

Fundamentos de control Industrial

Análisis de la respuesta transitoria.

Javier Rico Azagra

Curso 2020-2021

Universidad de La Rioja

Análisis de la repuesta en frecuencia

Introducción

En este tema vamos a estudiar la respuesta de un sistema ante señales senoidales.

Considérese una planta

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3) \cdots (s + p_n)}, \quad (1)$$

donde los parámetros p_i pertenecen al conjunto de números complejos \mathbb{C} .

Si todos los polos pertenecen al semiplano derecho, cuando se aplique en la entrada de la planta una señal senoidal

$$u(t) = A \sin(\omega t) \rightarrow R(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2)$$

La salida del sistema estará determinada por

$$Y(s) = U(s)P(s) = \frac{\omega A \cdot N(s)}{(s^2 + \omega^2)(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3) \cdots (s + p_n)}. \quad (3)$$

Introducción

Para obtener el comportamiento en el dominio del tiempo, es necesario obtener la antitransformada de Laplace.

Para obtener dicha antitransformada, se separa $Y(s)$ en fracciones simples

$$Y(s) = \frac{k_1}{(s + p_1)} + \frac{k_2}{(s + p_2)} + \cdots + \frac{k_n}{(s + p_n)} + \frac{\alpha s + \beta}{(s^2 + \omega^2)} \quad (4)$$

Véase como la expresión anterior es equivalente a

$$Y(s) = \frac{k_1}{(s + p_1)} + \frac{k_2}{(s + p_2)} + \cdots + \frac{k_n}{(s + p_n)} + \frac{\alpha_1}{(s + j\omega)} + \frac{\alpha_2}{(s - j\omega)} \quad (5)$$

si se separa $(s^2 + \omega^2)$ en dos fracciones.

$$(s^2 + \omega^2) = (s + j\omega)(s - j\omega) \quad (6)$$

Introducción

Puede obtenerse $y(t)$ como la suma de las antitransformadas de cada uno de las fracciones

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_1}{(s + p_1)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_2}{(s + p_2)} \right\} + \dots \\ + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_n}{(s + p_n)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha_1}{(s + j\omega)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha_2}{(s - j\omega)} \right\} \quad (7)$$

Si se obtienen las antitransformadas de todas las fracciones menos las dos últimas se obtiene

$$y(t) = k_1 e^{-p_1 t} + \dots + k_2 e^{-p_2 t} + \dots + k_n e^{-p_n t} \\ + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha_1}{(s + j\omega)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha_2}{(s - j\omega)} \right\} \quad (8)$$

Si todos los polos son estables, las exponenciales serán negativas y pasado el tiempo suficiente estas tenderán a cero.

En régimen permanente se obtiene

$$y(t = \infty) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha_1}{(s + j\omega)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha_2}{(s - j\omega)} \right\} \quad (9)$$

Calculamos estas antitransformadas para determinar $y(t = \infty)$. En primer lugar se obtienen los valores de α_1 y α_2 :

$$\alpha_1 = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega) P(s) \frac{A\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} = P(-j\omega) \frac{A\omega}{(-2j\omega)} \quad (10)$$

$$\alpha_2 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) P(s) \frac{A\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} = P(j\omega) \frac{A\omega}{(2j\omega)} \quad (11)$$

Calculados los valores α_1 y α_2 pueden obtenerse las antitransformadas

Calculando las antitransformadas se obtiene

$$y(t = \infty) = \alpha_1 e^{-j\omega t} + \alpha_2 e^{j\omega t} \quad (12)$$

$$y(t = \infty) = P(-j\omega) \frac{A}{(-2j)} e^{-j\omega t} + P(j\omega) \frac{A}{(2j)} e^{j\omega t} \quad (13)$$

Véase como $P(j\omega)$ y $P(-j\omega)$ son números complejos que pueden ser expresados en formato módulo argumento:

- $P(j\omega) = |P(j\omega)| \angle P(j\omega) = |P(j\omega)| e^{j\angle P(j\omega)}$
- $P(j\omega) = |P(-j\omega)| \angle P(-j\omega) = |P(j\omega)| \angle -P(j\omega) = |P(j\omega)| e^{-j\angle P(j\omega)}$

Por lo tanto, la salida puede expresarse como

$$y(t = \infty) = |P(j\omega)| \frac{A}{(2j)} \left(e^{j\angle P(j\omega)} e^{j\omega t} - e^{-j\angle P(j\omega)} e^{-j\omega t} \right) \quad (14)$$

Multiplicando las exponenciales se obtiene:

$$y(t = \infty) = |P(j\omega)| \frac{A}{(2j)} \left(e^{j(\omega t + \angle P(j\omega))} - e^{-j(\omega t + \angle P(j\omega))} \right) \quad (15)$$

