Programmation linéaire en nombres entiers

Le problème que nous allons traiter est le problème de partitionnement de graphes. Il s'agit étant donné un graphe pondéré de séparer les sommets en K sous-ensembles de sommets tel que la somme du poids des arêtes dans chaque sous-ensemble soit minimale. Le but du TP est de proposer un programme linéaire en nombres entiers pour le problème de partitionnement de graphes. On notera dans le reste du sujet le graphe par $G = (V, E)$.

Représentation d'une partition

Pour identifier une partie, on peut utiliser un des sommets qu'elle comprend. Pour cela, vous pouvez utiliser une variable binaire x_i par sommet i qui indique si i est représentant d'une partition ou non.

Fonction objectif

On utilisera ici la fonction objectif basée sur les coupes décrite dans le sujet de méta-heuristiques. Indiquer comment représenter les arêtes qui sont dans des coupes ou qui sont dans une partie (les deux approches sont équivalentes) en utilisant des variables indicées sur deux sommets qui indiquent si les deux sommets sont dans la même partie. Quels est alors la fonction objectif ?

Contraintes nécessaires

Une première contrainte classique à définir sont des contraintes dites d'inégalité triangulaire. Cette famille de contraintes assure que si le sommet i est dans la même partie que deux j et k alors j et k doivent aussi être dans la même partition.

Il faudra aussi des contraintes qui fixent le représentant d'une partie. Si on suppose que les sommets sont numérotés (c'est une représentation classique), on fera en sorte que le sommet avec le plus petit indice dans une partie représentera cette dernière. Pour cela proposer une contrainte qui pour un sommet i empêche la variable x_i puissent prendre la valeur 1 si un sommet de plus petit indice se trouve dans la même partition.

Il faut aussi proposer des contraintes qui empêchent que plusieurs variables soient choisies comme représentant d'une même partie.

Il faut aussi une contrainte sur le nombre de partie. Pour le moment, on veut que le modèle trouve K partie. Donner une contrainte pour assurer ce point.

Renforcement du modèle

Il est possible d'utiliser des contraintes plus fortes que celles définit précédemment. Par exemple, le choix du représentant d'une partition peut être faites grâce aux contraintes suivantes :

$$x_j + \sum_{i=1,j-1} x_i x_{ij} = 1 \; (j \in V)$$

Cette contrainte indique qu'un sommet j est soit un représentant ($x_j = 1$) soir qu'il se trouve dans la même partie qu'exactement un sommet – plus petit que lui – qui est un représentant ($x_i x_{ij} = 1$). Ces contraintes ne sont pas linéaires, elles sont quadratiques. Proposer une linéarisation de ces contraintes et un modèle les utilisant. Comparer les résultats des deux modèles notamment la valeur de la relaxation linéaire à la racine de l'arbre de recherche.

Autres contraintes sur la taille des partitions ou le nombre de partitions

Proposer des contraintes qui modifient la taille ou le nombre de partitions de telle sorte que (on n'utilisera pas plus d'une ces contraintes ou celle sur le nombre de partitions à la fois) :

1) Une partition ne peut pas avoir plus de N sommets,
2) La différence de nombre de sommets entre la plus grande partition et la plus petite partition ne peut pas être plus importante qu'une constante R.

Travail à rendre

Vous devrez rendre un court rapport donnant les modèles que vous proposez. Vous décrirez brièvement le sens des variables et des contraintes. Vous fournirez aussi le code AMPL pour définir vos modèles et résoudre des instances que vous définirez.