Lecture14. Orthogonal Vectors and Subspaces

▼ 목차

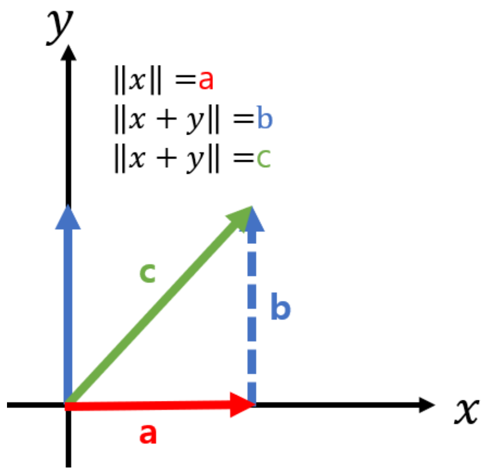
0. 부분 공간(subspace) 복습
1. 직교 벡터(Orthogonal Vector)
2. 부분 공간의 직교(Orthogonality of subspaces)
    1) Orthogonality in row space and null space
    2) Orthogonality in column space and left null space

0. 부분 공간(subspace) 복습

- Lecture10에서 부분공간에 대해서 배웠다.
- 공간은 어떤 행렬 A로부터 만들 수 있는 벡터들이 존재할 수 있는 영역을 의미한다.
- Row space는 어떤 행렬 A의 row 벡터들의 선형 조합(Linear combination)을 통해 만들 수 있는 모든 벡터들의 집합을 의미한다.
- Column space는 어떤 행렬 A의 column 벡터들의 선형 조합으로 만들 수 있는 모든 벡터들의 집합을 의미한다.
- Row space와 Column space의 차원은 rank와 같으며 이 두 공간은 같은 차원을 갖는다.
- Null space는 Ax=0를 만족시키는 모든 해인 x로 이루어진 공간을 의미한다.
- 차원은 행렬 A의 column의 개수에서 rank를 뺀 것과 같다.
- Left null space는 A의 transpose에 대한 null space이며$A^Ty=0$를 만족시키는 해 y의 집합들을 의미하며 row의 수 m에서 rank를 뺀 것이 차원이 된다.

1. 직교 벡터(Orthogonal Vector)

- 두 벡터가 **직교(orthogonal)**하다는 것은 어떤 의미일까? 직교를 다른 말로하면 **수직(perpendicular)**이라는 말과 같다. 즉, 두 벡터 사이의 각도가 90도를 이루는 것을 바로 **직교 벡터**(Orthogonal Vector)라 한다. 이때 벡터는 임의의 모든 n차원에 대해서 해당되는 말이다.
- 아래의 그림에서처럼 두 벡터가 직각삼각형을 이룬다는 말로 생각해볼 수 있다.



- 빨간색 벡터인 **x**는 x축 방향으로 뻗어있다. 파란색 벡터인 **y**는 y축 방향으로 뻗어있다. 이 두 벡터가 이루는 각도는 보다시피 직각이며, 두 벡터를 더했을 때 피타고라스(pythagoras)가 정의한대로 직각삼각형이 만들어진다.

- 3,4…n차원의 경우에는 표현자체가 어렵거나 불가능하다. 이런 경우 내적(dot product)을 통해 n차원의 두 벡터가 직교인지 아닌지 알 수 있다.
  $Dot\ product$:
  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| cos\theta \cdots (1)$
  $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1, x_2, \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n \end{bmatrix} =$
  $0 \cdots (2)$
  - 내적은 식 (1) 혹은 (2)와 같이 표현한다.
  - x의 transpose가 붙은 이유는 보통 벡터는 **x, y, v** 와 같이 하나의 볼드체(Bold) 문자로 표기하는데 **일반적으로 볼드체로 표현되는 벡터들은 column vector를 나타낸다**. 그런데 이를 row vector로 만들지 않으면 곱셈 자체를 할 수가 없다. 벡터나 행렬의 곱셈연산을 하기 위해선 가령 [1x3]과 [3x1]과 같이 중간의 차원이 맞아야 곱셈이 가능한데, column vector 두 개는 [3x1], [3x1]처럼 차원이 맞지 않는다. 따라서 row와 column의 곱셈으로 만들어줘야 하기 때문에 (2)와 같이 transpose를 해주는 것이다. 이렇게 row와 column vector의 곱셈을 해주면 각 벡터의 같은 요소들끼리 곱하여 더해주는 연산을 하게 된다.

