

# Fundamentos de control Industrial

Sistemas de control en lazo cerrado.

---

Javier Rico Azagra

Curso 2020-2021

Universidad de La Rioja

# Diagramas de bloques

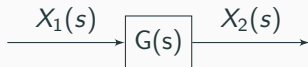
---

# Diagramas de bloques

Los sistemas de control en lazo cerrado pueden ser complejos, presentando multitud de elementos intermedios que son modelados por sus ecuaciones diferenciales. Para facilitar su interpretación, emplear diagramas de bloques. Un diagrama de bloques es la representación gráfica del sistema, en ella podemos observar de forma sencilla las relaciones entre los elementos del sistema.

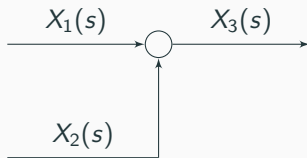
Los elementos de los diagramas de bloques son:

- Bloque: Indica la relación entre dos variables, esta definido por la función de transferencia.



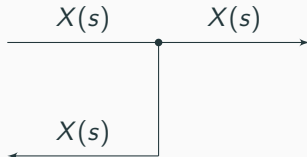
$$X_2(s) = X_1(s)G(s) \quad (1)$$

- Sumador: Representa la suma o resta de variables, debemos de indicar los signos de cada una de las señales (*positivos por defecto*).



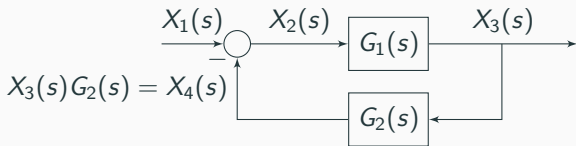
$$X_3(s) = X_1(s) + X_2(s) \quad (2)$$

- Ramificación: Este elemento nos permite distribuir una señal hacia varios puntos del diagrama de bloques.



## Diagramas de bloques. Lazo cerrado

Con estos elementos podemos definir el diagrama de bloques de cualquier sistema LTI. A continuación, vamos a estudiar la estructura de control realimentado, que presenta el siguiente diagrama de bloques:



Las ecuaciones que determinan el comportamiento del sistema en lazo cerrado son:

$$X_2(s) = X_1(s) - X_4(s) = X_1(s) - X_3(s)G_2(s) \quad (3)$$

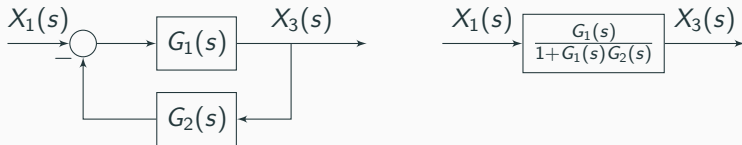
$$X_3(s) = X_2(s)G_1(s) = X_1(s)G_1(s) - X_3(s)G_2(s)G_1(s) \quad (4)$$

$$X_3(s)(1 + G_1(s)G_2(s)) = X_1(s)G_1(s) \quad (5)$$

## Diagramas de bloques. Lazo cerrado

Por lo tanto, la función de transferencia equivalente del sistema es:

$$\frac{X_3(s)}{X_1(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (6)$$



Podremos simplificar los diagramas de bloques empleando álgebra de bloques. Es decir, empleando las relaciones descritas para reducir los diagramas de bloques a un único bloque. Algunas de las operaciones más empleadas son las siguientes:

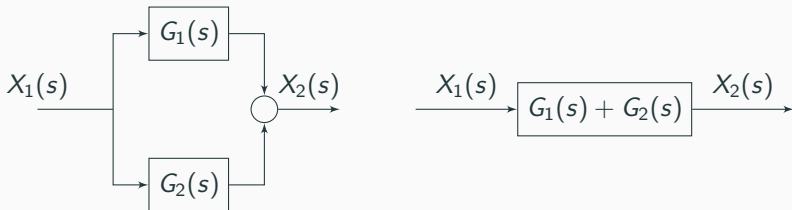
## Diagramas de bloques.Reducción de bloques en serie

Podemos unir los bloques en serie en un único bloque que contiene el producto de los bloques en serie.



## Diagramas de bloques. Reducción de bloques en paralelo

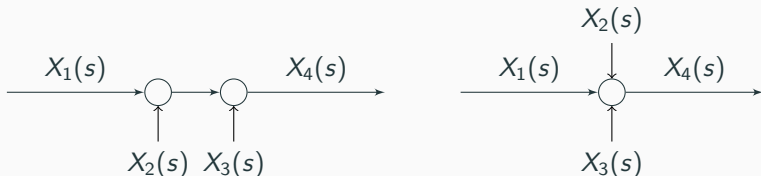
Podemos reducir bloques en paralelo por un único bloque que contenga la suma de los funciones de transferencia de los bloques en paralelo.





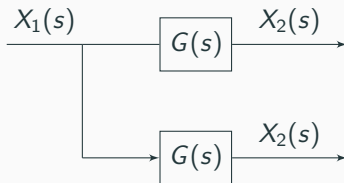
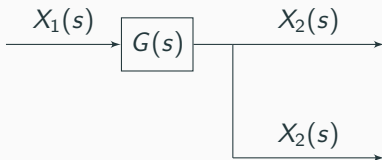
## Diagramas de bloques. Reducción de sumadores

Podemos reducir dos bloques suma conectados en serie en único bloque suma al que entran todas las señales.



