# Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

10/01/2022

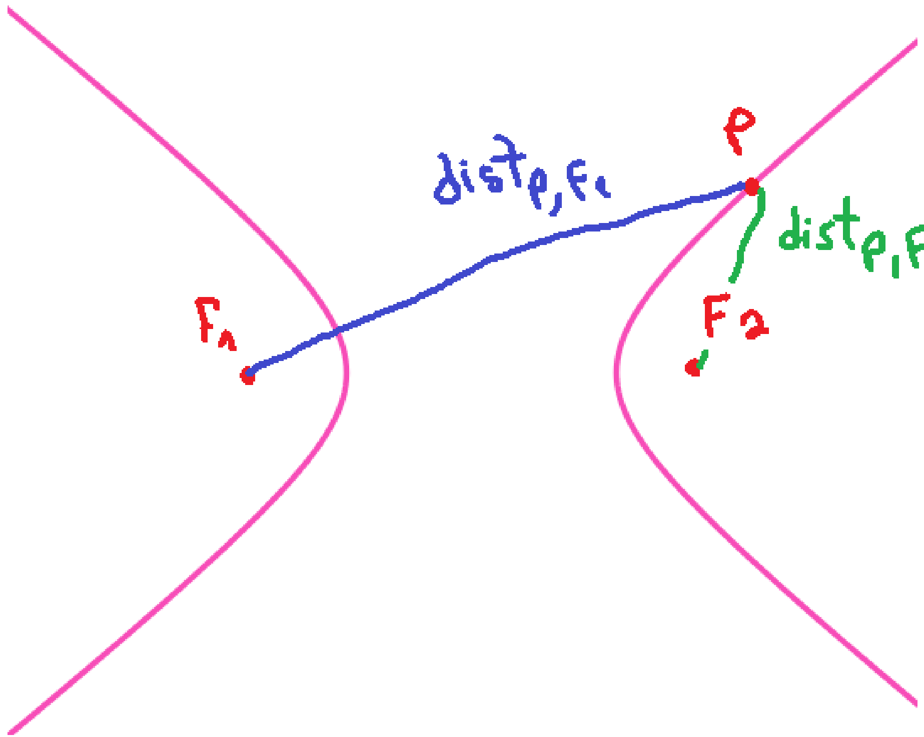
# Matemática 5 (Química)

## Aula 13

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

# Hipérbole

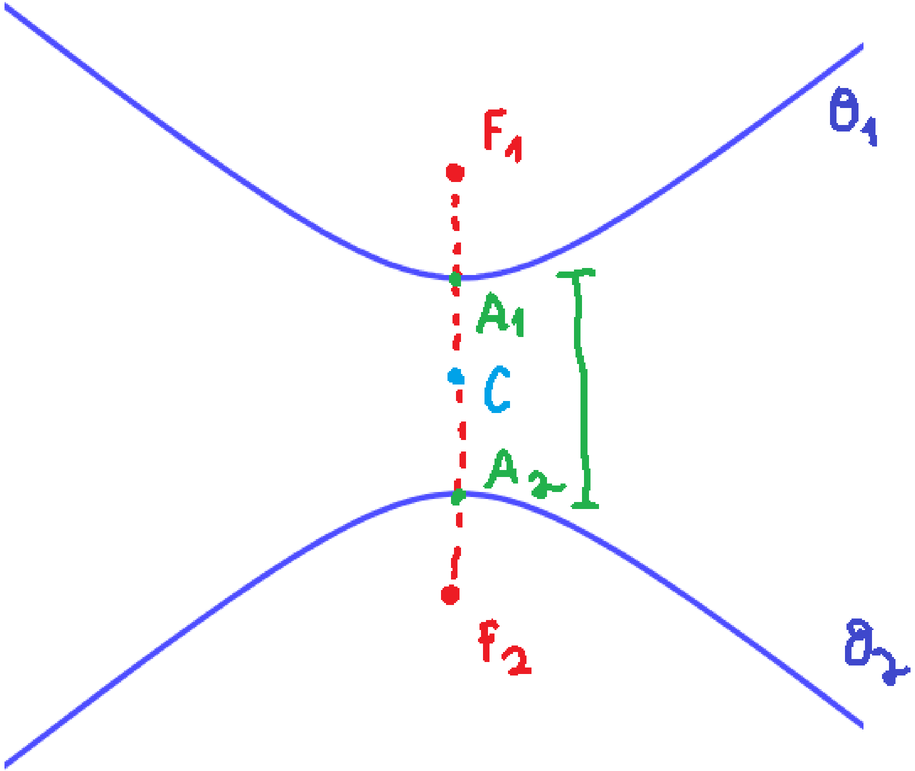



**Definição:**

A hipérbole é a curva que contém todos os pontos P em que a diferença (em módulo) a dois pontos fixos $F_1$ e $F_2$ é constante.

