Lecture8. Solving Ax=b: Row Reduced Form R

▼ 목차

1. Ax=b의 solution

선형 방정식 Ax=b의 해는 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다.

해의 존재 여부를 소거법(Elimination)을 통해 알아낼 수 있다. 유일해 또는 해의 전체 집합을 알아내는게 목적이다.

다음과 같은 행렬 A를 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

방정식의 좌변을 살펴보면 row3=row1+row2임을 알 수 있다. 따라서 우변도 좌변과 마찬가지로 b3= b1+b2이어야 한다.

좌변의 어떤 선형 결합의 결과가 0이 된다면(row1+row2-row3=0), 우변의 같은 선형 결합도 0이 되어야 해가 존재한다.

위의 행렬 A를 Elimination을 통해 살펴보면 다음과 같다.

- 우선 b를 행렬의 오른쪽에 붙여서 다음과 같이 첨가행렬(Augmented matrix)를 만든다.

- 첫 번째 pivot을 기준으로 row2=row2-2*row1, row3=row3-3*row1을 해주면 다음과 같다.
  이때 pivot variable이 있는 첫 번째와 세 번째 column이 pivot column이 되고 나머지 두 번째와 네 번째 column이 free column이 된다.

- 두 번째 pivot variable(row2, col3)의 아래 원소가 전부 0이 아니므로 row3=row3-row2를 통해 소거하면 row3는 모두 0이 된다.

- 아래의 식이 U행렬이다. 아래의 식에서 row3의 방정식을 살펴보면 $b_3 - b_2 - b_1 = 0$이 되어야한다는 것을 알 수 있다. 이 조건을 해가 존재하기 위해 필요한 조건인 solvability condition이라고 한다.

Solvability condition(가해조건) of this linear equation: $b_3 - b_2 - b_1 = 0$

⭐ **Solvability Condition on b**

- 우변의 b벡터가 행렬 A의 column space안에 존재할 때, A**x**=b의 해가 존재한다.

= 행렬 A의 row의 어떤 선형 결합이 zero row를 만들어낸다면, b에 대한 똑같은 선형 결합도 반드시 0이 되어야한다.

위와 같은 조건을 만족해야 Ax=b의 해가 존재한다. Ax=b의 해가 존재하는지 보려면 위의 조건을 만족하는지 보면 된다.

그렇다면 b는 어떤 값이여야할까? Solvability condition(가해조건)에 따르면 b3=b2+b1이다. 결과적으로 b1=1, b2=5, b3=6 일 때 식이 성립됨을 알 수 있다.

2. Ax=b의 complete solution

1단계: particular solution 찾기

particular solution(특수해)는 행렬 U에서 free variable을 모두 0으로 만든 다음 pivot variable에 대해서 구한 해를 의미한다.

위에서 사용한 행렬A와 행렬U를 통해 particular solution을 구해보면 다음과 같다.

우선 행렬 U를 다시 방정식의 형태로 써보면 다음과 같다. (b1=1,b2=5,b3=6)

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Free variable인 x2와 x4의 값을 0으로 두고 back substitution를 이용해 나머지 값들을 구하면 x1=-2, x3=3/2가 된다.

따라서 Ax=b에 대한 particular solution은 다음과 같다.

2단계: Null space 해 찾기

이 행렬은 Lecture7에서 사용한 행렬이다. Lecture 7의 **Ax=0의 Null space 계산**에서 구한 special solution들을 Null space의 해로 사용하면 된다.

3단계: 완전해 구하기 (particular solution와 Null space 해 더하기)

particular solution과 Null space를 더하면 완전해를 구할 수 있다.

$$x = x_p + x_n \; (x_p : particular\ solution,\ x_n : Null\ space\ solution)$$

$x = x_p + x_n$가 문제가 없는 이유?

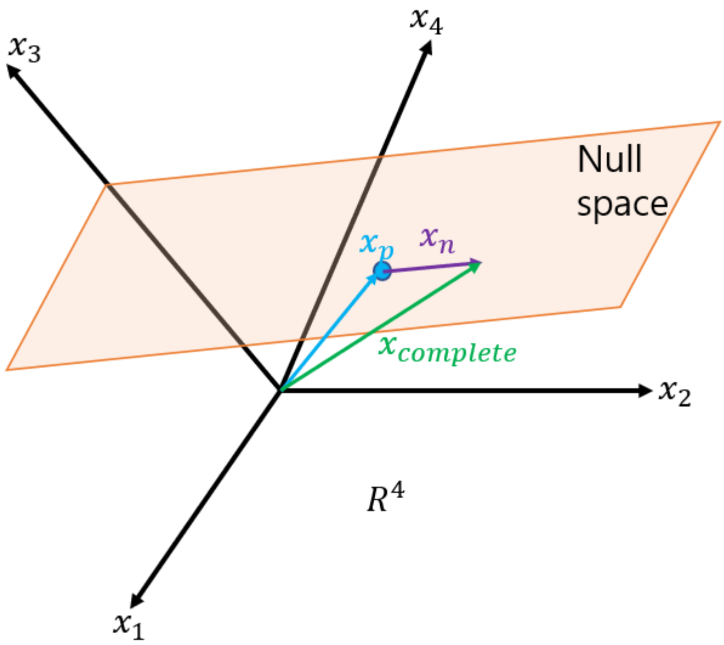
$$\begin{aligned} & Ax_p = b \\ + \quad & Ax_n = 0 \\ & ------- \\ & A(x_p + x_n) = b \end{aligned}$$

위의 식에서 보면 알 수 있듯이 두 방정식을 더한다고 해도 우변은 b가 그대로 오기 때문에 수학적으로 가능한 이야기이다.