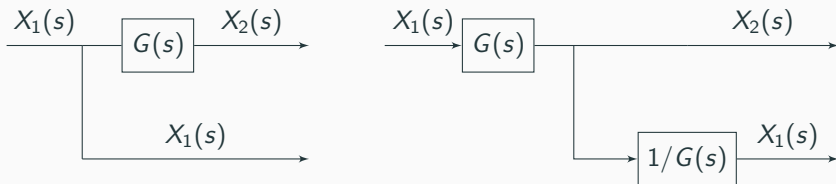
# Diagramas de bloques. Adelanto de bloques

Podemos adelantar el bloque situado antes de una bifurcación situándolo en las ramas que se encuentran a la salida de la bifurcación.



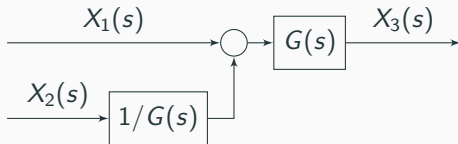
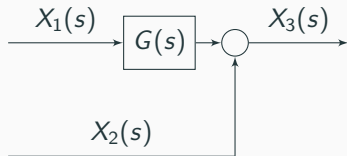
## Diagramas de bloques. Retraso de bloques

Podemos retrasar el bloque situado a la salida de una bifurcación, dividiendo la rama que inicialmente no esta multiplicada por el bloque, por la función de transferencia de este.



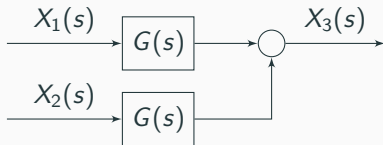
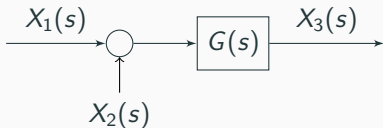
## Diagramas de bloques. Adelanto de bloques con suma

Podemos adelantar un bloque previo a un elemento suma, si dividimos el resto de las ramas que entran en el sumador por la función de transferencia del bloque adelantado.



## Diagramas de bloques. Retraso de bloques con suma

Podemos retrasar un bloque que se encuentre antes de un elemento suma, situándolo en las ramas que se encuentran conectadas a dicho elemento suma.



# Diagramas de flujo de señal

---

# Diagramas de flujo de señal

Podemos representar los sistemas de control empleando diagramas de flujo. Esta opción presenta un esquema del sistema que nos permite obtener de forma sencilla las relaciones entre dos variables del proceso.

Los diagramas de flujo son, por norma general, menos intuitivos que los diagramas de bloques, pero se adaptan mejor a sistemas complejos, en los que las simplificaciones con diagramas de bloques complejas y poco intuitivas. La principal ventaja de este método es que permite obtener las relaciones de forma directa, sin necesidad de simplificar el sistema.

# Diagramas de flujo de señal

Los elementos que podemos encontrar en este tipo de diagramas son:

- Nudos: representan una señal y pueden ser entradas, salidas, variables intermedias o puntos en los que se suman o restan variables.



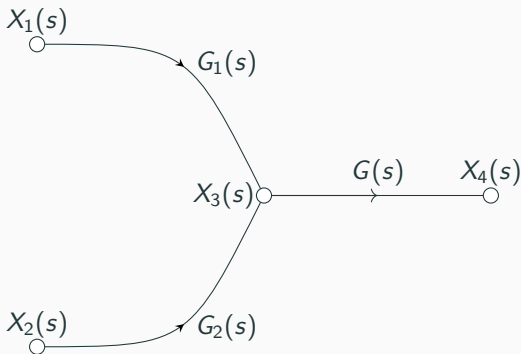
- Ramas o transmitancias: Relacionan dos señales, están determinadas por la función de transferencia. Son representadas por un segmento y su dirección.



Tenemos que tener en cuenta que un nudo puede actuar de varias formas, generando puntos de suma, ramificaciones o puntos de suma y ramificación.



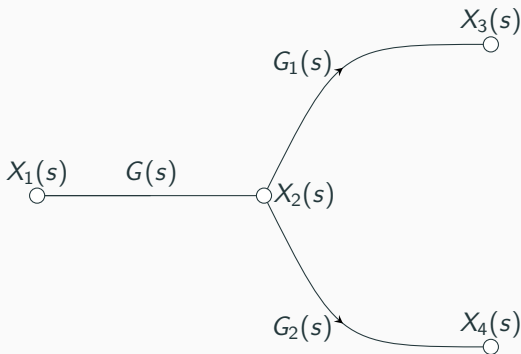
## Diagramas de flujo de señal. Nudo como punto de suma.



Matemáticamente el esquema anterior representa la operación:

$$X_4(s) = (X_1(s)G_1(s) + X_2(s)G_2(s)) G(s) \quad (7)$$

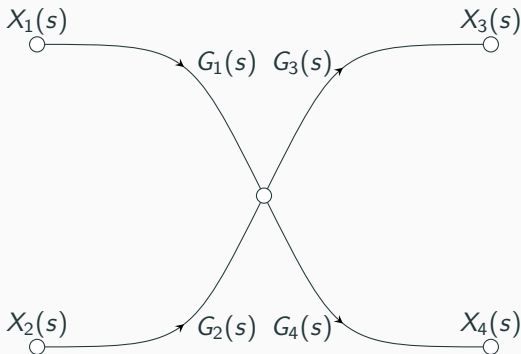
## Diagramas de flujo de señal. Nudo como ramificación



Matemáticamente el esquema anterior representa la operación:

$$\begin{cases} X_3(s) = X_2(s)G_1(s) = X_1(s)G(s)G_1(s) \\ X_4(s) = X_2(s)G_2(s) = X_1(s)G(s)G_2(s) \end{cases} \quad (8)$$

