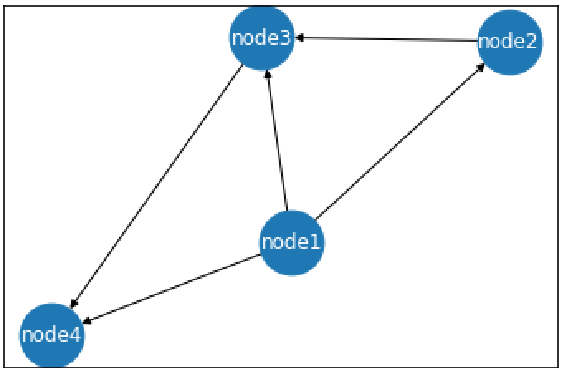
Lecture12. Graphs, Networks, Incidence Matrices

▼ 목차

1. 그래프 (Graph)

1) Graph: Nodes and Edges

- 그래프(Graph)는 어떤 객체(object)들과 그들을 연결짓는 선(Line)을 통해 그들 사이의 관계를 나타내는 구조를 의미한다.
- 각 객체를 노드(node)(혹은 정점(vertex))라 하고 각 노드들을 연결하는 선을 에지(edge)라 한다.



- 에지(edge)는 각 노드들을 연결시켜주는 역할을 한다. edge는 방향을 가지거나 방향을 가지지 않는 경우도 있다. **방향이 있는 edge로 구성된 그래프를 우리는 directed graph라 하며 위의 그림과 같다. 방향이 없는 edge로 구성된 그래프는 undirected graph라 한다.**

2) Incidence Matrix

- 위의 그래프는 node가 총 4개이고 edge가 총 5개이다. node끼리 연결된 방향은 화살표로 표현되어 있다. 이러한 그래프의 노드와 그들의 연결관계를 행렬(Matrix)로 나타낼 수 있다. 이러한 그래프의 연결 관계에 대한 그래프를 우리는 **근접행렬(Incidence Matrix)**이라 한다.

- 위의 그래프에서 node의 개수를 n, edge의 개수를 m이라고 했을 때, n=4, m=5가 된다. node의 개수인 n을 column으로, edge의 개수인 m을 row로 하여 5x4 크기의 근접행렬을 만들 수 있다.

- 이때 그래프의 edge는 방향을 가지고 있기 때문에 근접 행렬의 각 원소들은 방향을 나타내야한다. 근접 행렬에 방향을 나타내는 방법은 다음과 같다. edge1의 경우 node1에서 출발하여 node2로 향한다. node1이 출발점, node2가 끝점이 되는데, 출발점은 -1, 끝점은 1로 지정하는 것이다. 이렇게 하여 위의 그래프에 대한 근접 행렬을 만들면 아래와 같다.$\text{Incidence Matrix of Graph:}$

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} n1 & n2 & n3 & n4 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} edge1 \\ edge2 \\ edge3 \\ edge4 \\ edge5 \end{array} \end{array}$$

- 행렬 A의 row를 중심으로 생각해보면 각 node들 간의 관계를 -1과 1로 정의해 준다. 이 근접행렬(incidence matrix)만 있으면 그래프를 모르더라도 그릴 수 있다.

- node1은 node2와 node3로 각각 연결되어 있다. 이때 node2는 다시 node3로 연결되어 있다. 이렇게 node들이 연결되어져 있는 **부분 그래프(subgraph)**를 **Loop**라고 한다.

- Loop를 찾는 방법은 연결되어있는 edge들을 따라가며 찾는 방법도 있으나, 좀 더 쉬운 방법은 그래프에서 **부분 면적**을 찾는 것이다.

- 예시의 그래프는 loop를 3개 가지고 있다. (edge1, 2, 3에서 loop1, edge3, 4, 5에서 loop2, edge1, 2, 4, 5에서 loop3) 이러한 loop와 loop들의 위치는 그래프에서 중요한 역할을 한다.

- edge1,2,3는 loop1이다. A의 row1, 2, 3에 해당하는데 이 row들은 **종속(dependent)**이다. row1과 row2를 더했을 때 row3가 나오는 것을 보면 쉽게 알 수 있다. 여기서 알 수 있는 사실은 **어떤 그래프의 loop에 대한 근접행렬(Incident matrix)의 row들은 선형종속(linearly dependent)의 특성을 갖는다는 것**이다.

