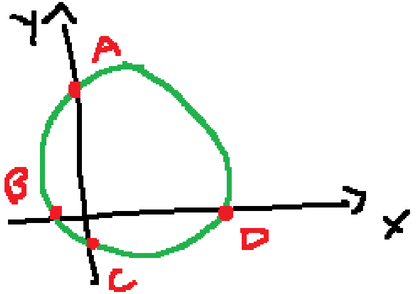
Determine a área do quadrilátero $ABCD$, sabendo que A, B, C e D são os pontos de interseção da circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 5x - 23y - 50 = 0$$

com os eixos coordenados.

Esboço:



Podemos determinar os pontos de interseção utilizando o fato de que eles são pontos do eixo x (a reta $y=0$) e do eixo y (a reta $x=0$). Daí, podemos encontrar os pontos de interseção resolvendo os sistemas:

A e C: $\begin{cases} x^2+y^2-5x-23y-50=0 \\ x=0 \text{ (eixo y)} \end{cases}$ e B e D: $\begin{cases} x^2+y^2-5x-23y-50=0 \\ y=0 \text{ (eixo x)} \end{cases}$

A e C: $\begin{cases} x^2+y^2-5x-23y-50=0 \\ x=0 \text{ (eixo y)} \end{cases}$ e B e D: $\begin{cases} x^2+y^2-5x-23y-50=0 \\ y=0 \text{ (eixo x)} \end{cases}$

Por substituição:

$$0^2+y^2-5\cdot 0-23y-50=0$$

$$\Rightarrow y^2-23y-50=0$$

Soma: 23 $\quad \nearrow y_1=25$

Produto: -50 $\quad \searrow y_2=-2$

Daí, temos os pontos A(0,25) e C(0,-2)

$$x^2+0^2-5x-23\cdot 0-50=0$$

$$\Rightarrow x^2-5x-50=0$$

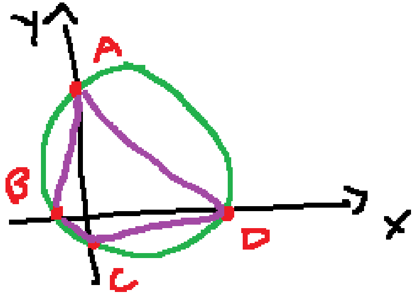
Soma: 5 $\quad \nearrow x_1=10$

Produto: -50 $\quad \searrow x_2=-5$

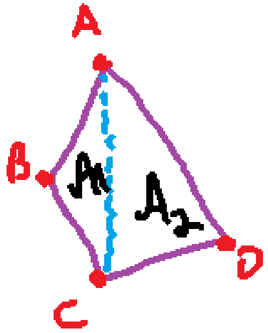
Daí temos os pontos D(10,0) e B(-5,0)

Encontramos $A(0,25)$, $B(-5,0)$, $C(0,-2)$ e $D(10,0)$.

Esboço:



Para calcular a área de ABCD note que podemos dividi-lo em dois triângulos e calcular a área de cada um porque conhecemos seus vértices:



$$A = A_1 + A_2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}|\Delta_2| \qquad \begin{vmatrix} 0 & 25 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -20 - 250 = -270$$

$$\therefore A_2 = \frac{|-270|}{2}$$

$$\therefore A_2 = \frac{270}{2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}|\Delta_1| \qquad \begin{vmatrix} 0 & 25 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 125 = 135$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{135}{2}$$

$$A = \frac{135}{2} + \frac{270}{2} = \frac{405}{2} = \underline{\underline{202{,}5}}$$