Lecture9. Independence, Basis, and Dimension

▼ 목차

1. Linear independence

▼ Background

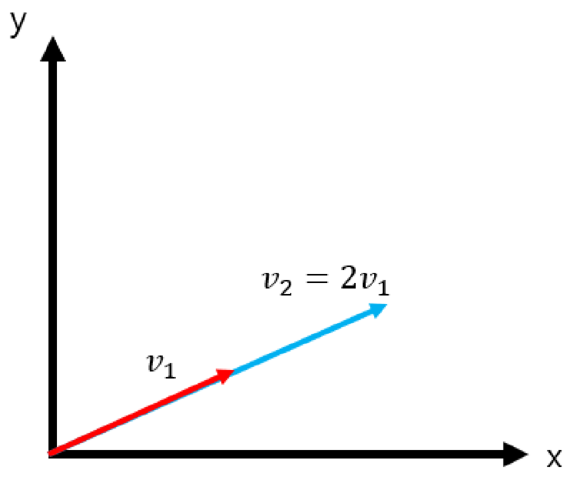
- 어떤 행렬 A의 크기가 m x n이라고 했을때 m<n이라고 가정해보자. 미지수의 개수가 방정식의 개수보다 더 많다는 의미이다. (n: column의 수, m: row의 수)
- 이 경우 행렬 A에 대해서 Ax=0에 대한 0이 아닌 해가 존재한다. Null space가 존재한다는 뜻이다.
- **행렬 A가 m < n인 경우, 반드시 1개 이상의 free variable이 존재하기 때문에 Ax=0에 대한 0이 아닌 해, Null space가 존재한다.** (n-r개의 free variable이 존재한다.)

1) linear independence

- 벡터 x1,x2…xn이 있을때 모든 계수가 0인 경우를 제외하고 어떤 Linear combination으로도 0을 만들수 없다면 이 벡터들은 **Independent(독립)**이다.

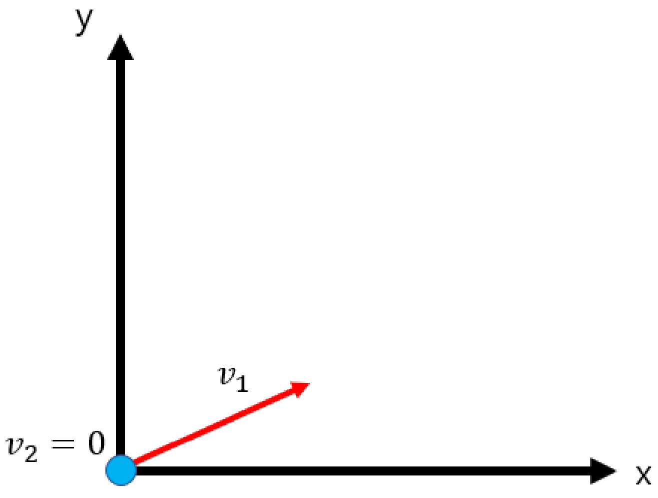
  $$Vectors\ are\ independent\ if\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \neq 0,\ except\ for\ all\ c_i = 0$$

- 임의의 계수 값으로 Linear combination을 했을 때 결과 값이 0인 경우가 발생한다면 x1과 x2는 **dependent(종속)**관계이다.
- 예시1

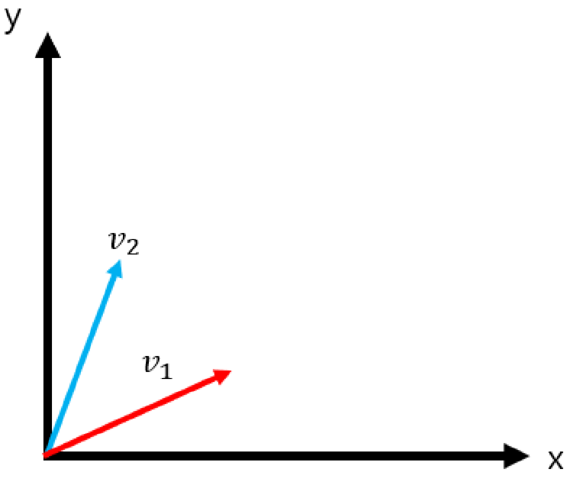


- $2v_1 - v_2 = 0$이기 때문에 v_1, v_2는 dependent이다. 즉 Linear combination을 통해 0이 만들어지기 때문에 v_1과 v_2는 dependent관계이다.