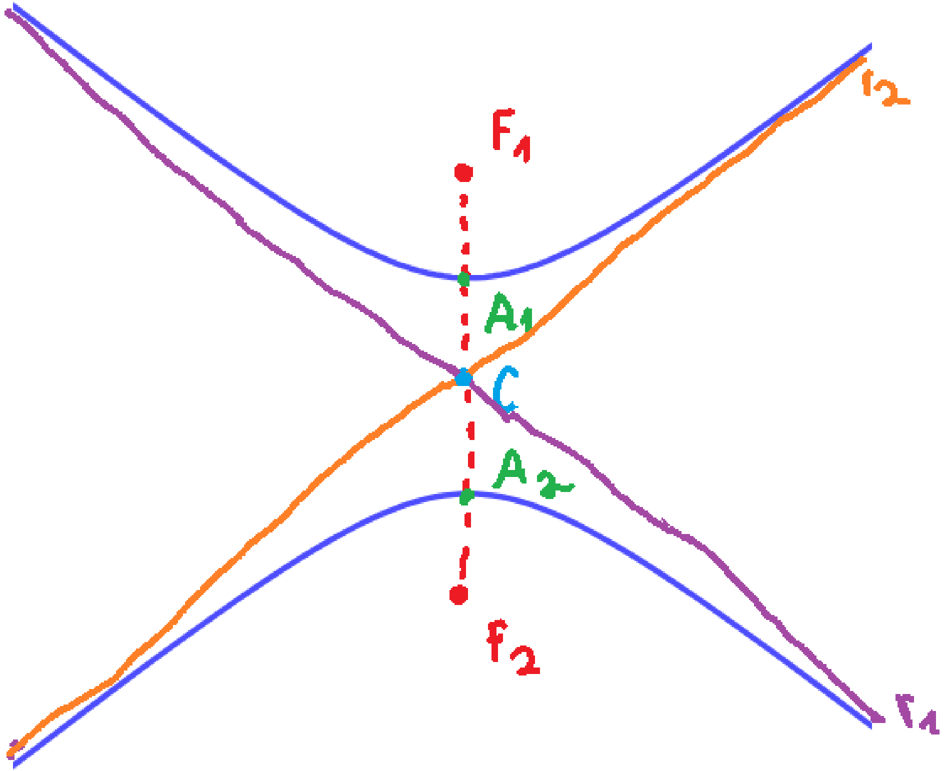
Ou seja: $|dist_{P,F_1} - dist_{P,F_2}| = K$ ↳ constante $(K>0)$

# Elementos da Hipérbole



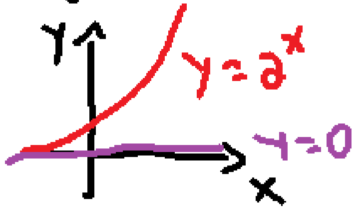

- $\theta_1$ e $\theta_2$ são os ramos da hipérbole
- $F_1$ e $F_2$ são os focos da hipérbole
- $A_1$ e $A_2$ são os vértices da hipérbole
- $C$ é o centro da hipérbole.
  ↳ $C$ é ponto médio dos focos
- $A_1A_2$ (o segmento) é denominado de eixo real da hipérbole

