Fundamentos de control Industrial

Lugar de las raíces - Método de Evans.

Javier Rico Azagra

Curso 2020-2021

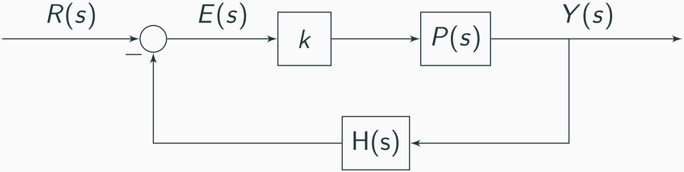
Universidad de La Rioja

Lugar geométrico de las raíces

Lugar de las raíces

La dinámica de un sistema esta determinada por la posición de los polos en el plano s. Evans desarrolla el método del Lugar de las Raíces o Lugar de Evans, que nos permite conocer la posición de los polos del sistema en lazo cerrado al variar un parámetro k.

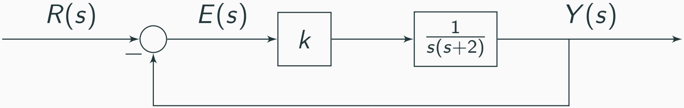
Para aplicar este método partimos de del siguiente diagrama de bloques:



El parámetro normalmente suele encontrarse en el controlador, pero puede ubicarse en cualquier otro punto del lazo.

Lugar de las raíces

Ejemplo: Consideres se el sistema de control de la figura



Los polos de lazo cerrado están determinados por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kP(s)}{1 + kP(s)} = \frac{k}{s(s+2)+k} = \frac{k}{s^2+2s+k} \tag{1}$$

Queda comprobado que los polos dependen del valor del parámetro k.

Lugar de las raíces

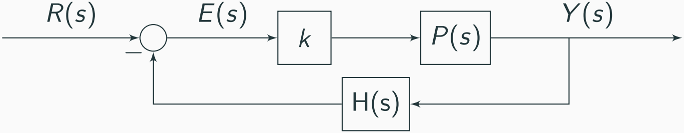
Véase como en función del valor de k el sistema en lazo cerrado presenta un comportamiento completamente diferente:

- Si se emplea $k = 0.75$. Sistema sobre-amortiguado
$$s^2 + 2s + 0.75 = 0 \rightarrow s = -0.5, -1.5$$
.
- Si se emplea $k = 1$. Sistema críticamente-amortiguado
$$s^2 + 2s + 1 = 0 \rightarrow s = -1, -1$$
.
- Si se emplea $k = 2$. Sistema sub-amortiguado
$$s^2 + 2s + 2 = 0 \rightarrow s = -1 \pm -1$$
.

El lugar geométrico de las raíces nos permite determinar cuales son las posibles raíces de lazo cerrado para los diferentes valores de k

Lugar de las raíces

Dada la estructura de control



y la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kPH(s)}{1 + kPH(s)} \tag{2}$$

Los polos de lazo cerrado se obtienen resolviendo

$$1 + kPH(s) = 0, \tag{3}$$

ecuación que puede expresarse según

$$PH(s) = \frac{-1}{k} \tag{4}$$

Si definimos el producto $PH(s)$ como una función de transferencia compuesta por m ceros z_j y n polos p_i ($p_i,\ z_j \in \mathbb{C}$), la ecuación anterior puede expresarse como

$$PH(s) = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = -\frac{1}{k} \tag{5}$$

Pueden definirse dos condiciones:

- **Condición de modulo.** El módulo del la función de transferencia de lazo abierto $PH(s)$ coincide con la inversa del módulo del k.
- **Condición de argumento.** El ángulo de la función de transferencia de lazo abierto $PH(s)$ coincide con -180º si $k > 0$ y con 0º si $k < 0$.

