Lecture7. Solving Ax=0: Pivot Variables, Special Solutions

▼ 1. Ax=0의 Null space 계산

▼ 1) Ax=0

- 3x4크기의 행렬 A이 다음과 같을때 행렬 A의 row와 column에 대해 살펴보자

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

- Column 2는 column 1x2인 것을 알 수 있다. 따라서 column 1, column 2는 dependent이다.
- Row 1과 row 2를 더하면 row 3가 된다. 따라서 row 3는 not independent이다.
- Null space를 구하는 방법은 행렬 A를 소거하는 것이다.
    - 소거 과정에서 null space를 변화시키지 않는다는 것이다. Column space는 바꾸겠지만 결과적으로 해의 집합인 Null space는 바뀌지 않는다.
- 소거를 해보면 다음과 같은 과정으로 이루어진다.
- Step1

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} {\color{blue}1} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdots (row2 = row2 - 2 * row1) \\ &= \begin{bmatrix} {\color{blue}1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \cdots (row3 = row3 - 3 * row1) \\ &= \begin{bmatrix} {\color{blue}1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Step2

$$= \begin{bmatrix} {\color{blue}1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & {\color{blue}0} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

    - 두번째 pivot의 값이 0이다.
    - 만약 이 두 번째 pivot의 아래의 원소가 0이 아닌 값을 가진다면 row exchange를 통해 pivot값을 바꾸면 되지만 이 예시에서는 0이기 때문에 column 2에서의 소거를 진행할 수 없다. 즉 두 번째 pivot은 column 2에 없다.
    - column 2는 column 1에 dependent하기 때문에 pivot이 없다. 즉 두 column이 같은 선상에 위치한다는 의미이다.
- Step3
    - 세 번째 column의 두 번째 row부터는 0이 아닌 값이 존재한다. 결국 두 번째 pivot은 2가 될 것이다. 두 번째 pivot을 기준으로 아래의 원소들을 0으로 만들자.

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- U행렬은 **Upper triangular matrix**를 의미한다. 그러나 이 결과 행렬은 삼각형 모양이 아니라 계단 형태이다. 이러한 형태를 **echelon form**이라 한다.

- 소거를 통해 알아낸 행렬 A의 pivot의 개수는 2이다. pivot 개수 2는 행렬 A의 Rank를 의미한다.

> ⭐ **임의의 행렬 A에 대해 U행렬을 얻기 위해 행렬 A를 소거한다. 소거 과정에서 pivot의 개수를 알아낼 수 있는데 이때 pivot의 개수가 바로 행렬 A의 Rank이다.**
>
> **Rank는 시스템 행렬 A의 Linearly independent인 row혹은 column vector의 수를 나타낸다.**
> **이 Rank는 소거 과정에서 나타나는 pivot의 개수와 일치한다.**
>
> **Rank of A = number of pivots**

▼ 2) Ux=0

- A를 소거하여 만든 행렬 U는 비록 A와 비교했을 때 column space는 변했겠지만 해는 동일한 Null space에 존재하기 때문에 Ax=0와 Ux=0의 해는 같은 Null space이다.
- U행렬에서 우리는 pivot column과 free column을 찾아야한다. 소거 과정에서 찾았던 pivot이 있는 column이 pivot column이고, 이를 제외한 나머지 column이 free column이다.
- 구한 U행렬에서 free column은 2번째와 4번째 column이다.
- 해 **x**벡터에 x2와 x4에 임의의 값을 설정하고 Ux=0을 써보면 다음과 같다.

$$Ux = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 위의 행렬을 다시 방정식으로 써보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

- x2와 x4는 1과 0으로 값을 설정하였고 나머지 x1과 x3은 **Back substitution**을 통해 값을 찾으면 x1=-2, x3=0이다.
- x를 써보면 다음과 같고 이 x가 바로 U**x**=0의 해이며 **Null space**이다.

