Fundamentos de control Industrial

Análisis de la respuesta transitoria.

Javier Rico Azagra

Curso 2020-2021

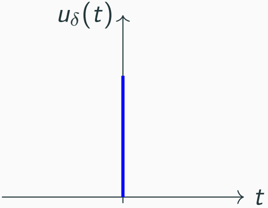
Universidad de La Rioja

Análisis de la repuesta transitoria

Acciones básicas de control

Impulso unitario. Delta de Dirac.

Corresponde con una señal de valor infinito en $t = 0$ y valor nulo el resto del tiempo.

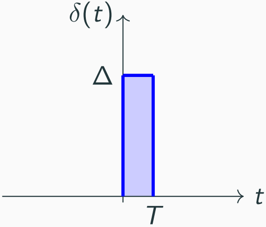


$$\begin{cases} u_\delta(t) = \infty & \text{si } t = 0 \\ u_\delta(t) = 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

- No existe en la naturaleza.
- Puede aproximarse por un pulso.

Impulso unitario. Delta de Dirac

Para calcular su transformada de Laplace empleamos su aproximación real, pulso de amplitud Δ y periodo T. Donde la aproximación cumple con la señal ideal si $\Delta = 1/T$ y $T \to 0$.



$$\begin{cases} u_\delta(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ u_\delta(t) = \Delta & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ u_\delta(t) = 0 & \text{si } t > T \end{cases} \tag{2}$$

$$\mathcal{L}\{u_\delta(t)\} = \int_0^T \Delta e^{-st} dt = \int_0^T \Delta \frac{-s}{-s} e^{-st} dt$$
$$= \left[-\frac{\Delta e^{-sT}}{s} \right]_0^T = \frac{\Delta - \Delta e^{-sT}}{s} \tag{3}$$

Substituimos Δ por $1/T$, obteniendo

$$\mathcal{L}\{u_\delta(t)\} = \frac{1-e^{-sT}}{Ts} \tag{4}$$

Aplicando el límite $T \to 0$ se obtiene la transformada de la fución impulso ideal.

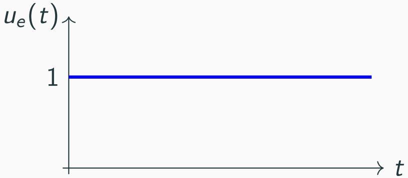
$$\mathcal{L}\{u_\delta(t)\} = \lim_{T\to 0} \frac{1-e^{-sT}}{Ts} = \frac{0}{0} = \lim_{T\to 0} \frac{se^{-sT}}{s} = 1 \tag{5}$$

Transformada del impulso unitario

$$\mathcal{L}\{u_\delta(t)\} = U_\delta(s) = 1$$

Escalón unitario

Esta señal presenta un valor nulo hasta alcanzar $t = 0$, instante en el que se produce un cambio instantáneo tomando valor 1, que se mantiene hasta $t = \infty$.



$$\begin{cases} u_e(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ u_e(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

- Es una de las señales más utilizadas de la ingeniería de control.
- Su espectro frecuencial contiene a todas las frecuencias.

Escalón unitario

Calculando la transformada de Laplace se obtiene:

$$\mathcal{L}\{u_e(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{-s}{-s} e^{-st} dt = \frac{-1}{s} \left[e^{-sT}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{s} [0 - 1] = \frac{1}{s} \quad (7)$$

Transformada del escalón unitario

$$\mathcal{L}\{u_e(t)\} = U_e(s) = \frac{1}{s}$$

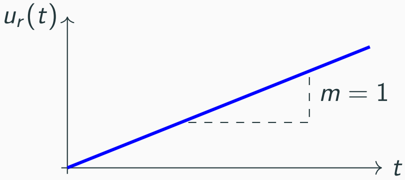
Véase como la función impulso unitario corresponde con la derivada del escalón unitario

$$\frac{du_e(t)}{dt} = u_\delta(t) \quad (8)$$

$$\mathcal{L}\{u_e(t)\} = s\mathcal{L}\{u_e(t)\} = \mathcal{L}\{u_\delta(t)\} \rightarrow U_e(s) = \frac{u_\delta}{s} = \frac{1}{s} \quad (9)$$

Rampa unitaria

Señal con pendiente unitaria a partir de $t = 0$.



$$\begin{cases} u_r(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ u_r(t) = t & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Su transformada puede obtenerse por integración del escalón unitario.