# Elementos da Hipérbole



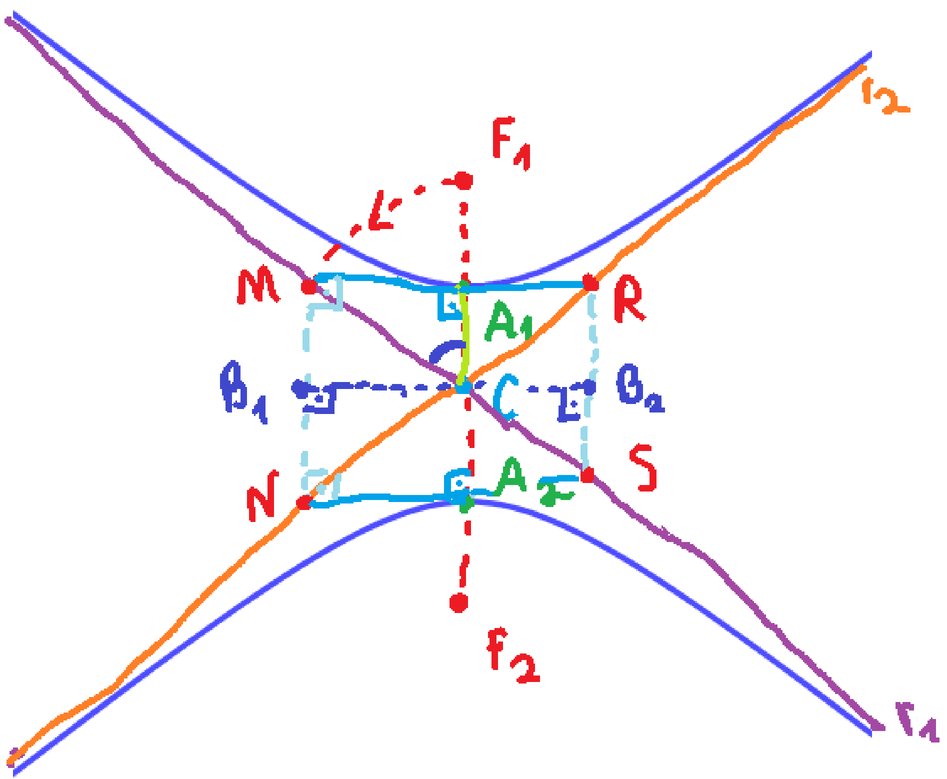

• $r_1$ e $r_2$ são denominadas de retas assíntotas. Elas não são exclusivas de hipérboles. Em geral são retas que se aproximam de uma curva até o ponto de ficarem indistiguíveis da mesma.

ex:




a reta $y = 0$ é assíntota da curva $y = 2^x$

# Elementos da Hipérbole

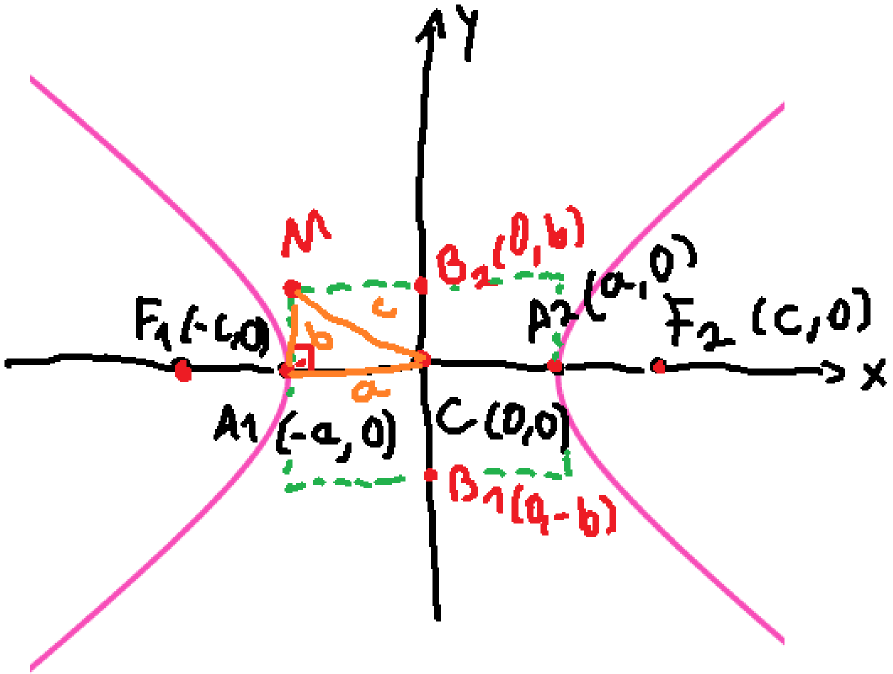



- $B_1$ e $B_2$ formam o eixo imaginário da hipérbole
  ↳ (O segmento $\overline{B_1B_2}$ )