- 피타고라스의 정리를 이용해 내적 결과가 0이면 두 벡터가 직교인지 알아보자. 위의 그림의 벡터와 삼각형을 피타고라스에 넣어보면 다음과 같다.
  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \cdots (3)$

- 벡터 **x**의 크기의 제곱과 벡터 **y**의 크기의 제곱은 벡터 **x+y**(삼각형의 대각선)의 크기의 제곱과 같다.
- 실제 계산을 해보면 다음과 같다.
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix}3\\3\\-3\end{bmatrix}$$
$$\overbrace{(\sqrt{2^2+1^2+3^2})^2}^{\Vert\mathbf{x}\Vert^2} + \overbrace{(\sqrt{3^2+3^2+(-3)^2})^2}^{\Vert\mathbf{y}\Vert^2} = \overbrace{(\sqrt{5^2+4^2+0^2})^2}^{\Vert\mathbf{x}+\mathbf{y}\Vert^2}$$
$$(\sqrt{14})^2 + (\sqrt{27})^2 = (\sqrt{41})^2$$
$$14+27=41$$
- 식이 성립하는 것을 알 수 있다. **여기서 주의해야 할 점은 위의 식이 항상 성립하는 것은 아니라는 것이다. 위의 식은 오직 직각 삼각형의 형태처럼 직교(orthogonal)하는 벡터들 사이에서만 성립한다.** y에 직교 하지 않는 다른 벡터를 넣으면 식이 틀리는 것을 알 수 있다.
- 위의 식에서 \Vert \mathbf{x} \Vert는 벡터x의 크기(길이)를 의미한다. 이것을 norm이라고 부르는데, norm에도 L2-norm, L1-norm등 다양한 방식이 존재한다.

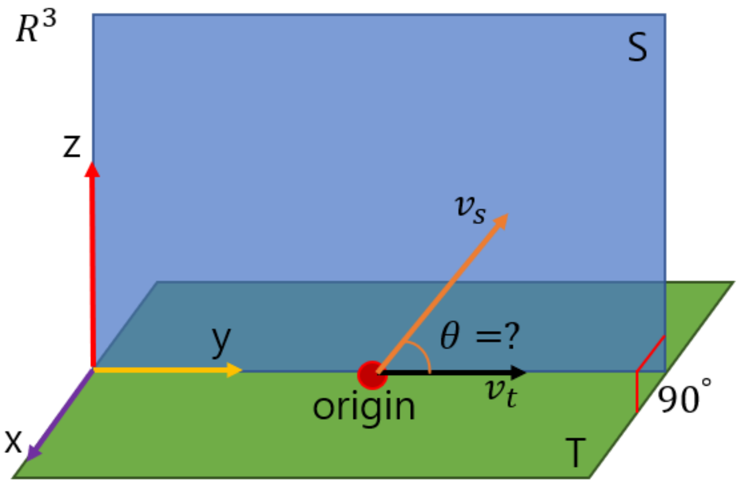
* 식(3)을 다음과 같이 표현할 수 있다.
$$\begin{aligned}\Vert\mathbf{x}\Vert^2 + \Vert\mathbf{y}\Vert^2 &= \Vert\mathbf{x}+\mathbf{y}\Vert^2 \\ &\Downarrow \qquad\qquad \cdots(4) \\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T\mathbf{y} &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})^T(\mathbf{x}+\mathbf{y})\end{aligned}$$
이 식을 이용해 실제로 계산을 해보면 다음과 같다.
$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}$$
$$14+27=41$$
* 식 (4)를 풀어서 정리해보면 내적과 피타고라스의 직각삼각형이 어떻게 연결되어있는지 알 수 있다.
$$\begin{aligned}\Vert\mathbf{x}\Vert^2 + \Vert\mathbf{y}\Vert^2 &= \Vert\mathbf{x}+\mathbf{y}\Vert^2 \\ &\Downarrow \\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T\mathbf{y} &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})^T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T\mathbf{y} &= \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T\mathbf{y} \qquad \leftarrow expansion \\ 0 &= \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{x} \qquad \leftarrow \mathbf{x}^T\mathbf{x}, \mathbf{y}^T\mathbf{y} cancel \\ 0 &= 2\mathbf{x}^T\mathbf{y} \\ 0 &= \mathbf{x}^T\mathbf{y}\end{aligned}$$

