Lecture11. Matrix Spaces; Rank 1; Small World Graphs

▼ 목차

1. 행렬공간 (matrix spaces)

- 행렬공간은 어떤 의미에서 새로운 벡터 공간이라고 할 수 있다. 행렬 공간은 3x3크기의 모든 정방행렬(square matrix)을 의미한다.
  A new vector space $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ all 3x3 matirces

- 행렬공간을 벡터공간이라고 할 수 있는 이유는 벡터공간에 대한 조건을 만족하기 때문이다. 이 행렬들끼리 선형결합을 해도 같은 공간에 위치한다.
  행렬 M_1, M_2가 있다고 할때, 임의의 상수 c1, c2를 각각 곱하여 더해도 결과 행렬은 원래의 M과 같은 차원의 공간에 위치한다.
  $some\ Matrix\ space\ case\ with\ M_1\ :$
  $$c1M_1 + c2M_2 = c1 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + c2 \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

- 행렬끼리 곱하게 되면 공간은 달라진다. 행렬끼리의 곱셈은 다른 공간을 만들게 된다.
  $Different\ Matrix\ space\ case\ with\ M_1\ :$
  $$M_1M_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

2. 행렬공간의 기저(basis), 차원(dimension), 부분공간 (subspace)

- 3x3 크기의 행렬M은 부분공간(subspace)을 가진다. M의 부분 공간은 아래와 같은 행렬들을 가질 수 있다.
  - 3x3 대칭 행렬(Symmetric Matrix)
  - 3x3 상삼각행렬(Upper triangular Matrix)
  - 3x3 대각 행렬(Diagonal Matrix)
  위의 부분 공간 행렬들의 기저(basis)는 어떤 것인지, 차원(demension)은 무엇인지, 원래 행렬M의 차원은 무엇인지 알아보자

1) Basis of M

- 기저(basis)에 대한 정의를 다시 살펴보자
  - 기저 벡터들은 선형 독립(Linearly independent)이어야한다.
  - 기저 벡터들의 조합을 통해 해당 공간내에 어떠한 벡터라도 만들 수 있어야한다.

- 이전 강의에서 차원은 행렬의 rank와 같다고 배웠지만 rank는 행렬 안의 벡터들이 정의할 수 있는 차원을 의미한다. 즉, M이 3x3일 때 rank가 3이라면 M의 row나 column vector들 끼리의 조합으로 표현할 수 있는 공간의 차원을 의미하는 것이다.

- 여기서 말하는 행렬 공간의 차원은 **3x3 크기로 한정된 행렬 M을 하나의 벡터로 간주하고 그 행렬이 표현할 수 있는 공간을 알고자 하는 것이다. 따라서 3x3크기의 M에 대한 차원은 M을 구성하고 있는 원소의 개수가 될 것이다. 그러므로 M의 차원은 9가 된다.**

- M의 차원이 9이므로 M의 기저 역시 9개가 될 것이다. M의 기저는 다음과 같다.

$$\text{Standard basis for } M:$$

$$\text{demension of } M: 9$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

  총 9개의 기저 행렬이 위와 같이 나왔다. 1과0으로만 구성된 기저를 Standard basis라고 한다. 3x3 크기 행렬의 어떠한 형태라도 만들 수 있다. 결국 행렬 M은 실질적으로 9차원 공간이라고 할 수 있다.
  9차원의 숫자들을 column vector 대신 행렬로 표현했다고 생각하면 편할 것 같다.

2) Symmetric matrix as a subspace of M

- 대칭 행렬(Symmetric matrix)은 M의 부분 공간이고 S라고 하자.

- 대칭 행렬은 아래와 같이 대각선 원소들을 기준으로 아래와 위의 원소들이 같은 값을 가지는 형태이다.

$$\text{Symmetric matirx } S : S = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

- 대칭 행렬 S에 M의 standard basis중 아래의 3개가 포함된다.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- S의 나머지 기저 행렬은 다음과 같다.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
위의 S에서 b, c, e는 각각 같은 값을 가지고 있기 때문에 위와 같은 기저가 존재한다.

- 기저가 6개라는 것은 **대칭행렬 S의 차원은 6**이라는 뜻이다. 위의 기저들의 조합을 통해 대칭 행렬 공간에 존재하는 어떠한 행렬도 만들 수 있다.