Lugar de las raíces

- **Condición de modulo:**

$$|PH(s)| = \left| \frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} \right| = \frac{\prod_{j=1}^{m}|(s+z_j)|}{\prod_{i=1}^{n}|(s+p_i)|} = \left|\frac{1}{k}\right| \tag{6}$$

- **Condición de argumento:**
  - Lugar directo $k > 0$

$$\angle PH(s) = \sum_{j=1}^{m}\angle(s+z_i) - \sum_{i=1}^{n}\angle(s+p_i) = (2r+1)180^\circ \tag{7}$$

  - Lugar inverso $k < 0$

$$\angle PH(s) = \sum_{j=1}^{m}\angle(s+z_i) - \sum_{i=1}^{n}\angle(s+p_i) = 2r180^\circ \tag{8}$$

Lugar de las raíces

Si un punto del plano "s" cumple la condición de argumento, es que pueden obtenerse raíces en dicho punto.

Ejemplo: Aplíquese, en el ejemplo anterior, la condición de argumento al punto $s = -1 + j2$

$$\begin{aligned} \angle PH(s) = -\angle(0 - 1 + j2) - \angle(2 - 1 + j2) = \\ -(180^\circ - \arctan(2)) - \arctan(2) = 180^\circ \end{aligned} \tag{9}$$

Este punto cumple la condición de argumento. Por lo tanto, pueden obtenerse polos en esta coordenada.

Ejemplo: Aplíquese, en el ejemplo anterior, la condición de argumento al punto $s = -2 + j2$

$$\angle PH(s) = -\angle(0-2+j2) - \angle(2-2+j2) = 135^\circ - 90^\circ = -225^\circ \neq 180^\circ \tag{10}$$

Este punto no cumple la condición de argumento. Por lo tanto, no pueden obtenerse raíces en este punto.

Si un punto cumple la condición de argumento, aplicando la condición de módulo, podemos determinar el valor de k que da lugar a las raíces deseadas

Ejemplo: Aplíquese, en el ejemplo anterior, la condición de módulo al punto $s = -1 + j2$

$$|PH(s)| = \left|\frac{1}{|-1+j2||2-1+j2|}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \left|\frac{1}{k}\right| \rightarrow k = 5 \qquad (11)$$

Puede comprobarse que si $k = 5$, la ecuación característica de lazo cerrado presenta los polos deseados:

$$s^2 + 2s + 5 = \rightarrow s = -1 \pm j2 \qquad (12)$$

Reglas para el trazado del lugar directo $k > 1$

1. El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real
2. El lugar de las raíces para $k = 0$ coincide con los polos de lazo abierto.
3. El lugar de las raíces para $k = \infty$ coincide con los ceros de lazo abierto, incluidos los ceros en el infinito.
4. Existen tantas ramas del lugar de las raíces como raíces tiene la ecuación característica. Cada rama se inicia en un polo y finaliza en un cero o en el infinito.
5. Pertenecen al lugar de las raíces directo los segmentos del eje real que dejan a su izquierda un numero impar de singularidades (*polos o ceros*). El resto del eje real pertenece al lugar inverso de las raíces.

Reglas para el trazado

6. Existen tantas asíntotas como diferencia entre polos y ceros de lazo abierto.
$$n_a = |n - m| \tag{13}$$
7. Las asíntotas se reparten alrededor de los 360º y su ángulo esta determinado por la siguiente expresión.
$$\phi_a = \left.\frac{(2r+1)180^\circ}{|n-m|}\right|_{r=0,1,2,\ldots,|n-m|-1} \tag{14}$$
8. Las asíntotas se unen en el centroide de asíntotas, situado en el punto del eje real
$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{n} z_j}{|n-m|} \tag{15}$$

Reglas para el trazado

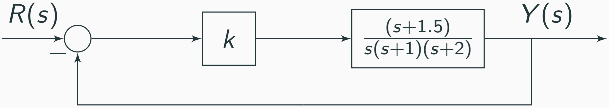
9. Los puntos de bifurcación de ramas coinciden con polos dobles y su posición puede calcularse a partir de la condición:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{PH(s)}\right) = 0 \tag{16}$$

10. El ángulo de partida o de entrada de las ramas en las singularidades complejo-conjugadas, puede calcularse aplicando la condición de argumento a un punto infinitesimalmente próximo al polo o cero y que pertenece al lugar de las raíces.
11. El calculo de la ganancia k para lograr que los polos de lazo cerrado se sitúen en un punto del lugar de las raíces se realiza aplicando la condición de modulo.