- 우변에 있는 식을 전개한다. 이때 좌변과 우변에 $\mathbf{x}^T\mathbf{x}, \mathbf{y}^T\mathbf{y}$가 각각 존재하므로 소거할 수 있다. 이들을 소거하고 나면 좌변은 0이 되고 우변엔 $\mathbf{x}^T\mathbf{y}, \mathbf{y}^T\mathbf{x}$가 남는데, a*b나 b*a나 어차피 똑같기 때문에 같은 것으로 간주할 수 있다. 따라서 $2\mathbf{x}^T\mathbf{y}$가 되고 2는 상수이기 때문에 무시할 수 있다. 이렇게 전개하여 정리한 식이 내적의 식 (2)와 일치하는 것을 볼 수 있다.
- 이렇게 해서 피타고라스의 직각삼각형에 대한 정리로부터 내적(dot product)을 유도하였다. 결론적으로 차원이 동일한 두 벡터를 내적하였을 때 그 결과값이 0이면 두 벡터는 직교(orthogonal)하며 두 벡터사이의 각도는 90도이다.

- 벡터 a와 b를 내적하는데, b가 영벡터(zero vector)라면? 이 두 벡터는 직교(orthogonal)일까? 정답은 **YES**이다. 영벡터인 벡터와 내적하는 모든 벡터는 서로 직교이다. 왜냐하면 **직교에 대한 정의가 내적했을 때 결과가 0인 것으로 되어있기 때문**이다.

2. 부분 공간의 직교(Orthogonality of subspaces)

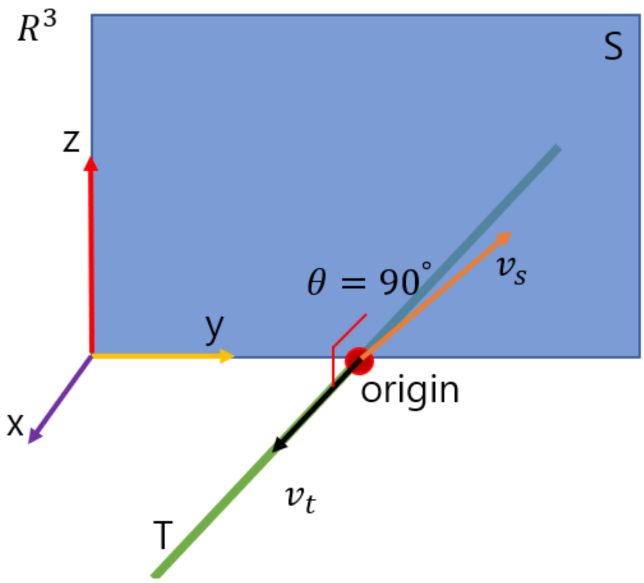
- **부분 공간 S는 부분 공간 T에 직교하다.**라는 정의가 의미하는 것이 무엇일까?