3) Upper triangular matrix as a subspace of M

- 상삼각행렬(Upper triangular matrix)은 M의 부분 공간이고 U라고 하자.
- 아래와 같이 대각 원소들을 기준으로 위쪽에만 원소들이 존재하는 형태를 띈다.
$$\text{Upper triangular matirx } S : S = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

- 상삼각행렬 U에 M의 standard basis중 아래의 6개가 포함된다.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **6개의 기저를 가지고 있다는 것은 상삼각행렬의 차원이 6**임을 의미한다. 위의 기저들의 조합을 통해 상삼각행렬 공간에 존재하는 어떠한 행렬도 만들 수 있다.

4) Diagonal matrix as a subspace of M

- 대각 행렬(Diagonal matrix)은 M의 부분 공간이고 D라고 하자.
- 대각 행렬은 위에서 살펴봤던 S와U로 정의할 수 있다. 이들의 교집합을 보는 것이다. 아래와 같이 대각행렬의 원소인 a,d,f만 남게 된다.
$$\text{Symmetric and Upper triangular} \rightarrow \text{Diagonal}$$
$$\text{dimension of } D = 3$$

$$S \cap U = D \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

- 대각행렬은 **3개의 원소만 있기 때문에 차원이 3**이다.

▼ S와 U의 합집합은 어떨까?

- $\text{Symmetric or Upper triangular} \rightarrow ?$
  $$S \cup U = ? \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a’ & b’ & c’ \\ d’ & e’ & f’ \\ g’ & h’ & i’ \end{bmatrix}$$
- 위의 식과 같이 두 행렬의 합집합은 성립이 될까? 정답은 성립이 되지 않는다. 이는 9차원의 공간에 존재하는 6차원의 Line(column이 아닌 row vector로 간주)으로 생각해 볼 수 있는데, 이 둘은 다른 방향으로 존재한다. 따라서 애초에 이 둘을 함께 놓을 수가 없다. 따라서 이 합집합은 부분 공간이 아니다.
- 따라서 S와U를 이용하여 부분공간을 정의하려면 둘을 더하면 된다.
  $\text{Symmetric} + \text{Upper triangular} \rightarrow \text{M}$
  $\text{dimension of } S + U = 9$
  $$S + U = M \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a’ & b’ & c’ \\ d’ & e’ & f’ \\ g’ & h’ & i’ \end{bmatrix}$$
- 위의 식은 S의 원소들과 U의 원소들을 더해 조합을 한 것이다. 이렇게 **대칭행렬과 상삼각행렬의 조합을 통해 모든 3x3 크기의 모든 행렬 M을 만들 수 있다.** 따라서 **두 행렬의 조합은 M의 부분 공간이 되며 S와 U의 조합의 차원은 9가 된다.**

- 3x3크기의 행렬 M에 대한 부분 공간(subspace)을 차원(Dimension)의 측면에서 정리해 보면 다음과 같다.
  dim(S) = 6
  dim(U) = 6
  dim(S ∩ U) = 3
  dim(S + U) = 9
  dim(S)+dim(U) = dim(S ∩ U) + dim(S + U)
- 대칭 행렬의 차원은 6, 상삼각행렬의 차원은 6이다. S와 U의 교집합, 즉 대각 행렬의 차원은 3이고 S와 U의 조합에 대한 차원은 9다. 여기서 대칭 행렬S와 상삼각행렬 U의 차원의 합은 6+6=12이다.