## Diagramas de flujo de señal. Nudo como suma y bifurcación



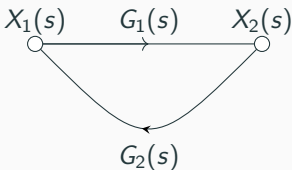
Matemáticamente el esquema anterior representa la operación:

$$\begin{cases} X_3(s) = (X_1(s)G_1(s) + X_2(s)G_2(s)) G_3(s) \\ X_4(s) = (X_1(s)G_1(s) + X_2(s)G_2(s)) G_4(s) \end{cases} \quad (9)$$

# Diagramas de flujo de señal. Regla de Masson

La regla de Masson define la relación entre dos señales del diagrama. Antes de definir la regla de Masson para el cálculo de las funciones de transferencia, debemos definir los siguientes elementos:

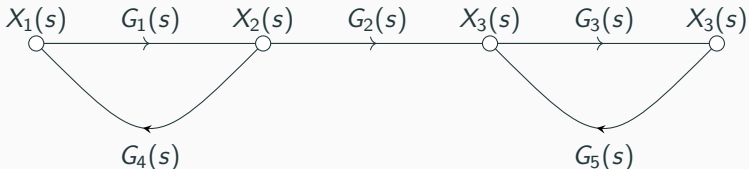
- Trayectoria: es una rama o conjunto de ramas que podemos recorrer para llegar desde una señal a otra (*camino entre dos nudos*).
- Lazo: es una trayectoria que se origina y finaliza en el mismo nudo, siguiendo un camino que no repite ningún nudo.



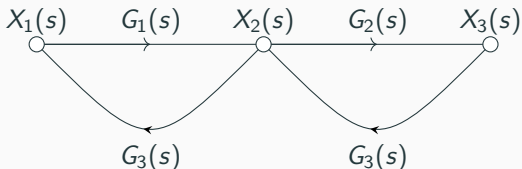
$$L = G_1(s)G_2(s) \quad (10)$$

# Diagramas de flujo de señal. Regla de Masson

- Lazos disjuntos: son lazos que no se tocan, no comparten nudos.



- Lazos adjuntos: son lazos que se tocan, comparten nudos.



## Diagramas de flujo de señal. Regla de Masson

Conocidos los elementos anteriores podemos definir la regla de Masson, que determina la relación entre las señales  $X_1(s)$  y  $X_2(s)$ .

$$\frac{X_1(s)}{X_2(s)} = G_{1-2}(s) = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k}{\Delta} \quad (11)$$

- $P_k \rightarrow$  Trayectoria k-esima de la variable  $X_1(s)$  a  $X_2(s)$ . Producto de las ramas que componen el camino directo entre las dos variables.
- $\Delta \rightarrow$  Determinante del grafo. Para calcularlo empleamos los lazos del sistema  $L_i$  (*lazo i-esimo del sistema*). Calculamos el determinante del grafo como:

$$\Delta = 1 - \sum \text{lazos} + \sum \text{lazos disjuntos (2 a 2)} - \sum \text{lazos disjuntos (3 a 3)} + \sum \text{lazos disjuntos (4 a 4)} \cdots \quad (12)$$

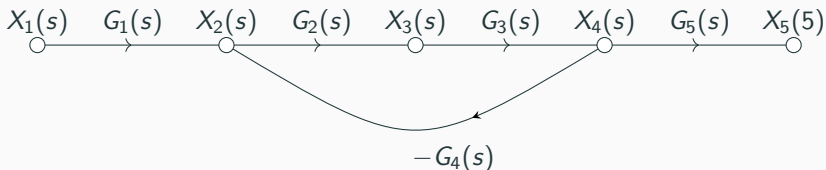
- $\Delta \rightarrow$  Determinante del grafo. Podemos expresar la ecuación anterior del siguiente modo:

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{m,q} L_m L_q - \sum_{r,s,t} L_r L_s L_t + \dots \quad (13)$$

- $\Delta_k \rightarrow$  Cofactor de determinante del grafo de la trayectoria  $P_k$ . Calculamos el discriminante del grafo eliminando los lazos adjuntos a la trayectoria  $P_k$ .

# Diagramas de flujo de señal. Regla de Masson

**Ejemplo:** Obtener la relación entre  $X_5(s)$  y  $X_1(s)$ .



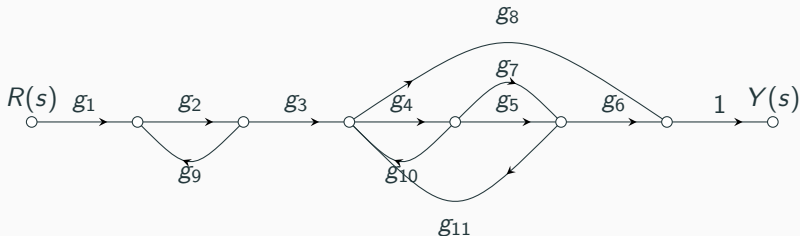
- $P_1 = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_5(s)$
- $L_1(s) = -G_2(s)G_3(s)G_4(s)$
- $\Delta = 1 - L_1(s) = 1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)$
- $\Delta_1 = 1$

$$\frac{X_5(s)}{X_1(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_5(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)} \quad (14)$$



