Produtos notáveis: Uma Poderosa Ferramenta para Simplificar Meus Cálculos

Jardel Felipe Cabral dos Santos

07 de Janeiro de 2021

1 Introdução

Esse texto foi feito a pedido do professor André Costa, preceptor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco (IFPE) pelo Programa Institucional de Residência Pedagógica da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) do curso de Licenciatura em Matemática do campus Recife em 2020.

O texto será dividido em 5 seções (além da introdução e das referências) e cada seção poderá conter exercícios ou problemas para o leitor resolver, se assim desejar. As respostas para os exercícios e questões estarão presentes no final de cada seção. Algumas partes do texto podem ser um pouco difíceis de se entender numa primeira leitura, se esse for o caso, por favor, não hesite em tentar ler novamente.

2 Um problema olímpico

Se $a - b = 1$ e $ab = 1$, qual é o valor de $a^2 + b^2$?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Esse problema foi extraído da prova da 1ª fase da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) do ano de 2017. Você consegue resolvê-lo? Fique à vontade se quiser tentar. Apresentarei uma resolução para ele logo abaixo.

Resolução:

Vamos tentar encontrar os valores de a e de b para calcular o valor de a^2+b^2. Por questão de conveniência, denominaremos a equação $a-b=1$ de equação (i) e a equação $ab=1$ de equação (ii). Somando b nos dois lados da equação (i), obteremos: $a-b+b=1+b$. Podemos reescrever essa equação como $a=1+b$ e chamaremos essa equação de (iii).

Substituindo o valor de a da equação (iii) na equação (ii), obtemos: $(1+b)\cdot b=1$

Efetuando a multiplicação presente no lado esquerdo da equação, encontraremos a equação

$$b^2+b=1$$

Subtraindo 1 nos dois lados dessa equação, obteremos: $b^2+b-1=0$.

A equação acima é uma equação polinomial do segundo grau (ou simplesmente: equação do segundo grau) que tem como incógnita b ao invés de x. Podemos utilizar a fórmula de resolução de equações do segundo grau para calcular suas soluções. Vamos ter que:

$$b_1=\frac{-1+\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{-1+\sqrt{1-(-4)}}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Analogamente, $b_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Assim, achamos os valores de b que satisfazem as equações dadas inicialmente. Utilizaremos a equação (iii) para encontrar os valores para a.

Cada valor de b estará associado com um valor de a. Desse modo, $a_1=1+b_1$ e $a_2=1+b_2$.

Logo:

$$a_1=1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=(\frac{2}{2})+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{2}+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2+(-1+\sqrt{5})}{2}=\frac{2-1+\sqrt{5}}{2}$$

Então, $a_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Você pode verificar que $a_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Agora que encontramos os valores de a e b, basta calcularmos o valor da expressão a^2+b^2. Porém, como existem dois valores para a e para b, precisaremos calcular o valor da expressão para quando $a=a_1$ e $b=b_1$, mas também para quando $a=a_2$ e $b=b_2$.

- $a=a_1$ e $b=b_1$:

$$a^2+b^2=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2+(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^2=(\frac{1}{4})+2\cdot(\frac{\sqrt{5}}{4})+(\frac{\sqrt{25}}{4})+(\frac{1}{4})-2\cdot(\frac{\sqrt{5}}{4})+(\frac{\sqrt{25}}{4})=$$
$$(\frac{1}{4})+(\frac{5}{4})+(\frac{1}{4})+(\frac{5}{4})=\frac{12}{4}=3$$

- $a = a_2$ e $b = b_2$:

Você pode verificar que para esse caso também teremos $a^2 + b^2 = 3$.

Logo, a resposta do problema é $a^2 + b^2 = 3$. A alternativa C.

3 O que são os produtos notáveis?

Alguns de vocês podem indagar: "*Tá, é uma forma de resolver o problema, mas eu fiz de uma maneira muito mais simples e rápida!*". Concordo, a resolução apresentada é extensa e existem outras formas de se resolver o problema. Acho importante destacar que a melhor resolução de um problema é aquela que melhor se adequa as suas necessidades e aquela que você se sente confortável fazendo.

