

El lenguaje de la lógica de primer orden

Un lenguaje más expresivo

- La lógica proposicional tiene recursos expresivos muy limitados:
 - No permite identificar elementos que se repiten *dentro* de las oraciones:

Frodo es un hobbit $\equiv p$

Sam es un hobbit $\equiv q$

Frodo tiene ojos azules $\equiv r$

Sam no tiene ojos azules $\equiv \neg s$

Sam es amigo de Frodo $\equiv t$

Frodo es amigo de Sam $\equiv u$

Un lenguaje más expresivo

- Tampoco tiene recursos para tratar con ciertas partículas que tienen valor lógico, como cuantificadores e identidad:

Todos los hobbits habitan en la Comarca $\equiv p$

Ningún orco habita en la comarca $\equiv q$

Algunos hobbits no han salido de la Comarca $\equiv r$

Trancos es el mismo que Aragorn $\equiv s$

Trancos es distinto de Sam $\equiv t$

Sauron odia a todos, incluso a sí mismo $\equiv p_1 \wedge p_2$

Un lenguaje más expresivo

- En consecuencia, hay muchos argumentos válidos que el lenguaje de la lógica proposicional no permite expresar:

Todos los hobbits habitan en la comarca $\equiv p$

Ningún habitante de la comarca sufre de estrés $\equiv q$

Por tanto, ningún hobbit sufre de estrés $\equiv r$

- Lo formalizamos como condicional:

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

y vemos que el argumento es inválido dado que este condicional puede ser falso

Un lenguaje más expresivo

- El lenguaje que nos va a permitir recoger todos esos elementos es el de la *lógica de predicados*, también llamada *lógica cuantificacional*, *lógica de relatores* o, en general, *lógica de primer orden*.
- La lógica proposicional (L_0) es sólo una parte de esta lógica (L_1). Podríamos seguir construyendo sucesivos lenguajes lógicos ($L_2, L_3 \dots$) que recogiesen subsiguientes niveles de complejidad.

El alfabeto de L_1

- L_1 mantiene en su lenguaje todas las conectivas lógicas de L_0 : \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- Pero en vez de constantes proposicionales, construye expresiones más complejas por medio de símbolos para:
 1. Individuos particulares
 2. Propiedades y relaciones
 3. Cuantificadores
 4. Expresiones de identidad

Expresiones para objetos particulares

- Son aquellas expresiones que identifican un individuo, sea persona, objeto, lugar...
- Las más típicas son los *nombres propios* “simples”:

Frodo, Sam, ‘Smeagol’, Tom Bombadil...

Anduril, Barad-Dûr, Tierra Media, Gondor...

- Pero a menudo identificamos los individuos por medio de expresiones complejas, generalmente las *descripciones definidas*.

Expresiones para objetos particulares

- Las descripciones definidas son construcciones del tipo:
ARTÍCULO DETERMINADO + SINTAGMA NOMINAL
el portador del anillo
el mejor amigo del portador del anillo
el nombre hobbit de la criatura llamada Gollum
el Señor del Bosque Viejo que no sale en la película
la espada de Aragorn
la Torre Oscura
la tierra en la que se desarrollan las historias de Tolkien
el reino que Aragorn está llamado a heredar

Expresiones para objetos particulares

- En muchos casos la expresión definida es nuestro mejor o único modo de nombrar un objeto:

el Anillo Único

el dedo gordo del pie derecho de Gandalf

el último orco que muere en la novela

el enano más alto de la Tierra Media

el personaje más a la derecha en el fotograma 22.176

Expresiones para objetos particulares

- Las expresiones que nombran objetos particulares las simbolizaremos por las letras:

a, b, c, \dots (*minúsculas*)

o bien, para tener cuantos queramos:

$a_1, a_2, a_3 \dots$

- Cada letra identifica a un individuo, de modo que si simbolizamos Frodo $\equiv a$, cada vez que aparezca Frodo emplearemos la misma letra individual: a

Expresiones para objetos particulares

- Existen expresiones con la construcción
ARTÍCULO DETERMINADO + SINTAGMA NOMINAL
que no nombran objetos individuales:
 1. El troll de las cavernas golpeó con su maza
 2. El troll de las cavernas es una criatura peligrosa

¿Son equivalentes las expresiones subrayadas?