Conocida la expresión del seno en forma de exponenciales

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}), \quad (16)$$

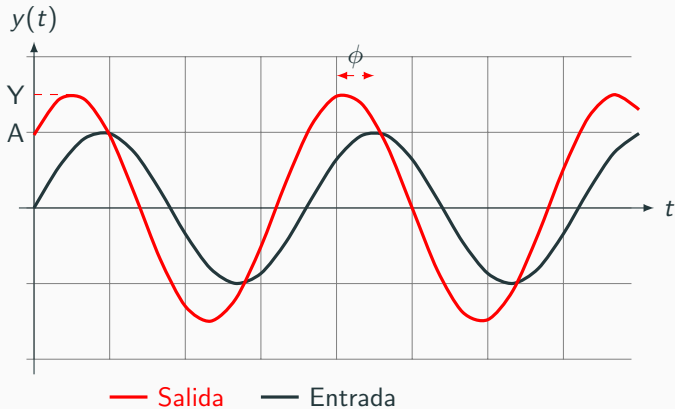
finalmente se obtiene

$$y(t = \infty) = A|P(j\omega)| \sin(\omega t + \phi); \phi = \angle P(j\omega). \quad (17)$$

Es decir, el sistema en régimen permanente oscilará con una senoidal de igual frecuencia a la de la entrada pero con diferente magnitud y desfasada.

Introducción

Respuesta en régimen permanente



Ejemplo: Considérese un sistema de primer orden

$$P(s) = \frac{k}{s+p} = \frac{2}{s+1}; \quad (18)$$

La magnitud y la fase de este sistema están determinadas por

$$P(s) = \frac{k}{j\omega + p} = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + p^2}} \angle -\arctan \frac{\omega}{p} = \frac{2}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \angle -\arctan \omega. \quad (19)$$

A continuación se muestra la magnitud y el desfase para diferentes frecuencias:

ω	$ P(j\omega) $	$\angle P(j\omega)$
0.1	1.99	-5.71°
1	1.414	-45°
10	0.199	-84.28°

Diagramas de Bode

Diagramas de Bode

Un diagrama de Bode es la representación gráfica de la respuesta frecuencial del sistema. Consta de dos figuras:

- Diagrama de Bode de magnitud. Muestra la magnitud de la salida en función de la frecuencia/pulsación de la señal de entrada.
- Diagrama de Bode de fase. Muestra el desfase de la señal de salida con respecto de la señal de entrada en función de la frecuencia/pulsación de la señal de entrada.

Dada una función de transferencia

$$P(s) = \frac{k(s + z_1) \cdot (s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (20)$$

Diagramas de Bode

Para trazar los diagramas de Bode debe calcularse la magnitud y fase de $P(j\omega)$. Para ello, se sustituye $P(s)$ por $P(j\omega)$

$$P(j\omega) = \frac{k(j\omega + z_1) \cdot (j\omega + z_2) \cdots (j\omega + z_m)}{(j\omega + p_1) \cdot (j\omega + p_2) \cdots (j\omega + p_n)} \quad (21)$$

y se obtiene el módulo

$$|P(j\omega)| = \frac{k\sqrt{\omega^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{\omega^2 + z_2^2} \cdots \sqrt{\omega^2 + z_m^2}}{\sqrt{\omega^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{\omega^2 + p_2^2} \cdots \sqrt{\omega^2 + p_n^2}} \quad (22)$$

y el argumento

$$\begin{aligned} \angle P(j\omega) = & \arctan \frac{\omega}{z_1} + \arctan \frac{\omega}{z_2} + \cdots + \arctan \frac{\omega}{z_m} \\ & - \arctan \frac{\omega}{p_1} - \arctan \frac{\omega}{p_2} - \cdots - \arctan \frac{\omega}{p_n} \end{aligned} \quad (23)$$

Diagramas de Bode

Como puede comprobarse, trazar las funciones anteriores es una tarea compleja. Para solucionar este problema se toman las siguientes decisiones:

- Magnitud. Para descomponer la magnitud en sumandos, se traza la misma en decibelios. Es decir: $20 \log_{10} |P(j\omega)|$. De este modo se obtiene

$$\begin{aligned} |P(j\omega)|_{dBs} = & 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 + z_1^2} + 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 + z_2^2} + \dots \\ & + 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 + z_m^2} - 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 + p_1^2} \\ & - 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 + p_2^2} - \dots - 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 + p_n^2} \quad (24) \end{aligned}$$

- Pulsaciones (frecuencia). Al emplear como unidad los decibelios, se consigue separar la magnitud en sumandos, pero estos contienen logaritmos, por lo que se emplea un eje de pulsaciones en escala logarítmica.

Véase como en un eje logarítmico, el trazado de

$$y = \alpha \log(x) + \beta \quad (25)$$

coincide con una recta de pendiente α que en la pulsación 10^0 presenta magnitud β .

