Lecture4. Factorization into A=LU

- **1. Inverse of matrix multiplication**
  - **1) Inverse of matrix multiplication**
    - 단위행렬을 만들기 위해 역행렬을 곱해줄때는 각 행렬의 역행렬이 본래 자신의 행렬과 붙을 수 있게 원래 행렬 곱셈의 반대 순서로 역행렬을 곱해줘야한다.

      $ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = I$

      $BAA^{-1}B^{-1} = BIB^{-1} = I$
  - **2) Transpose**(전치)
    - 전치: row의 원소들이 column이 되고 column의 원소들이 row가 되는 것

      $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{transpose} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{212} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}^T$$
    - 행렬곱셈에 transpose를 적용시키면 다음과 같다.

      $AA^{-1} = I \xrightarrow{transpose} (AA^{-1})^T = (I)^T(A^{-1})^T(A)^T = I$
    - A의 역행렬의 transpose는 A의 transepose의 역행렬로 바꿔쓸 수 있다.

      $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- **2. LU decomposition**
  - **1) LU Decomposition(Factorization)**
    - 2x2 크기인 non-singular matrix A

      $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$
    - A를 소거하여 Upper Triangular Matrix인 U를 만들기 위해 E_{21}을 만들어보면 다음과 같다.

      $$E_{21}A = U$$

      $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
    - A=LU를 구하기 위해 좌변과 우변에 $(E_{21})^{-1}$을 각각 곱해준다.

$$
\begin{aligned}
(E_{21})^{-1}E_{21}A &= (E_{21})^{-1}U \\
IA &= (E_{21})^{-1}U \\
A &= LU
\end{aligned}
$$

- 소거행렬 **E_{21}의 역행렬이 L행렬**인 것을 알 수 있다.
- 이때 L행렬은 Lower Triangular Matrix 형태이다.

$$
\begin{aligned}
A &= LU \\
\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2) LDU Decomposition

- Pivot을 분리하기를 원하는 경우가 있다.
- U행렬은 대각선으로 두 개의 pivot인 2와 3을 가지고 있다. 만약 이 pivot들만 따로 분리하여 행렬을 만들고 싶을 때 다음과 같이 할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\frac{row\ of\ U}{1st\ pivot} &= \frac{[2\ 1]}{2} = [1\ 1/2] \\
\frac{row\ of\ U}{2nd\ pivot} &= \frac{[0\ 3]}{3} = [0\ 1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= LU \\
\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A &= LDU
\end{aligned}
$$

- 이렇게 만들어진 행렬의 조합을 LDU Decomposition Matrix라고 한다.
- D는 Diagonal Matrix이며 대각선 방향의 원소들만 가지고 있는 대각 행렬이다.

3) 3x3 case

- 3x3크기의 행렬A가 있다고 가정해보자.

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
$$

- A를 소거하기 위해서 E_{21}, E_{31}, E_{32}순서대로 곱해서 소거해야한다. (이때, row change는 없음)

  $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$

- A=LU형태를 만들기 위해 좌변과 우변 모두 E_{21}, E_{31}, E_{32}의 역행렬을 곱한다.

  $A = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}U$
  $A = LU$

- U를 만들기위한 방법은 E와 L 두 가지가 있다고 볼 수 있다.
- 두가지 방법을 비교하기 위해 다음과 같은 행렬A가 있다고 해보자.

  $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 16 \\ 0 & -15 & 19 \end{bmatrix}$$

- 소거법을 적용하여 EA=U를 구하는 과정에서 E행렬을 살펴보면 다음과 같다.

$$E_{32}E_{31}E_{21} = E$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

- 위에서 구한 E행렬로 L행렬을 구하면 다음과 같다.

$$E_{32}^{-1}E_{31}^{-1}E_{21}^{-1} = L$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

- 행렬 E를 A에 곱하게 되면 E의 10은 A의 row1에 곱해지게 되어 계산과정에 큰 영향을 미치게 된다.
- 행렬 L의 경우 계산과정에 큰 영향을 미치는 것이 없다.
- A=LU Decomposition에서 만약 row change가 없다면 소거에 사용되는 multiplier들은 L행렬의 각자 위치에 그대로 들어간다.

▼ 4) Permutations

- Row change가 필요한 경우 Permutation Matrix(치환행렬)를 곱해준다.
- P_{12}에서 P는 Permutation을 의미하고 12는 row1과 row2를 교환한다는 뜻이다.

- Permutation Matrix를 row로 봤을때 각 row가 단위 행렬과 비교해서 몇번째 줄에 위치했는지 보면 어느 row를 바꾸는지 알 수 있다.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{13}P_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Permutation Matrix의 조합의 개수는 n!이다.
- 다시 원래대로 돌려놓으려면 역행렬을 곱해주면 된다.
- Permutation Matrix 자체가 대각 원소들을 기준으로 좌우가 대칭인 경우에는 Transpose로 역행렬을 구할 수 있다.