An alternative framework to Lagrangian relaxation approach for job shop scheduling

Keyword	Scheduling
Status	Done
Author	Haoxun Chen ,Peter B. Luh
Publish Date	2003
Journal	European Journal of Operational Research
Pdf	An alternative framework to Lagrangian relaxation approach for job shop scheduling.pdf

▼ 목차

▼ **keyword**

P-NP 문제

복잡도 종류 P와 NP가 같은지에 대한 이론 컴퓨터 과학의 미해결 문제이다.

Heuristic

경험론적 추론

Scheduling

주어진 일련의 작업을 수행하기 위해 시간이 지남에 따라 한정된 자원을 할당하는 것이다. 적절한 scheduling은 배송 성과를 개선하고 재고 비용을 절감할 수 있다. 그러나 적절한 scheduling을 얻는 것은 문제의 NP-hard 특성과 application의 큰 크기 때문에 매우 어렵다.

Lagrangian relaxation

수학적 최적화 분야에서 어려운 제한된 최적화 문제를 간단한 문제로 근사화하는 relaxation방법이다. 이 방법은 위반에 대한 비용을 부과하는 Lagrange multiplier를 사용하여 부등식 제약 조건 위반에 벌점을 부과한다.

Tardiness

납기 지연일. 주어진 납기일에서 지연된 시간으로 늦으면 작업이 지연된 시간과 같고 그렇지 않으면 0이다.

Earliness

재공재고 보유일. 재공재고(원자재가 투입되어 제품으로 완성되기 전까지 공정 중에 미완성인 상태로 존재하는 재고)가 존재하는 시간이다.

Dynamic programming(DP)

복잡한 문제를 간단한 여러개의 문제로 나누어 푸는 방법이다.

1. 문제정의

- Scheduling method는 Optimization methods, approximate and heuristics methods, Dispatching rules로 나뉜다. 본 연구에서 사용되는 Lagrangian relaxation(LR)는 approximate and heuristics methods에 해당하는 방법으로 합리적인 계산 시간 내에 거의 최적에 가까운 solution을 얻을 수 있는 분해 및 조정 방식이다.
- LR은 먼저 Lagrange multipliers를 사용하여 기계 capacity 제약을 완화한다. 이렇게 완화된 문제는 dynamic programming(DP)를 사용하여 해결할 수 있는 하위문제로 분해될 수 있다. 그 후 multipliers는 제약 위반 정도에 따라 높은 수준에서 반복적으로 조정된다. 반복이 끝나면 모든 제약 조건을 만족하는 schedule을 얻기 위해 간단한 heuristic이 적용된다.
- LR은 일반적으로 효율적인 방법이지만 time horizon이 긴 문제의 경우 시간과 메모리를 많이 사용하게 되는 문제가 있다.

2. 연구목적

- 본 연구에서는 weighted earliness와 tardiness criterion을 최소화하기 위한 job shop scheduling 문제에 대한 새로운 LR 접근법을 연구한다.
    - 짧은 계산 시간에 큰 문제에 대한 적절한 solution을 찾는 것이 목적이다.

3. 방법론

3.1 문제 공식화

- 본 연구에서는 weighted earliness와 tardiness criterion을 최소화하기 위해 H유형의 기계에서 N개의 부품을 scheduling하였다.
- 각 기계 유형 $h(1 \leq h \leq H)$에는 M_h개의 동일한 기계가 있고 각 부품 $i(1 \leq i \leq N)$의 완성을 위해서 $(i,1),(i,2),\cdots,(i,N_i)$로 표시되는 일련의 N_i작업이 필요하다.
- 각 작업 (i,j)는 비선점형이며 선택적인 기계 유형 $H_{ij} \subseteq \{1,2,\cdots,H\}$에 속한 기계에서 수행될 수 있다.
- 단순화를 위해 시간 0에 모든 부품을 사용할 수 있다고 가정한다.

▼ 문제 공식화에 사용 되는 기호들은 다음과 같다.