Conocidas las reglas de diseño, un diagrama de Bode puede construirse sumando los diagramas de bode de cada uno de los elementos que lo componen. Estos pueden ser:

- Ganancias
- Ceros / polos en el origen
- Ceros / polos reales
- Ceros / polos complejo-conjugados
- Retardos

Diagrama de Bode de una ganancia

Dada una planta formada por una ganancia

$$P(s) = k \rightarrow P(j\omega) = k \quad (26)$$

El modulo y el argumento de la planta en función de la frecuencia cumple

$$\begin{cases} |P(j\omega)| = k \rightarrow |P(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} k \\ \angle P(j\omega) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Puede comprobarse como:

- Si $k > 1 \rightarrow |P(j\omega)|_{dB} > 0$ actúa como amplificador
- Si $k < 1 \rightarrow |P(j\omega)|_{dB} < 0$ actúa como atenuador

Diagrama de Bode de una ganancia

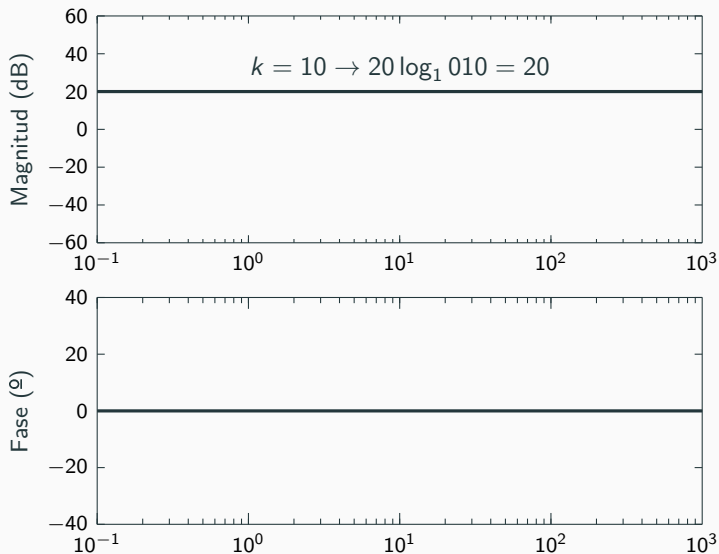


Diagrama de Bode de un cero en el origen

Consideres una planta formada por un cero en el origen de coordenadas:

$$P(s) = s \rightarrow P(j\omega) = j\omega \quad (28)$$

Su módulo y argumento están determinados por:

$$\begin{cases} |P(j\omega)| = \omega \rightarrow |P(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega \\ \angle P(j\omega) = 90 \end{cases} \quad (29)$$

Comprobamos como un cero en el origen aporta una fase constante de 90 y una magnitud determinada por una recta de pendiente $20dB/dec$ que pasa por $\omega = 10^0 = 1$.

Diagrama de Bode de un cero en el origen

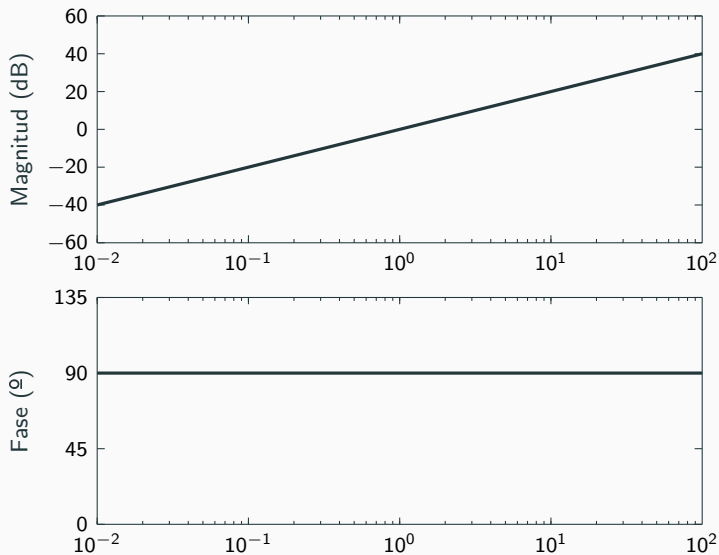


Diagrama de Bode de un polo en el origen

Dada una planta formada por una ganancia

$$P(s) = \frac{1}{s} \rightarrow P(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad (30)$$

Obtenemos el modulo y el argumento de la planta.

$$\begin{cases} |P(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \rightarrow |P(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \omega \\ \angle P(j\omega) = -90 \end{cases} \quad (31)$$

Comprobamos como un cero en el origen aporta una fase constante de -90 y una magnitud determinada por una recta de pendiente $-20dB/dec$ que pasa por $\omega = 10^0 = 1$. Véase como es un diagrama igual al del cero en el origen pero con signo contrario.