- NO NECESARIAMENTE: 1 nombra a un individuo particular; pero 2 puede referirse a la criatura como clase. 2 sería así típicamente equivalente a:
 - 2'. Los trolls de las cavernas son criaturas peligrosas

Propiedades y relaciones

- Son aquellas expresiones por las que decimos algo de algún objeto (o conjunto de objetos) y de sus relaciones con otros objetos.
- Típicamente se identifican por medio de un verbo que empleamos para *predicar* algo de cierto objeto:
 - ... es un hobbit
 - ... es valiente
 - ... camina despacio
 - ... es amigo de...
 - ... odia a...
 - ... está entre y

Propiedades y relaciones

- Simbolizamos las expresiones predicativas por medio de las letras:

P, Q, R, \dots

o para tener un número ilimitado de predicados:

R_1, R_2, R_3, \dots

- Con frecuencia se usa, como recurso mnemotécnico, la inicial del verbo u otra palabra del predicado:

es hobbit $\equiv H$ ama a $\equiv A$

Propiedades y relaciones

- Ni los objetos particulares, ni las expresiones predicativas dan lugar por sí solos a enunciados con valor de verdad. Obtenemos éstos cuando combinamos ambos tipos de expresiones, i.e., cuando completamos los “huecos” o *argumentos* a que da lugar una expresión predicativa. Llamamos:
 - *MONARIOS* a los predicados con un solo argumento:
_ es hobbit _ es valiente _ camina despacio
 - *BINARIOS* a los que tienen 2:
_ es amigo de _ _ odia a _ _ está en _
 - *TERNARIOS* a los que tienen 3:
_ está entre _ y _ _ prefiere _ a _

Saturando predicados

- Sean los siguientes individuos:

Frodo \equiv a Sam \equiv b Sauron \equiv c

- Y los siguientes predicados:

monarios: es hobbit \equiv H es comilón \equiv C

binarios: ama a \equiv A odia a \equiv O

ternarios: prefiere ... a \equiv P

Saturando predicados monarios

Frodo es hobbit H_a

Sam es hobbit H_b

Frodo y Sam son hobbits $H_a \wedge H_b$

PERO NO: H_{ab}

H es un predicado monario, y sólo toma un argumento

Sam es comilón pero Frodo no $C_b \wedge \neg C_a$

Sam es un hobbit comilón $H_b \wedge C_b$

Sauron no es hobbit ni comilón $\neg H_c \wedge \neg C_c$

Saturando predicados binarios

Frodo ama a Sam: Aab

Sam ama a Frodo: Aba

Como convención, colocamos el agente (o el sujeto de una oración activa) en primer lugar

Sam es amado por Frodo: Aab

Sam y Frodo se aman: $Aab \wedge Aba$

Si Sauron odia a Frodo, odia a Sam: $Oca \rightarrow Ocb$

Sauron se odia a sí mismo: Occ

Saturando predicados ternarios

Sauron prefiere a Frodo antes que a Sam

Pcab

Sauron prefiere a Sam antes que a Frodo

Pcba

El orden de los términos individuales es convencional: lo importante es que se mantenga coherencia en la interpretación de la expresión

Cuantificación

- Las expresiones individuales y predicativas no tienen valor lógico: se limitan a captar de una manera más rica lo que dicen los enunciados.
- Si *en un argumento válido* sustituimos uniformemente las apariciones de estos términos por otros cualesquiera, la validez del argumento no se ve afectada.
- Pero, al igual que las conectivas, los cuantificadores y los signos de identidad sí tienen valor lógico.

