Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

22/11/2021

Matemática 5 (Química)

Aula 7

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Pro caso geral:

Considere as retas $r: ax+by+c=0$ e $s: Ax+By+C=0$. Podemos determinar o ponto $P(x,y)$ de interseção entre r e s resolvendo o sistema:

$$P: \begin{cases} ax+by+c=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$

$*$: r e s concorrentes

$\square$: r e s paralelas

$\times$: r e s coincidentes

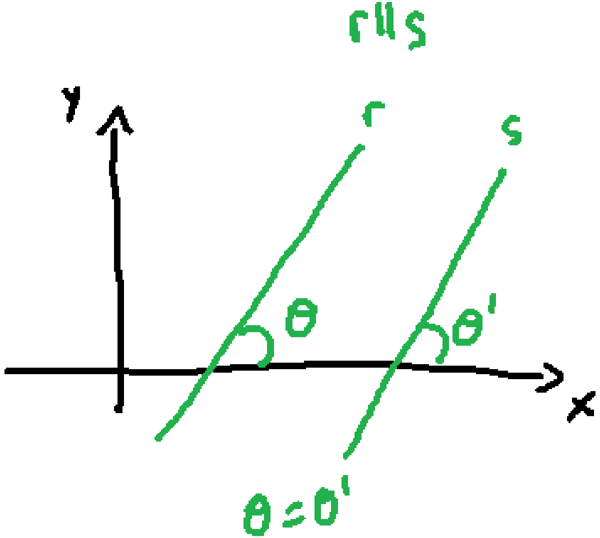
Obs$_1$: r e s não precisam estar na eq. geral

Obs$_2$: O sistema pode ser: SPD, SPI, SI

$\rightarrow$ sistema possível e indeterminado $\times$

$\rightarrow$ sistema impossível $\square$

$\rightarrow$ sistema possível e determinado $*$



Retas paralelas

Condições de paralelismo:

A) se $r: y = mx + n$ e $s: y = m'x + n'$, então

$$r \parallel s \iff \underbrace{m}_{tg\,\theta} = \overbrace{m'}^{tg\,\theta'}$$

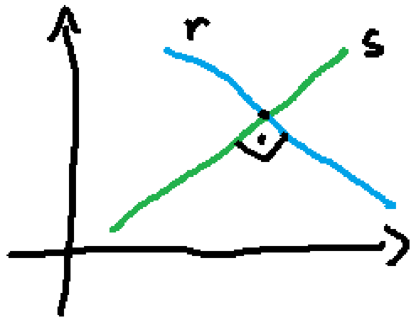
"se, e só se"

A') se $r: ax + by + c = 0$ e $s: Ax + By + C = 0$, então

$$r \parallel s \iff \frac{a}{A} = \frac{b}{B}$$

Caso SI visto anteriormente

retas perpendiculares (caso particular de retas concorrentes)



condições de perpendicularismo:

B) se $r: y = mx + n$ e $s: y = m'x + n'$, então

$$r \perp s \iff m \cdot m' = -1$$

"r perpendicular a s"

Na hiperApostila é possível ver a dedução!

B') se $r: ax + by + c = 0$ e $s: Ax + By + C = 0$,
então

$$r \perp s \iff a \cdot A + b \cdot B = 0$$

Pode ser deduzida da condição B)

Questões propostas

1) Determine se as retas $r: 3x + 6y - 18 = 0$ e $s: \sqrt{5}x + \sqrt{20}y - 16 = 0$ são paralelas.

2) Determine K para que $r: y = 5x - 2$ e $s: Kx + 3y - 9 = 0$ sejam paralelas.

3) Verifique se as retas $r: -6x + 2y - 5 = 0$ e $s: y = \frac{-x}{3} + 10$ são perpendiculares.

4) Determine L para que as retas $r: y = 5x - 1$ e $s: 7x + Ly - 9 = 0$ sejam perpendiculares.

1) Determine se as retas $r: 3x+6y-18=0$ e $s: \sqrt{5}x+\sqrt{20}y-16=0$ são paralelas.