B_i	부품 i의 시작시간
c_{ij}	작업(i,j) 완료 시간
C_i	부품 i의 완료 시간
D_i	부품 i의 마감일
E_i	부품 i의 earliness, $max(0, D_i - C_i)$로 정의됨
m_{ij}	작업(i,j)를 처리하기 위해 선택한 기계 유형, $m_{ij} \in H_{ij}$
$M_{h\tau}$	시간 τ에서 기계 유형 h의 사용가능한 수, 1≤h≤H
O_h	기계 유형 h에서 수행할 수 있는 작업 집합
t_{ijh}	작업(i,j) 처리 시간, $h \in H_{ij}$
T_{ij}	부품 i의 tardiness, $max(0, C_i - D_i)$로 정의됨
w_i	부품 i의 tardiness weight
β_i	부품 i의 earliness weight
δ_{ijh}	기계 유형 h에 대한 시간 경과에 따른 조작 지수 $\delta_{ijh} = 1$인경우 작업(i,j)가 시간 τ에 기계 유형 h가 수행되고 그렇지 않은 경우 $\delta_{ijh} = 0$ ($m_{ij} = h$ 그리고 $c_{ij} - t_{ijh} \leq \tau \leq c_{ij}$인 경우 1이고 그 이외의 경우에는 0이다.)

▼ Scheduling 문제에 대한 최적화 모델은 다음과 같다.

- Objective
    - 정시 배송 및 낮은 work-in-process 재고 목표는 weighted tardiness와 earliness cost로 모델링된다.

      $\min_{\{m_{ij}\},\{c_{ij}\}} \ J, \ with \ J = \sum_i w_i T_i + \sum_i \beta_i E_i$
    - 정시 배송이 위의 식에 가장 중요한 기준이기 때문에 일반적으로 b_i는 w_i보다 한 자릿수 작다.
- Operation precedence constraints
    - 이전 작업이 완료될때까지 작업을 시작할 수 없고 선택한 기계 유형에서 작업을 수행하는데 특정 시간이 걸린다.

      $c_{i,j-1} + t_{ijm_{ij}} \le c_{i,j}, \ i = 1, 2, \cdots, N, \ j = 1, 2, \cdots, N_i$
- Machine capacity constraints
    - 시간 τ에 기계 유형 h에서 처리 중인 작업의 수는 M_h를 초과할 수 없다.

      $\sum_{ij} \delta_{ijh}(\tau) \le M_{h\tau}, \ 0 \le \tau < \infty, \ h - 1, 2, \cdots, H$
- 위의 공식들은 이산 시간이 아닌 연속 시간을 사용한다는 점에서 기존(J. Wang,P.B. Luh,X. Zhao,J. Wang, An optimization based algorithm for job shop scheduling (1997))의 공식과 다르다.
- 개별 작업에 적합한 기계 유형과 완료 시간을 선택하여 위의 제약조건에 따라 Object 함수를 최소화해야한다.
- Scheduling 문제는 NP-hard한 특성을 가지고 있고 어떤 알고리즘도 합리적인 계산시간내에 큰 크기의 문제를 해결할 수 없기 때문에 LR을 기반으로 접근 방식을 개발하였다.

3.2 Solution framework

- 본 연구에서는 기계 분해를 기반으로 하는 LR 접근법을 통해 작업 우선 순위 제약을 완화한다. 우선순위 제약 조건을 완화하는 이유는 제약들의 수가 time horizon에 의존하지 않으므로 완화가 time horizon에 독립적인 접근 방식으로 이어질 수 있기 때문이다.
- 그러나 우선순위 제약 조건만 완화하면 weighted earliness와 tardiness criterion을 최소화하기 위한 병렬 기계 문제인 완화된 하위문제를 해결하기 어렵다. 따라서 원래 문제를 재구성하고 earliness와 tardiness 제약을 완화하는 노력이 필요하다.
- 하위 문제는 효율적인 근사 알고리즘이 존재하는 weighted 완료 시간을 최소화하기 위한 병렬 기계 문제이다.

- 본 연구에서 개발된 LR 접근법은 기존의 LR 접근법과 달리 heuristic 알고리즘을 사용하여 하위문제를 대략적으로 해결하고 SSG를 사용하여 Lagrange multipliers를 상위 수준에서 업데이트한다.