2. 전자회로의 그래프 모델링(Graph modeling of an electronic circuit)

1) Potential difference and null space of A

- 만약 node가 100개이고 이들을 연결하는 edge가 180개라고 가정해보자. 이에 대한 Incidence matrix는 180x100의 크기를 가질 것이다. 이때 이 행렬은 굉장히 많은 0을 가지게 될 것이다. 왜냐하면 Incidence matrix에서는 하나의 row에서 오직 2개의 non-zero원소들만 나타나기 때문이다.

- 결국 그래프의 규모가 커질수록 근접행렬(Incidence matrix)의 원소들은 행렬의 크기에 비해 적은 비율로 나타날 것이다. 즉 희소(sparse)한 원소를 가지게 되는 것이다. 이러한 형태의 행렬을 **희소 행렬(sparse matrix)**이라 한다.

- 희소 행렬은 내부적으로 어떤 **구조(structure)**가 형성된다. 만약 실제 문제에 대한 그래프라면, 가령 실제 어떤 전자회로에 대한 그래프라면 그 회로에 대한 구조가 Incidence matrix에 드러나게 될 것이다. 이러한 구조를 파악하기 위해 우리는 선형 대수적으로 행렬을 분석할 수 있다. 이에 대한 첫 번째 방법은 바로 **Incidence matrix의 null space를 찾는 것이다**.

- 위의 행렬 A의 column은 독립인지 알아보기 위해 null space를 계산해보자.
  Null space를 계산하기 위해선 Ax=0를 풀면 된다. 아래와 같이 Ax=0의 꼴로 다시 써보자.Null space of A:

$$Ax = \begin{array}{c} \begin{matrix} n1 & \;\;n2 & \;\;n3 & \;\;n4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 이해를 돕기 위해 위의 그래프를 **전자 회로(electronic circuit)**라고 생각해보자. node들을 전자 회로에서 전압을 측정하는 임의의 지점이라 생각해보자.
  Incidence matrix와 연관지어 생각해보면 Ax=0에서 변수인 x=[x1, x2, x3, x4]들은 각 node에서의 **전압(potentials)**이다. 이때 행렬 A를 x에 곱하게 되면 우리는 각 node들의 **전위차(potential differences)**를 계산할 수 있게 된다.

- 언제 모든 node들의 전위차(potential differences)가 0이 되는지다. 즉 null space를 찾는 것이다. 물론 모든 x가 0인 경우에 당연히 전위차가 0일 것이다. 그러나 x가 모두 0이라는 것은 회로에 아예 전류가 흐르지 않는 다는 말이기 때문에 별 의미가 없다. 따라서 회로에 전류가 흐를 때를 가정하고 x의 값, null space를 구해야한다.

- 영벡터도 null space에 존재하긴 하지만, A의 column이 dependent이기 때문에 영벡터 이외의 해가 존재한다. 어떻게 column이 dependent인지를 바로 알 수 있을까? 이유는 영벡터 이외의 해를 바로 찾을 수 있기 때문이다. **행렬 A를 보면 하나의 row에 -1과 1이 딱 한 번씩만 나온다. 이 말은 column 끼리 다 더하면 반드시 0이 된다는 소리이**

고, 결국 x1=1, x2=1, x3=1, x4=1이면 column끼리 그대로 더한 것과 같기 때문에 이 것이 해가 된다.

- x가 1로만 이루어진 벡터라는 것은 결국 각 node의 potential이 constant하다는 것을 의미한다. 즉 각 node의 전압(potential)이 constant하다면, node들의 전위차 (potential difference)는 0이 된다. 이것이 Ax=0인 null space의 해(solution)이다.
- Null space는 Ax=0의 해의 공간을 의미하므로 x는 해의 집합을 가질 것이고, 어떤 1차원의 line이 해가 된다. x에 상수 c를 곱한 것이 4차원 공간에서 [1, 1, 1, 1]을 지나는 line이고 결국 우리가 찾는 **최종적인 null space는 4차원 공간상에 존재하는 1차원의 line이** 되는 것이다. 이때의 null space의 **기저(basis)는 x=[1, 1, 1, 1]**이 된다.

$$\text{Null space of A:}$$
$$\dim \mathrm{N(A)} = 1$$
$$x = c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c\\c\\c\\c\end{bmatrix}$$