Solução: pela condição A') de paralelismo, temos que

$$r \parallel s \iff \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{20}} \quad (*)$$

$\left(\text{Note que } \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{20}} \iff \frac{3}{6} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} \right)$

Vamos verificar se $(*)$ é verdade:

- $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \overset{(\Delta)}{=} \frac{1}{2}$

(Δ):

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ & 2^2 \cdot 5 \end{array} \longrightarrow \begin{aligned} \sqrt{20} &= \sqrt{2^2 \cdot 5} \\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Note que $1/2 = 1/2$ então $(*)$ é verdade! $\therefore r \parallel s$

2) Determine K para que $r: y = 5x - 2$ e $s: Kx + 3y - 5 = 0$ sejam paralelas.

Solução:

Vamos representar s através da equação reduzida da reta:

$Kx + 3y - 5 = 0 \iff 3y = -Kx + 5 \iff s: y = \underbrace{\frac{-K}{3}}x + \frac{5}{3}$ (Equação reduzida da reta s)

Vamos comparar os coeficientes angulares de r e s:

Como queremos $r \parallel s$, então $\underbrace{m_r} = \underbrace{m_s}$ (Condição A de paralelismo)

Daí, $5 = \frac{-K}{3} \iff 15 = -K \therefore \underline{\underline{K = -15}}$

3) Verifique se as retas $r: -6x + 2y - 5 = 0$ e $s: y = -\frac{x}{3} + 10$ são perpendiculares.

Solução

Vamos representar s com uma equação geral da reta:

$$y = -\frac{x}{3} + 10 \xrightarrow{\cdot 3} 3y = -x + 30 \iff s: x + 3y - 30 = 0$$ (uma eq. geral da reta s)

Vamos utilizar a condição B' para determinar se são perpendiculares:

$$a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow \overbrace{-6 \cdot 1}^{-6} + \underbrace{2 \cdot 3}_{6} \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow -6 + 6 = 0 \checkmark$$

Assim, $r \perp s$!

4) Determine L para que as retas $r: y = 5x - 1$ e $s: 7x + Ly - 9 = 0$ sejam perpendiculares

Solução:

Fica como exercício! (Tente fazer utilizando a condição B)

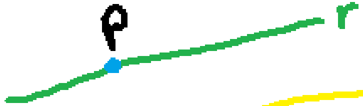
Dica: É semelhante à questão 2)

Distancia de um ponto a uma reta

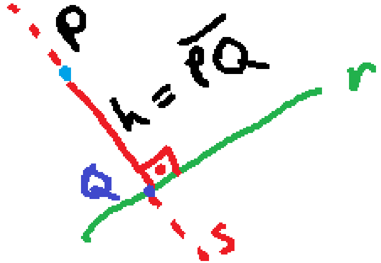
Como calcular?

↳ por definição, temos 2 casos:

Caso 1: Quando $P \in r$, então: $dist_{P,r} = 0$



Caso 2: Quando $P \notin r$, então:

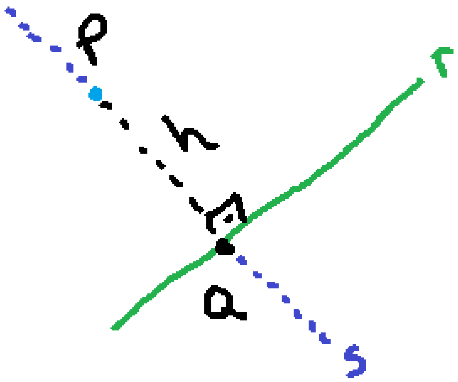


$dist_{P,r} = h$

Obs: h é a menor distância de P a r

Problema: Calcule a distância entre $P(4,3)$ e $r: y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$.

