Atenção

“O material a seguir é uma videoaula apresentada pelo bolsista Jardel Cabral, do Programa de Residência Pedagógica da UFPE. Com o professor André Costa como preceptor, o objetivo é utilizá-lo como material de estudos do IFPE para fins de atividades remotas no período de pandemia da Covid-19. Seu uso, sua cópia ou sua divulgação em parte ou no todo, por quaisquer meios existentes, somente poderá ser realizado mediante autorização expressa do servidor ou do IFPE. Caso contrário, estarão sujeitos às penalidades legais vigentes.”

13/01/2022

Matemática 5 (Química)

Aula 13.1

Jardel Cabral

rp.jardelcabral@recife.ifpe.edu.br

Problema

1. Determine o centro, os vértices e as equações das retas assíntotas da hipérbole α de equação:

$$\alpha: \frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-7)^2}{16} = 1$$

Faça um esboço da hipérbole.

Solução: Comparando a equação de α com a equação no formato padrão da hipérbole, concluímos que:

$$\alpha: \frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-7)^2}{16} = 1$$

Formato da eq. reduzida:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

1) $-y_0 = 2$

$\therefore y_0 = -2$

2) $-x_0 = -7$

$\therefore x_0 = 7$

3) $a^2 = 9$

$\therefore a = 3$

4) $b^2 = 16$

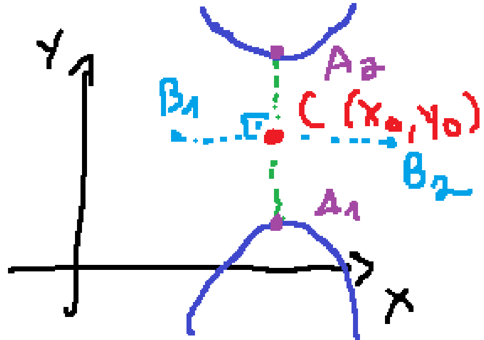
$\therefore b = 4$

Assim, temos que C (o centro) tem coordenadas $(\underset{x_0}{7}, \underset{y_0}{-2})$.

Vamos encontrar os vértices dessa hipérbole $\alpha: \frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-7)^2}{16} = 1$.

Utilizando uma ideia semelhante ao que fazemos para encontrar os vértices de uma elipse, temos que:

1)

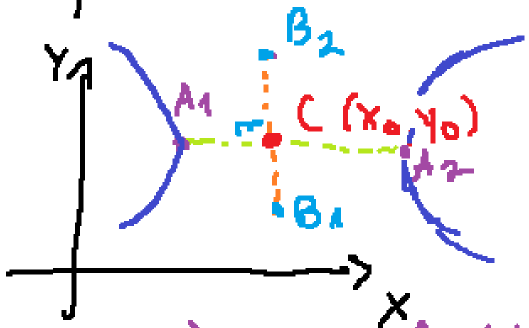


eixo real paralelo a Oy

$A_1(x_0, y_0 - a)$ $A_2(x_0, y_0 + a)$

$B_1(x_0 - b, y_0)$ $B_2(x_0 + b, y_0)$

2)



eixo real paralelo a Ox

$A_1(x_0 - a, y_0)$ $A_2(x_0 + a, y_0)$

$B_1(x_0, y_0 - b)$ $B_2(x_0, y_0 + b)$

Obs: Podemos utilizar uma ideia semelhante para encontrar os focos da hipérbole. Basta lembrar que os focos estão sobre o eixo real então precisamos andar "$\underline{c}$" unidades na direção do eixo real.

Obs: $\underline{c} \neq \underline{\underline{C}}$

metade da distância focal

Centro da Cônica

Ex: 1) $A_1(x_0, y_0 - a)$ e $A_2(x_0, y_0 + a)$

$F_1(x_0, y_0 - \underline{c})$ e $F_2(x_0, y_0 + \underline{c})$

Daí, considerando isso tudo e considerando que $\underline{\underline{C}}(7, -2)$ e que $\underline{a=3}$ e $\underline{b=4}$, temos que: $A_1(7, -2-\underline{\underline{3}}) = A_1(7, -5)$ e $B_1(7-\underline{\underline{4}}, -2) = B_1(3, -2)$

$A_2(7, -2+\underline{\underline{3}}) = A_2(7, 1)$ e $B_2(7+\underline{\underline{4}}, -2) = B_2(11, -2)$

Obs: Sabemos que o eixo real é paralelo a O_y pois na equação reduzida de α a fração com sinal positivo é aquela que tem y no numerador. (Se fosse o termo com x, então o eixo real seria paralelo a O_x).