# Diagramas de flujo de señal. Ejemplo

**Ejemplo:** Obtener la respuesta  $Y(s)/R(s)$  aplicando la regla de Masson.



**Solución:**

1. Obtenemos las trayectorias

$$\begin{cases} P_1 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \cdot g_5 \cdot g_6 \\ P_2 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \cdot g_7 \cdot g_6 \\ P_3 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_8 \end{cases} \quad (15)$$

# Diagramas de flujo de señal. Ejemplo

2. Obtenemos los lazos del sistema

$$\begin{cases} L_1 = g_2 \cdot g_9 \\ L_2 = g_4 \cdot g_{10} \\ L_3 = g_4 \cdot g_5 \cdot g_{11} \\ L_4 = g_4 \cdot g_7 \cdot g_{11} \end{cases} \quad (16)$$

3. Calculamos el determinante del grafo

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot L_3 + L_1 \cdot L_4) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - g_2 \cdot g_9 - g_4 \cdot g_{10} - g_4 \cdot g_5 \cdot g_{11} - g_4 \cdot g_7 \cdot g_{11} \\ & + g_2 \cdot g_9 \cdot g_4 \cdot g_{10} + g_2 \cdot g_9 \cdot g_4 \cdot g_5 \cdot g_{11} + g_2 \cdot g_9 \cdot g_4 \cdot g_7 \cdot g_{11} \end{aligned} \quad (18)$$

## Diagramas de flujo de señal. Ejemplo

4. Calculamos los cofactores

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = 1 \\ \Delta_3 = 1 \end{cases} \quad (19)$$

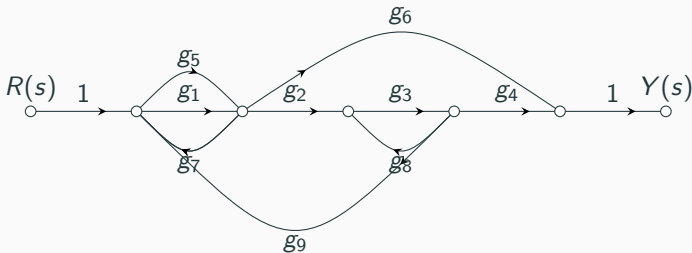
5. Aplicamos la formula de Masson

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta} \quad (20)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \cdot g_5 \cdot g_6 + g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \cdot g_7 \cdot g_6 + g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_8}{1 - g_2 \cdot g_9 - g_4 \cdot g_{10} - g_4 \cdot g_5 \cdot g_{11} - g_4 \cdot g_7 \cdot g_{11} + g_2 \cdot g_9 \cdot g_4 \cdot g_{10} + g_2 \cdot g_9 \cdot g_4 \cdot g_5 \cdot g_{11} + g_2 \cdot g_9 \cdot g_4 \cdot g_7 \cdot g_{11}} \quad (21)$$

# Diagramas de flujo de señal. Ejemplo

**Ejemplo:** Obtener la respuesta  $Y(s)/R(s)$  aplicando la regla de Masson.



1. Obtenemos las trayectorias

$$\begin{cases} P_1 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \\ P_2 = g_5 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \\ P_3 = g_1 \cdot g_6 \\ P_4 = g_5 \cdot g_6 \end{cases} \quad (22)$$

# Diagramas de flujo de señal. Ejemplo

2. Obtenemos los lazos del sistema

$$\begin{cases} L_1 = g_1 \cdot g_7 \\ L_2 = g_5 \cdot g_7 \\ L_3 = g_3 \cdot g_8 \\ L_4 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_9 \\ L_5 = g_5 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_9 \end{cases} \quad (23)$$

3. Calculamos el determinante del grafo

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + (L_1 \cdot L_3 + L_2 \cdot L_3) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Delta = 1 &- g_1 \cdot g_7 - g_5 \cdot g_7 - g_3 \cdot g_8 - g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_9 \\ &- g_5 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_9 + g_1 \cdot g_7 \cdot g_3 \cdot g_8 + g_5 \cdot g_7 \cdot g_3 \cdot g_8 \end{aligned} \quad (25)$$

# Diagramas de flujo de señal. Ejemplo

4. Calculamos los cofactores

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = 1 \\ \Delta_3 = 1 - L_3 = 1 - g_3 \cdot g_8 \\ \Delta_4 = 1 - L_3 = 1 - g_3 \cdot g_8 \end{cases} \quad (26)$$

5. Aplicamos la formula de Masson

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + P_4\Delta_4}{\Delta} \quad (27)$$

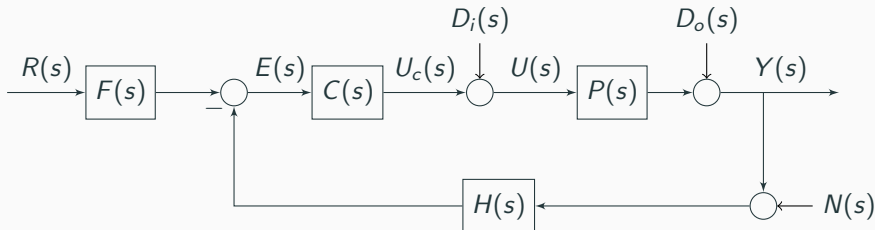
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 + g_5 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 + g_1 \cdot g_6(1 - g_3 \cdot g_8) + g_5 \cdot g_6(1 - g_3 \cdot g_8)}{1 - g_1 \cdot g_7 - g_5 \cdot g_7 - g_3 \cdot g_8 - g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_9 - g_5 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_9 + g_1 \cdot g_7 \cdot g_3 \cdot g_8 + g_5 \cdot g_7 \cdot g_3 \cdot g_8} \quad (28)$$

## **Estructura de control en lazo cerrado**

---

# Estructura de control en lazo cerrado

Un sistema de control en lazo cerrado presenta la siguiente estructura:



Donde:

- $R(s)$ : Referencia, *set point* o consigna. Valor deseado para la variable gobernada.
- $Y(s)$ : Salida o variable gobernada.
- $E(s)$ : Error. Diferencia entre el valor de referencia y la salida medida.