Cuantificación

- Supongamos que queremos referirnos a la totalidad de los individuos de un cierto grupo. Una manera de hacerlo sería nombrando a cada uno de los individuos del grupo:

Frodo, Sam, Bilbo, ..., Zutano

Llamamos a este modo EXTENSIONAL.

- Si queremos decir que todos ellos tienen determinada propiedad, v.g., ser hobbit, podemos predicar esta propiedad de cada individuo:

Frodo es hobbit, Sam es hobbit, ..., Zutano es hobbit =

$$Ha \wedge Hb \wedge \dots \wedge Ha_{47815}$$

Cuantificación: cuantificadores

- Obviamente, para grupos grandes de objetos este método es engorroso. Es más, el método es inservible para conjuntos *infinitos* de objetos, v.g., el conjunto de los números naturales.
- La cuantificación consiste en utilizar ciertas partículas lógicas para referirse a cantidades de individuos de un cierto grupo. Así, para referirnos al grupo anterior, podemos decir *Todos son hobbits*

Cuantificación: cuantificadores

- Otros cuantificadores se emplean para decir algo de una cierta cantidad de individuos de un grupo. Si consideramos el grupo de los habitantes de la Tierra Media, podemos decir que

Algunos son hobbits

La mayoría son mortales

Muchos temen a Sauron

Pocos han tocado el Anillo Único

Ninguno ha nacido en Villanueva del Trabuco

Cuantificación: cuantificadores

- Aunque estos cuantificadores tienen obvias diferencias de significado, en lógica de primer orden se reducen a tan sólo 2:
 - *cuantificador universal*: \forall
equivale a TODOS
 - *cuantificador existencial*: \exists
equivale a AL MENOS UNO

Cuantificación: variables

- Una afirmación como *Todos son hobbits* equivale a decir que *cualquier individuo* (del grupo en cuestión) tiene la propiedad ‘ser hobbit’. Para referirnos a individuos cualesquiera no nos bastan las constantes individuales: necesitamos introducir VARIABLES, i.e., símbolos que pueden tomar como valor cualquiera de los individuos de un grupo.
- Para expresar variables usaremos los símbolos x, y, z, \dots o, en general, x_1, x_2, x_3, \dots

Cuantificación: variables

- Con los cuantificadores y las variables ya podemos formalizar expresiones como:

Todos son hobbits: $\forall x Hx$

lo cual significa que para todo individuo, ese individuo tiene la propiedad de ser hobbit

Algunos son hobbits: $\exists x Hx$

lo cual significa que hay al menos un individuo que tiene la propiedad de ser hobbit

Cuantificación: variables

- Las constantes individuales y las variables son TÉRMINOS. Cuando en una fórmula sustituimos una variable x por un individuo a , estamos diciendo que a cumple las condiciones establecidas por la fórmula (i.e., que tiene determinadas propiedades o relaciones).
- Sea la fórmula $\forall x(Hx \rightarrow Cx)$
nos dice que si un individuo cualquiera tiene la propiedad H entonces tiene la propiedad C .
Esto es: si uno es un hobbit, entonces es comilón.
Por tanto, del individuo a será cierto que
 $Ha \rightarrow Ca$ = Si Frodo es hobbit, es comilón

Cuantificando predicados binarios

Si *Frodo ama a Sam* $\equiv Aab$

¿cómo expresar *Alguien ama a Sam*?

Esta expresión equivale a

Hay al menos un individuo que ama a Sam \equiv

$$\exists x Axb$$

Igualmente, podemos expresar *Frodo ama a alguien* como

Hay al menos un individuo a quien Frodo ama

$$\exists y Aay$$

Cuantificando predicados binarios

- Siguiendo el mismo patrón, podemos expresar

Todos aman a Sam

como:

$$\forall x Axb$$

- Igualmente, podemos expresar

Frodo ama a todos

como:

$$\forall x Aax$$

Cuantificando predicados binarios

- Para expresar

a) Alguien ama a alguien

b) Todos aman a todos

es fundamental darse cuenta de 2 cosas:

- 1) Estas oraciones no hacen referencia a *ningún individuo en particular*. Por tanto, habrá que expresarlas sólo con variables.
- 2) Tanto (a) como (b) hacen referencia a relaciones que se dan *entre dos grupos de individuos*. Por tanto, habrá que asignar una variable distinta a cada grupo.