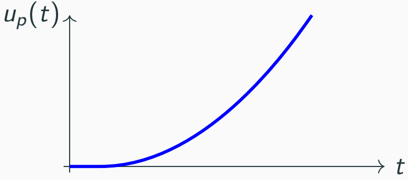
$$u_r(t) = \int_0^t u_e(t)dt \rightarrow R(s) = \frac{1}{s}U_e(s) = \frac{1}{s^2} \quad (11)$$

Transformada de la rampa unitaria

$$\mathcal{L}\{u_r(t)\} = U_r(s) = \frac{1}{s^2}$$

Parábola

Señal con forma de parábola a partir de $t = 0$. Téngase en cuenta que el término cuadrático no es t^2, sino $t^2/2$.



$$\begin{cases} u_r(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ u_r(t) = \frac{t^2}{2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \tag{12}$$

Su transformada puede obtenerse por integración de la rampa unitaria.

$$u_p(t) = \int_0^t u_r(t)dt \rightarrow U_p(s) = \frac{1}{s}U_r(s) = \frac{1}{s^3} \tag{13}$$

Transformada de la rampa unitaria

$$\mathcal{L}\{u_p(t)\} = U_p(s) = \frac{1}{s^3}$$

Sistemas de primer orden

Sistemas de primer orden

Los sistemas de primer orden presentan un único polo, dando lugar a dos posibles representaciones, forma polar o de constante de tiempo.

$$G(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)} = \frac{k_p}{s + p} \tag{14}$$

- $k \rightarrow$ Ganancia de régimen permanente
- $\tau \rightarrow$ Constante de tiempo del sistema
- $p \rightarrow$ Polo del sistema

Podemos relacionar los parámetros de los modelos mediante las siguientes ecuaciones.

$$k = \frac{k_p}{p}; \qquad k_p = \frac{k}{\tau} \tag{15}$$

$$\tau = \frac{1}{p}; \qquad p = \frac{1}{\tau} \tag{16}$$

Sistemas de primer orden. Respuesta libre

La respuesta libre es la respuesta del sistema ante una señal impulso. La respuesta Y(s) está determinada por

$$Y(s) = U(s)P(s) = 1 \cdot P(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)} = \frac{k_p}{(s + p)} \quad (17)$$

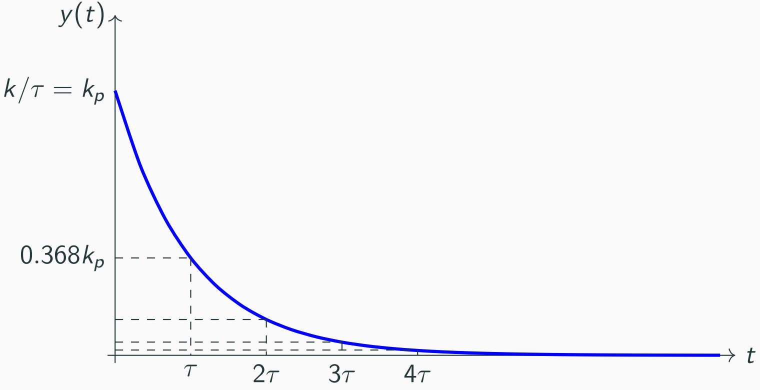
Aplicando la anti-transformada de Laplace obtenemos la respuesta del sistema en el dominio del tiempo.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = k_p e^{-pt} \quad (18)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-pt}\} = \int_0^\infty e^{-pt} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+p)t} dt =$$
$$\int_0^\infty \frac{-(s+p)}{-(s+p)} e^{-(s+p)t} dt = \frac{-1}{(s+p)} \left[e^{-(s+p)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{(s+p)} \quad (19)$$

Sistemas de primer orden. Respuesta libre

La representación de la respuesta al impulso se muestra a continuación.



Sistemas de primer orden. Respuesta libre

La señal presenta forma exponencial que decrece con el paso del tiempo. Si el tiempo se expresa en forma de constantes de tiempo

- $y(\tau) = k_p e^{-1} = 0.368 k_p$
- $y(2\tau) = k_p e^{-2} = 0.1353 k_p$
- $y(3\tau) = k_p e^{-3} \approx 0.05 k_p$
- $y(4\tau) = k_p e^{-4} \approx 0.02 k_p$

Pasadas cuatro constantes de tiempo, se considera que se alcanza el régimen permanente.