# Estructura de control en lazo cerrado

- $U_c(s)$ : Acción de control calculada por el controlador.
- $U(s)$ : Acción de control vista por la planta.
- $N(s)$ : Ruido de alta frecuencia introducido por el sensor.
- $D_i(s)$ : Perturbaciones a la entrada de la planta.
- $D_o(s)$ : Perturbaciones a la salida de la planta.
- $F(s)$ : Función de transferencia del prefiltro.
- $C(s)$ : Función de transferencia del controlador de realimentación.
- $P(s)$ : Planta, sistema o proceso.
- $H(s)$ : Función de transferencia del sensor de realimentación.

## Definiciones:

- Cadena directa: bloques que conectan de forma directa la entrada con la salida.
- Cadena de realimentación: bloques situados en la realimentación.
- Lazo abierto: multiplicación de todos los bloques situados en el lazo.

## Nota:

Normalmente la realimentación es unitaria. Se considera que el sensor forma parte de la planta.

# Estructura de control en lazo cerrado

En lazo cerrado se obtiene:

- Respuesta de la variable controlada

$$Y(s) = \frac{FCP(s)}{1 + CPH(s)} R(s) + \frac{P(s)}{1 + CPH(s)} D_i(s) + \frac{1}{1 + CPH(s)} D_o(s) - \frac{CPH(s)}{1 + CPH(s)} N(s) \quad (29)$$

- Señal de error:

$$E(s) = \frac{1}{1 + CPH(s)} R(s) - \frac{PH(s)}{1 + CPH(s)} D_i(s) - \frac{H(s)}{1 + CPH(s)} D_o(s) - \frac{H(s)}{1 + CPH(s)} N(s) \quad (30)$$

- Acción de control calculada por el controlador:

$$U_c(s) = \frac{C(s)}{1 + CPH(s)} R(s) - \frac{PCH(s)}{1 + CPH(s)} D_i(s) - \frac{CH(s)}{1 + CPH(s)} D_i(s) - \frac{CH(s)}{1 + CPH(s)} N(s) \quad (31)$$

- Acción de control vista por la planta:

$$U(s) = \frac{C(s)}{1 + CPH(s)} R(s) + \frac{1}{1 + CPH(s)} D_i(s) - \frac{CH(s)}{1 + CPH(s)} D_o(s) - \frac{CH(s)}{1 + CPH(s)} N(s) \quad (32)$$

# Estructura de control en lazo cerrado

Si definimos el controlador  $C(s)$  y la planta  $P(s)$  como

$$C(s) = \frac{num_c}{den_c} \quad (33)$$

y

$$P(s) = \frac{num_p}{den_p}. \quad (34)$$

La respuesta de lazo cerrado para un sistema con **realimentación unitaria** esta determinada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{PC(s)}{1 + PC(s)} = \frac{\frac{num_c num_p}{den_c den_p}}{1 + \frac{num_c num_p}{den_c den_p}} = \frac{num_c num_p}{num_c num_p + den_c den_p} \quad (35)$$

Véase como los ceros de lazo cerrado coinciden con los de lazo abierto. El número de polos de lazo cerrado coincide con el de lazo abierto, pero estos cambian de posición.

## Definición de sensibilidad:

La sensibilidad de un sistema de control indica como afecta un cambio en uno de los parámetros del sistema a la respuesta del mismo.

Es una de las mediadas más importantes y que ayudan a entender los beneficios de las estructuras de control en lazo cerrado.

- Los sistemas en lazo abierto presentan sensibilidad unitaria, puesto que cambios porcentuales en la planta suponen los mismos cambios en la salida del sistema.
- Los sistemas de control realimentados puede presentar una sensibilidad menor a la unidad. Haciéndolos inmunes a variaciones en los parámetros del sistema.

# Sensibilidad de los sistemas de control

Para demostrar la afirmación anterior estudiamos la sensibilidad como si fuese el error relativo frente a cambios en la planta. Definimos la sensibilidad mediante la siguiente expresión:

$$S = \frac{\frac{\Delta M(s)}{M(s)} 100}{\frac{\Delta P(s)}{P(s)} 100} = \frac{\Delta M(s) P(s)}{\Delta P(s) M(s)} \quad (36)$$

Podemos aproximar la sensibilidad por la siguiente expresión:

$$S \approx \frac{dM(s)}{dP(s)} \frac{P(s)}{M(s)} \quad (37)$$

Donde la derivada de la función de transferencia de lazo cerrado en función de la planta puede calcularse como:

$$\frac{dM(s)}{dP(s)} = \frac{d}{dP(s)} \left( \frac{PC(s)}{1 + PC(s)} \right) = \frac{C(s)(1 + PC(s)) - PC(s)C(s)}{(1 + PC(s))^2} \quad (38)$$

$$\frac{dM(s)}{dP(s)} = \frac{C(s)}{(1 + PC(s))^2} \quad (39)$$

Conocidas las expresión anterior se obtiene S según

$$S \approx \frac{dM(s)}{dP(s)} \frac{P(s)}{M(s)} = \frac{C(s)}{(1 + CP(s))^2} \frac{P(s)}{\frac{CP(s)}{1+CP(s)}} \quad (40)$$

Finalmente obtenemos:

$$S = \frac{1}{1 + CP(s)} \quad (41)$$

Por lo tanto, cuando queremos reducir la sensibilidad debemos de reducir S. Para ello, bastara con hacer que  $|1 + GH(s)| \gg 1$ . En este caso, el análisis se ha realizado para variaciones de  $P(s)$ , pero podemos realizarlo para cualquiera de los parámetros del lazo.



