4. **Determine uma equação geral da circunferência que passa pelos pontos $A(3,2)$, $B(2,3)$ e $C(1,1)$ e determine a equação geral da reta que passa por C e é tangente à circunferência.**

Vamos chamar essa circunferência de γ. Resolveremos o problema de duas maneiras diferentes. Seja O o centro de γ.

Solução (maneira 1):

Se $P(x_P, y_P) \in \gamma$, então $(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2 = R^2$. Daí, como $A, B, C \in \gamma$, temos:

- $(3 - x_O)^2 + (2 - y_O)^2 = R^2$
- $(2 - x_O)^2 + (3 - y_O)^2 = R^2$
- $(1 - x_O)^2 + (1 - y_O)^2 = R^2$

. Resolvendo o sistema formado por essas três equações, encontraremos: x_O, y_O e R

$$\begin{cases} (3-x_0)^2 + (2-y_0)^2 = R^2 & \text{(i)} \\ (2-x_0)^2 + (3-y_0)^2 = R^2 & \text{(ii)} \\ (1-x_0)^2 + (1-y_0)^2 = R^2 & \text{(iii)} \end{cases} \longrightarrow$$

Como R^2 da equação (i) e R^2 da equação (ii) são iguais, temos:

$$(3-x_0)^2 + (2-y_0)^2 = (2-x_0)^2 + (3-y_0)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{9} - 6x_0 + \cancel{x_0^2} + \cancel{4} - 4y_0 + \cancel{y_0^2} = \cancel{4} - 4x_0 + \cancel{x_0^2} + \cancel{9} - 6y_0 + \cancel{y_0^2}$$

$$\Rightarrow -6x_0 - 4y_0 = -4x_0 - 6y_0 \Rightarrow 6y_0 - 4y_0 = -4x_0 + 6x_0$$

$$\Rightarrow 2y_0 = 2x_0 \quad \therefore \underline{y_0 = x_0} \quad \text{(iv)}$$

Daí, substituindo y_0 da eq (iv) no y_0 da eq (iii) temos:

$$(1-x_0)^2 + (1-x_0)^2 = R^2 \Rightarrow 2(1-x_0)^2 = R^2 \quad (*)$$

Vamos substituir o R^2 da equação (*) na equação (ii), considerando que $x_0 = y_0$:

$$(2-x_0)^2 + (3-x_0)^2 = 2(1-x_0)^2$$

$$\Rightarrow 4 - 4x_0 + x_0^2 + 9 - 6x_0 + x_0^2 = 2(1 - 2x_0 + x_0^2)$$

$$\Rightarrow \cancel{2x_0^2} - 10x_0 + 13 = \cancel{2x_0^2} - 4x_0 + 2$$

$$\Rightarrow 10x_0 - 4x_0 = 13 - 2 \Rightarrow 6x_0 = 11 \therefore x_0 = \frac{11}{6}$$

Assim, $y_0 = \frac{11}{6}$ (pois $x_0 = y_0$) e $R^2 = 2(1-x_0)^2 = 2\left(1-\frac{11}{6}\right)^2$

$$= 2\left(-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{18} \therefore R = \frac{5}{3\sqrt{2}}$$

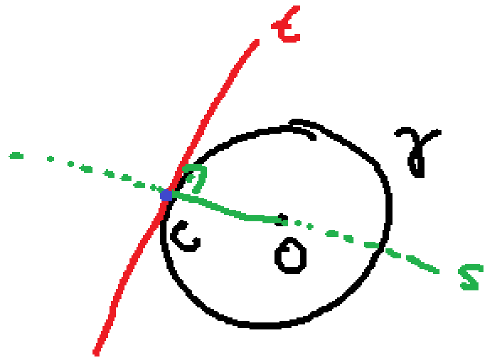
Logo, $\gamma: \left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{11}{6}\right)^2=\frac{25}{18}$

(Δ) Para determinar uma reta tangente a γ que passa por $C(1,1)$, considere a reta $s=\overleftrightarrow{OC}$: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 11/6 & 11/6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{11}{6}-1\right)x+\left(1-\frac{11}{6}\right)y=0$

$$\Rightarrow \left(\frac{11}{6}-1\right)x=-\left(1-\frac{11}{6}\right)y$$

$$\Rightarrow \left(11/6-1\right)x=\left(11/6-1\right)y$$

$$\Rightarrow x=y \Leftrightarrow x-y=0$$



(Esboço)

Como $\overleftrightarrow{OC} \perp t$, se $t: ax+by+c=0$, então

$1\cdot a+(-1)\cdot b=0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$. Tome $a=1$.

Se $a = 1$, como $b = a$, então $b = 1$. Logo,

$$t: x + y + c = 0$$

Daí, considerando que $C(1,1) \in t$, então:

$$1 + 1 + c = 0 \quad \therefore c = -2$$

Logo, $t: x + y - 2 = 0$