Sistemas de primer orden. Respuesta al escalón unitario

Cuando la entrada es un escalón unitario, la respuesta Y(s) está determinada por

$$Y(s) = U(s)P(s) = \frac{1}{s}P(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)} = \frac{k_p}{s(s+p)} \tag{20}$$

Para poder obtener la anti-transformada de Laplace, descomponemos Y(s) en fracciones simples

$$Y(s) = \frac{k_p}{s(s+p)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+p)} \tag{21}$$

Obtenemos los coeficientes aplicando denominador común. De donde se obtiene la igualdad

$$A(s+p) + Bs = k_p, \tag{22}$$

que puede expresarse como

$$s^1 \rightarrow A + B = 0 \rightarrow B = -A = -k_p/p$$
$$s^0 \rightarrow Ap = k_p \rightarrow A = k_p/p$$

Sistemas de primer orden. Respuesta al escalón unitario

El resultado anterior puede obtenerse aplicando residuos:

$$A = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{k_p}{s(s+p)} = \frac{k_p}{p} \qquad (23)$$

$$B = \lim_{s \to -p} sY(s) = \lim_{s \to -p} (s+p) \frac{k_p}{s(s+p)} = \frac{-k_p}{p} \qquad (24)$$

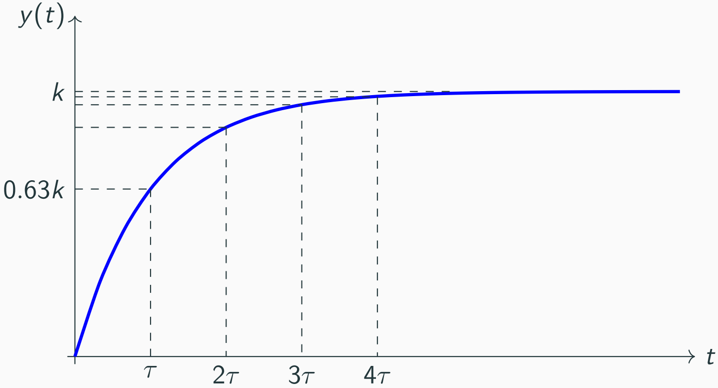
Por lo tanto, puede expresarse $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{k_p}{p} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+p)} \right], \qquad (25)$$

y su anti-transformada $y(t)$ toma la forma

$$y(t) = \mathcal{L}\{Y(s)\} = \frac{k_p}{p} \left(1 - e^{-pt}\right) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (26)$$

A continuación, se muestra la representación de la respuesta al escalón unitario.



Sistemas de primer orden. Respuesta al escalón unitario

Se observa que la señal alcanza el valor de la ganancia de régimen permanente. La evolución temporal viene marcada por la constante de tiempo.

- $y(\tau) = k(1 - e^{-1}) = 0.63k$
- $y(2\tau) = k(1 - e^{-2}) = 0865k$
- $y(3\tau) = k(1 - e^{-3}) \approx 0.95k$
- $y(4\tau) = k(1 - e^{-4}) \approx 0.98k$

$t_s \rightarrow$ Tiempo de establecimiento. Tiempo que tarda la señal en alcanzar el régimen permanente.

$$t_{s_{2\,\%}} \approx 4\tau \tag{27}$$

Cuando la entrada es una rampa unitaria, la respuesta Y(s) está determinada por

$$Y(s) = U(s)P(s) = \frac{1}{s^2}P(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)} = \frac{k_p}{s^2(s+p)} \qquad (28)$$

Para poder obtener la anti-transformada de Laplace, descomponemos Y(s) en fracciones simples

$$Y(s) = \frac{k_p}{s^2(s+p)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s+p)} \qquad (29)$$

Obtenemos los coeficientes aplicando denominador común.

$$As(s+p) + B(s+p) + Cs^2 = k_p, \qquad (30)$$

obteniendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} s^2 &\to A + C = 0 \to C = -A = k_p/p^2 \\ s^1 &\to Ap + B = 0 \to A = -B/p = -k_p/p^2 \\ s^0 &\to Bp = k_p \to B = k_p/p \end{aligned}$$

Sistemas de primer orden. Respuesta a la rampa

Por lo tanto, puede expresarse $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{k_p}{p}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{p}\frac{1}{s} + \frac{1}{p}\frac{1}{(s+p)}\right], \tag{31}$$

y su anti-transformada $y(t)$ toma la forma

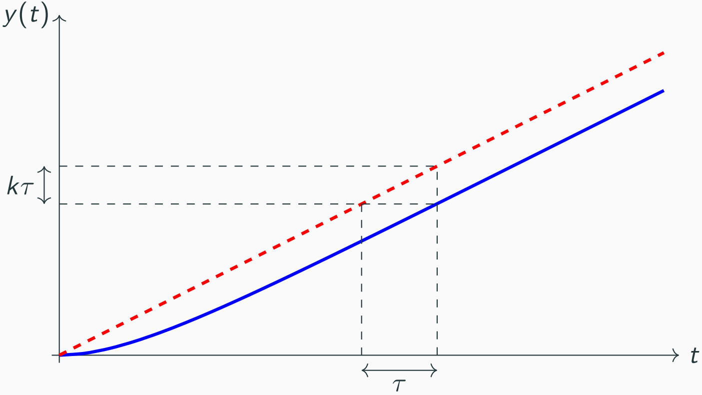
$$y(t) = \mathcal{L}\{Y(s)\} = \frac{k_p}{p}\left(t - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{-pt}\right) \tag{32}$$

Expresión que puede reescribirse según:

$$y(t) = \frac{k_p}{p}\left(t - \frac{1}{p}\left(1 - e^{-pt}\right)\right) = k\left(t - \tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right) \tag{33}$$

Sistemas de primer orden. Respuesta a la rampa

A continuación, se muestra la respuesta a la rampa unitaria.