# Sensibilidad de los sistemas de control. Ejemplo

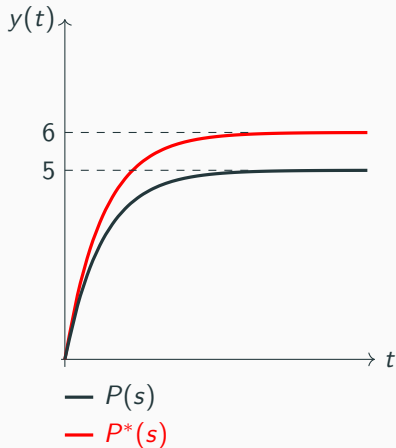
Si una planta

$$P(s) = \frac{5}{s+1}, \quad (42)$$

y su ganancia se incrementa un 20 % ( $5 \times 1.2 = 6$ ), pasando a ser

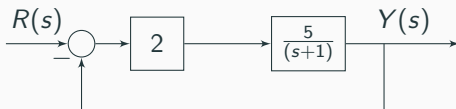
$$P^*(s) = \frac{6}{s+1}, \quad (43)$$

la respuesta del sistema sufre una variación del 20 % en el comportamiento asociado a la ganancia.



## Sensibilidad de los sistemas de control. Ejemplo

Si esa misma planta es gobernada empleando el siguiente lazo de control:



La respuesta de lazo cerrado esta determinada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2 \cdot 5}{(s+1) + 2 \cdot 5} = \frac{10}{s+11} = \frac{\frac{10}{11}}{\frac{s}{11} + 1} = \frac{0.909}{0.0909s + 1} \quad (44)$$

Si la ganancia de la planta aumenta un 20% ( $P = P^*$ ), se obtiene

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2 \cdot 6}{(s+1) + 2 \cdot 6} = \frac{12}{s+13} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{s}{13} + 1} = \frac{0.923}{0.078s + 1} \quad (45)$$

## Sensibilidad de los sistemas de control. Ejemplo

Puede comprobarse como las variaciones en los parámetros de la planta repercuten en menor medida en la variable gobernada.

- Variación de la ganancia:  $1.53 \% < 20 \%$
- Variación de la constante de tiempo:  $-15.38 \% < 20 \%$

Esta inmunidad a las variaciones en los parámetros de la planta aumenta al aumentar la ganancia del lazo. Por lo tanto, empleando estructuras de control en lazo cerrado, podemos insensibilizar la respuesta del sistema ante variaciones en los parámetros de la planta.

## Errores en régimen permanente

---

## Error en régimen permanente

En última instancia, el objetivo del sistema de control es que la variable gobernada siga a la referencia  $y(t) = r(t)$ . Es decir, que el error sea nulo o muy pequeño. En un sistema como realimentación unitaria, el error frente a referencias esta determinado por

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) = R(s) - \frac{CP(s)}{1 + CP(s)} R(s) = \\ &= \frac{R(s)(1 + CP(s)) - CP(s)R(s)}{1 + G(s)R(s)} = \frac{1}{1 + CP(s)} R(s) \quad (46) \end{aligned}$$

Podemos obtener el error en régimen permanente aplicando el teorema del valor final

$$x(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (47)$$

## Error en régimen permanente. Referencias de tipo impulso

Por lo tanto, error en régimen permanente está determinado por

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + CP(s)} R(s), \quad (48)$$

y depende de la señal de referencia  $R(s)$  y del conjunto  $CP(s)$ .

Cuando la señal de referencia es un impulso unitario  $R(s) = 1$ , el error en régimen permanente es nulo

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + CP(s)} = 0, \quad (49)$$

independientemente del valor de las funciones de transferencia  $CP(s)$ <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Se considera que los polos de lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo.

## Error en régimen permanente. Referencias de tipo escalón

Cuando la señal de referencia es un escalón unitario, el error en régimen permanente está determinado por

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{1}{s}}{1 + CP(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + CP(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} CP(s)}. \quad (50)$$

Es decir, depende de la función de transferencia del conjunto  $CP(s)$ .

Si se define el límite cuando  $s \rightarrow 0$  de  $CP(s)$  como

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} CP(s), \quad (51)$$

el error en régimen permanente puede expresarse según

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + k_p} \quad (52)$$

## Error en régimen permanente. Referencias de tipo escalón

Considérese que función de transferencia  $CP(s)$  presenta las siguiente estructura

$$CP(s) = \frac{(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{s^k (s + p_1) \cdots (s + p_n)}, \quad (53)$$

donde  $k$  representa el número de integradores (polos en el origen) del conjunto  $CP(s)$ . denominamos TIPO del sistema al número de integradores. Por lo tanto, el sistema anterior es de TIPO  $k$ .

El error en régimen permanente se encuentra ligado al número de integradores:

- Tipo 0. En este caso  $k_p$  esta determinado por

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1) \cdots (s + p_n)} = \frac{\prod_{j=1}^m z_j}{\prod_{i=1}^n p_i} = k_p \rightarrow \text{Valor finito}, \quad (54)$$

dando lugar a un error en régimen permanente finito.