Meu objetivo apresentando a resolução acima é de trazer a tona o papel que os produtos notáveis tem na matemática.

Mas o que seria um produto notável? para responder essa pergunta, vamos calcular o produto $(x+y)^2$, onde x e y são variáveis que representam números reais e podem assumir o valor que quisermos:

$$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2\cdot(xy) + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Ou seja, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

A vantagem de ter calculado o produto com variáveis ao invés de números é que o generalizamos. Utilizamos as variáveis x e y, mas poderíamos ter utilizado ser qualquer variável. Agora, sempre que identificarmos um produto que pode ser escrito como $(x+y)^2$, podemos utilizar o resultado obtido acima para simplificar nossos cálculos e evitar ter que toda vez fazer todos os cálculos acima.

Por exemplo: Vamos calcular $(3r - 5s)^2$.

Note que se atribuirmos valores para x e para y de modo que $x = 3r$ e $y = -5s$, nosso produto $(3r - 5s)^2$ se torna $(x+y)^2$, um produto que já conhecemos seu resultado: $x^2 + 2xy + y^2$. Substituindo de volta os valores de x e de y, teremos:

$$(3r)^2 + 2\cdot 3r \cdot(-5s) + (-5s)^2 = 9r^2 + (-30rs) + 25s^2 = 9r^2 - 30rs + 25s^2$$

Você pode verificar se o resultado está correto ao tentar calcular esse produto utilizando a propriedade distributiva da multiplicação.

Também podemos utilizar o produto notável $(x+y)^2$ para calcular o quadrado de um número. Por exemplo: Vamos calcular 16^2:

Note que 16 pode ser escrito como $10 + 6$, assim, podemos atribuir o valor 10 para x e o valor 6 para y. Desse modo, temos que: $(x+y)^2 = (10+6)^2 = (10)^2 + 2\cdot 10\cdot(6) + (6)^2 = 100 + 120 + 36 = 256$. Você pode verificar numa calculadora se o resultado está correto.

Pergunta: Se atribuíssemos o valor 6 para x e o valor 10 para y o resultado seria o mesmo? Por quê?

É importante destacar que somos nós que escolhemos valores para x e para y. Como o objetivo é simplificar os cálculos, buscamos atribuir valores que nos ajudem a atingir esse objetivo. Poderíamos calcular a potência 16^2 atribuindo o valor 19 para x e -3 para y. Porém, note que quando formos calcular o termo x^2 da expressão $x^2+2xy+y^2$, estaremos calculando 19^2, que parece ser tão complicado quanto calcular 16^2.

Dessa maneira, poderíamos dizer que um produto notável é um produto entre variáveis que tem um resultado conhecido e que podemos utilizá-lo para simplificar nossos cálculos ou fatorar uma expressão. Falaremos mais sobre essa última parte na próxima seção.

Resposta: Sim, o resultado seria o mesmo por causa da propriedade comutativa da soma e da multiplicação com a expressão: $x^2 + 2xy + y^2$. Isso quer dizer que: $x^2 + 2xy + y^2 = y^2+2yx+x^2$, assim trocar o valor de x pelo valor de y e vice-versa não alterará o resultado.

4 Outros produtos notáveis

Vimos o produto notável $(x+y)^2$. Vamos encontrar o valor do produto $(x-y)^2$. Para fazer isso, podemos olhar $(x-y)^2$ como $(x+(-y))^2$. A partir daí, podemos utilizar o produto notável que conhecemos para encontrar o valor do produto: $(x-y)^2 = (x+(-y))^2 = x^2+2x(-y)+(-y)^2 = x^2-2xy+y^2$. Logo: $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$. Esse é outro produto notável. Que diferenças você consegue perceber entre ele e o produto notável $(x+y)^2$?

Vou utilizar o produto notável $(x-y)^2$ para mostrar uma outra resolução para o problema olímpico:

Resolução:

Temos as equações $a-b=1$ e $ab=1$ e queremos saber o valor de a^2+b^2. Note que $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$. A equação $a-b=1$ nos dá o valor de $a-b$, desse modo, vamos substituir esse valor em $(a-b)^2$. Obteremos a equação: $(1)^2 = a^2-2ab+b^2$.