3. 벡터 공간의 예시

- 미분 방정식(Differential Equation) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$의 해는 다음과 같은 것들이 될 수 있
  $y = cos(x), y = sin(x),\ y = e^{ix}$
  다. $y' = -sin(x), y' = cos(x),\ y' = ie^{ix} \qquad \cdots(1)$
  $y'' = -cos(x), y'' = -sin(x),\ y'' = -e^{ix}$
- 해를 대입해서 풀어보면 다음과 같다.
  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
  $y'' + y = 0 \qquad \cdots(2)$
  $-cos(x) + cos(x) = 0$
  $-sin(x) + sin(x) = 0$
  $-e^{ix} + e^{ix} = 0 \cdots$
- 식 (1)은 식 (2)의 해 공간(solution space)를 나타낸다. 이는 다시말하면 **식 (1)의 해들은 식 (2)의 미분방정식(Differential equation)의 영공간(Null space)을 나타내는 것**이다.
  식 (1)의 각 해들(cos, sin, e, ...)은 null space의 각각의 해에 해당한다.
- 미분방정식의 null space의 완전해(complete solution)은 sin과 cos만을 가지고 다음과 같이 정의할 수 있다.
  $y = c_1cos(x) + c_2sin(x) \qquad \cdots(3)$
  sin과 cos은 기저(basis)이다. 위의 식의 cos과 sin의 선형 조합은 미분방정식의 해공간(solution space)인 null space를 형성(span)하며 이들은 독립(independent)이다.
- **결과적으로 우리는 미분방정식를 Ax=0으로 볼 수 있으며, 식 (3)를 null space를 정의하기 위한 special solution이라고 할 수 있다. Special solution은 두 개이다. 따라서 차원(dimension)도 역시 2이다. 사실 차원이 2일 수밖에 없는 이유는 미분방정식이 2차(second order)이기 때문**이다.
  e^{ix},e^{-ix}도 기저가 될 수 있다. 기저는 무수히 많이 존재한다. 여기서 우리는 선형미분방정식(Linear differential equation)과 선형대수(Linear algebra)사이의 연결점을 찾을 수 있다.

> 📌 **선형미분방정식(Linear differential equation)을 푼다**는 것은 **방정식의 해공간(solution space)에 대한 기저(basis)를 찾는 것**이다.
> 한 가지 중요한 것은 **미분방정식의 sin, cos과 같은 기저들을 벡터라고 부를 수 있다**는 것이다. 이것이 가능한 것은 **이 기저들 각각에 상수를 곱하고 더한 선형 조합**(Linear combination)이 **가능하기 때문**이다.
> 결국 **선형 대수(Linear algebra)의 기저(basis), 차원(dimension), span 등과 같은 개념**들이 **m by n 행렬들에서 쓰이는 것 보다 더 넓은 역할**을 하는 것이다.

4. Rank 1 행렬 (rank 1 matrices)

- 아래의 행렬 A는 rank가 1인 행렬이다.
$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

- row1이 [1 4 5]이고, row2가 row1의 두 배인 [2 8 10]이다. 이렇게 되면 row1과 row2는 서로 종속(dependent)이며 같은 선상에 위치한다. col1, col2, col3도 마찬가지이다. col2와 col3는 col1에 상수 4, 5를 곱한 것과 같기 때문에 col1과 일직선상에 위치해있다. 따라서 **rank 1인 행렬이 표현할 수 있는 공간은 1차원이며 직선**이다.

- A의 row space의 기저(basis)는 row1이다. column space의 기저는 col1이다. 따라서 A의 row space와 column space의 차원(dimension)은 1로 같다.
$\text{basis of } C(A) : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\text{basis of } C(A^T) : \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$
$\dim C(A) = \text{rank} = \dim C(A^T)$

- 이 기저들의 곱으로 원래의 rank 1 행렬 A를 만들어낼 수 있다.
$\text{Rank 1 matrix: } A = uv^T$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} = A$
column space의 기저와 row space의 기저 순으로 곱했더니 원래의 rank 1 행렬 A가 만들어졌다.

> 📌 **어떤 column vector와 어떤 row vector를 column x row순으로 곱하면 반드시 rank 1행렬 A가 만들어진다.**

- **rank 1행렬은 벽돌 건물로 치자면 집짓기블록(building block)과 같은 것**이다. 즉 모든 행렬에 있어서 가장 작은 기본 단위의 요소와 같다는 것이다.