- Linear combination은 벡터는 그대로이고 상수값만 바뀐다. 이것은 벡터의 방향은 그대로이고 크기만 바뀌게 된다는 것이다. 벡터의 크기만 조절하여 0을 만들기 위해서는 벡터의 방향이 같아야한다.
- 예시2

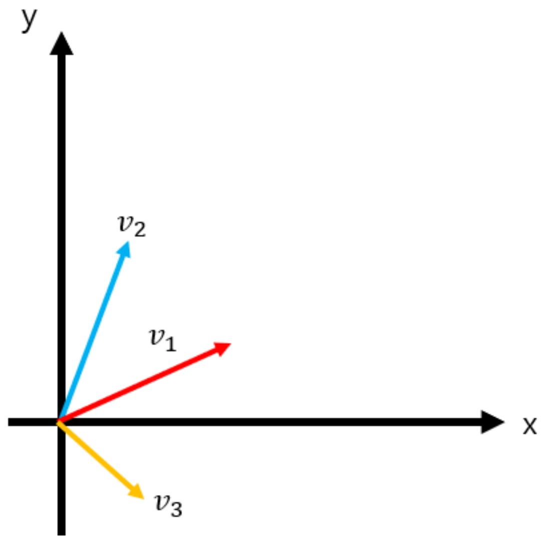


  - v_1에 0을 곱하고 v_2에는 무엇을 곱하든지 0이기 때문에 dependent관계이다.
  - n개의 벡터 중 하나라도 영벡터일 경우에는 dependent관계이다.
- 예시3



- v_1과 v_2를 이용하여 Linear combination를 해도 0을 만들 수 없다. (모든 계수가 0일때 제외). 이 두 벡터를 이용하여 2차원 공간상의 어떤 벡터도 만들수 있기 때문에 이 두벡터는 independent이다.

- 예시4



  - 예시3에 v_3를 추가하였을때 이 벡터들은 dependent관계가 된다.
  - 위의 background를 통해서 m<n인 경우에 관한 내용을 통해 2차원 평면에 3개의 벡터가 있을 경우, dependent임을 확인할 수 있다.
  - 3개의 벡터를 행렬A의 column으로 표현해보면 다음과 같다.
  - x대신 c를 넣어서 Ac=0을 만들어보면 다음과 같다.

$$Ac = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2.5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  - 위의 식에서 c벡터가 null space에 존재할 때 어떤 c값을 통해 Linear combination을 수행한 결과 값이 영벡터가 될 경우 A의 column은 dependent 관계이다.

> 💡 어떤 행렬 A의 column vector가 Linear independence이기 위해선 A에 대한 Null space가 오직 모든 변수가 0인 경우에 대해서만 존재해야 한다 (x1=0, x2=0, ... xn=0).
>
> 어떤 행렬 A에 대해서 A**x**=0식에 대한 Null space가 모든 x가 0일 때를 제외한 다른 경우가 존재한다면, 그 행렬 A의 column vector는 dependent이다.

- 벡터들이 independence인지, dependence인지 판별하기 위한 기준은 다음과 같다.
  - Independence일때
    - 벡터들을 행렬A의 column으로 보고 행렬A의 null space를 확인한다. 만약 이 행렬 A의 null space가 오직 영벡터에만 존재할 경우 이 벡터들은 independence이다.
    - 이때 행렬A의 rank는 column의 수와 같다. (r=n)
    - Free variable이 존재하지 않는다.
  - Dependence일때
    - 벡터들을 행렬A의 column으로 보고 행렬A의 null space를 확인한다. 만약 이 행렬 A의 null space가 영벡터 이외의 다른 값이 존재할 경우 이 벡터들은 dependence이다.
    - 이때 행렬A의 rank는 column의 수보다 작다. (r<n)
    - Free variable이 존재한다.

2. Span

- Linear algebra에서 span은 span a space라고 표현한다. 어떤 공간을 포괄한다는 정도로 생각할 수 있다.
- 예를 들어 두개의 벡터 v_1=[2,3], v_2=[3,2]가 있다고 하자. 이 두 벡터가 어떤 공간을 span한다고 했을때 span은 이 두 벡터의 Linear combination을 통해 만들어지는 공간을 의미한다.

벡터 v1, v2, ... vn이 어떤 공간(space)을 span한다의 의미:

- 벡터들의 가능한 모든 Linear combination으로 공간을 형성하는 것을 의미한다. 이때 형성되는 공간은 벡터에 따라 R^n이 될 수도, subspace가 될 수도 있다.
- Span이라는 것은 벡터들의 모든 가능한 Linear combination에 대한 결과벡터들을 하나의 공간에 몰아 넣은 것을 의미한다. 사용하는 벡터에 따라서 모든 공간을 채울 수도 있고, 2차원에선 선, 3차원 공간에선 평면과 같이 subspace만을 채울 수도 있다.