3.3 Subproblem solution

3.3.1 Computational complexity of the subproblems

- 기계 하위문제의 경우 일정기간 동안 기계를 사용할 수 있으면 가중 완료 시간 기준을 최소화하는 단일 기계 문제이고 다항식으로 해결할 수 있다. 그렇지 않은 경우에는 NP-complete이다.
- 기계 유형 및 기계 그룹 하위 문제는 가중 완료 시간 기준을 최소화하기 위해 동일하거나 관련되지 않은 병렬 기계 문제가 NP-complete이기 때문에 각 기계 유형의 사용 가능한 기계의 수가 일정해도 NP-complete이다.
- SSG는 수렴 조건에서 하위 문제의 대략적인 최적화를 허용하기 때문에 heuristic의 해결은

3.3.2 Solving the subproblems

- 기계 하위 문제에 대한 알고리즘은 Smith의 가중 최단 처리 시간(WSPT) 규칙을 사용하여 최적으로 문제를 해결한다. 이 규칙은 모든 연산을 $\frac{t_{im_i}}{\tilde{w_i}}$ 비율이 감소하지 않는 순서로 정렬한다. 이 알고리즘의 계산 복잡도는 O(nlog(n))이다. (n은 연산의 수이다.)
- 기계 유형 하위 문제에 대한 알고리즘은 매개변수 목록 scheduling heuristic을 사용하여 대략적으로 문제를 해결한다. Heuristic은 WSPT와 같이 $\frac{t_{im_i}}{\tilde{w_i}}$ 비율이 감소하지 않는 순서로 모든 작업을 정렬하고 처음 사용할 수 있는 시스템에 다음 작업을 할당한다. 이 알고리즘의 계산 복잡도는 O(mnlog(n))이다. (m은 동일한 기계의 수이고 n은 연산의 수이다.)
- 기계 그룹 하위 문제에 대한 알고리즘은 유사한 매개변수 목록 scheduling heuristic을 사용하여 대략적으로 문제를 해결한다. 각 기계 유형 h에 대해 처리할 수 있는 모든 작업은 $\frac{t_{im_i}}{\tilde{w_i}}$비율이 감소하지 않는 순서로 정렬된다. 이 알고리즘의 프로세스는 모든 작업이 할당될때까지 반복된다. 이 알고리즘의 계산 복잡도는 O(mnlog(n))이다. (m은 동일한 기계의 수이고 n은 연산의 수이다.)

3.4 Dual problem and the heuristics

- Dual problem은 DP의 최적 솔루션은 집합 Ω의 한 지점에서 달성된다는 속성이 있다.
- 분리 가능한 정수 프로그래밍 문제에 대한 Lagrangian Dual problem은 subgradient direction을 얻기 위해 반복에서 모든 하위 문제를 최적으로 해결해야하는 subgradient 방법을 사용하여 해결된다. Surrogate subgradient 방법이 개발되어 어려운 하위 문제

가 있을 때 시간이 많이 걸리는 점이 개선되었다. 이 방법은 모든 하위문제를 직접 해결하지 않아도 subgradient direction을 얻을 수 있다.

- 새로운 LR 접근법의 하위 문제는 대략적으로 해결되기 때문에 SSG 방법을 사용해 Dual problem DP의 목적 함수를 최적화한다. Dual problem의 최적 솔루션은 집합 Ω에서 달성되므로 각 반복에서 SSG direction을 Ω에 투영하여 솔루션 찾는 범위를 집합으로 제한한다. 반복 프로세스는 주어진 반복 횟수가 실행되거나 주어진 계산 시간이 끝나면 종료된다.

4. 결과

- LR 접근법법의 효율성은 문제가 완화되고 분해되는 방식과 완화된 하위문제와 dual problem이 해결되는 방식에 따라 다르다.
- 본 연구에서는 작업 우선순위 제약을 완화하는 방식으로 기계 분해 기반 job shop scheduling을 위한 LR 접근법을 개발하였다.
    - Dual problem에 대해 SSG 방법과 하위문제에 대한 빠른 근사 알고리즘을 결합함으로써 새로운 LR 접근법은 긴 time horizon을 가진 큰 문제에 효율적이다.
- 새로운 LR 접근법은 부품 분해 기반 LR 접근 방법보다 훨씬 적은 계산 시간과 메모리가 필요하다.
- 수치 테스트 결과, 새로운 접근 방법이 dispatching rule보다 뛰어나고 개인 컴퓨터에서 15분 이내에 수십 가지 기계 유형과 수천 가지 부품의 문제를 해결할 수 있었다.
- 모든 결과는 relaxation framework의 적절한 선택이 LR 접근법의 계산 시간과 메모리 요구 사항을 줄일 수 있고 좋은 완화는 완화된 제약 조건의 수와 하위문제의 복잡성 사이의 균형이라는 것을 보여준다.
- 불연속 결정 변수가 포함되어 있기 때문에 하위 문제의 솔루션에서 우선 순위 제약 중 일부가 위반될 수 있다. 따라서 실행 가능한 일정을 구성하기 위해서 포괄적인 heuristic이 개발되어야한다.