- 위의 회로에서 각 노드들의 전압(potentials)은 오직 임의의 상수 c에 의해 동일하게 결정된다. 즉, 위의 식의 null space에 의하면, 임의의 상수값 c를 설정하면(ex: c=1, 3, 56...) 모든 노드의 전압이 한 번에 동일하게 설정된다. 각 노드들간에 전위차가 없다는 뜻이다. 전자 회로에서 전위차는 전류의 흐름을 만들어낸다. 그러나 전위차가 없다면 어떠한 전류의 흐름도 일어나지 않는다. 결국 위의 그래프 모델에서는 모든 노드들의 전압을 올리거나 내릴 수 있는 단 하나의 파라미터(parameter)만이 존재하는 것이다.
- **이러한 경우에 우리는 전위차를 만들어주기 위해 node들 중 하나를 ground로 설정하고 나머지를 풀 수 있다**. 이를 테면 x4=0으로 만든다음 나머지 x1, x2, x3를 푸는 것이다. 이렇게 하면 Incidence matrix A의 col4는 신경쓰지 않아도 된다. 나머지 column을 가지고 해(solution)를 구하면 된다.

$$x_4 = 0, ground$$
$$Ax = x_1\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\-1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\-1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

node들 중 하나를 0으로 설정한다는 것은 전압(potential)을 0으로 만든다는 것이고 다른 node들의 기준 전압(base voltage)이 된다는 것이다. 이제 나머지 3개의 node에 대한 전압값에 대해서 해를 구하면 된다. 지금 예에서는 x4=0로 설정했지만(ground), x1=0, 혹은 x3=0처럼 어떤 node를 ground로 만들어도 상관 없다. 이 행위가 결국 전위차(potential difference)를 만들게 되고 전류의 흐름을 만든다.

- 이와 같이 하나의 node를 ground로 만들고 나머지 3개의 node를 이용해 해를 구하는 것은 **Incidence matrix의 rank가 3이기 때문**이다. 앞의 식과 같이 그래프 행렬 A의 null space를 구했고, null space의 차원(dimension)이 1임을 알았다. **Lecture 10**에서 배웠듯이 null space의 차원은 dim N(A)=n-r이다. 여기서 n=4이고 r은 가우스 소거를 통해 pivot을 살펴보면 알 수는 있지만 아직은 모르는 상태다. 그러나 소거를 하지 않아도 n-r = 4-r=1으로부터 r=3임을 알 수 있다. 따라서 A의 column space(or row space)의 차원(dimension)은 3이고 결국 col1, col2, col3가 독립(independent)이라는 뜻이다. x1이나 x2, x3를 ground로 설정해도 마찬가지이다.
$$dim\ N(A) = n - r, (n = 4)$$
$$dim\ N(A) = 1$$
$$dim\ N(A) = 4 - r = 1$$
$$\downarrow$$
$$\therefore rank(A) = r = 3$$
$$dim\ C(A) = r = 3$$

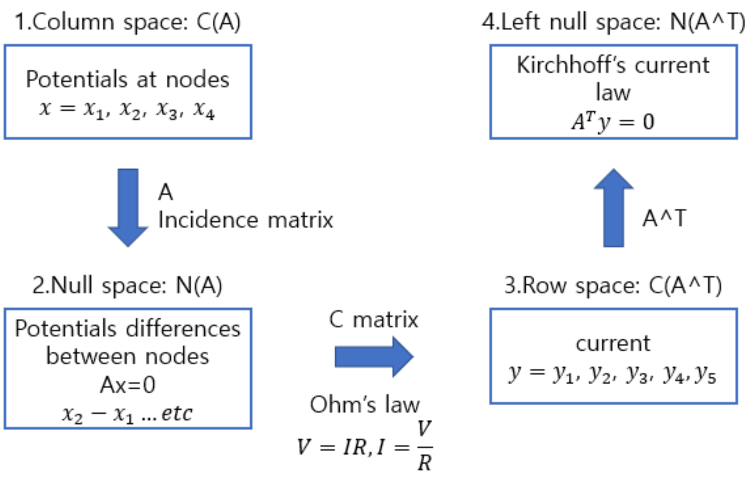
- A의 4개의 변수(node의 전압(potential)을 의미)중 어떤것이던 처음 3개는 **독립 (independent)**이며 유의미하다(pivot variable을 의미). 그러나 마지막 4번 째 변수는 그렇지 못하기 때문에(free variable처럼) 보통 이 독립인 변수를 제외한 마지막 변수를 0으로 설정하고 나머지 변수에 대해서 해를 계산한다.

