Lecture3. Multiplication and Inverse Matrices

▼ 1. Matrix multiplication

▼ 1) Row x Column

$$\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & b_{12} & \\ & b_{22} & \\ & b_{32} & \\ & b_{42} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & c_{32} & \end{bmatrix}$$

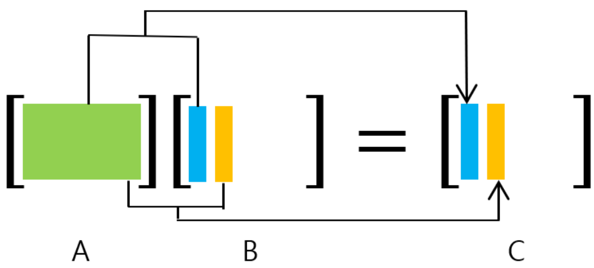
A(3x4) B(4x3) C(3x3)

- AB=C에서 c_{32}는 A의 Row3와 B의 Column2의 곱으로 만들어진다.
  - 이 곱을 A의 Row3와 B의 Column2의 Dot product라고 볼 수 있다.
  - 이 과정을 식으로 써보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c_{32} &= (row3\ of\ A) \boldsymbol{.} (column2\ of\ B) \\ &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{3k}b_{k2} \end{aligned}$$

- A는 3x4, B는 4x3로 모양이 다른데 C는 3x3이다.
  - 곱해지는 행렬중 앞에 위치한 행렬은 m x **n**, 그 다음 행렬은 **n** x p가 되어야한다. 곱의 결과의 모양은 m x p가 된다.
  - 어떤 행렬 둘을 곱한다고 했을 때 n의 크기는 반드시 같아야한다.

▼ 2) Column wise



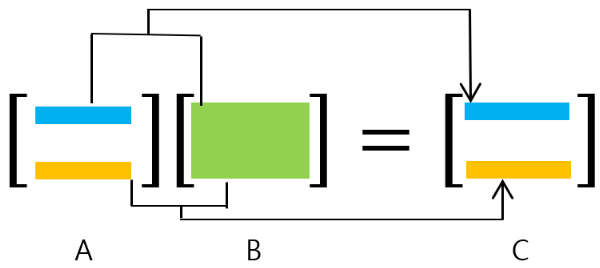
A(**m** x n) B(n x p) C(**m** x p)

- 행렬 A 전체와 B의 각 column 벡터를 곱하면 C의 column이 된다.
- C의 column들은 A의 column들의 조합이라고 생각 할 수 있다.
- $AB(col\ n) = C(col\ n)$

▼ 참고

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 26 \\ 26 \end{bmatrix}$$

▼ **3) Row wise**



A(m x n) B(n x **p**) C(m x **p**)

- 행렬 B 전체와 A의 각 row 벡터를 곱하면 C의 row가 된다.
- C의 row들은 B의 row들의 조합이라고 생각할 수 있다.
- $A(row\ n)B = C(row\ n)$

▼ 참고

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2\\3 & 3 & 3\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}30 & 30 & 30\end{bmatrix}$$

▼ **4) Column x row**

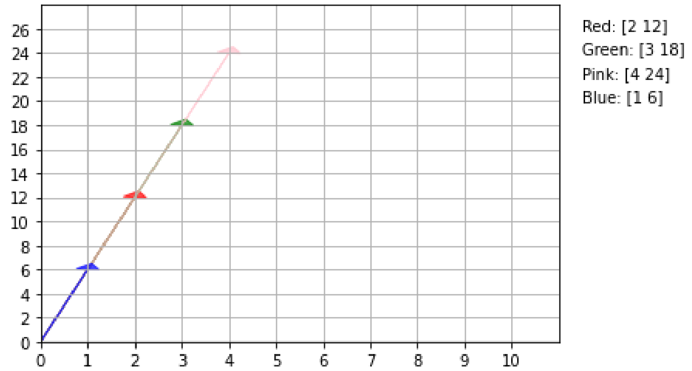
- Matrix multiplication AB는 A의 column x B의 row의 합이다.
- $\begin{matrix}Column\ of\ A & \times & Row\ of\ B\\(m \times 1) & & (1 \times p)\end{matrix}$ 의 결과는 어떻게 될까?
- $\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 12\\3 & 18\\4 & 24\end{bmatrix}$ 이 식에서 A는 3x1, B는 1x2의 row 벡터이다. 이때 결과는 3x2가 나온다.
- 이렇게 나오는 이유?
  - Row wise의 경우
    - $a_{11} \times B(row1) = C(row1) = \begin{bmatrix}2 & 12\end{bmatrix}$
      $a_{21} \times B(row2) = C(row2) = \begin{bmatrix}3 & 18\end{bmatrix}$
      $a_{31} \times B(row3) = C(row3) = \begin{bmatrix}4 & 24\end{bmatrix}$
  - Column wise의 경우
    - $A(col1) \times b_{11} = \begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}$
      $A(col1) \times b_{12} = \begin{matrix}12\\18\\24\end{matrix}$
- 또 다른 예시