Cuantificando predicados binarios

a) Alguien ama a alguien

equivale a decir que *Hay al menos un individuo que ama a al menos un individuo*

Esto puede expresarse así:

$$\exists x \exists y Axy$$

b) Todos aman a todos

equivale a decir que *Cualquier individuo ama a cualquier individuo*

Esto puede expresarse así:

$$\forall x \forall y Axy$$

Cuantificando predicados binarios

- Nótese que cada cuantificador “va con” una variable.
- Diremos que la variable en cuestión está *LIGADA* por ese cuantificador.
- Respetar el orden en que cada cuantificador liga cada variable es fundamental para poder formalizar expresiones más complejas, como
 - c) *Alguien ama a todos*
 - d) *Todos aman a alguien*

Cuantificando predicados binarios

c) Alguien ama a todos

$$\exists x \forall y Axy$$

podemos leerlo como *existe al menos un individuo x tal que para cualquier individuo y, x ama a y*

d) Todos aman a alguien

$$\forall x \exists y Axy$$

podemos leerlo como *para cualquier individuo y, existe al menos un individuo x tal que x ama a y*

Cuantificando predicados binarios

La expresión *d) Todos quieren a alguien* tiene una posible ambigüedad. En ciertos contextos puede entenderse como:

d₁) Hay un individuo a quien todos quieren

$$\exists y \forall x Axy$$

Esto es cierto si ocurre que hay un individuo particular, v.g. Frodo, a quien todo el mundo quiere.

Cuantificando predicados binarios

En otros *d) Todos quieren a alguien* se entiende como:

d₂) Todos quieren a alguna persona

$$\forall x \exists y Axy$$

Esto es cierto si todo el mundo quiere a alguna persona, pero no necesariamente quieren todos al mismo.

Veremos que *d₂* es consecuencia lógica de *d₁*, pero no a la inversa.

Cuantificando predicados binarios

¿Cómo se formaliza *Todo el mundo es amado por alguien*?

Si lo entendemos como que hay una persona que ama a todo el mundo:

$$\exists x \forall y Axy$$

Si lo entendemos como que todos tienen alguien que les ame:

$$\forall y \exists x Axy$$

Cuantificando predicados binarios

Compárese *verticalmente* el orden de los cuantificadores
y *horizontalmente* el orden en que ligan las variables:

Todos aman a alguien *Todos son amados por alguien*

$$\exists y \forall x Axy$$

$$\exists x \forall y Axy$$

$$\forall x \exists y Axy$$

$$\forall y \exists x Axy$$

Identidad

- Si queremos expresar relaciones como SER EL MISMO y SER DISTINTO, podríamos usar un predicado binario:

Trancos *es el mismo que* Aragorn

d M e \equiv Mde

- Pero este predicado desempeña un papel lógico tan importante que empleamos un símbolo especial para él:

ser el mismo que: $=$ $d = e$ (Trancos es Aragorn)

ser distinto que: \neq $d \neq a$ (Trancos no es Frodo)

También podemos expresar éste como $\neg d = a$

Identidad

- Nuestro lenguaje sólo expresa identidad entre individuos. Por tanto, el signo $=$ sólo puede estar flanqueado por términos.