2) Kirchoff's current law and null space of A transpose

- A의 transpose의 null space를 구해보자. $N(A^T)$는 우리가 잘 알고 있는 키르히호프의 전류 법칙(Kirchhoff's current law)과 관련이 있다.
$$Null\ space\ of\ A^T : N(A^T)$$
$$A^Ty = 0 \Rightarrow \underset{4\times 5}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{5\times 1}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Left null space의 차원인 dim $N(A^T)$를 알기 위해서 행렬의 row와 column의 수인 m과 n, rank 알아야한다. Left null space의 차원은 m-r이다. 여기서 m=5이고 r=3이다. A transpose에서는 m은 여전히 5이지만 column의 수를 나타낸다. 따라서 m-r=5-3=2가 Left null space의 차원이 된다. 사실 m-r=2라는 것은 A transpose 행렬에서 소거를 했을 때 free column으로 나타나는 부분들이다. free column이 2개이고 이것이 결국 Left null space의 차원이 되는 것이다. Left null space의 차원은 2차원이다.
$$dim\ of\ N(A^T) = m - r = 5 - 3 = 2$$

- 전자회로에 대한 그래프 모델에 대한 관계는 아래 그림과 같다.



- 우리는 가장 먼저 그래프를 그렸고 미지수 **x**=[x1, x2, x3, x4]를 정의했다. 이 **x**가 나타내는 것은 각 node에서의 potential을 나타낸다. 그 다음 그래프의 node사이의 연결 관계를 Incidence matrix로 정의하였다. 미지수 **x**에 Incidence matrix A를 곱해줬을 때, 방정식을 얻을 수 있고 이것이 의미하는 것은 node들 간의 전위차(potential difference)이다. Incidence matrix A를 곱해서 node들의 전압(potential)에서 node들 간의 전위차(potential difference)에 대한 방정식 A**x**=0을 만들어낸 것이다.
- 그 다음으로 정의한 것은 **y**=[y1, y2, y3, y4, y5]이다. **y**는 회로에 흐르는, 즉 그래프에서 edge에 흐르는 전류(current)를 나타낸다. C행렬이 전위차와 전류 사이를 연결시켜주는 행렬이라고 하자. C를 통해 전위차에서 전류로 연결되는 관계를 우리가 잘 아는 **옴의 법칙(Ohm's law)**으로 생각할 수 있다. edge에 흐르는 전류는 전위차(potential difference)가 클 수록 커지는데, 이때 edge 자체가 가지고 있는 저항이 전류의 양에 영향을 준다. 저항이 크면 edge에 흐르는 전류의 양도 작아지고, 저항이 작으면, 즉 전도율(conductance)이 높아지면 전류의 양도 커지는 것이다. 옴의 법칙은 결국 얼마나 많은 영의 전류가 흐르는지에 대한 관계를 설명해 주는 것이다. 이러한 전위차와 전류의 관계를 우리는 C행렬을 통해 연결시킬 수 있다.
- 마지막 단계는 A의 transpose의 null space, 즉 Left null space를 구하는 것이다. 이 **Left null space가 의미하는 것**이 바로 **키르히호프의 전류 법칙(Kirchhoff's current law)**이다.

- A transpose의 null space인 Left null space를 구해보자.

$$Null\ space\ of\ A^T : N(A^T)$$

$$A^Ty = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} row1 \\ row2 \\ row3 \\ row4 \end{array} \begin{bmatrix} -y_1 - y_3 - y_4 \\ y_1 - y_2 \\ y_2 + y_3 - y_5 \\ y_4 + y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- -y1-y3-y4=0에서 음의 부호(-)는 node에서 전류가 흘러나가는 것을 의미한다. **즉 node1에서 전류가 다른 곳으로 나가는 edge1, edge3, edge4를 각각 의미**한다. <u>row1이 의미하는 것은 node1에서 흘러나간 전류의 총 합은 0</u>이다. node1에 흐르는 알짜 전류(net current)가 0이라는 뜻이다.

- row2를 보면 y1-y2=0인데, y1=y2이다. 즉 node2에 흘러들어온 전류 y1과 node2에서 흘러나가는 전류 y2는 같다.

- row3는 y2+y3-y5=0인데, y2+y3=y5이다. node3로 흘러들어오는 전류y2와 y3의 합은 node3에서 흘러나가는 전류 y5와 같다.

- row4를 보면 node4로 흘러들어가는 y4와 y5의 총 합이 0이다.