Diagrama de Bode de un polo en el origen

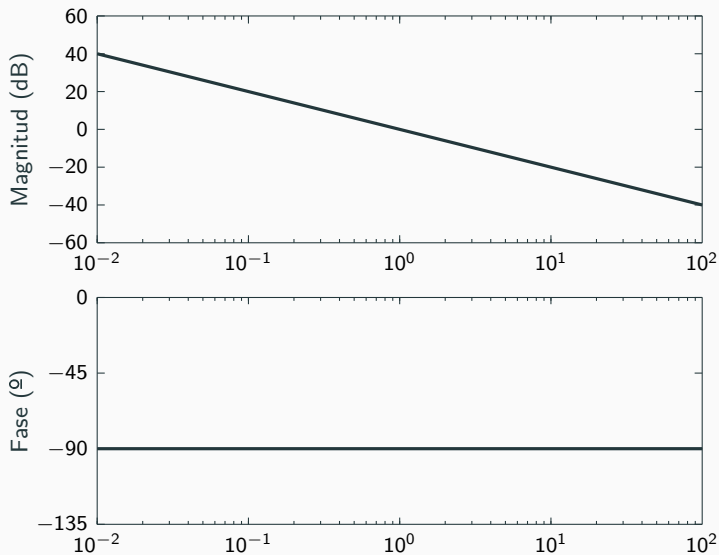


Diagrama de Bode de un cero real

Considérese una planta compuesta por un único cero real

$$P(s) = \left(\frac{s}{\omega_z} + 1 \right) \rightarrow P(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_z} + 1 \right), \quad (32)$$

donde ω_n corresponde con la pulsación en la que se encuentra el cero.

El módulo y la ganancia de la planta están determinados por:

$$\begin{cases} |P(j\omega)| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z^2}} \rightarrow |P(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z^2}} \\ \angle P(j\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_z} \end{cases} \quad (33)$$

Realizar el trazado a mano de las funciones anteriores es muy complejo. Por lo tanto, vamos a trazar un diagrama de Bode aproximado, llamado Bode asintótico.

Diagrama de Bode de un cero real

Para trazar el diagrama de Bode asintótico realizamos las siguientes aproximaciones:

- Baja frecuencia: $\omega \ll \omega_z$

$$\begin{cases} |P(j\omega)|_{db} = 10 \log_{10}(1) = 0dB \\ \angle P(j\omega) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

- Alta frecuencia: $\omega \gg \omega_z$

$$\begin{cases} |P(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) = 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \omega_z \\ \angle P(j\omega) = +90 \end{cases} \quad (35)$$

Diagrama de Bode de un cero real

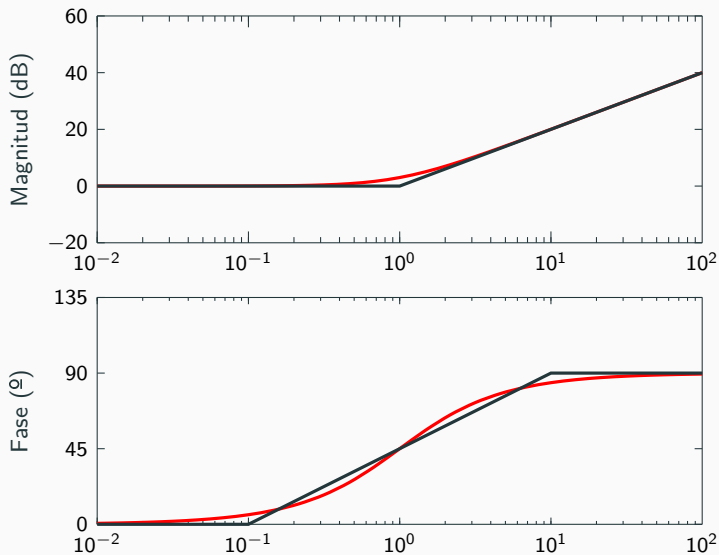


Diagrama de Bode de un polo real

Considérese una planta compuesta por un único polo real

$$P(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_p} + 1} \rightarrow P(j\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_p} + 1}, \quad (36)$$

donde ω_p corresponde con la pulsación en la que se encuentra el polo.

El módulo y la ganancia de la planta están determinados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} |P(j\omega)| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}^{-1} \rightarrow |P(j\omega)|_{db} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}} \\ \angle P(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_p} \end{array} \right. \quad (37)$$

Como en el caso del cero, el trazado de las funciones anteriores a mano es muy complejo, por lo que se opta por el diagrama de Bode asintótico.