Lugar de las raíces. Ejemplo 1

Determinar el lugar de las raíces para la planta $P(s) = \frac{(s+1.5)}{s(s+1)(s+2)}$, si trabaja en un lazo con realimentación unitaria en el que se dispone un controlador $k > 0$ ajustable.



Calculado el lugar de las raíces determinar si es posible obtener polos en lazo cerrado situados en los puntos $s = -0.5 \pm j0.5$ y $s = -0.75 \pm j2$. En caso de ser posible determinar el valor de k necesario.

Aplicamos las reglas para el trazado del lugar de Evans

- Número de asíntotas

$$n^o_{\text{asintotas}} = |n - m| = 3 - 1 = 2 \tag{17}$$

$n \rightarrow$ número de polos

$m \rightarrow$ número de ceros

- Ángulo de las asíntotas

$$\theta_a = \left. \frac{(2r+1)180^\circ}{|n-m|} \right|_{r=0,1} = 90^\circ, -90^\circ \tag{18}$$

- Centroide de asíntotas

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{|n-m|} = \frac{0 - 1 - 2 + 1.5}{2} = -0.75 \tag{19}$$

Ejemplo 1

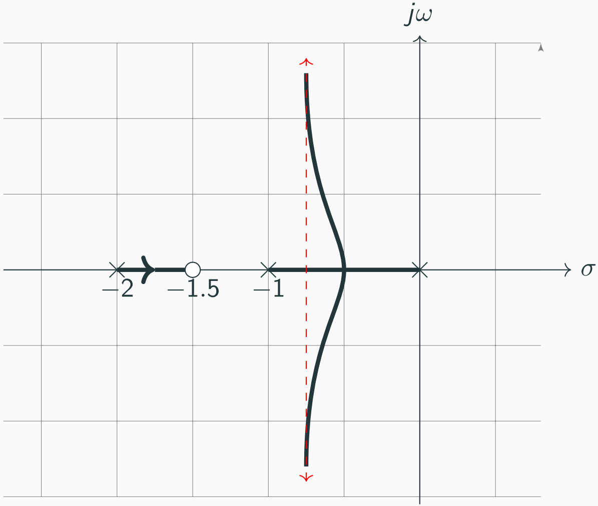
- Puntos de desprendimiento

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{PH(s)}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{s^3+3s^2+2s}{s+1.5}\right) = \frac{(3s^2+6s+2)(s+1.5)-(s^3+3s^2+2s)}{(s+1.5)^2} = 0 \quad (20)$$

$$2s^3+7.5s^2+9s+3=0 \rightarrow \begin{cases} s=-1.6\pm j4.3 \\ s=-0.54 \end{cases} \quad (21)$$

Con todos estos datos realizamos el trazado del lugar de las raíces.

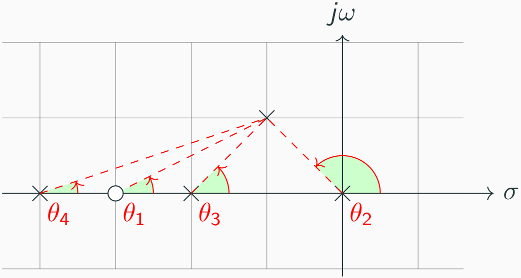
Lugar de las raíces. Ejemplo 1



Lugar de las raíces. Ejemplo 1

Estudiamos si pueden obtenerse polos en: $s = -0.5 \pm j0.5$

Analizamos si estos polos cumplen con la condición de argumento.



$$\begin{cases} \theta_2 = 180^\circ - \arctan \dfrac{0.5}{0.5} \\ \theta_3 = \arctan \dfrac{0.5}{0.5} \\ \theta_1 = \arctan \dfrac{0.5}{1} \\ \theta_4 = \arctan \dfrac{0.5}{1.5} \end{cases}$$

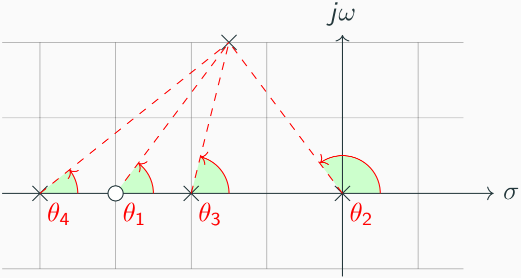
$$\sum \arg(ceros) - \sum \arg(polos) = \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$
$$26.56 - 180^\circ + 45^\circ - 45^\circ - 18.435^\circ = 261.87^\circ \neq 180^\circ$$