- 이렇듯 Left null space의 위의 식은 **"들어온만큼 나간다"**는 키르히호프의 전류 법칙을 잘 설명해주고 있다. 이것은 결국 **평형방정식(balance equation)**이다.

* Left null space의 해(solution)를 구해보자. 지난 강의에서 배운 방법들을 이용해 풀 수도 있지만 키르히호프의 전류 법칙을 이용해 Left null space의 기저(basis)를 구할 수 있다. **바로 Loop 단위로 node들 사이에 edge로 표현된 전류의 흐름을 따져서 기저를 구하는 방법**이다.

  - Left null space의 차원은 2인 것을 위에서 구하였다. 따라서 기저는 두 개의 special solution이어야 한다.

  - **Loop1**을 보자. 방향은 처음에 정하기 나름이므로 y1을 1로 정하자. 그 다음 y2는 1이다. 왜냐하면 node1에서 출발한 전류가 node2를 거쳐 node3로 흘러가는 것이기 때문이다. 또는 위의 식 row2에 의해 y1=y2 이기때문에 1로 설정해야 한다.

  - y3는 -1이다. Loop1에서 보자면 node1에서는 1만큼의 전류가 흘러나갔다. 키르히호프의 전류법칙에 따르면 전류가 나간 만큼 들어와야 하기 때문에 y3로는 전류가 들어와야 한다. 또한 현재 node3에 와 있다. 그런데 y3는 node3 입장에서 들어오는 전류이다. 지금까지 node 입장에서 나가는 전류를 1로 설정했기 때문에 y3는 -1로 설정해야 한다. loop1을 기준으로 기저를 찾고 있기 때문에 y4와 y5는 0으로 만들어준다. 이렇게 해서 구한 **special solution인 Left null space는 y=[1, 1, -1,**

0, 0] 이다. 위의 row1, 2, 3, 4를 통해 검산해보면 special solution이 맞는지 확인할 수 있다.

- 똑같은 방법으로 loop2를 기준으로 구해보면 y3=1, y5=1, y4=-1이고 나머지는 y1=0, y2=0이다. 따라서 y=[0, 0, 1, -1, 1]이다. 위의 row들을 통해 검산해보도록 하자. Left null space의 기저(basis)는 아래와 같다.

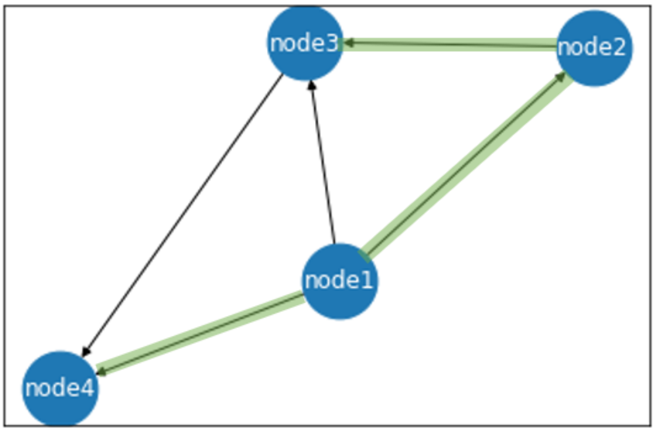
  $$Basis\ for\ N(A^T)$$
  $$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- node1, node2, node3, node4에 이르는 큰 loop가 기저가 될 수 있지 않을까? 우선 해를 구해보자. y1=1, y2=1, y5=1와 같이 설정하고 y3=0이다. 마지막으로 y4=-1로 설정하면 아래와 같은 큰 loop에 대한 left null space의 해가 구해진다.
  $$solution\ for\ big\ loop\ of\ N(A^T)\ but\ NOT\ independent\ solution$$
  $$, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
  그렇다면 위에 있는 해를 세 번째 기저로 쓸 순 없을까? 그럴 수 없다. loop1과 loop2를 기준으로 구한 두 special solution을 더하면 위에 구한 해가 된다. 즉 <u>dependent한 해이기 때문에 사용할 수 없다.</u>

3) Graph without a loop: TREE

- A^T의 column space인 row space를 한 번 살펴보자. 앞서 row space의 차원은 rank=3임을 알았다. rank=3이라는 것은 A^T를 소거하여 row reduced echelon form을 만들었을 때 pivot column이 3개이고 free column이 2개라는의미이다.