La respuesta presenta en régimen permanente una pendiente k y un retraso con respecto de kt de τ segundos.

Sistemas con un polo y un cero

A continuación, analizamos el comportamiento de un sistema que presente un polo y un cero.

$$P(s) = k_p \frac{(s+z)}{(s+p)} = k \frac{(\tau_z s + 1)}{(\tau_p s + 1)} \tag{34}$$

La respuesta del sistema ante un escalón unitario esta determinada por:

$$Y(s) = U(s)P(s) = \frac{1}{s}P(s) = k_p \frac{(s+z)}{s(s+p)} \tag{35}$$

Para poder obtener la anti-transformada de Laplace, descomponemos Y(s) en fracciones simples

$$Y(s) = k_p \frac{(s+z)}{s(s+p)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+p)} \tag{36}$$

Obtenemos los coeficientes aplicando denominador común. De donde se obtiene la igualdad

$$A(s+p) + Bs = k_p(s+z), \tag{37}$$

que puede expresarse como

Sistemas con un polo y un cero

que puede expresarse como

$$s^1 \to A + B = k_p \to B = k_p - A = k_p - k_p \frac{z}{p} = k_p \frac{p - z}{p}$$
$$s^0 \to Ap = k_p z \to A = k_p \frac{z}{p}$$

Por lo tanto, puede expresarse $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{k_p}{p} \left[z \frac{1}{s} + (p - z) \frac{1}{(s + p)} \right], \tag{38}$$

y su anti-transformada $y(t)$ toma la forma

$$y(t) = \mathcal{L}\{Y(s)\} = \frac{k_p}{p} \left(z + (p - z) e^{-pt} \right) \tag{39}$$

Sistemas con un polo y un cero

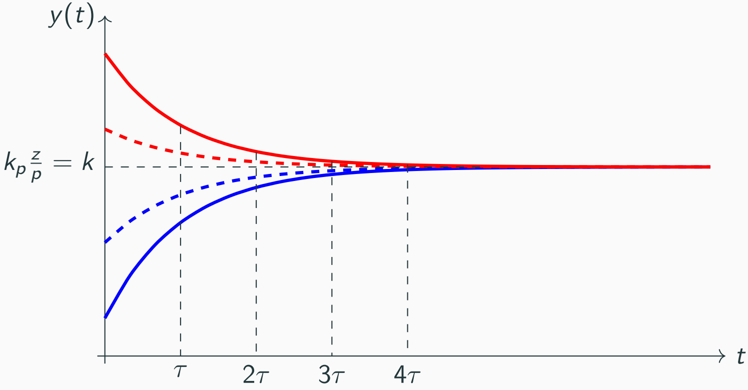
Véase como se cumple

$$
\begin{aligned}
y(o) =& \frac{k_p}{p}(p) = k_p \\
y(\infty) =& k_p \frac{z}{p}
\end{aligned}
$$

- El valor inicial será superior al valor final si $z < p$.
- El valor inicial será inferior al final si $z > p$.

Es decir, el cero dominará al polo cuando se sitúe más próximo al eje $j\omega$.

A continuación, se muestra la representación de la respuesta al escalón unitario.



Azul. $p < z$; Rojo. $p < z$.

Sistemas de segundo orden

Sistemas de segundo orden

Definiremos los sistemas de segundo orden como los sistemas en los que la ecuación característica esta determinada por un polinomio de segundo grado. Su fución de transferencia normalizada esta determinada por

$$P(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2} \tag{40}$$

- $k \rightarrow$ Ganancia de régimen permanente.
- $\omega_n \rightarrow$ Pulsación natural no amortiguada del sistema.
- $\delta \rightarrow$ Coeficiente de amortiguamiento relativo del sistema.

