Lecture2. Elimination with Matrices

- 선형대수를 다루는 모든 sw는 해를 구할 때 elimination을 사용한다.

▼ **1. Elimination**(소거법)

- **Pivot**: 핵심숫자, 0은 pivot이 될 수 없다.

▼ **1) Success case**

3개의 방정식과 3개의 미지수로 구성된 시스템
$$\begin{aligned} x+2y+z&=2 \\ 3x+8y+z&=12 \\ 4y+z&=2 \end{aligned}$$

- **위의 시스템 소거하기**

$$A=\begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)R_1+R_2} \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

파란색: pivot

- **소거가 완료된 행렬 u**

$$u=\begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 1 \\ 0 & \color{blue}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \color{blue}{5} \end{bmatrix}$$

파란색: pivot

  - 행렬의 형태를 보면 pivot들 기준으로 아래쪽 원소값이 모두 0인 **Upper triangular Matrix**이다.

▼ **2) Failure case**

- 실패하는 경우: Pivot이 0인 경우, x 부분을 소거하려고 했는데 y까지 소거된 경우
- **해결 가능한 case**

$$\begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)R_1+R_2} \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 1 \\ 0 & \color{blue}{0} & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{Row\ exchange} \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 1 \\ 0 & \color{blue}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \color{blue}{-2} \end{bmatrix}$$

파란색: pivot

  - Row2와 Row3을 교환하여 elimination이 가능하도록 만든다.
  - 다음 방정식의 pivot column의 값이 0이 아니어야 사용할 수 있다.

- 해결 불가능한 case

$$\begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)R_1+R_2} \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_2+R_3} \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 1 \\ 0 & \color{blue}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \color{blue}{0} \end{bmatrix}$$

파란색: pivot

  - 마지막 행렬의 R3의 Pivot이 0인데 교환할 만한 방정식이 없기 때문에 문제를 해결할 수 없다.
  - 이 경우 시스템 A는 **not invertible matrix**이다.

⭐ **Elimination의 목표: 시스템행렬 A를 u로 만드는 것**

▼ **2. Back substitution**(후방 대입법)

$$Ab = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$ Augmented matrix (부가적인 것을 붙였다는 뜻)

- 위의 시스템을 소거하면 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(-3)R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(-2)R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right] = uc$$

- 소거하여 만든 u와 c를 방정식 ux=c의 형태로 써보면 다음과 같다.

$$x + 2y + z = 2$$
$$2y - 2z = 6$$
$$5z = -10$$
$$ux = c$$

- **Back substitution 적용**
  - 세번째 방정식은 미지수가 z 하나이기 때문에 쉽게 구할 수 있다. (z=-2)
  - 구한 z를 두번째 방정식에 대입하여 y를 구할 수 있다. (y=1)
  - 구한 y,z를 첫번째 방정식에 대입하여 x를 구할 수 있다. (x=2)
  - 따라서 시스템의 해는 x=2, y=1, z=-2이다.

⭐ **맨 아래 방정식에서부터 해를 풀어나가는 방식**

▼ **3. Elimination matrices**

- Row의 선형결합을 이용하여 Elimination matrix를 구할 수 있다.

▼ Row의 선형결합

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 30 & 30 \end{bmatrix}$$

- **Step 1.**

$$E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & & \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

  - 첫번째로 소거해야할 Row는 두번째 Row이다.
  - Row1, 3은 그대로 유지되어야한다.

- **Step 2.**
  - Step 1과 같은 방식으로 Row3의 y축 원소를 제거한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- Step 1,2를 간단하게 표현하면 $E_{32}(E_{21}A) = u \Rightarrow (E_{32}E_{21})A = u \Rightarrow EA = u$ 이다.
  - 행렬간의 교환법칙은 성립하지 않고 결합법칙은 성립한다.

▼ **+Permutation matrix** (치환행렬)

- Matrix의 Row나 Column을 바꾸는 역할을 한다.
- **Row change**

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \\ 1\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

- **Column change**

$$AP = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} & 1\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$