- Son correctas:

$$a = b \quad a \neq x$$

$$\exists x(x = a) \quad \forall x(x =$$

$$x)$$

- Son incorrectas:

$$H = C \quad Ha = Ca \quad \exists x(Hx = a) \quad \forall x = \forall x$$

Alfabeto de la lógica de primer orden

- Los símbolos de L_1 son:

-Constantes individuales:	$a, b, c, a_1 \dots$	} términos
-Variables individuales:	$x, y, z, x_1 \dots$	
-Predicados o relatores:	$P, Q, R, R_1 \dots$	
-Cuantificadores:	\forall, \exists	
-Identidad:	$=, \neq$	
-Conectivas:	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$	
-Auxiliares:	$), (,], [$	

Reglas de formación

- (i) Si \mathbf{R} es un relator n -ario y $\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n$ son términos, entonces la secuencia $\mathbf{R} \mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n$ es fórmula.
- (ii) Si $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ son términos, $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ es fórmula
- (iii) Si α es fórmula y ν es una variable, son fórmulas: $\forall \nu \alpha$ y $\exists \nu \alpha$
- (iv) Si α es fórmula, $\neg \alpha$ es fórmula
- (v) Si α y β son fórmulas, son fórmulas:
 $(\alpha \wedge \beta)$ $(\alpha \vee \beta)$ $(\alpha \rightarrow \beta)$ $(\alpha \leftrightarrow \beta)$
- (vi) Sólo son fórmulas las secuencias que satisfacen alguna de las cláusulas (i-v)

Reglas de formación (i)

- (i) Si \mathbf{R} es un relator n -ario y $\mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n$ son términos, entonces la secuencia $\mathbf{R} \mathbf{t}_1 \dots \mathbf{t}_n$ es fórmula.

Supongamos que P es *monario*, son fórmulas:

$Pa \quad Pb \quad Pc \quad Px \quad Py \quad Px_2 \quad \dots$

Supongamos que Q es *binario*, son fórmulas:

$Qab \quad Qba \quad Qaa \quad Qxa \quad Qax \quad Qxy \quad Qzz \quad \dots$

Supongamos que R es *ternario*, son fórmulas:

$Qabc \quad Qbca \quad Qaaa \quad Qxay \quad Qaxx \quad Qxyz \quad Qyyy \quad \dots$

Reglas de formación (ii)

(ii) Si t_1 , t_2 son términos, $t_1 = t_2$ es fórmula

Según esto son fórmulas:

$$\begin{array}{ccccccccc} a = b & b = a & a = a & a = x & x = c \\ x = y & y = y & z = x_1 \dots & & & & & & \end{array}$$

Reglas de formación (ii)

- Malas aplicaciones de (i) y (ii):

Pab *cuando P es un predicado monario*

aPb *orden incorrecto de términos*

PQa *a un predicado debe seguir algún término*

$PxQy$ *no pueden “yuxtaponerse” fórmulas*

$Pa=b$ *el $=$ sólo puede flanquearse por términos*

$a=bc$ *más de un término a un lado del $=$*

$a=b=c$ *no se pueden “encadenar” signos de $=$*

Reglas de formación (iii)

(iii) Si α es fórmula y ν es una variable, son fórmulas: $\forall \nu \alpha$ y $\exists \nu \alpha$

Dadas también las reglas (i) y (ii), son fórmulas:

$\forall x Pa$ $\forall x Px$ $\forall x Py$ $\forall y Qxy$ $\forall z Rxaz$

$\forall x a=b$ $\forall x x=a$ $\forall y x=x$ $\forall z z=x$...

$\exists x Pa$ $\exists x Px$ $\exists x Py$ $\exists y Qxy$ $\exists z Rxaz$

$\exists x a=b$ $\exists x x=a$ $\exists y x=x$ $\exists z z=x$...

Reglas de formación (iii)

Y aplicando de nuevo (iii) sobre las anteriores, también son fórmulas:

$\forall x \forall x Pa$ $\forall x \forall x Px$ $\forall x \forall x Py$ $\forall y \forall x Qxy$...

$\forall x \exists x Pa$ $\forall x \exists x Px$ $\forall x \exists x Py$ $\forall x \exists y Qxy$...

$\exists x \exists x Pa$ $\exists x \exists y x=y$ $\exists y \exists x a=x$...

$\exists x \forall x Pa$ $\exists y \forall x y=x$ $\exists x \forall z z=y$...