Essa equação pode ser reescrita como $1 = a^2-2ab+b^2$. Perceba que a expressão que queremos calcular está presente no lado direito da equação. Vamos isolá-la somando $2ab$ em ambos os lados da equação. Obteremos: $1+2ab = a^2-2ab+b^2+2ab$, ou seja, $1+2ab = a^2+b^2$. Já o valor de $2ab$ pode ser encontrado através da equação $ab=1$.

Substituindo o valor de ab na equação $1+2ab = a^2+b^2$, obteremos $1+2\cdot 1 = a^2+b^2$, portanto $a^2+b^2 = 1+2 = 3$. Esse foi o mesmo resultado que obtemos na primeira resolução.

Veja como foi muito mais simples responder o problema utilizando conhecimentos sobre produtos notáveis e uma boa sacada.

Não existem só esses dois produtos notáveis. Geralmente quando pesquisamos sobre o assunto no *Google*, por exemplo, encontramos diversos outros produtos notáveis. Eu não acho necessário conhecer todo e qualquer produto notável, porém acho importante conhecer pelo menos os três produtos notáveis abaixo:

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x+y)\cdot(x-y) = x^2 - y^2$
3. $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

Podemos derivar muitos outros produtos notáveis a partir desses três, como fizemos com $(x-y)^2$.

Como exercício, tente derivar ou fatorar, isto é: reescrever como uma multiplicação, os seguintes produtos notáveis ou expressões:

1. $(x+y)^3 =$
2. $(x-y)^3 =$
3. $(x+y+z)^2 =$
4. $x^3 - y^3 =$
5. $x^2 + y^2 =$

Dica: tente utilizar de algum modo os produtos notáveis listados acima (antes do exercício). Você pode utilizar os dois lados das equações.

Respostas:

1. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

2. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

3. $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

4. $x^3 - y^3 = (x-y)\cdot(x^2 + xy + y^2)$

5. Não é possível fatorar $x^2 + y^2$ utilizando apenas variáveis que representam números reais.

5 Fatoração

Podemos dizer que quando fatoramos os termos de uma expressão estamos reescrevendo esses termos como uma multiplicação. Também podemos utilizar produtos notáveis para fatorar expressões, basta fazer o caminho inverso.

Por exemplo: vamos fatorar a expressão $t^3 + 3t^2 + 3t + 1 + 27u^3$.

Temos o produto notável $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. Note que $(t+1)^3 = t^3+3t^2+3t+1$. A expressão do lado direito da equação está presente na expressão que queremos fatorar. Desse modo, podemos substituir essa parte da expressão pelo produto $(t + 1)^3$. Isto é:

$$t^3 + 3t^2 + 3t + 1 + 27u^3 = (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + 27u^3 = (t + 1)^3 + 27u^3$$

Acabamos de fatorar alguns dos termos da expressão original. Poderíamos parar por aí, sem nenhum problema, mas olhando para o resultado obtido, é possível observar que ainda podemos fatorar ainda mais. Fica como exercício para o leitor fatorar a expressão $(t + 1)^3 + 27u^3$. Dica: Use o produto notável $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.

Apesar de ter sido dito bastante sobre o assunto, ainda não o esgotamos. Nas referências é possível encontrar *sites* para ler mais sobre o tema, caso seja de seu interesse. Gostaria de concluir o texto apresentando alguns problemas. Os problemas serão listados de acordo com o nível de dificuldade (do mais fácil ao mais difícil). Logo abaixo de cada problema haverá uma dica. Boa sorte!

Resposta:

1. $(t + 1)^3 + 27u^3 = (t + 3u + 1) \cdot ((t + 1)^2 + 3u \cdot (t + 1) + 9u^2))$

6 Problemas

1. Qual é o valor da expressão $\dfrac{242424^2 - 121212^2}{242424 \cdot 121212}$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) 1

(D) $\frac{3}{2}$

(E) $\frac{7}{4}$

Dica: Tente usar o produto notável $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$

2. Somando 1 a um certo número natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?

(A) 0

(B) 1

(C) 8

(D) 10

(E) 80

Dica: $398 = \mathbf{3} \cdot 132 + 2$. Isso quer dizer que o resto da divisão de 398 por **3** é 2. Possa ser que seja necessário utilizar um raciocínio semelhante para responder o problema.