Los polos pueden obtenerse calculando las raíces de la ecuación característica

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{41}$$

Sistemas de segundo orden

Resolviendo el polinomio de segundo grado se obtiene

$$s = \frac{-2\delta\omega_n \pm \sqrt{4\delta^2\omega_n^2 - 4\omega_n}^2}{2} = \frac{-2\delta\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}}{2}, \tag{42}$$

quedando las raíces determinadas por

$$s = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1} \tag{43}$$

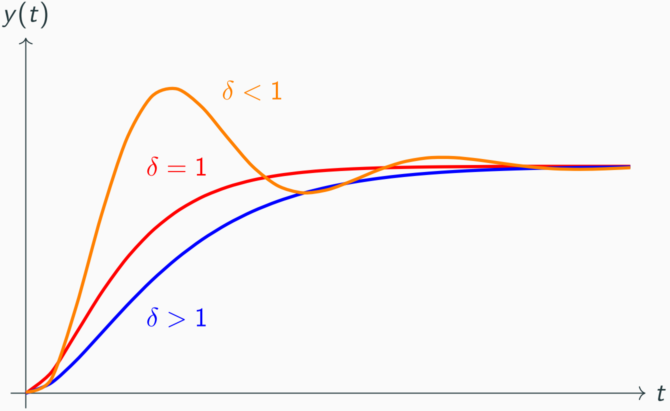
Tradicionalmente, en ingeniería de control se consideran las raíces complejo-conjugadas y se emplea la expresión.

$$s = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \delta^2}. \tag{44}$$

- $\delta > 1$ Sistemas sobre-amortiguados (Raíces reales)
- $\delta = 1$ Sistemas criticamente-amortiguados (Raíces reales múltiples)
- $\delta < 1$ Sistemas sub-amortiguados (Raíces complejo-conjugadas)

Sistemas de segundo orden

Respuesta de los sistemas de segundo orden en función del coeficiente de amortiguamiento relativo.



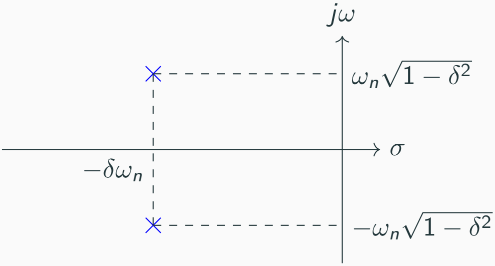
Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$

En este caso, la función de transferencia esta determinada por:

$$P(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad \delta < 1;$$

y los polos son complejo-conjugados, con coordenadas

$$s = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$



Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta libre

La respuesta libre es la respuesta del sistema ante una señal impulso. La respuesta Y(s) está determinada por

$$Y(s) = U(s)P(s) = 1 \cdot P(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{45}$$

Desarrollamos la expresión anterior para encontrar una nueva a la que podamos aplicar la anti-transformada de Laplace de forma sencilla.

$$Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{(s+\delta\omega_n)^2 + \omega_n^2 - \delta^2\omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(s+\delta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\delta^2)} \tag{46}$$

$$Y(s) = \frac{k\omega_n^2 \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\sqrt{1-\delta^2}}}{(s+\delta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)^2} = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}{(s+\delta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)^2} \tag{47}$$

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta libre

Aplicamos la anti-transformada

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\right\} = e^{-at}\sin(\omega t) \tag{48}$$

para obtener la respuesta del sistema en el dominio del tiempo.

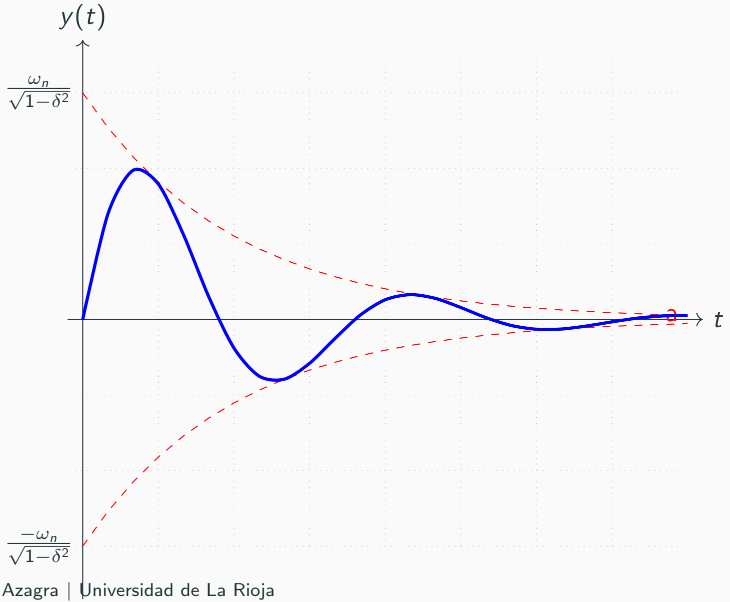
En este caso, la respuesta del sistema está determinada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t\right) \tag{49}$$