- 위의 그림은 3차원 공간 R3에서 두 개의 부분 공간(subspace) S와 T를 나타낸 것이다. S는 yz평면, T는 xy평면이고 두 평면은 수직(perpendicular)이다. 가운데 빨간 점이 원점이다. 주황색 벡터 Vs는 부분 공간 S상에 존재하는 벡터이고, Vt는 부분 공간 T에 존재하는 벡터이다. **이때 T와 S는 직교라고 할 수 없다.**(**※분명 평면 자체는 직교이지만 이것을 어떤 행렬의 부분 공간으로 봤을 땐 직교가 아니라는 의미다**)
- 위에서 세웠던 부분 공간에 대한 정의를 다시 풀어서 정리해보면 다음과 같다.
<u>- 부분 공간 S는 부분 공간 T에 직교하다.</u>
<u>- S에 존재하는 모든 벡터가 T에 존재하는 모든 벡터와 직교해야 한다.</u>

- 두 부분 공간은 위의 빨간색 글씨의 정의 때문에 직교가 아니다. S와 T는 분명 90도를 이루고 있는 평면이고 Vs는 분명히 S에, Vt는 T에 존재하는 벡터이지만, 두 벡터가 이루는 각도는 약 45도 정도 된다. 또는 Vs가 Vt와 나란히 있을 수도 있다. 만약 Vt가 x축을 향해 뻗어있다면 두 벡터는 직교하지만 그렇지 않는 경우가 있기 때문에 위의 정의에 위배된다.
- 이것을 일반적으로 얘기해보자면 다음과 같다.
  어떤 두 부분 공간이 영벡터(origin)가 아닌 임의의 벡터에서 만난다면, 이 두 부분 공간은 직교(orthogonal)하지 않다.
- 그림에서 두 부분 공간 S와 T가 원점 뿐만 아니라 y축을 따라서 만나고 있는 것을 볼 수 있다. 결국 두 부분 공간이 직교하기 위해선 다음의 두 가지 조건이 충족되어야 한다.
  - **S에 존재하는 모든 벡터가 T에 존재하는 모든 벡터와 직교해야 한다.**
  - **두 부분 공간이 만나는 점은 오직 원점(origin)에서만 만나야한다.**

- 따라서 두 부분 공간 S와 T는 직교가 아님을 알 수 있다. 두 부분 공간이 직교하는 공간이 되기 위해서는 아래 그림과 같은 형태가 되어야 한다.



- 부분 공간 S전체를 직교하는 1D Line 부분 공간 T를 나타낸다. 이때 두 부분 공간이 교차하는 교차점(intersection)은 오직 <u>원점(origin)</u>뿐이다. 부분 공간 S의 어떠한 벡터라도 T의 어떠한 벡터 Vt와는 90도 각도를 이루게 된다.
- 2차원을 가정할 경우엔 두 개의 Line이 90도 각도를 이루면서 서로 원점을 지나게 되면 이 역시도 직교한 두 개의 부분 공간이 된다.

1) Orthogonality in row space and null space

- row space와 null space는 직교(orthogonal)인 이유는 무엇일까?
  null space는 A**x**=0를 만족시키는 모든 해 **x**의 집합이다. A**x**=0를 아래와 같이 써보자.

  $$Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  $$\text{each row operation is the dot prouct}$$

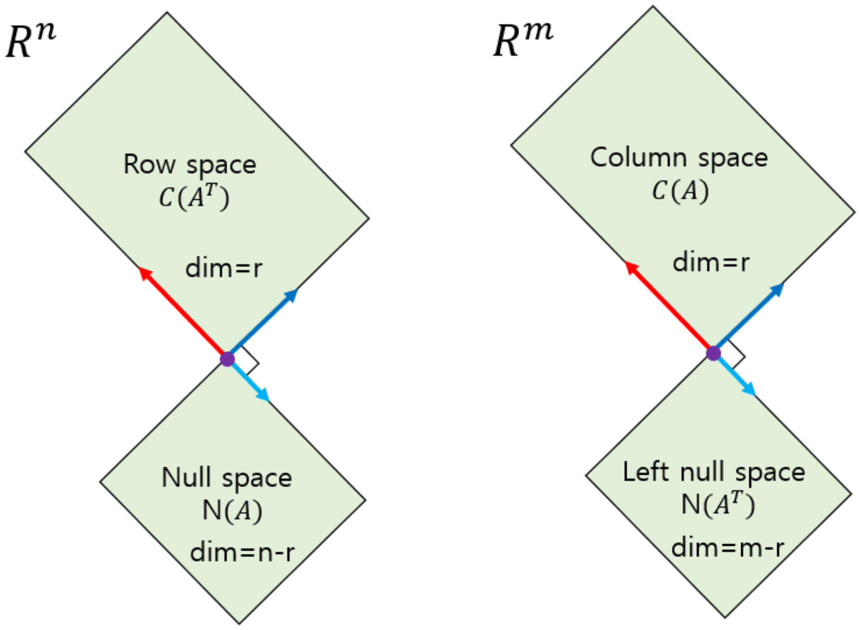
  $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