- 위에서 구한 particular solution과 null space해를 더하면 다음과 같다.

- 여기서 particular solution은 b가 특정값으로 정해져있기 때문에 상수를 곱할 수 없다.
- **Ax=b의 완전해는 어떤 하나의 particular solution과 Null space해인 subspace의 합으로 표현될 수 있다**.

▼ **Plot of Complete solution**



- 높은 차원이 이전의 모든 차원에 직교해야 한다.
- Null space라고 하는 평면은 위의 식에서 상수 c1, c2가 곱해진 두 개의 벡터로 형성되는 평면이다.
- 파란색 벡터와 파란색 점은 x_p를 나타내고 x_n은 null space에 존재하는 어떤 벡터이다. 이 둘을 더하면 초록색 벡터인 완전해를 구할수 있다.
- Null space만 있다면 R^4의 원점을 지나는 subspace가 된다. x_p가 더해졌기 때문에 Null space가 x_p만큼 이동한 형태가 된다. 원점을 지나지 않기 때문에 subspace가 아니다.

3. Rank

- 행렬의 형태와 크기, rank에는 어떤 관계가 있을까?
  - m x n크기의 rank r을 가지고 있는 행렬 A가 있다고 하자 (m: row의 수, n: column의 수, r: rank의 수) rank는 r≤m, r≤n을 만족한다.
  - r=n일 때를 Full column rank 라 하고, r=m일 때를 Full row rank 라 한다.
  - Full column or Full row rank일 때, 해에 관해 무엇을 암시하는지, Null space에 대하여 무엇을 말하고 있는지, complete solution에 대하여 무엇을 말하는지 각각의 case에 대해서 살펴보자

1) Full column rank (r=n)

- r=n이며, 모든 column이 pivot을 가지고 있다. 그렇기 때문에 free variable이 없다.
- free variable이 없기 때문에 각 column의 선형 조합으로 0을 만들 수 있는 해 x는 오직 zero vector 뿐이다.
- 예시
    - 마지막 행렬이 A의 Reduced row echelon form이다.
    - row3와 row4는 row1과 row2에 dependent하기 때문에 row3와 row4는 소거를 통해 영벡터가 되었다. row3와 row4는 row1과 row2의 선형 조합으로 만들어진다.
    - 따라서 independent한 row는 row1과 row2뿐이다.
- Ax=b의 해는 아예 존재하지 않거나 유일한 해(unique solution)가 존재한다.
  이 해는 free variable을 모두 0으로 만들어서 구한 particular solution를 의미하며, 행렬 A는 free variable이 없기 때문에 해가 존재할 경우 바로 특수해가 된다.
- 해가 존재하기 위해서는 b가 A의 column들의 linear combination으로 만들 수 있는 값이어야 한다.
- 아래와 같이 A의 column space에 존재하는 해들의 경우에는 각 b에 대한 particular solution 혹은 unique solution이 존재한다.

2) Full row rank (r=m)

- r=m이며 모든 row가 pivot을 가지는 경우이다.
- 이 경우에는 Ax=b에서 모든 b에 대해 항상 해가 존재한다.
- 예시

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & -5 & -17 & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \\ 0 & -5 & -17 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{17}{5} & \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$

- 마지막 행렬이 행렬 A의 Reduced row echelon form이다.
- col1과 col2가 pivot columns을 나타내며 Identity matrix의 형태를 띈다.
- col3과 col4는 free column을 나타낸다.
- row의 숫자와 rank의 숫자가 같기 때문에 zero rows는 없다.

- 따라서 free variable이 두 개가 존재하기 때문에 항상 해가 존재하며 special solution이나 Null space해도 존재한다.

3) Full row and column rank (r=m=n)

- r=m=n이며 square matrix이면서 full rank인 경우이다.
- 예시

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - 행렬 A는 2x2크기의 square matrix이다. A에 대한 Reduced row echelon form은 단위 행렬과 같은 것을 알 수 있다. 이 경우엔 A는 역행렬을 가질 수 있다.
  - 이 경우에 null space는 zero vector만 존재한다.
  - b에 대한 unique solution이 존재한다.

4) Rank에 따른 해와 상관관계 정리한 표

r: rank, m: row의 수, n: column의 수

	r=m=n	r=n<m	r=m<n	r<m, r<n
Reduced row echelon form	$R = I$	$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$ (I,F는 섞일수 있음)	$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (I,F는 섞일수 있음)
해	A**x**=b에 대해 오직 하나의 해만 존재	0 or 1 solution	1 or ∞ solution	0 or ∞ solution