La respuesta esta determinada una función senoidal cuyo módulo se encuentra acotado por unas envolventes exponenciales

$$\frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t} \tag{50}$$

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta libre



Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta al escalón unitario

La respuesta ante el escalón unitario esta determinada por

$$Y(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2\right)} \tag{51}$$

Desarrollamos $Y(s)$ en fracciones simples para obtener su anti-transformada de Laplace:

$$Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2\right)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2} \tag{52}$$

Donde los coeficientes A, B, C se obtienen resolviendo el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{cases} s^2 \rightarrow A + B = 0 \rightarrow B = -k \\ s^1 \rightarrow 2\delta\omega_n + C = 0 \rightarrow C = -2k\delta\omega_n \\ s^0 \rightarrow A\omega_n^2 = \omega_n^2 \rightarrow A = k \end{cases} \tag{53}$$

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta al escalón unitario

Por lo tanto, puede expresarse $Y(s)$ como

$$Y(s) = k\left[\frac{1}{s} - \frac{s + 2\delta\omega_n}{s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2}\right] \tag{54}$$

Tomamos el segundo termino de la expresión anterior para desarrollarlo hasta obtener una expresión que presente una anti-transformada de Laplace directa.

$$\frac{s + 2\delta\omega_n}{s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2} = \frac{s + 2\delta\omega_n}{(s + \delta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)^2} \tag{55}$$

$$\frac{s + \delta\omega_n}{(s + \delta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)^2} + \frac{\delta\omega_n}{(s + \delta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)^2} \tag{56}$$

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta al escalón unitario

Finalmente, $Y(s)$ puede ser expresada según

$$Y(s) = k\left[\frac{1}{s} - \frac{s+\delta\omega_n}{(s+\delta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)^2} - \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\frac{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}{(s+\delta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\right)^2}\right], \quad (57)$$

y su anti-transformada de Laplace

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = k\left[1 - e^{-\delta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t\right) - \frac{\delta e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t\right)\right] \quad (58)$$

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta al escalón unitario

Agrupando los términos que se encuentran multiplicados por la exponencial, se obtiene

$$y(t) = k\left[1 - e^{-\delta\omega_n t}\left(\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t\right) + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2}t\right)\right)\right]. \quad (59)$$

Aplicamos la siguiente relación trigonométrica:

$$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = C\sin(\omega t + \phi) \quad (60)$$

donde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad (61)$$

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta al escalón unitario

En nuestro caso, los coeficientes A y B toman los valores:

$$A = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \tag{62}$$

$$B = 1 \tag{63}$$

Por lo tanto, pueden obtenerse los coeficientes C y ϕ según

$$C = \sqrt{\frac{\delta^2}{1-\delta^2} + 1} = \sqrt{\frac{\delta^2 + 1 * \delta^2}{1-\delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \tag{64}$$

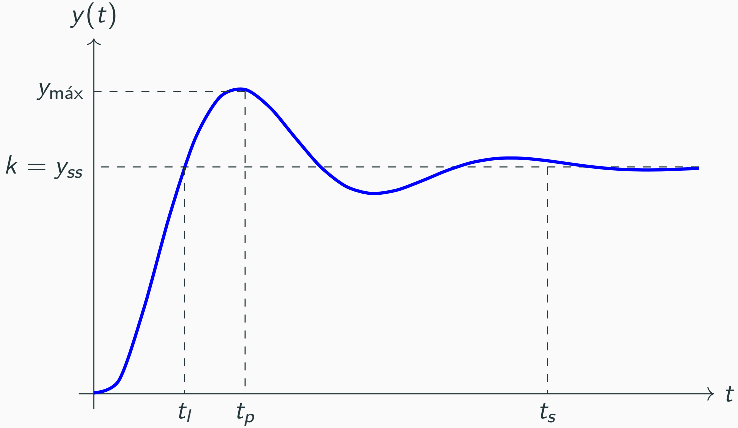
y

$$\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right) \tag{65}$$

Por lo tanto, la respuesta del sistema su-amortiguada es

$$y(t) = k\left[1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\delta^2} + \phi\right)\right] \tag{66}$$

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta al escalón unitario



Respuesta de un sistema sub-amortiguado ante un escalón unitario.

