Lecture1. The Geometry of Linear Equations

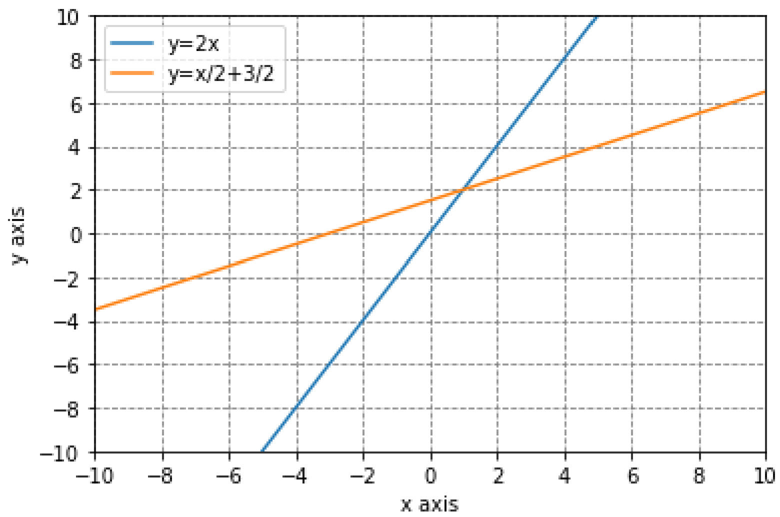
- The Fundamental problem of linear algebra: solve a system of linear equations

▼ **1. Row picture:** Row 방향으로 방정식을 따져 보는 것

▼ **1) 2차원 공간에서의 예시**

$$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$
$$-x + 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

- 각각의 방정식은 2차원 공간상에서 아래와 같이 표현된다.

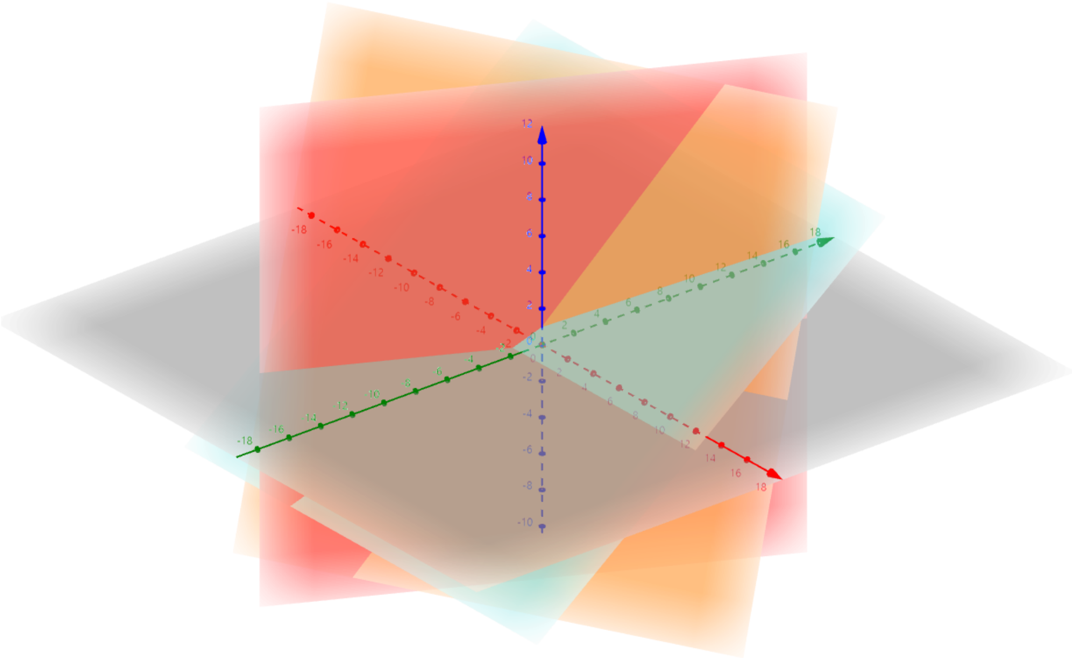


- 주어진 x,y는 일차식이기 때문에 직선형태이다.
- 두 방정식의 교점은 (1,2)이고 이것이 이 system의 해이다.

▼ **2) 3차원 공간에서의 예시**

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y - z &= 3 \\ -3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

- 각각의 방정식은 3차원 공간상에서 아래와 같이 표현된다.



빨강:2x-y=0 주황:-x+2y-z=0 파랑:-3y+4z=4

- 위의 3평면은 한점(x=0,y=0,z=1)에서 만나게 된다.
- 그 점이 바로 시스템의 해이다.