Diagrama de Bode de un polo real

Para trazar el diagrama de Bode asintótico realizamos las mismas aproximaciones que en caso del cero real:

- Baja frecuencia: $\omega \ll \omega_p$

$$\begin{cases} |P(j\omega)|_{db} = -10 \log_{10}(1) = 0dB \\ \angle P(j\omega) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

- Alta frecuencia: $\omega \gg \omega_p$

$$\begin{cases} |P(j\omega)|_{db} = -20 \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) = -20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_p \\ \angle P(j\omega) = -90 \end{cases} \quad (39)$$

Diagrama de Bode de un polo real

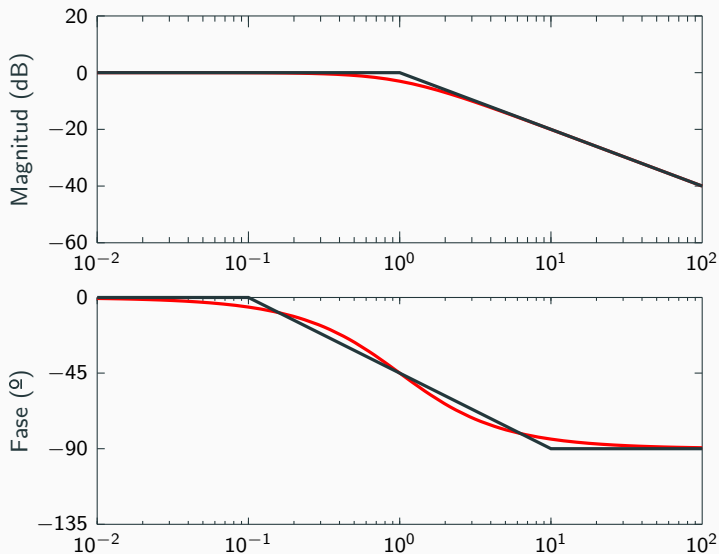


Diagrama de Bode de un cero complejo-conjugado

Considérese una planta compuesta por un único polo real

$$P(s) = \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta s}{\omega_n} + 1 \right) \rightarrow P(j\omega) = \left(\frac{j^2\omega^2}{\omega_n^2} + j\frac{2\delta\omega}{\omega_n} + 1 \right), \quad (40)$$

donde ω_n corresponde con la pulsación natural no amortiguada.

En este caso, el módulo está determinado por:

$$\begin{cases} |P(j\omega)| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n}\right)^2} \\ |P(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{cases} \quad (41)$$

y la fase por

$$\angle P(j\omega) = \arctan \left(\frac{\frac{2\delta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \quad (42)$$

Diagrama de Bode de un cero complejo-conjugado

Para trazar el diagrama de Bode asintótico, consideramos $\delta = 1$ y realizamos las mismas aproximaciones que en los casos anteriores:

- Baja frecuencia: $\omega \ll \omega_n$

$$\begin{cases} |P(j\omega)|_{db} = 10 \log_{10} (1) = 0dB \\ \angle P(j\omega) = 0 \end{cases} \quad (43)$$

- Alta frecuencia: $\omega \gg \omega_n$

$$\begin{cases} |P(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 = 40 \log_{10} \omega - 40 \log_{10} \omega_n \\ \angle P(j\omega) = -180 \end{cases} \quad (44)$$

Bode asintótico de un cero complejo-conjugado

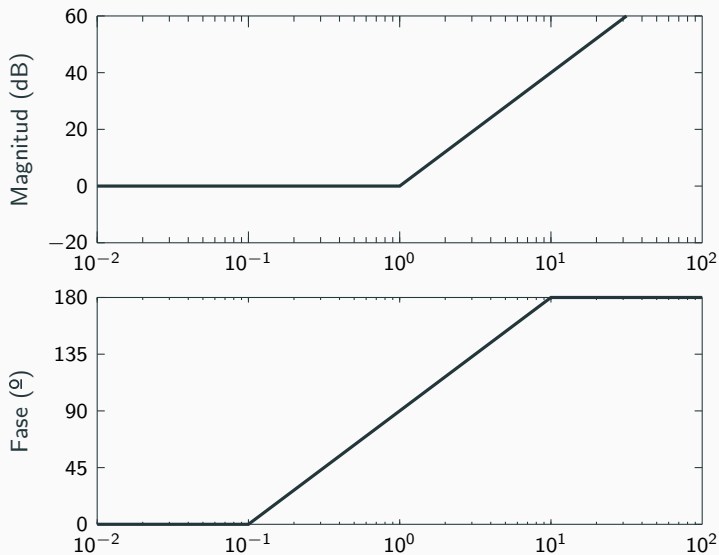


Diagrama de Bode de un cero complejo-conjugado

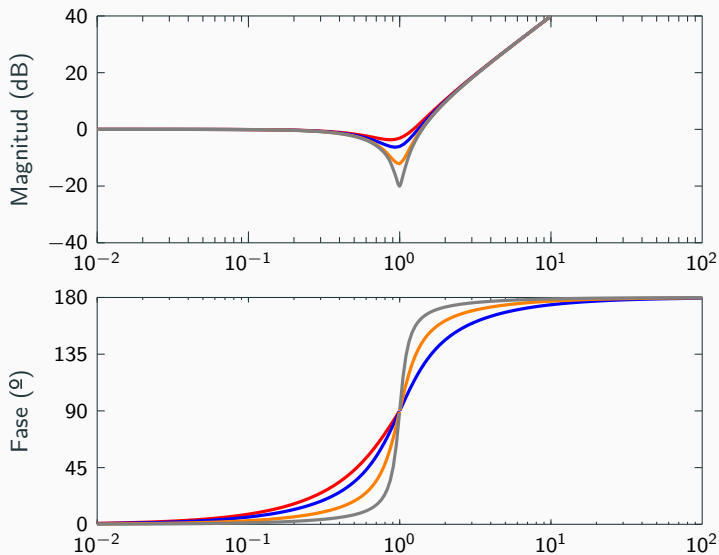


Diagrama de Bode de un cero complejo-conjugado

En el diagrama de Bode real de un cero complejo-conjugado se define como pulsación de resonancia a la pulsación en la que se produce la magnitud mínima y al pico de resonancia a dicha magnitud:

- Pulsación de resonancia ω_c

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}; \quad \forall \quad 0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2} \quad (45)$$

- Pico de resonancia M_r

$$M_r = \left(2\delta \sqrt{1 - \delta^2} \right) \quad (46)$$

$$M_r|_{dB} = 20 \log_{10} \left(2\delta \sqrt{1 - \delta^2} \right) \quad (47)$$

Diagrama de Bode de un polo complejo-conjugado

Considérese una planta compuesta por un único polo real

$$P(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta s}{\omega_n} + 1\right)} \rightarrow P(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j^2\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta\omega}{\omega_n} + 1\right)}, \quad (48)$$

donde ω_n corresponde con la pulsación natural no amortiguada.

En este caso, el módulo está determinado por:

$$\begin{cases} |P(j\omega)| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n}\right)^2}^{-1} \\ |P(j\omega)|_{db} = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_n}\right)^2} \end{cases} \quad (49)$$

y la fase por

$$\angle P(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\frac{2\delta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) \quad (50)$$

Diagrama de Bode de un polo complejo-conjugado

Para trazar el diagrama de Bode asintótico, consideramos $\delta = 1$ y realizamos las mismas aproximaciones que en los casos anteriores:

- Baja frecuencia: $\omega \ll \omega_n$

$$\begin{cases} |P(j\omega)|_{db} = -10 \log_{10} (1) = 0dB \\ \angle P(j\omega) = 0 \end{cases} \quad (51)$$

- Alta frecuencia: $\omega \gg \omega_n$

$$\begin{cases} |P(j\omega)|_{db} = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 = -40 \log_{10} \omega + 40 \log_{10} \omega_n \\ \angle P(j\omega) = -180 \end{cases} \quad (52)$$

Bode asintótico de un polo complejo-conjugado

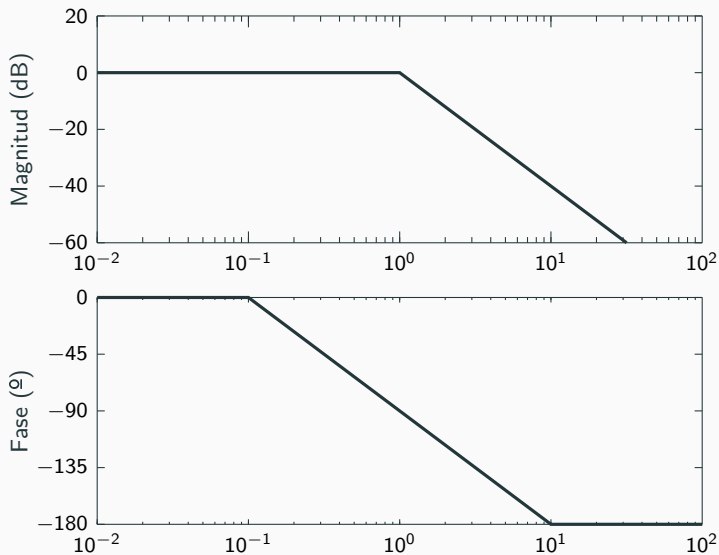


Diagrama de Bode de un polo complejo-conjugado

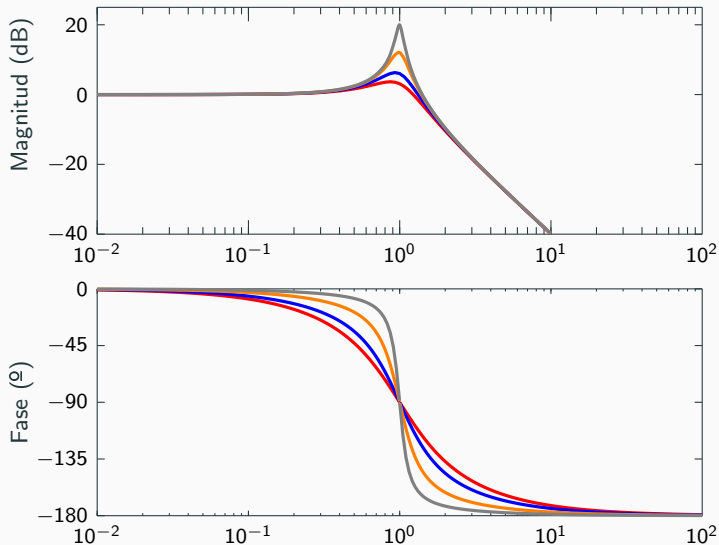


Diagrama de Bode de un cero complejo-conjugado

En el diagrama de Bode real de un polo complejo-conjugado se define como pulsación de resonancia a la pulsación en la que se produce la magnitud mínima y al pico de resonancia a dicha magnitud:

- Pulsación de resonancia ω_c

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}; \quad \forall \quad 0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2} \quad (53)$$

- Pico de resonancia M_r

$$M_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}} \quad (54)$$

$$M_r|_{dB} = -20 \log_{10} \left(2\delta\sqrt{1 - \delta^2} \right) \quad (55)$$

Diagrama de Bode de un retardo

Un retardo en el tiempo en el dominio de Laplace presenta la siguiente función de transferencia

$$P(s) = e^{-Ls} \rightarrow P(j\omega) = e^{-Ls}, \quad (56)$$

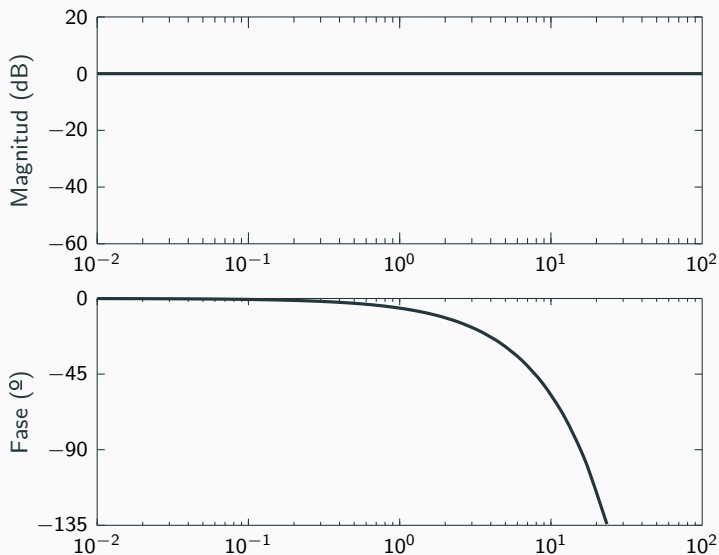
donde L corresponde con el tiempo de retraso.

Obtenemos el modulo y el argumento de la planta.

$$\begin{cases} |P(j\omega)| = 1 \rightarrow |P(j\omega)|_{dB} = 0 \\ \angle P(j\omega) = -\frac{180}{\pi} L\omega \end{cases} \quad (57)$$

Debe prestarse atención al trazar este diagrama, dado que a pesar de parecer el mas sencillo, es complejo de trazar debido a la escala logarítmica.

Diagrama de Bode de un retardo



Pasos para el trazado de un diagrama de Bode

Pasos para el trazado de diagramas de Bode:

1. Expresar la función de transferencia en el formato adecuado.
2. Calcular los límites de del diagrama (valores máximos y mínimos del dibujo).
3. Trazar el diagrama de cada uno de los elementos.
4. Sumar los diagramas para obtener el Bode total.

Ejemplo: Trazar el diagrama de bode de la planta

$$P(s) = \frac{50(s + 2)}{s(s + 10)(0.02s + 1)} \quad (58)$$

Pasos para el trazado de un diagrama de Bode

En primer lugar, expresamos la planta en el formato adecuado

$$P(s) = \frac{50(s+2)}{s(s+10)(0.02s+1)} = \frac{50 \cdot 2(\frac{s}{2} + 1)}{10s(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{50} + 1)} \quad (59)$$

$$P(s) = \frac{10 \cdot (\frac{s}{2} + 1)}{s(\frac{s}{10} + 1)(\frac{s}{50} + 1)} \quad (60)$$

Elementos de la planta:

- Ganancia: 10
- Integradores: 1
- Polos reales: -10, -50
- Ceros reales: -2

Pasos para el trazado de un diagrama de Bode

Estudio de los límites del diagrama:

- Pulsaciones:
 - Pulsación mínima: 10^{-1} . Una década antes del polo/cero más lento.
 - Pulsación máxima: 10^3 . Una década después del polo/cero más rápido.
- Magnitudes:
 - Magnitud mínima: Cuando tenemos integradores se produce en la pulsación mínima.
 - Magnitud máxima: Se produce en la pulsación máxima.