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta al escalón unitario

Parámetros característicos de la respuesta:

- Pulsación natural amortiguada. Pulsación con la que oscila la señal de salida.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \tag{67}$$

- Tiempo de levantamiento: Tiempo que el sistema tarda en alcanzar el valor unitario.

$$t_l = \frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{\pi - \phi}{\omega_d} \tag{68}$$

- Tiempo de pico: Tiempo en el que se alcanza el primer máximo, que coincide con el valor máximo de la respuesta.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} \tag{69}$$

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta al escalón unitario

Parámetros característicos de la respuesta:

- Rebasamiento máximo porcentual: Indica el sobrepasamiento del valor de régimen permanente en forma de porcentaje.

$$RM(\%) = \frac{y_{\text{máx}} - y_{ss}}{y_{ss}} 100 = 100 e^{\frac{-\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \tag{70}$$

- Decaimiento logarítmico: Indica a relación entre dos máximos consecutivos.

$$DL_{NP} = \log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{71}$$

- Tiempo de establecimiento: Tiempo necesario para que el sistema entre en una banda de tolerancia BT. Este tiempo indica la frontera entre el régimen transitorio y el régimen estacionario.

$$t_s = \frac{1}{\delta\omega_n} \log\left[\frac{100}{BT(\%)\sqrt{1-\delta^2}}\right] \tag{72}$$

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta al escalón unitario

Si el coeficiente de amortiguamiento relativo es pequeño $\delta < 1/\sqrt{2}$, podemos aproximar el tiempo de establecimiento empleando la constante de tiempo equivalente del sistema

$$\tau_e = \frac{1}{\delta\omega_n}. \tag{73}$$

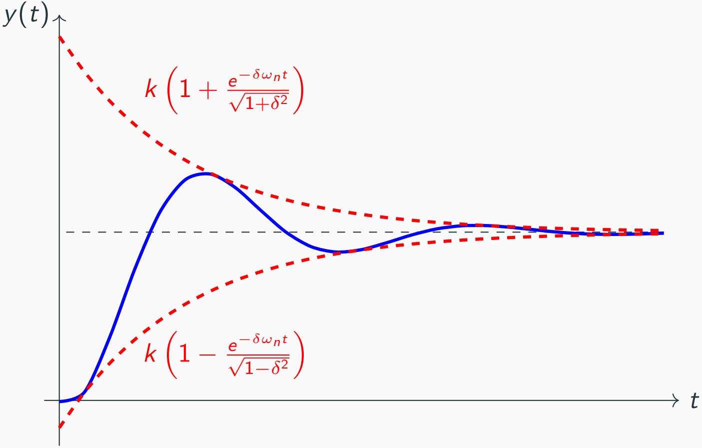
De este modo se definen las siguientes aproximaciones.

$$BT = 5\,\% \rightarrow t_s = 3\tau = \frac{3}{\delta\omega_n} \tag{74}$$

$$BT = 2\,\% \rightarrow t_s = 4\tau = \frac{4}{\delta\omega_n} \tag{75}$$

$$BT = 1\,\% \rightarrow t_s = 4.6\tau = \frac{4.6}{\delta\omega_n} \tag{76}$$

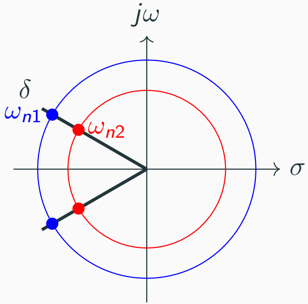
Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Respuesta al escalón unitario

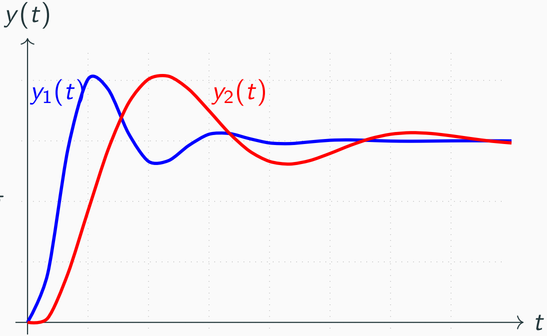


Envolventes empleadas para determinar el tiempo de establecimiento.

Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Estudio del plano s

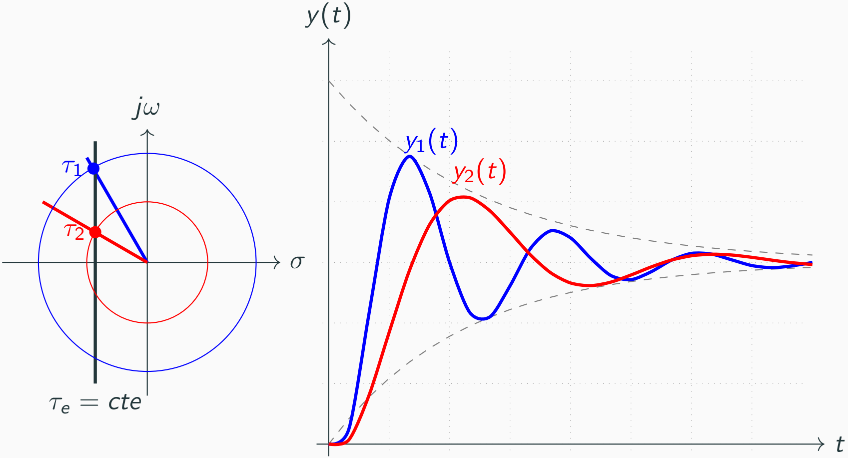
Todos los sistemas que presentan el mismo coeficiente de amortiguamiento relativo presentan el mismo rebasamiento máximo.