Obs: o eixo imaginário PODE ter comprimento maior que o eixo real

- No retângulo MNRS, as retas assíntotas $r_1$ e $r_2$ são retas suportes de suas diagonais

No plano cartesiano (centrado na origem):




Relações que podem ser obtidas:

1) $\overline{F_1F_2} = 2c$ (distância focal)

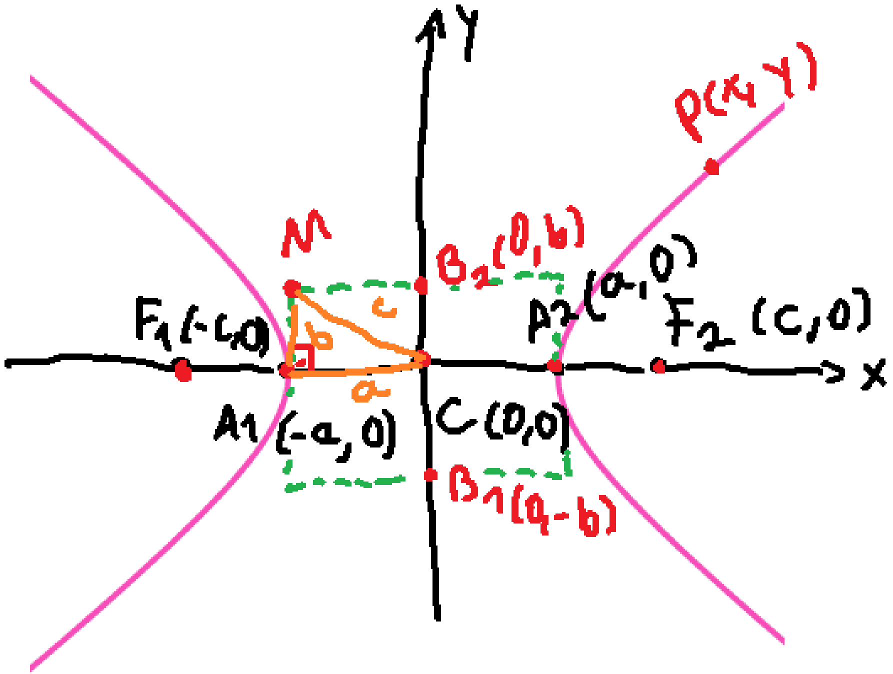
2) $\overline{A_1A_2} = 2a$ (comprimento do eixo real)

3) $\overline{B_1B_2} = 2b$ (comprimento do eixo imaginário)

4) $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

↳ $c > a$ e $c > b$

No plano cartesiano ( centrado na origem):




5) Vimos que P é um ponto da hipérbole se:

$$|dist_{P,F_1} - dist_{P,F_2}| = K$$

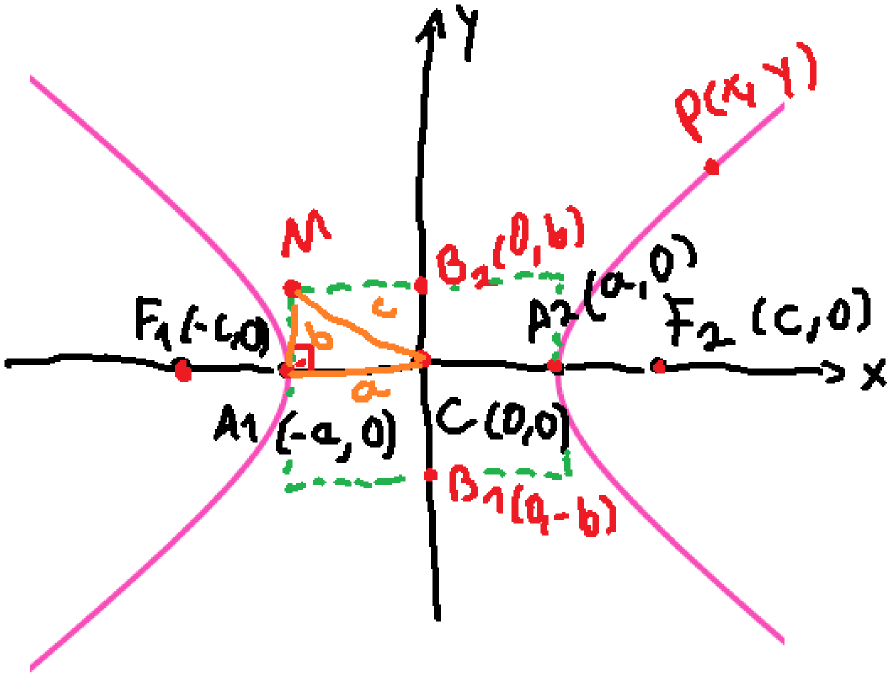
Temos que $K = 2a$ → o comprimento do eixo real