No pueden obtenerse los polos anteriores con un controlador proporcional

Lugar de las raíces. Ejemplo 1

Estudiamos si pueden obtenerse polos en: $s = -0.75 \pm j2$

Analizamos si estos polos cumplen con la condición de argumento.



$$\begin{cases} \theta_2 = 180^\circ - \arctan \dfrac{2}{0.75} \\ \theta_3 = \arctan \dfrac{2}{0.25} \\ \theta_1 = \arctan \dfrac{2}{0.75} \\ \theta_4 = \arctan \dfrac{2}{1.25} \end{cases}$$

$$\sum \arg(ceros) - \sum \arg(polos) = \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

$$69.44 - 180^\circ + 69.44^\circ - 82.87^\circ - 57.99^\circ = -181.98^\circ \approx 180^\circ$$

Lugar de las raíces. Ejemplo 1

En este caso no se cumple exactamente la condición, pero podemos considerarla como válida (*en realidad los polos estarán un poco desplazados*). Para calcular el valor de k que da lugar a los polos deseados aplicamos la condición de modulo.

$$\left|\frac{(s+1.5)}{s(s+1)(s+2)}\right|_{s=-0.75+j2} = \left|\frac{(-0.75+j2+1.5)}{(-0.75+j2)(-0.75+j2+1)(-0.75+j2+2)}\right| = \frac{1}{k} \quad (22)$$

$$\frac{\sqrt{(-0.75+1.5)^2+2^2}}{\sqrt{(-0.75)^2+2^2}\sqrt{(-0.75+1)^2+2^2}\sqrt{(-0.75+2)^2+2^2}} = \frac{1}{k} \quad (23)$$

$$k = 4.7536$$

Lugar de las raíces. Ejemplo 1

Comprobamos si el resultado es adecuado. Para ello, se obtienen las soluciones de la ecuación característica de lazo cerrado.

$$1+kPH(s) = s(s+1)(s+2)+k(s+1.5) = s^3+3s^2+6.7536s+7.130428 = 0$$

$$\begin{cases} s = -0.71 \pm j2 \\ s = -1.5810 \end{cases}$$

La distorsión con respecto de los polos deseados es debida a que estos no se encuentran exactamente en el lugar de las raíces. No obstante, los polos obtenidos se sitúan próximos a los deseados, por lo que puede considerarse el diseño como adecuado.

Lugar de las raíces inverso

Denominamos lugar de las raíces inverso al obtenido cuando el parámetro k toma valores negativos $k < 0$.

En estos casos, la mayor parte de las reglas del trazado se mantienen, pero hay que re-definir las siguientes:

5. Pertenecen al lugar de las raíces directo los segmentos del eje real que dejan a su izquierda un numero par de singularidades (*polos o ceros*). Los segmentos no marcados en el lugar directo
7. Las asíntotas se reparten alrededor de los 360º y su ángulo esta determinado por la siguiente expresión.

$$\phi_a = \left. \frac{(2r)180}{|n-m|} \right|_{r=0,1,2,\ldots,|n-m|-1} \tag{24}$$

10. El ángulo de partida o de entrada de las ramas en las singularidades complejo-conjugadas, se calcula aplicando la **condición de argumento** a un punto infinitesimalmente próximo al polo o cero y que cumple dicha condición.

Debe recordarse que la condición de argumento en este caso esta determinada por

$$\angle GH(s) = \sum_{j=1}^{m} \angle(s + z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s + p_i) = 2r180^\circ \tag{25}$$

Ejemplo 1: Trazar el lugar inverso para el sistema del ejemplo 1.

En este caso solo debemos modificar los segmentos de eje real que pertenecen al lugar de las raíces y el ángulo de las asíntotas

$$\phi_a = \left. \frac{(2r)180}{2} \right|_{r=0,1} = 0^\circ, 180^\circ \tag{26}$$

Lugar de las raíces. Ejemplo 1