\underline{m > \frac{3}{2}}$ ou $\underline{m < -\frac{3}{2}}$