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + k_p} \quad (55)$$



## Error en régimen permanente. Referencias de tipo escalón

- Tipo  $\geq 1$ . En estos casos  $k_p$  está determinado por

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{s^k (s + p_1) \cdots (s + p_n)} = \frac{\prod_{j=1}^m z_j}{0 \prod_{i=1}^n p_i} = \infty, \quad (56)$$

y el error en régimen permanente, conocido como error de posición, es nulo

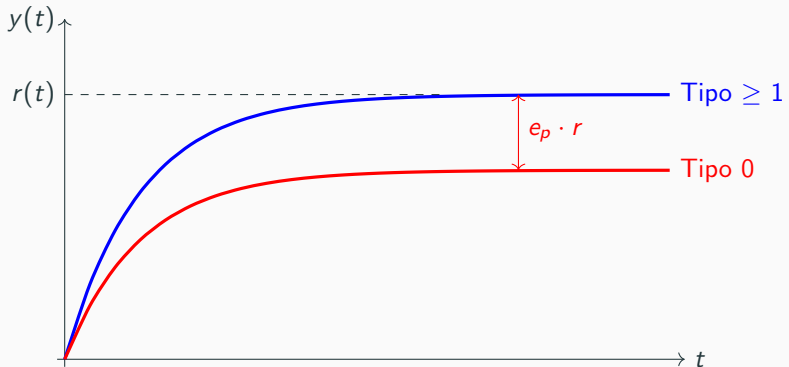
$$e(\infty) = e_p = \frac{1}{1 + \infty} = 0 \quad (57)$$

### Conclusión:

Si se desea que un sistema en lazo cerrado presente error de posición nulo, el conjunto  $CP(s)$  deberá poseer al menos un integrador. En caso de que la planta  $P(s)$  no presente integrador, este deberá incorporarse en el controlador.

# Error en régimen permanente. Referencias de tipo escalón

Error en régimen permanente para una referencia  $r(t) = r$ , escalón de amplitud  $r$ .



## Error en régimen permanente. Referencias de tipo rampa

Cuando la señal de referencia es una rampa unitaria  $R(s) = 1/s^2$ , el error en régimen permanente está determinado por

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + CP(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1 + CP(s))} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sCP(s)}. \quad (58)$$

A este error se le conoce como error de velocidad  $e_v$  y está determinado por la constante  $k_v$ , que depende del conjunto  $CP(s)$

$$e(\infty) = \frac{1}{k_v} \rightarrow k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sCP(s) \quad (59)$$

Nuevamente el valor de  $k_v$  se encuentra ligado al número de integradores.

## Error en régimen permanente. Referencias de tipo rampa

- Tipo 0. En este caso la constante de error de velocidad  $k_v$  esta determinada por

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1) \cdots (s + p_n)} = 0 \frac{\prod_{j=1}^m z_j}{\prod_{i=1}^n p_i} = 0, \quad (60)$$

dando lugar a un error en régimen permanente infinito

$$e(\infty) = e_v = \frac{1}{0} = \infty \quad (61)$$

- Tipo 1. En este caso la constante de error de velocidad  $k_v$  esta determinada por

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{s(s + p_1) \cdots (s + p_n)} = \frac{\prod_{j=1}^m z_j}{\prod_{i=1}^n p_i} = k_v \rightarrow \text{Finito}, \quad (62)$$

dando lugar a un error en régimen permanente finito

$$e(\infty) = e_v = \frac{1}{k_v} \quad (63)$$

## Error en régimen permanente. Referencias de tipo rampa

- Tipo  $\geq 2$ . En este caso la constante de error de velocidad  $k_v$  esta determinada por

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{s^k (s + p_1) \cdots (s + p_n)} = \frac{\prod_{j=1}^m z_j}{0 \prod_{i=1}^n p_i} = \infty \quad (64)$$

dando lugar a un error en régimen permanente nulo

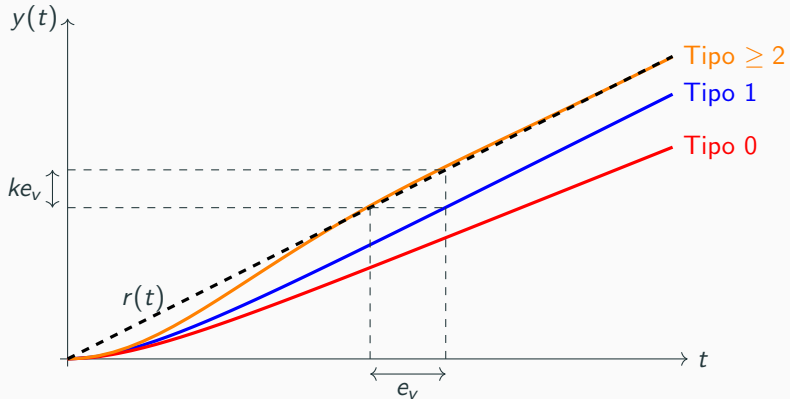
$$e(\infty) = e_v = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (65)$$

### Conclusión:

Si se desea que un sistema en lazo cerrado presente error de velocidad nulo, el conjunto  $CP(s)$  deberá poseer al menos dos integradores. En caso de que la planta  $P(s)$  no los presente, estos deberán incorporarse en el controlador.

# Error en régimen permanente. Referencias de tipo rampa

Error en régimen permanente para una referencia  $r(t) = k$ , rampa con pendiente  $k$ .



