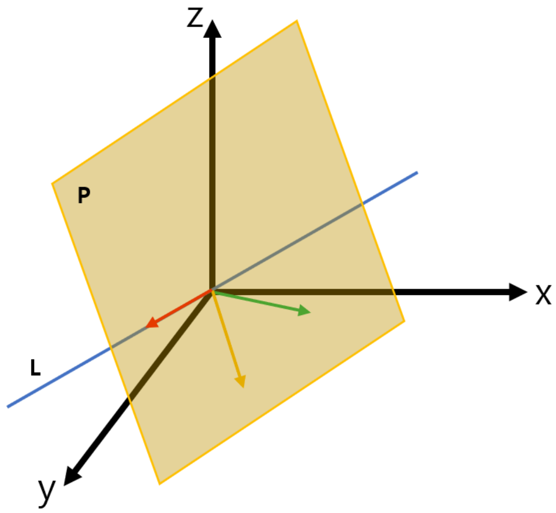
Lecture6. Column Space and Nullspace

▼ Vector space

- 벡터 공간이기 위해서 다음 조건을 만족해야한다.
    - 벡터 공간 내에 존재하는 임의의 벡터 **v, w,** 그 둘 더한 결과(**v**+**w**)는 같은 벡터 공간에 존재해야 한다.
    - 벡터 공간 내에 존재하는 임의의 벡터 **v**에 임의의 상수 c를 곱한 결과(c**v**)는 같은 벡터 공간에 존재해야 한다.
    - 벡터 공간 내에 존재하는 임의의 벡터 **v**, **w**와 임의의 상수 c, d에 대해 모든 경우의 c**v** +d**w** 조합 결과가 반드시 같은 벡터 공간에 존재해야 한다.
- R3의 subspace는 아래와 같이 임의의 직선과 평면이 될 수 있다. 이때 모든 subspace는 반드시 원점을 지나야한다.



- P와 L은 각각 혹은 둘 다가 하나의 subspace가 될 수 있을까? No.
    - $P \cup L = all\ vectors\ in\ P\ or\ L\ or\ both$
    - Linear Combination의 규칙이 성립하지 않기 때문에 subspace가 아니다.
- P와 L의 겹쳐지는 부분은 subspace가 될 수 있을까? Yes.
    - $P \cap L = all\ vectors\ in\ both\ P\ and\ L$
    - 위의 그림에서 P와 L의 교집합은 원점이다. 그렇기 때문에 subspace가 될 수 있다.

▼ **1. Column Space**

- 크기가 4x3인 행렬A를 생각해보자

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- 행렬 A는 3개의 column을 가지고 있고 각 column은 4개의 원소로 이루어져 있고 4차원 공간 R4의 부분 공간이다.
- 행렬 A의 column을 활용해 모든 Linear Combination의 조합을 찾으면 A가 정의하는 column 부분 공간을 채울 수 있다.
- A의 3개의 column의 선형 결합을 통해 R4 전체를 채울 수 있을까? No.
  - ▼ Ax=b는 모든 b에 대해서 해를 가지고 있을까? No.
    - A는 4개의 방정식과 3개의 미지수를 가지고 있다.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

    - 위의 식을 column picture의 형태로 다시 쓰면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

  - 선형 방정식 Ax=b에서 b 벡터가 A의 column의 Linear Combination으로 표현이 가능할 때 Ax=b에 대한 해를 구할 수 있다.
  - 해를 구할 수 있는 b들은 A의 column의 Linear Combination으로 표현된 b들이다.
- A의 첫 번째, 두 번째 column 벡터는 상호 독립적이지만 세번째 column은 첫 번째, 두 번째 column에 종속적이다. 앞의 두 개의 column의 합을 통해 col3를 정의할 수 있기 때문!
  - 첫 번째, 두 번째 column을 **pivot column**이라 한다.
  - 첫 번째, 두 번째 column의 조합을 통해 하나의 평면을 정의할 수 있다. 이때 세번째 column은 이 평면위에 존재하기 때문에 새로운 차원을 정의하는데에 있어 아무 기여를 하지 못한다. 따라서 A의 subspace인 column space는 4차원 공간에서 2차원 공간인 평면을 정의하는데 그친다.

▼ **2. Null Space**

- Null Space는 Ax=0의 해들이 이루는 공간이다. ⇒ 종속인 벡터가 존재한다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- 행렬 A의 null space는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$Null\ Space\ of\ A = all\ solutions\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\ to\ Ax = 0$$

- 행렬 A를 null space를 위한 식으로 써보면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **어떤 Null space든지 반드시 영벡터는 포함된다.**
- A의 col1과 col2를 더하고 col3에 -1을 곱하여 더해주면 그 결과가 영벡터가 된다.
- 또 다른 해는 방금 구한 해에 상수를 곱해주면 모두 해가 된다.

즉 $Null\ Space\ of\ A:\ x = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (c:상수)이고 이를 통해 A의 null space를 정의할 수 있다.

- Ax=0의 해들이 subspace를 이루는지 확인하려면 다음을 확인해봐야한다.
  - if Av=0 and Aw=0 then A(v+w)=0
  - A(c**x**)=0 (상수 c는 앞으로 뺄 수 있으므로 당연히 성립!)
- 0외에 다른 벡터가 존재하면 종속임

▼ Q. b가 임의의 값을 가질 때에도 해에 대한 벡터 공간이 존재할까?

A. No.

이유: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$를 생각해봤을때 여기서 해는 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ or $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$이다. 해들 중에 영벡터는 없기 때문에 즉 원점을 지나지 않기 때문에 이 해들은 벡터공간이 아니다. 따라서 0이 아닌 임의의 벡터 b에 대한 해의 벡터 공간은 존재하지 않는다.