3. basis(기저)

- Basis for space is a sequence of vectors.
- Basis는 두가지 속성을 가지고 있다.
    - 그들은 independent하다.
    - 그들은 공간을 span한다.
- 예시1
    - 3차원 공간 R^3를 생각해봤을때 R^3에 대한 basis는 무엇일까? 쉽게 떠올릴 수 있는 독립이면서 3차원 공간을 span할 수 있는 basis는 다음과 같다.
    - v_1, v_2, v_3에 어떤 상수들을 곱해서 더해도 영벡터를 만들 수 없기 때문에 (모든 상수가 0인경우 제외) 이 벡터들은 independent이다.
    - v_1, v_2, v_3을 합쳐서 행렬로 만들면 identity 행렬을 볼 수 있다. 이 단위 행렬의 null space는 오직 영벡터이다.
    - v_1, v_2, v_3을 이용해 3차원 공간 전체를 span할 수 있다. 세 벡터의 linear combination을 통해 3차원 공간 상의 어떠한 벡터도 만들어 낼 수 있다는 뜻이다.
    - 따라서 v_1, v_2, v_3는 basis이다. 이 세 벡터들은 실제로 x축, y축, z축을 나타낸다. 이러한 형태를 표준 기저라고 한다.
- 예시2
    - 예시1의 벡터들이 3차원 공간의 유일한 basis는 아니다.

- 식(1)은 두 벡터를 이용해 영벡터를 만드는 상수는 오직 영벡터뿐이기 때문에 independent이다. 하지만 3차원 공간 전체를 span하지 않고 3차원 공간에서의 평면만을 span한다. 따라서 식 (1)은 R^3의 basis가 아니다.
- 식(2)는 세번째 벡터가 첫번째, 두번째 벡터의 합이기 때문에 independent하지 않다. Independent하지 않기 때문에 세번째 벡터는 첫번째와 두번째 벡터가 이루는 평면 상에 존재하고 따라서 3차원 공간 전체를 span하지 않는다. 따라서 basis가 아니다.
- 식(3)은 서로 independent하고 3차원 공간 전체를 span하기 때문에 basis이다.

- 공간의 모든 basis에는 동일한 수의 벡터가 있다.
  - 위의 식(3)처럼 3차원 벡터 세 개로 구성되면서 서로 독립인 어떠한 벡터도 3차원 공간 R3의 기저(basis)가 될 수 있다.

4. dimension(차원)

- 위에서 사용한 벡터들을 다시보면
  - 식(1)은 R^3에 대한 basis가 아니지만 이 벡터들은 독립이며, 이 벡터들의 linear combination을 통해 형성할 수 있는 공간을 span한다. 그렇기 때문에 **3차원 공간의 subspace인 2차원 평면에 대한 기저이다.**
  - 식(2)의 경우 벡터의 수는 3개지만 independent하지 않기 때문에 basis가 아니다.
  - 식(3)의 경우 independent하면서 벡터의 수가 차원의 수와 같기 때문에 basis이다.
- 즉, 2차원의 basis가 되려면 두 개의 벡터가, 4차원의 basis가 되려면 네 개의 벡터가, N차원의 basis가 되려면 N개의 벡터가 있어야한다.

> ⭐ 주어진 공간들에 대한 모든 basis들은 **같은 수의 벡터**를 가진다. 여기서 **벡터의 수가 그 공간의 차원을 의미**한다.

- Column space의 차원
  - 행렬A의 column vector들은 column space C(A)를 span할까?
  - 행렬A의 column vector들은 Independent하지 않다. col4=col1, col3=col1+col2이기 때문에 Dependent이다.

- 따라서 행렬 A의 column vector들은 A의 column space C(A)의 basis가 아니다.
- Pivot column인 col1, col2가 C(A)의 basis이다. col1, col2만 봤을때 Independent 이면서 column space를 span한다. 나머지 column들은 col1과 col2가 이루는 평면에 존재하기 때문에 새로운 차원을 정의하는데 도움을 주지 않는다.
- 따라서 행렬 A의 column space의 기저는 pivot column인 col1과 col2 두 개의 column vector이고, pivot column의 개수는 A의 Rank와 같다. 따라서 A의 rank는 column space C(A)의 차원과 같다.

> ⭐ **어떤 행렬 A의 Rank는 행렬 A의 column space C(A)의 차원이다.**
> $Rank(A) = number\ of\ pivot\ columns\ = Dimension\ of\ C(A)$

- Null space의 차원
    - Free variable 두 개를 1과 0으로 번갈아 설정하여 두 개의 special solution을 계산하면 다음와 같다. (계산법은 Lecture7의 Null space 계산법 참고)

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ (분홍색: free variable, 파란색: pivot variable)

    - 각각 계산해보면 col1-col2+col3+0=0, -col1+0+0+col4=0이 된다.
    - 위의 두 벡터는 Null space에 존재하는 두 개의 해이고, independent이다. 또한 Null space의 차원은 free variable의 개수와 같은데, 행렬 A의 free variable은 두 개이고 서로 independent인 두 개의 Null space vector가 존재하므로 두 벡터는 Null space의 basis이다.
$dim\ C(A) = r$
$dim\ N(A) = number\ of\ free\ variables\ = n - r$