Daí,

$$|dist_{P,F_1} - dist_{P,F_2}| = 2a$$

Observação: As relações ainda são válidas quando a hipérbole não está centrada na origem. Apenas as coordenadas dos pontos serão diferentes (como no caso da elipse).

No plano cartesiano (centrado na origem):




Equação reduzida da hipérbole:

Por conta de 5) podemos deduzir a eq. reduzida da hiperbole se substituirmos na equação as coordenadas dos pontos $P(x,y)$, $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$.

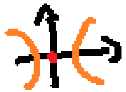
(continua)

⋮ (A dedução pode ser vista na HiperApostila - pág. 89)

Equação reduzida da Hipérbole:

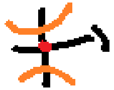
1) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

- Hipérbole centrada na origem
- Eixo real no eixo x



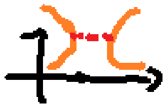
2) $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

- Hipérbole centrada na origem
- Eixo real no eixo y



3) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

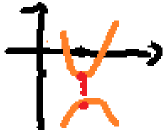
- Hipérbole centrada em $C(x_0, y_0)$
- Eixo real paralelo ao eixo x



1

4) $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$

- Hipérbole centrada em $C(x_0, y_0)$
- Eixo real paralelo ao eixo y



2

Como encontrar as equações das retas assíntotas:

Exemplo com a equação 4):

↳ 1º) Troque o "1" por "0", modificando a equação:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{\text{troca}} \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 0$$

1 Como encontrar as equações das retas assíntotas:

Exemplo com a equação 4):

↳ 1º) Troque o "1" por "0", modificando a equação:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1 \xrightarrow{\text{troca}} \frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=0$$

2 $*: \sqrt{x^2}=|x| \ \forall x \in \mathbb{R}$

↳ 2º) resolva a equação obtida isolando o y:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(y-y_0)^2}{a^2}=\frac{(x-x_0)^2}{b^2} \xrightarrow{\sqrt{\ }}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(y-y_0)^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{b^2}} \Rightarrow \frac{|y-y_0|^{*}}{a}=\frac{|x-x_0|}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{y-y_0}{a}=\pm\frac{(x-x_0)}{b}$$ (continua)

1

$*: \sqrt{x^2} = |x| \; \forall x \in \mathbb{R}$

↳ 2º) resolva a equação obtida isolando o y:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = \frac{(x-x_0)^2}{b^2} \xrightarrow{\sqrt{\;}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(y-y_0)^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{b^2}} \Rightarrow \frac{|y-y_0|}{a} \overset{*}{=} \frac{|x-x_0|}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{y-y_0}{a} = \pm\frac{(x-x_0)}{b}$$ (continua)

2

$*$: Eq. fundamental da reta

$$\frac{y-y_0}{a} = \pm\frac{(x-x_0)}{b}$$

$$\frac{y-y_0}{a} = +\frac{(x-x_0)}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{y-y_0}{a} = -\frac{(x-x_0)}{b}$$

$$\boxed{y-y_0 = \frac{a(x-x_0)}{b}}\,* \qquad \boxed{y-y_0 = \frac{-a(x-x_0)}{b}}\,*$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\boxed{y = \frac{a(x-x_0)}{b} + y_0} \qquad \boxed{y = \frac{-a(x-x_0)}{b} + y_0}$$

## Algumas observações:

1) O método da resolução é válido para equações em qualquer um dos formatos vistos (1), 2), 3) e 4))

2) $x_0$, $y_0$, $a$ e $b$ são números reais

## Excentricidade ($e$):

Definimos a excentricidade como: $e = \frac{c}{a}$

Obs: $e > 1$ (enquanto na elipse: $0 \leq e < 1$)

$Obs_2$: quanto maior $e$, mais "aberta" é a Hipérbole (e vice-versa)