Solução



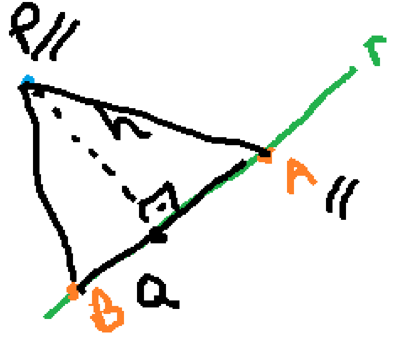
(Esboço)

Há pelo menos duas maneiras de se resolver:

1ª) Determinar s, perpendicular a r, que passe por P. Daí, encontrar o ponto de interseção entre r e s e calcular a distância dele até P

Problema: Calcule a distância entre $P(4,3)$ e $r: y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$.

Solução



(Esboço)

Há pelo menos duas maneiras de se resolver:

2ª) Escolher dois pontos A e B de r.

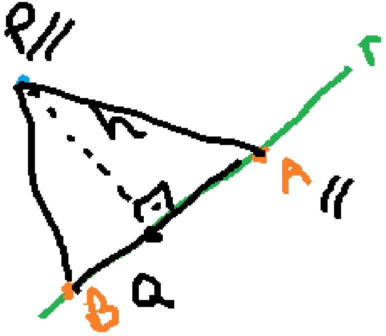
Note que $h = \frac{|\Delta|}{\overline{AB}}$*, onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{AB} = dist_{A,B}$$

*: $A_{ABP} = \frac{|\Delta|}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} \Rightarrow h \cdot \overline{AB} = |\Delta|$
$\Rightarrow h = |\Delta| / \overline{AB}$

Problema: Calcule a distância entre $P(4,3)$ e $r: y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$.

Solução



(Esboço)

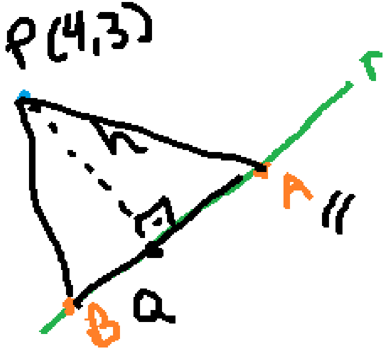
Vamos resolver o problema da 2ª maneira:

Podemos encontrar pontos de r ao atribuir valores para uma das variáveis (x ou y) na eq. de r:

$A(y=0)$: $0 = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} \Leftrightarrow 0 = 3x - 15 \therefore x = 5$ $\rightarrow A(\overset{x}{5},\overset{y}{0}) \in r$

e $B(x=0)$: $B(0,-15/4)^{*} \in r$

*: Verifique!



(Esboço)

Escolhemos os pontos $A(5,0)$ e $B\left(0,-\frac{15}{4}\right)$ de r.

Sabemos que $h = \dfrac{|\Delta|}{\overline{AB}}$. Vamos calcular $|\Delta|$ e $\overline{AB}$:

- $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{15}{4} & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - \frac{75}{4} - 0 + 15 - 15 = -\frac{75}{4}$

  $\therefore |\Delta| = \frac{75}{4}$

- $\overline{AB} = \sqrt{(5-0)^2 + \left(0-\left(-\frac{15}{4}\right)\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{225}{16}} = \cdots = \frac{25}{4}$ *

Assim, $h = \dfrac{\frac{75}{4}}{25/4} = \frac{75}{4} \cdot \frac{4}{25} = 3$ //

*: Verifique!

Há uma fórmula que permite calcular a distância de $P(x_0, y_0)$ até $r: ax+by+c=0$:

$$dist_{P,r} = \frac{\overbrace{|ax_0+by_0+c|}^{\text{Em módulo}}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Essa fórmula pode ser deduzida a partir das estratégias 1 e 2 de resolução (vistas no problema).

Inequações e semiplanos

*: um ou mais dependendo da inequação

Fato$_1$: toda reta r divide um plano α em duas regiões S_1 e S_2 denominadas de semiplanos

Fato$_2$: Inequações de 1º grau com duas variáveis representam um* dos semiplanos da reta r obtida pela igualdade:

$$ax + by + c \overset{*}{\leq} 0 \qquad (r: ax+by+c=0)$$

*: Poderia ser $<, \geq, >, \neq$