- **pivot column은 col1, col2, col4이다**. 독립인 column에 대한 edge들만 연결하니 원래 있던 loop가 없어졌다. 이렇게 **loop가 없는 형태의 그래프를 우리는 TREE라 한다**. 원래 그래프가 가지고 있던 모든 종속(dependency)성질은 loop로부터 왔다. 그러나 loop가 없어졌기 때문에 독립인 그래프인 TREE가 된 것이다.



▼ 모든 그래프들에 대해서 node와 edge, 그리고 loop의 관계에 대해서 하나의 식으로 정리

$$* : number\ of$$
$$*loops = *edges - (*nodes - 1)$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$dim\ N(A^T) = m - r$$

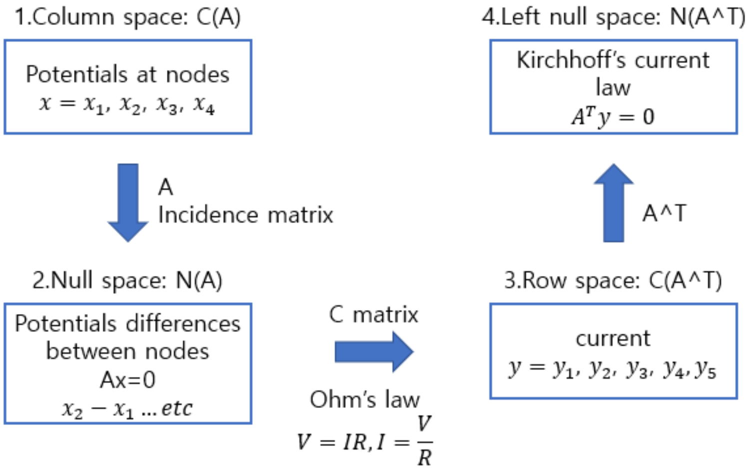
어떤 그래프에서 loop의 개수는 edge의 개수에서 node의 개수-1과 같다. 여기서 nodes-1은 rank를 의미하는데, **그래프의 Incidence matrix에서 항상 rank=n-1**이기 때문이다. n은 column의 개수이고 1개의 column은 종속이므로 1을 빼주면 rank(=dimension)가 된다.

edge의 수는 Incidence matrix에서 row의 수와 같다. 즉 *edge=m이다. 결국 이 식이 의미하는 것은 <u>어떤 그래프에서 독립적인 loop의 개수는 그래프의 Incidence matrix의 left null space와 같다.</u> 사실 이 공식을 약간 다르게 쓰면 **오일러의 공식(Euler's Formula)**이 된다.

$$Euler's\ Formula : *nodes - *edges + *loops = 1$$

오일러의 공식은 어떠한 그래프에도 적용되는 **위상기하학(topology)**의 하나의 사실이다이다. 우리가 예를 들었던 그래프에 적용하여 확인해보면 4-5+2=1임을 확인할 수 있다. 어떠한 그래프를 그려서 확인해도 마찬가지이다. 이는 그래프의 node와 edge, 그리고 loop에 대한 관계를 이해함에 있어 유용하게 사용될 수 있는 공식이다.

▼ 그래프 모델과 선형대수의 부분 공간과의 관계도



최초에 각 node에서의 potential을 **x**로 정의하고 여기에 Incidence Matrix A를 곱해 potential difference를 만들었다. 이것을 e라고 하자. e=Ax

그 다음 potential difference에 C를 곱해 current y와의 관계를 정의했다. y=Ce

마지막으로 A의 transpose를 y에 곱하여 키르히호프의 전류 법칙을 정의했다. 이를 정리하면 아래와 같다.

$$x : potential\ at\ nodes$$
$$\downarrow A$$
$$e = Ax : potential\ differences$$
$$\downarrow C$$
$$y = Ce : currents$$
$$\downarrow A^T$$
$$A^T y = 0 : Kirchhoff\text{'s}\ CL$$

이 과정에 실제 전자 회로처럼 여러 branch(배터리, 저항 등)들을 추가할 수 있다. 배터리를 추가한다면 위의 과정에서 실제 potential difference가 생겨날 것이고, 마지막에 가서는 키르히호프 법칙에 대해서 0이 아닌 어떤 전류값 f가 우변에 위치할 것이다.

$$A^T y = f : Kirchhoff\text{'s}\ CL$$

실제 문제에 수학을 적용할 때 사용되는 응용 수학의 기본 공식은 다음과 같다. 이 식이 의미하는 것은 평형방정식에 대한 내용이다.

$$\text{Basic equation of applied math}$$
$$A^T C A x = f$$