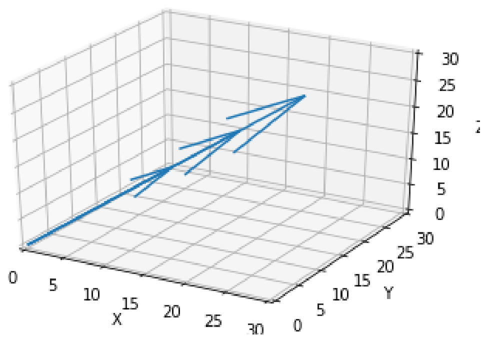
$$\begin{bmatrix}2 & 7\\3 & 8\\4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 12\\3 & 18\\4 & 24\end{bmatrix}$$

  - [0 0]이 곱해지기 때문에 위의 예시와 결과가 같다.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

- C의 모든 row는 B의 row를 따라 같은 선상에 존재하고 C의 모든 column은 A의 column을 따라 같은 선상에 존재하기 때문에 이 식의 결과 행렬 C는 매우 특별하다.
- 정말로 같은 선상에 존재할까?





  - 실제로 그래프에 그려보니 같은 선상에 존재함을 확인 할 수 있었다.

▼ **5) Block multiplication**

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$$

$$A = B = C = (20 \times 20)$$

$$A_1 = B_1 = C_1 = (10 \times 10)$$

- 20 x 20 크기의 행렬이 있다고 가정했을때 이를 10x10 네개로 분할하여 똑같이 행렬 곱셈을 적용해도 같은 결과가 나온다.
- 각 block을 하나의 원소로 생각하고 행렬 연산을 해주면 기존의 결과와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$A_1B_1 + A_2B_3 = C_1$$

$$A_1B_2 + A_2B_4 = C_2$$

$$A_3B_1 + A_4B_3 = C_3$$

$$A_3B_2 + A_4B_4 = C_4$$

▼ **2. Inverse matrix**

▼ **1) Invertible, nonsingular case**

- Square matrices A의 역행렬이 존재한다고 가정했을때 행렬 A에 역행렬을 곱해주면 identity matrix(단위행렬)가 된다.

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

- A가 square matrices이기 때문에 앞뒤 어디에 곱해도 결과가 같다.

▼ 2) No inverse, singular case

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

- 위의 행렬은 역행렬이 존재하지 않는다.
- 존재하지 않는 이유?
  - 행렬 A의 행렬식이 0이 되기 때문에 역행렬이 없다.
  - 행렬 A의 column picture를 살펴봤을때 행렬 A의 각 column이 같은 선상에 위치해있다. A의 rank는 1이고 linearly independent인 차원의 개수가 A의 차원보다 작기 때문에 역행렬이 없다.
  - **Ax=0을 만족하는 x를 찾을 수 없다면 역행렬은 존재하지 않는다. (모둔 백터가 선형 독립이다.)**

▼ 3) Gauss Jordan idea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

- 행렬 A에 역행렬을 곱하면 그 결과는 identity matrix I가 되어야한다.

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 위의 식을 column wise로 생각해보면 A\times A^{-1}(col_j) = I(col_j) 이다. 따라서 다음 식과 같이 분리해서 생각할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 소거법을 활용하여 역행렬을 구해보면 다음과 같다.

$$AI = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$E_{21}AI = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

  - A는 upper triangular matrix가 되었지만 Gauss는 다시 여기에서 소거를 멈추지 않고 반대로 아래에서 위로 진행을 했다.

$$E_{12}AI = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] = IA^{-1}$$

  - 결과를 보면 원래 A가 있던 자리는 I가 되고 원래 I가 있던 자리는 A의 역행렬이 되었다.
  - 이때 Elimination matrix E_{21}, E_{12}를 곱해서 나오는 최종적인 **E행렬이 A의 역행렬**이다.

$$E_{21}E_{12} = E$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- 검증을 위해 E행렬과 A행렬을 곱해보면

  $$EAI = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] = IA^{-1}$$

  E행렬이 A행렬의 역행렬임을 알 수 있다.