## Error en régimen permanente. Referencias de tipo parábola

Cuando la señal de referencia es una rampa unitaria  $R(s) = 1/s^3$ , el error en régimen permanente está determinado por

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{1}{s^3}}{1 + CP(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2(1 + CP(s))} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 CP(s)}. \quad (66)$$

A este error se le conoce como error de aceleración  $e_a$  y está determinado por la constante  $k_a$ , que depende del conjunto  $CP(s)$

$$e(\infty) = \frac{1}{k_a} \rightarrow k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 CP(s) \quad (67)$$

Nuevamente el valor de  $k_a$  se encuentra ligado al número de integradores.

## Error en régimen permanente. Referencias de tipo parábola

- Tipo  $\leq 1$ . En este caso la constante de error de velocidad  $k_a$  esta determinada por

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{s(s + p_1) \cdots (s + p_n)} = 0 \frac{\prod_{j=1}^m z_j}{\prod_{i=1}^n p_i} = 0, \quad (68)$$

dando lugar a un error en régimen permanente infinito

$$e(\infty) = e_a = \frac{1}{0} = \infty \quad (69)$$

- Tipo 2. En este caso la constante de error de velocidad  $k_a$  esta determinada por

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{s^2(s + p_1) \cdots (s + p_n)} = \frac{\prod_{j=1}^m z_j}{\prod_{i=1}^n p_i} = k_a \rightarrow \text{Finito}, \quad (70)$$

dando lugar a un error en régimen permanente finito

$$e(\infty) = e_a = \frac{1}{k_a} \quad (71)$$



## Error en régimen permanente. Referencias de tipo rampa

- Tipo  $\geq 3$ . En este caso la constante de error de velocidad  $k_a$  esta determinada por

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{s^3(s + p_1) \cdots (s + p_n)} = \frac{\prod_{j=1}^m z_j}{0 \prod_{i=1}^n p_i} = \infty \quad (72)$$

dando lugar a un error en régimen permanente nulo

$$e(\infty) = e_a = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (73)$$

### Conclusión:

Si se desea que un sistema en lazo cerrado presente error de aceleración nulo, el conjunto  $CP(s)$  deberá poseer al menos tres integradores. En caso de que la planta  $P(s)$  no los presente, estos deberán incorporarse en el controlador.

## Error en régimen permanente. Resumen

Tras el estudio anterior queda demostrado que el error depende del tipo del sistema y de la entrada aplicada. Podemos construir la siguiente tabla de errores:

	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2	Tipo $\geq 2$
Impulso	0	0	0	0
Escalón	$\frac{1}{1+k_p}$	0	0	0
Rampa	$\infty$	$\frac{1}{k_v}$	0	0
Parábola	$\infty$	$\infty$	$\frac{1}{k_a}$	0

## Error en régimen permanente

Debe tenerse en cuenta que lo expuesto anteriormente no tiene en cuenta las posibles perturbaciones. Si el sistema se encuentra expuesto a perturbaciones, el error en régimen permanente será la suma de todos los errores. En estos casos hay que aplicar el teorema del valor final a toda la señal de error.

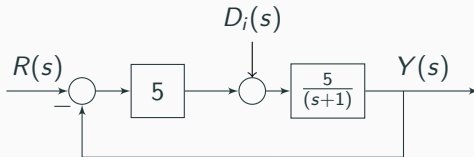
Es decir

$$e(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_r(s) + \lim_{s \rightarrow 0} sE_{d_i}(s) + \lim_{s \rightarrow 0} sE_{d_o}(s), \quad (74)$$

donde  $E_r(s)$  es el error frente a referencias,  $E_{d_i}(s)$  es el error frente a perturbaciones en la entrada y  $E_{d_o}(s)$  el error frente a perturbaciones en la salida.

## Error en régimen permanente. Ejemplo

Se dispone el siguiente sistema de control:



Determinar el error en régimen permanente cuando la entrada es un escalón de amplitud 5 y no existen perturbaciones.

$$e(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_r(s), \quad (75)$$

$$e(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(s+1)}{(s+1) + 25} \frac{5}{s} = \frac{5}{26}, \quad (76)$$

## Error en régimen permanente. Ejemplo

El resultado anterior puede obtenerse abordando la teoría de errores estudiada anteriormente. En este caso:

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} CP(s) = 25 \rightarrow e_p = \frac{1}{1 + k_p} = \frac{1}{1 + 25} = \frac{1}{26} \quad (77)$$

Por lo que el error para un escalón de amplitud 5, el error toma el valor

$$e(t = \infty) = 5e_p = \frac{5}{26} \quad (78)$$

## Error en régimen permanente. Ejemplo

¿Que error en régimen permanente se obtiene si aparece una perturbación constante de amplitud 0.5?

Tendremos que añadir al error anterior el error producido por la perturbación (superposición)

$$e(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_r(s) + \lim_{s \rightarrow 0} sE_d(s) = \frac{5}{26} + \lim_{s \rightarrow 0} sE_d(s), \quad (79)$$

donde

$$E_d(s) = \frac{-P(s)}{1 + CP(s)} D_i(s) = \frac{-\frac{5}{s+1}}{1 + \frac{25}{s+1}} \frac{0.5}{s} = \frac{-2.5}{s(s+26)} \quad (80)$$

$$e_d(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-2.5}{s(s+26)} = \frac{-2.5}{26} \quad (81)$$

$$e(t = \infty) = e_r(t = \infty) + e_d(t = \infty) = \frac{5}{26} + \frac{-2.5}{26} = \frac{2.5}{26} \quad (82)$$