Y de nuevo:

$\forall x \forall x \forall x Pa$ $\forall x \forall y \forall z Rxyz$ $\forall x \forall y \exists y Pz$...

$\exists y \forall x \exists y y=x$ $\forall x \exists y \forall x a=b$...

$\forall x \exists y \forall x \exists y \forall x \exists y \forall x \exists y \forall x \exists y \forall x Pa$...

Reglas de formación (iii)

- Muchas de las fórmulas anteriores pueden resultar “extrañas”, cuando uno intenta traducirlas a posibles expresiones del lenguaje natural.
- Como veremos, no todas ellas corresponden a alguna oración, i.e., a alguna expresión con valor de verdad: sólo lo hacen las que constituyen *sentencias*.

Reglas de formación (iii)

- Malas aplicaciones de (iii):

$\forall Pa$ *el cuantificador \forall no va seguido de variable*

$\exists \forall x Qxy$ *ídem respecto a \exists*

$\exists b Pb$ *ídem: b es constante, no variable*

$\forall x x$ *a la variable del cuantificador no le sigue una fórmula*

$\exists y y = \forall x$ *ídem: el $=$ no está flanqueado por 2 términos*

$\forall x Px = \neg \exists x \neg Px$ *otra mala aplicación de (ii)*

Reglas de formación (iv)

(iv) Si α es fórmula, $\neg \alpha$ es fórmula

Dadas también las reglas (i-iii), son fórmulas:

$\neg Pa \quad \neg Px \quad \neg Qxa \quad \neg Rayz \quad \neg\neg Pz \dots$
 $\neg a=b \quad \neg x=a \quad \neg y=z \quad \neg\neg x=x \dots$
 $\neg \forall x Pa \quad \neg \forall y Qxy \quad \forall y \neg Px \quad \neg\neg \forall x \neg x=a \dots$
 $\neg \exists x Px \quad \neg \exists x Qbx \quad \exists y \neg Qxy \quad \exists z \neg z=z \dots$
 $\neg \forall x \forall x Px \quad \neg \forall y \forall x Qxy \quad \forall y \neg \forall x Qxy \dots$
 $\neg \exists x \forall x Py \quad \neg \forall x \neg \exists x Px \quad \exists x \neg\neg \exists x \neg y=y \dots$
 $\neg\neg\neg \exists x \forall x \neg \forall x \exists z \forall y \neg\neg\neg \exists x \exists y \neg \forall y \neg\neg\neg\neg Pz \dots$

Reglas de formación (iv)

- Malas aplicaciones de (iv):

$a \neg = b$ *el \neg debe ir delante de una fórmula*

$\neg a = \neg b$ *$a = \neg b$ no es fórmula*

$P \neg a$ *tras el predicado debe ir algún término t :
pero $\neg t$ no es término*

$\forall \neg x P x$ *tras el cuantificador debe ir una variable
 v : pero $\neg v$ no es variable*

Reglas de formación (v)

(v) Si α y β son fórmulas, son fórmulas:

$$(\alpha \wedge \beta) \quad (\alpha \vee \beta) \quad (\alpha \rightarrow \beta) \quad (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

Dadas también las reglas (i-iv), son fórmulas:

$$\begin{aligned} & (Pa \wedge Pb) \quad (Px \vee Qxy) \quad (Px \rightarrow x=a) \\ & (a=b \leftrightarrow b=a) \quad (Pz \wedge \forall x Py) \quad (\exists x Px \vee \exists x Qyx) \\ & (Px \rightarrow \forall x x=a) \quad (\exists x x=b \leftrightarrow \neg \forall x Pb) \quad \exists x (Px \wedge Qx) \\ & \forall x (Py \vee \exists x Qy) \quad (\exists x Px \rightarrow \forall x Px) \quad \exists x (Px \rightarrow \forall x Px) \\ & \forall x \forall y \forall z ((Qxy \wedge Qyz) \rightarrow Qxz) \\ & \exists x (\forall y \forall z (Qxy \leftrightarrow Qyz) \rightarrow \exists z \exists y (z=a \vee y=b)) \dots \end{aligned}$$