  $$\vdots$$

  - A의 각 row는 x벡터와 곱해져서 0을 만든다. 즉 **각각의 row와 벡터 x간의 곱만 놓고보면 내적(dot product)와 똑같은 연산**이다. 다시 말하면 row1 연산의 경우 $a11 * x11 + a12 * x21 + a13 * x31 + a14 * x41 = 0$의 연산 자체가 내적이라는 의미다. **모든 row에 대해서 내적을 했을 때 결과가 모두 0이기 때문에 각각의 row와는 직교(orthogonal)**인 것을 알 수 있다.

- row space와 null space가 직교라고 했다. 각각의 벡터가 아닌 row **공간(space)**에 대해서 말이다. 이 말이 의미하는 것은 결국 **row space상에 존재하는 모든 벡터, 즉 row의 선형 결합(Linear combination)을 통해 만들어지는 모든 벡터들과도 직교**라는 말과 같다. 아래 식과 같이 말이다.
  (c_1row1+c_2row2)^Tx=0

- 아래의 그림(Lecture10)을 살펴보면 row space와 null space는 직교하며, 이들은 Rn 차원에 대한 공간에서 다뤄지고 있다. 이때 row space의 차원은 rank인 r차원이고, null space의 차원은 전체 차원 n에서 rank를 뺀 만큼의 차원 n-r이다. **결국 row space와 null space는 전체 공간인 Rn차원의 공간을 두 개의 수직(perpendicular)한 부분 공간으로 나눴다는 말이 된다**. 다시 말하면 **Row space의 차원 + Null space의 차원 = Rn** 이 된다는 뜻이다.



- 예시를 보자.

$$Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots (5)$$

  - 행렬 A는 m=2, n=3이며 rank=1이다. 즉 row space의 차원이 1이고, null space의 차원은 n-r=3-1=2이다.
  - 행렬 A의 rank가 비록 1이지만, 대신 null space의 차원이 2가 되어 결과적으로 Rn차원에는 변함이 없게 되었다. row space의 차원 + null space의 차원 = 3 이 되어 결국 전체 공간인 Rn차원을 두 개의 수직인 부분 공간으로 나눈 것을 알 수 있다.

📌 row space와 null space의 관계를 정리하자면 다음과 같다.

- Null space에 존재하는 모든 벡터들은 row space에 존재하는 모든 벡터들에 직교(orthogonal)한다.
- Null space와 row space는 Rn차원에서 서로 직교하는 보완재(complements)이다.

2) Orthogonality in column space and left null space

- column space와 left null space도 row, null space와 마찬가지로 서로 직교(orthogonal)하며 보완(complements)해준다.

- 차이점이 있다면 전체 공간이 Rm공간이며 이를 서로 직교하는 column space와 left null space로 나눈다는 것이다. **Column space의 차원 + Left null space의 차원 = Rm**

$$A^Tx = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{each row operation is the dot prouct}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

  - 식 (5)를 기준으로 m=2, r=1이므로 column space의 차원은 1, left null space의 차원은 m-r=2-1=1이다.

> column space와 left null space의 관계를 정리하자면 다음과 같다.
>
> - Left null space에 존재하는 모든 벡터들은 column space에 존재하는 모든 벡터들에 직교(orthogonal)한다.
> - Left null space와 column space는 Rm차원에서 서로 직교하는 보완재(complements)이다.