> 💡 3차원의 시스템에서 하나의 Row picture는 하나의 평면을 형성하고 특수한 경우 아니라면 **한 점에서 만남**
> **이 한점이 시스템의 해임**

> ⭐ 목표: row equation들이 만나는 교점 찾기

▼ **2.Column picture**: 행렬에서 column part를 보는 것

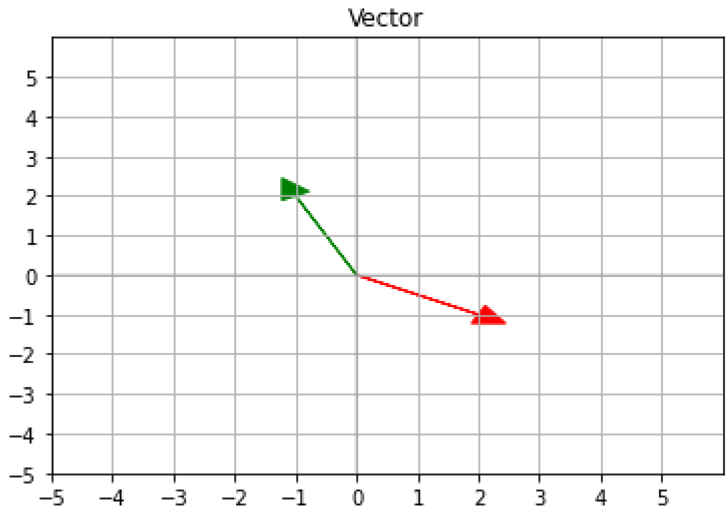
▼ **1) 2차원 공간에서의 예시**

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$ 를 아래와 같이 표현할 수 있음

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

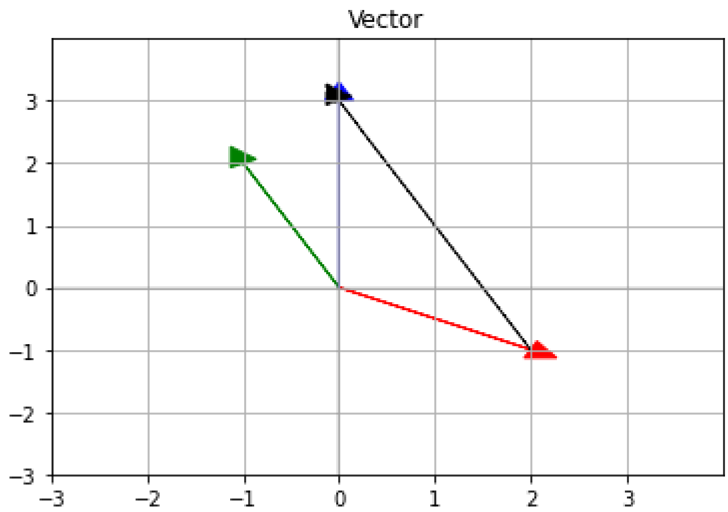
$$x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2} = b$$

- **Linear Combination**(선형결합): 좌변의 벡터에 어떤 상수 x를 곱한것과 어떤 상수 y가 곱해진 것을 더했을때 우변의 결과가 나오는 것이다.
- 이 경우에는 Linear Combination of Columns라 할 수 있다.
- 좌변의 벡터를 그래프에 그려보면 다음과 같다.



빨간색:$\vec{v_1}$, 초록색:$\vec{v_2}$

- $\vec{v_1}$,$\vec{v_2}$에 얼마의 상수(x,y)를 곱해서 벡터 b를 만들 수 있는지 구해야 하는게 목적이다.
- 각 벡터를 표현해보면 다음과 같다



빨간색:$\vec{v_1}$, 초록색:$\vec{v_2}$, 파란색:b, 검정색:시스템의 해

- x=1, y=2일때 v1,v2의 선형 결합 결과가 b의 끝점과 일치하는 것을 알 수 있다.

▼ **2) 3차원 공간에서의 예시**

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y - z &= 3 \\ -3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$x\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}$ 이 식의 좌변이 나타내는 것은 3차원 벡터들의 선형결합이다.

- 어떤 x, y, z의 조합이 우변을 만들 수 있을지 찾아보면 (0,0,1)을 해로 찾을 수 있다.

▼ **Q. Can I solve Ax=b for every b? (Do the linear combinations of the columns fill 3D space?)**

A. Yes.

Column picture를 이용해 만든 linear combination을 활용하여 공간상에 존재하는 모든 b를 만들 수 있음

A. No.

Column이 모두 동일한 평면에 있을 때 새로운 b를 얻을 수 없음

ex) 9차원일때 8번째, 9번째 열이 같은 평면에 존재한다면 구하지 못하는 b가 존재함. 결국 9차원 안에 있는 8차원 평면에 대해서 구해야함

⭐ **목표: 벡터들(v1,v2, … ,vn)의 적절한 Linear Combination 찾기**

▼ **+시스템 행렬A와 x를 곱하는 방법**

▼ **1) Row picture (내적)**

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&5\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$

▼ **2) Column picture (선형결합)**

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$