Reglas de formación (v)

- Malas aplicaciones de (v):

$Pa \wedge Pb \rightarrow Pc$ *faltan paréntesis: $(Pa \wedge Pb) \rightarrow Pc$*

$\forall x \wedge \forall y Qxy$ *$\forall x$ no es fórmula*

$x \vee y$ *ni x ni y son fórmulas*

$a \rightarrow c$ *ídem respecto a a y c*

$\exists x \leftrightarrow \forall y Qxy$ *ídem respecto a $\exists x$*

Reglas de simplificación: paréntesis

- Al igual que en L_0 , podemos eliminar los paréntesis exteriores:

$(Px \rightarrow \exists yPy)$ se queda en: $Px \rightarrow \exists yPy$

$(a=b \leftrightarrow b=a)$ se queda en: $a=b \leftrightarrow b=a$

PERO:

$\exists x(Px \rightarrow \exists yPy)$ **no se queda en:** $\exists xPx \rightarrow \exists yPy$

Sólo se simplifican los paréntesis EXTERIORES. De otro modo puede ocurrir que las fórmulas no sean equivalentes.

Simplificación: paréntesis

- Al igual que en L_0 , podemos eliminar los paréntesis interiores de una secuencia de fórmulas unidas sólo por conyuntores o sólo por disyuntores:

$\forall x(Py \vee (\exists yQxy \vee \exists zQxz))$ se queda en:

$$\forall x(Py \vee \exists yQxy \vee \exists zQxz)$$

$(a = b \wedge b = c) \wedge c = d$ se queda en:

$$a = b \wedge b = c \wedge c = d$$

PERO:

$\forall x(Py \vee (\exists yQxy \wedge \exists zQxz))$ **no se queda en:**

$$\forall x(Py \vee \exists yQxy \wedge \exists zQxz)$$

Simplificación: cuantificadores

- En una fórmula precedida por una secuencia de cuantificadores *del mismo tipo* (todo \forall o todo \exists) y *ninguno de ellos está precedido de negador*, podemos suprimir todos los cuantificadores *excepto el primero*, *manteniendo las variables*:

$\forall x \forall y \forall z (x = a \vee y = a \vee z = a)$ se queda en:

$\forall xyz (x = a \vee y = a \vee z = a)$

$\exists x \exists y \exists z \exists x_1 \exists x_2 (Qxy \vee Rzx_1x_2)$ se queda en:

$\exists xyzx_1x_2 (Qxy \vee Rzx_1x_2)$

PERO:

$\forall x \exists y \forall z (Px \rightarrow Qyz)$ *no se queda en:*

$\forall xz \exists y (Px \rightarrow Qyz)$

Simplificación: cuantificadores

- En casos como los anteriores, pero *con algún negador*, no puede suprimirse nunca el cuantificador que está justo a la derecha del negador, aunque sí los restantes

$\neg \forall x \forall y \forall z (x = a \vee y = a \vee z = a)$ se queda en:

$\neg \forall xyz (x = a \vee y = a \vee z = a)$

$\exists x \exists y \neg \exists z \exists x_1 \exists x_2 (Qxy \vee Rzx_1x_2)$ se queda en:

$\exists xy \neg \exists zx_1x_2 (Qxy \vee Rzx_1x_2)$

PERO:

$\forall x \neg \forall y \neg \forall z (Px \rightarrow Qyz)$ *no se queda en:*

$\forall x \neg \forall yz (Px \rightarrow Qyz)$

Simplificación: identidad

- Una fórmula de identidad *precedida por negador* puede traducirse a una fórmula sin negador, cambiando $=$ por \neq

$\neg a = b$ se queda en: $a \neq b$

$\forall xy \neg x = y$ se queda en: $\forall xy x \neq y$

PERO:

$\neg(a = b \vee b = c)$ *no se queda en:*

$a \neq b \vee b \neq c$

Recordemos las equivalencias entre \vee y \wedge