Pasos para el trazado de un diagrama de Bode

Obtenemos el módulo de la planta

$$P(j\omega) = \frac{10 \cdot \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)}{s\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{50} + 1\right)} \quad (61)$$

$$|P(j\omega)| = \frac{10 \cdot \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{10}\right)^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{\omega}{50}\right)^2 + 1}} \quad (62)$$

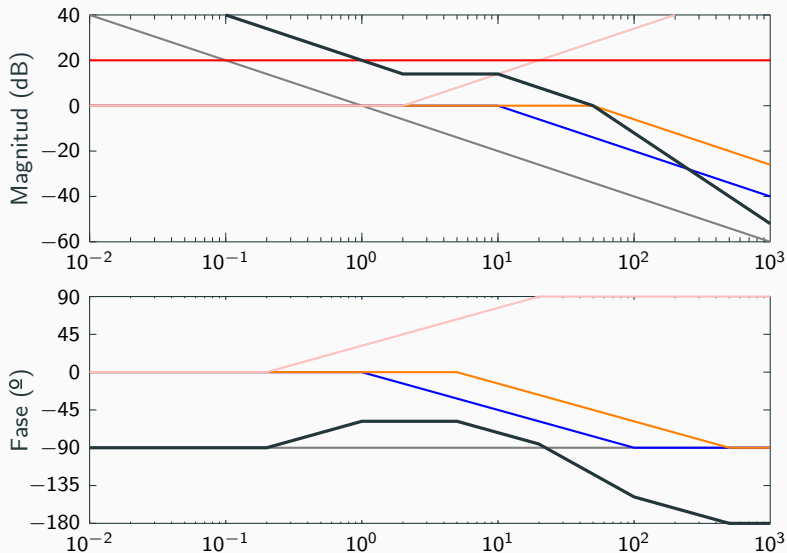
- Magnitud mínima:

$$|P(j0.1)| = \frac{10 \cdot \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1}}{\omega \sqrt{\left(\frac{\omega}{10}\right)^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{\omega}{50}\right)^2 + 1}} \approx \frac{10}{\omega} = 100 \rightarrow 40dBs \quad (63)$$

- Magnitud máxima: Se produce en la pulsación máxima.

$$|P(j1000)| = \frac{10 \cdot \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1}}{\omega \sqrt{\left(\frac{\omega}{10}\right)^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{\omega}{50}\right)^2 + 1}} \approx \frac{10 \frac{\omega}{2}}{\omega \frac{\omega}{10} \frac{\omega}{50}} = 2.5 \times 10^{-3} = -52dBs \quad (64)$$

Diagrama de Bode de un retardo



Estabilidad relativa

- Los diagrama de Bode permiten obtener los márgenes de estabilidad relativa.
- Estos márgenes reportan una medida cuantitativa sobre la estabilidad de un sistema de control.
- Es decir, permiten determinar si el sistema se encuentra próximo a la inestabilidad o no.
- Véase como empleando Routh-Hurwitz únicamente podemos conocer si un sistema es estable o no, pero no si se encuentra próximo a la inestabilidad.
- El cálculo de márgenes de estabilidad en diagramas de Bode se deriva de los diagramas de Nyquist.

- Se analiza el diagrama de Bode de lazo abierto para conocer la estabilidad en lazo cerrado $L(j\omega) = CPH(j\omega)$.
- Definimos como pulsación de cruce de ganancia ω_{cg} a la pulsación en la que el diagrama de bode de magnitud cruza por 0dBs.

$$|L(j\omega_{cg})| = 1 \quad (65)$$

- Definimos como pulsación de cruce de fase ω_{cf} a la pulsación en la que el diagrama de bode de fase cruza por -180° .

$$\angle L(j\omega_{cf}) = 180 \quad (66)$$

Para que un sistema sea estable debe de producirse la pulsación de cruce de ganancia antes que la de fase.

- Definimos como margen de fase MF, a la distancia del diagrama de bode de fase con la línea de -180° en la pulsación de cruce de ganancia. Es decir, corresponde con el ángulo que disponemos de margen para que el sistema se vuelva inestable.

$$MF = 180 + \angle L(j\omega_{cg}) \quad (67)$$

- Definimos como margen de ganancia MG, a la distancia del diagrama de bode de magnitud con la línea de 0dBs en la pulsación de cruce de fase. Es decir, corresponde con la magnitud que disponemos de margen para que el sistema se vuelva inestable.

$$MG_{dB} = -20 \log_{10} |L(j\omega_{cf})| \quad (68)$$

$$MG = \frac{1}{|L(j\omega_{cf})|} \quad (69)$$

Para que un sistema sea estable MG y MF deben ser positivos.

- Cuanto mayores son los márgenes de estabilidad más seguros podemos estar de que el sistema no se volverá inestable por variaciones en la planta.
- Tradicionalmente, se toma como criterio recomendación, implementar sistemas de control que garanticen: $MF \geq 35$ y $MG \geq 6dB$
- Debe tenerse en cuenta que no es posible calcular los dos márgenes en todos los casos.
- Cuando el sistema no presenta ω_{cf} (su fase nunca es inferior a -180°), se considera que el margen de ganancia es $MG = \infty$.
- Cuando el sistema no presenta ω_{cg} (su magnitud nunca es superior a $0dB$), se considera que el margen de fase es $MF = \infty$.

Estabilidad Relativa