- 예를 들면 5 x 14크기의 행렬을 얻었다고 했을 때, 이 행렬의 rank가 4라면 4개의 rank 1 행렬의 조합으로 이를 표현할 수 있다. 즉, 원래의 행렬을 5 x 14크기의 A라고 했을 때, A의 rank는 4이기 때문에 5 x 14크기의 rank 1행렬 4개의 조합으로 A를 표현할 수 있는 것이다. 이렇게 원래의 행렬을 rank 1행렬들로 분해하여 표현할 수 있기때문에 rank 1행렬들을 building block이라 표현하는 것이다.
$\text{A is a matrix of rank 4}$
$\text{U11-U4 are matrices of rank 1}$
$A_{5\times14} = U1_{5\times14} + U2_{5\times14} + U3_{5\times14} + U4_{5\times14}$

5. Rank 1행렬에 대한 부분 공간 (subspaces for rank 1 matrices)

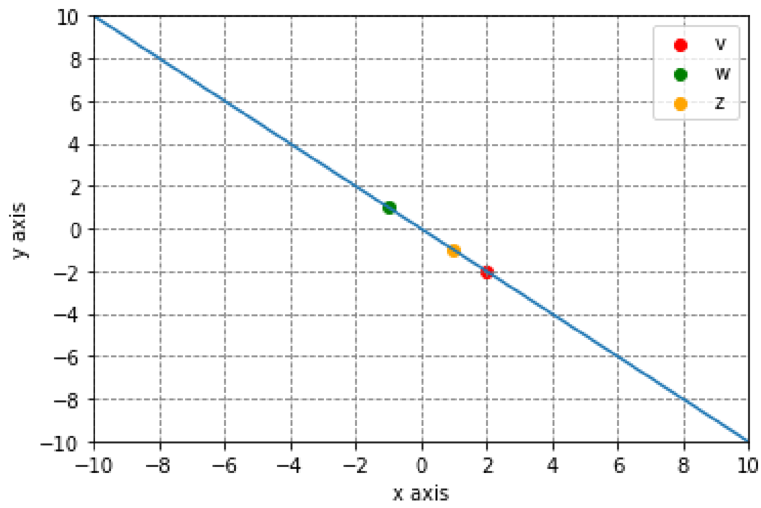
- 위에서 예를 들었던 5x14크기의 행렬 A에 대해 생각해보자. 5 x 14크기의 rank 4인 행렬 A는 부분 공간을 가지는가? 5 x 14크기의 모든 행렬을 M이라고 가정해보자.
  $\mathrm{M} = \mathrm{all}\ 5\mathrm{x}14\ \mathrm{matrices}$
- 전체집합 M중에서 rank가 4인 행렬들을 생각해봤을 때, 이들은 M의 **부분 공간이 아니다**.
- M과 같은 크기(5 x 14)를 가지며 rank가 4인 행렬들을 더했을 때, 이들은 rank가 4가 안 될 수 있다. **부분 공간이 되려면 스칼라곱(scalar multiplication)과 행렬 끼리의 덧셈 연산에 닫혀있어야(closed) 하며 영벡터를 포함해야한다**.
  즉, 어떤 rank 4 행렬 U와 또 다른 rank 4행렬 K를 선형 조합(Linear combination)연산을 했을 때 그 결과가 같은 공간에 있지 않을 수 있다는 말이다.
  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} rank\ A = 2$$
- 아래의 3x3 크기의 행렬 A와 B를 보자. $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} rank\ B = 2$
  $$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 14 \\ 4 & 12 & 18 \\ 4 & 9 & 14 \end{bmatrix} rank\ A + B = 3$$
  A와 B 행렬의 rank는 각각 2이다. 그러나 A+B의 rank는 3이 되어 원래의 rank 2의 차원에서 벗어나게 된다. 따라서 부분공간(subspaces)이 아니다.

1) In R4 cases

- 4차원 공간인 R4의 경우를 생각해보자. R4 공간상의 모든 벡터는 아래와 같이 4개의 component를 가지는 벡터로 표현할 수 있다.
  $$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$
- R4의 부분 공간을 위의 식과 연관지어 다음과 같이 정의해보자.
  $S = all\ v\ in\ R^4\ with\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$
  위의 식에서 S는 R4의 부분공간이다. 스칼라곱(scalar multiplication)과 덧셈 연산(addition)에 닫혀(closed)있기 때문이다. 즉 벡터 **v**
  에 어떤 상수를 곱해도 0이 되고, 혹은 같은 공간에 존재하는 **v**
  와 **w**에 임의의 상수를 곱하여 더해도 여전히 같은 공간에 존재한다. **이때의 v는 어떤 행렬 A의 null space이다**.
- **R2**의 경우로 예를 들어보자.
  $S = all\ v\ in\ R^2\ with\ v_1 + v_2 = 0$

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},\ w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ z = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- v, w, z의 각 벡터의 원소들의 합은 0이다. 이들을 좌표평면위에 표현하면 아래와 같다.