3. A soma de dois números é 3 e a soma de seus cubos é 25. Qual é a soma de seus quadrados?

(A) $\frac{77}{9}$

(B) $\frac{99}{7}$

(C) 7

(D) 9

(E) $\frac{7}{9}$

Dica: Uma resolução para esse problema é bem semelhante à segunda resolução apresentada para o problema olímpico.

4. Sabendo-se que $\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = \dfrac{7}{12}$, qual é o valor de $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$?

(A) $2,0$

(B) $2,2$

(C) $2,4$

(D) $2,6$

(E) $2,8$

Dica: Talvez ajude se você reescrever a fração desejada de outro modo.

5. *(Adaptado)* O número irracional $\sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}$ é igual a:

(A) $\sqrt{3} - 1$

(B) $\sqrt{2} - 1$

(C) $\sqrt{2} + 1$

(D) $1 - \sqrt{2}$

(E) Nenhuma das alternativas acima

Dica: Tente utilizar o produto notável $(x - y)^2$.

6. Qual é a soma dos algarismos do número $\sqrt{1111111111 - 22222}$?

(A) 10

(B) 15

(C) 18

(D) 20

(E) 25

Dica: Note que $\dfrac{10^{10} - 1}{9} = 1111111111$.

7. Se $a + b + c = 0$, calcule $M = \dfrac{(a+b)^3 + (b+c)^3 + (a+c)^3}{abc}$

Dica: Tente utilizar a equação $a + b + c = 0$ para rescrever cada termo do numerador da fração M.

Nas referências é possível encontrar resoluções para alguns dos problemas.

Respostas:

1. Alternativa D.

2. Alternativa B.

3. Alternativa C.

4. Alternativa E.

5. Alternativa B.

6. Alternativa B.

7. $M = -3$

7 Referências

No *site* da OBMEP é possível encontrar a resolução de questões de suas provas.

- ***Site* da OBMEP:**
  `http://www.obmep.org.br/provas.htm`
- **Problema Olímpico (OBMEP - 2017 - fase 1 - nível 3 - questão 2):**
  `https://tinyurl.com/y56k9yz9`
- **Problemas da última seção:**
  1. OBMEP - 2018 - fase 1 - nível 2 - questão 7:
  `https://tinyurl.com/y2a9gly9`
  2. OBMEP - 2017 - fase 1 - nível 3 - questão 6:
  `https://tinyurl.com/y56k9yz9`
  3. OBMEP - 2015 - fase 1 - nível 3 - questão 7:
  `https://tinyurl.com/y5gltozj`
  4. OBMEP - 2018 - fase 1 - nível 3 - questão 7:
  `https://tinyurl.com/yygonlmp`
  5. Problema de origem incerta:
  `https://www.youtube.com/watch?v=naGkELTaSuQ&`
  6. OBMEP - 2019 - fase 1 - nível 3 - questão 10:
  `https://tinyurl.com/y63x9cnf`
  7. Problema de origem incerta:
  `https://www.youtube.com/watch?v=5CBHAfqsPfk`
- **Expressões algébricas e polinômios:**
  `https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=13&a=1`
  `https://tinyurl.com/yy6srkyh`
  `https://www.todamateria.com.br/expressoes-algebrica/`
- **Produtos notáveis:**
  `https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=14`
  `https://pt.wikipedia.org/wiki/Produtos_not%C3%A1veis`
  `https://www.todamateria.com.br/produtos-notaveis/`
  `https://brasilescola.uol.com.br/matematica/produtos-notaveis.htm`
  `https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/produtos-notaveis.htm`
- **Propriedades da igualdade:**
  `https://maestrovirtuale.com/propriedades-da-igualdade/`
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Equality_(mathematics)`