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- U**x**=0에서 구한 해 **x**를 A**x**=0에도 똑같이 적용해도 식이 성립하는것을 볼 수 있다.

$$Ux = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

▼ 3) More solutions

- 위에서 구한 해 이외의 다른 해들은 임의의 상수c를 x에 곱하면 구할 수 있다. 임의의 상수 c가 곱해진 해 **x**는 4차원 공간 R4에서 무한대의 2차원 line을 표현한다.

$$x = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 하지만 위의 식에 있는 x는 A와 U에 대한 모든 Null space를 나타내지 못한다.
- 위에서 구한 x는 임의로 x2=1, x4=0으로 결정했을 때의 해를 구한 것이다. 다른 free variable을 선택했을 때의 해를 구해보면 다음과 같이 x를 구할 수 있다.

$$Ux = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

  - Back substitution을 통해 x3=-2, x1=2를 구할 수 있다.

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - 마찬가지로 U**x**=0에서 구한 해 **x**를 A**x**=0에도 똑같이 적용해도 식이 성립하는것을 볼 수 있다.

$$Ux = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 두개의 해의 **Linear combination을 통해 전체 Null space를 정의할 수 있다**.

$$x = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 구한 두 개의 해는 **임의의 free variable을 설정하여 구한 해이며 이를 special solution**이라 한다. Special solution은 각 free variable마다 존재한다.
- Free variable은 행렬의 column의 개수에서 행렬의 rank를 뺀 만큼 존재한다.

$$Number\ of\ free\ variables\ = n - r$$

▼ 2. Reduced row echelon form

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- U행렬을 잘 보면 세 번째 row가 전부 0인 것을 알 수 있다. row3가 row1과 row2에 종속적이기 때문에 소거를 한 행렬 U의 세 번째 row가 0이 된다.
- U행렬을 아래에서 위쪽으로 소거를 진행하여 간소화 하면 다음과 같다.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

- 마지막에 구해진 행렬이 Reduced row echelon form matrix(기약행사다리꼴 행렬)이다.

> ⭐ **Reduced row echelon form matrix이기 위한 조건:**
> - pivot 원소들은 반드시 1이 되어야 한다.
> - pivot 원소가 있는 column에서 pivot 변수의 모든 아래/위 원소들은 0이 되어야 한다.
> - 각 row는 처음 나오는 pivot 원소를 만나기 전까지 모든 원소가 0이어야 한다.
> - 모든 원소가 0인 row는 반드시 pivot 변수가 있는 row의 밑에 있어야 한다.

- Reduced row echelon form matrix가 가지고 있는 정보들은 다음과 같다.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  - pivot row(row1, row2): 분홍색 박스
  - pivot column(col1, col3): 파란색 글씨
  - pivot row와 pivot column가 겹치는 부분을 보면 identity matrix가 있다.
- U를 소거하여 만든 Rx=0의 해도 역시 동일한 Null space에 존재한다. 앞에서 구한 해를 Rx=0에 적용시켜보면 이를 확인할 수 있다.

$$Ax = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ux = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Rx = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

▼ Another example

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textit{row exchange}]{} \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 3 \\ 0 & \color{blue}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 3 \\ 0 & \color{blue}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

$$U = \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 3 \\ 0 & \color{blue}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 0 & 1 \\ 0 & \color{blue}{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

- 행렬 U에 대한 방정식을 쓰면 다음과 같다.

  $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

- x3=1로 설정한 뒤 back substitution을 통해 나머지 해를 계산하면 $x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이 된다. 여기서 전체 null space를 표현하려면 임의의 상수 c를 곱한 **x**가 된다.

  $$x = c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 이 행렬은 pivot이 두개이기 때문에 rank=2이다. 따라서 free variable은 3-2=1개이다. free variable이 한개이기 때문에 위의 x가 전체 null space를 표현하게 된다.

- 왜 free variable에 임의의 수를 지정할까?
  - pivot variable에 임의의 수를 지정해도 되지만 free variable에 넣는게 계산이 편함