- R2의 경우에서 각 벡터들의 원소들의 합이 0인 경우를 그래프로 표현한 것이다. v, w, z의 벡터들이 하나의 라인을 형성하는 것을 볼 수 있다. 이 벡터들이 이와 같이 하나의 라인을 형성하는 것은 이들이 행렬 A=[1 1]의 null space이기 때문이다. 즉 위 그림의 v, w, z는 A=[1 1]행렬의 null space의 해(solution)인 것이다. (A는 rank 1인 행렬이고 따라서 1차원 행렬이다.)
- 주요 부분공간에 대한 차원과 기저(basis)는 다음과 같다.
  - 차원(dimension) in R2
    - row space: r=1
    - null space: n-r = 2-1 = 1
    - column space: r=1
    - left null space: m-r = 1-1 = 0
  - 기저(basis) in R2
    - row space: [1 1]
    - null space: [1 -1], [-1 1], ...
    - column space: R1
    - left null space: [0], empty
- 다시 R4의 경우를 보자. R4의 경우도 마찬가지다. 처음 두식에서 얘기하는 벡터들은 R4에서 어떤 행렬A의 null space이고 그 A는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$Av = 0$$

- R4에서의 rank 1인 행렬과 Ax=0의 null space를 연결시킬 수 있다. R4일때의 차원은 rank와 밀접한 관련이 있다. row space와 column space는 rank의 수인 1과 같고, null space와 left null space의 경우엔 각각 n-r, m-r과 같다. (Lecture10참고)
- row space의 기저는 첫 번째 row인 [1 1 1 1]그대로이다.
- null space의 기저를 알아보자. 무수히 많은 null space에 대한 기저가 존재하겠지만 **lecture 7**에서 다뤘던 special solution을 구할 수 있다. R4에서 null space의 special solution은 아래와 같다.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{special solutions of null space:}$$
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
- 위의 식에서 pivot을 제외한 나머지 column의 component들이 free variable이다. 이 free variable들을 하나씩 1로 설정하고 나머지 component들을 0으로 설정한 뒤, Ax=0에 대해서 풀면 null space의 special solution을 구할 수 있다.
- column space의 기저는 어떨까? 그저 R1이다. [1] [1] [1] [1]의 선형 조합으로 정의되는데, 어떤 상수들을 곱하고 이들을 더해도 단지 상수값이 나올뿐이다. 즉 c1[1]+c2[1]+c3[1]+c4[1]=c 결국 R1의 값으로 정의할 수 있다.
- Left null space의 경우엔 어떨까? A의 전치 행렬에 대한 null space이므로 그 형태는 아래와 같을 것이다.
$$N(A^T):$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
위의 식을 만족시키는 x는 0밖에 없다. 따라서 Left null space는 0밖에 존재하지않는 0차원의 공간이다.
- 지금까지의 내용을 정리해보면 다음과 같다.
    - **차원(dimension) in R4**
        - row space: r=1
        - null space: n-r = 4-1 = 3
        - column space: r=1

        - left null space: m-r = 1-1 = 0
    - **기저(basis) in R4**
        - row space: [1 1 1 1]
        - null space: [-1 1 0 0], [-1 0 1 0], [-1 0 0 1]...
        - column space: R1
        - left null space: [0], empty
- R4에서의 주요 부분공간들의 차원을 살펴보면 row space의 차원은 rank 인 1이고 null space의 차원은 column의 수 n에서 rank를 뺀 n-r=3이 된다. 따라서 row space와 null space의 차원의 합은 1+3=4이다.
- column space의 차원도 역시 rank인 1이고, left null space의 경우엔 row의 수 m에서 rank를 뺀 m-r=1-1=0이다. 따라서 column space와 left null space의 차원의 합은 1+0=1이다.
- 이렇게 부분 공간의 각 차원들은 결과적으로 원래의 행렬 A의 차원을 나타낸다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m = 1 \times n = 4$$

$$= dim(C(A)) + dim(N(A^T)) \times dim(C(A^T)) + dim(N(A))$$

$$1 + 0 \times 1 + 3$$