Vamos encontrar agora as equações das retas assíntotas de α. Essas equações podem ser obtidas a partir da equação:

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-7)^2}{16} = 0$$

(Você consegue perceber a diferença dessa equação para a eq. de α?)

Vamos encontrar agora as equações das retas assíntotas de α.

Essas equações podem ser obtidas a partir da equação:

$$(*): \frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-7)^2}{16} = 0$$

(Você consegue perceber a diferença dessa equação para a eq. de α?)

$*$: $\sqrt{x^2} = |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Vamos isolar y na equação $(*)$:

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-7)^2}{16} = 0 \Rightarrow \frac{(y+2)^2}{9} = \frac{(x-7)^2}{16} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{\frac{(y+2)^2}{9}} = \sqrt{\frac{(x-7)^2}{16}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(y+2)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{(x-7)^2}}{\sqrt{16}} \Rightarrow \frac{|y+2|^{*}}{3} = \frac{|x-7|^{*}}{4} \Rightarrow \frac{y+2}{3} = \pm\frac{(x-7)}{4}$$

Vamos isolar y na equação (*):

$\ast$: $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-7)^2}{16} = 0 \Rightarrow \frac{(y+2)^2}{9} = \frac{(x-7)^2}{16} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{\frac{(y+2)^2}{9}} = \sqrt{\frac{(x-7)^2}{16}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(y+2)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{(x-7)^2}}{\sqrt{16}} \Rightarrow \frac{|y+2|^{\ast}}{3} = \frac{|x-7|^{\ast}}{4} \Rightarrow \frac{y+2}{3} = \pm\frac{(x-7)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+2}{3} = +\frac{(x-7)}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{y+2}{3} = -\frac{(x-7)}{4}$$

$$\xrightarrow{\cdot 12} \frac{12(y+2)}{3} = +\frac{12(x-7)}{4} \qquad \xrightarrow{\cdot 12} \frac{12(y+2)}{3} = -\frac{12(x-7)}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y+2}{3} = +\frac{(x-7)}{4} \qquad \text{ou} \qquad \frac{y+2}{3} = -\frac{(x-7)}{4}$$

$$\xrightarrow{\cdot 12} \frac{12(y+2)}{3} = +\frac{12(x-7)}{4} \qquad \xrightarrow{\cdot 12} \frac{12(y+2)}{3} = -\frac{12(x-7)}{4}$$

$$\Rightarrow 4(y+2) = 3(x-7) \qquad \Rightarrow 4(y+2) = -3(x-7)$$

$$\Rightarrow 4y+8 = 3x-21 \qquad \Rightarrow 4y+8 = -3x+21 \Rightarrow -3x-4y+13=0$$

$$\Rightarrow 3x-4y-8-21=0$$

Daí, $r_2: -3x-4y+13=0$

↳ equação de uma das retas assíntotas de α

$\therefore$ $r_1: 3x-4y-29=0$

↳ equação de uma das retas assíntotas de α

Equação geral da Hipérbole

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Obs: 1) A e B são diferentes de 0

note que 1) é consequência de 2).

2) $A \cdot B < 0$

Podemos chegar na equação reduzida ao completar quadrados (como fazíamos com as elipses)

Ex: Obtenha a eq. reduzida da hipérbole: $-25x^2 + 144y^2 - 150x - 288y - 3681 = 0$

Como exercício, esboce a hipérbole $\mathcal{L}$.

Dica: Comece esboçando as assíntotas e desenhe os ramos da hipérbole atentando aos de aproximar a curva das assíntotas na medida que se afasta do centro.