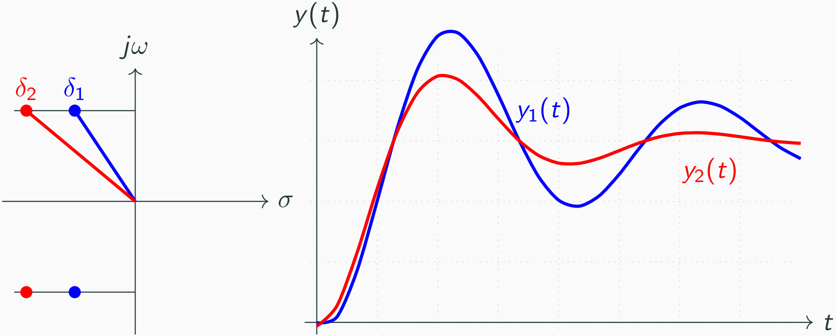
Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Estudio del plano s

Todos los sistemas que presentan la misma parte real (τ_e) presentan aproximadamente la misma envolvente y tiempo de establecimiento.



Sistemas sub-amortiguados $\delta < 1$. Estudio del plano s

Todos los sistemas que presentan la misma parte imaginaria (ω_d) oscilan con la misma frecuencia.



Sistemas críticamente-amortiguados $\delta = 1$

En este caso, la función de transferencia esta determinada por:

$$P(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad \delta = 1; \tag{77}$$

y los polos del sistema se sitúan en

$$s = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = -\omega_n. \tag{78}$$

Es decir, el sistema presenta un polo doble en ω_n.

$$P(s) = \frac{k\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}; \tag{79}$$

Sistemas críticamente-amortiguados $\delta = 1$

Respuesta ante el escalón unitario:

$$Y(s) = U(s)P(s) = \frac{1}{s}P(s) = \frac{k\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+\omega_n)^2} \quad (80)$$

Para obtener la respuesta $y(t)$, descomponemos la respuesta en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+\omega_n)^2} \quad (81)$$

Aplicamos denominador común, obteniendo en siguiente numerador:

$$A(s+\omega_n)^2 + Bs^2 + Cs = A(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2) + Bs^2 + Cs = k\omega_n^2. \quad (82)$$

De donde se extraen las ecuaciones:

$$s^2 \rightarrow A + B = 0 \rightarrow B = -k$$
$$s^1 \rightarrow A2\omega_n + C = 0 \rightarrow C = -2k\omega_n$$
$$s^0 \rightarrow A\omega_n^2 = k\omega_n^2 \rightarrow A = k$$

Sistemas críticamente-amortiguados $\delta = 1$

Por lo tanto, puede expresarse $Y(s)$ como

$$Y(s) = K\left[\frac{1}{s} - \frac{s+2\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right] = K\left[\frac{1}{s} - \frac{s+\omega_n}{(s+\omega_n)^2} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right] \quad (83)$$

$$Y(s) = K\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+\omega_n)} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right] \quad (84)$$

Aplicando la anti-transformada de Laplace se obtiene

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = K\left[1 - e^{-\omega_n t} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right\}\right] \quad (85)$$

¿Como obtenemos la anti-transformada del termino $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}\right\}$?

Sistemas críticamente-amortiguados $\delta = 1$

Podemos obtener emplear el Teorema de la diferenciación compleja. Este teorema dice que si se conoce la transformada de una función $f(t)$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \tag{86}$$

La transformada de la función $g(t) = t \cdot f(t)$, viene dada por:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(F(s)\right) \tag{87}$$

Conocida esta propiedad, puede derivarse la transformada

$$\mathcal{L}\{e^{-\omega_n t}\} = \frac{1}{(s+\omega_n)}, \tag{88}$$

con respecto de la variable compleja. Obteniendo

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+\omega_n)}\right) = -\frac{1}{(s+\omega_n)^2} \tag{89}$$

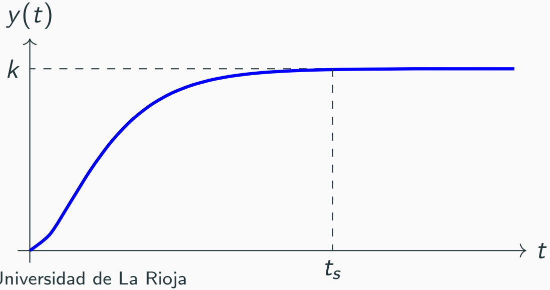
Sistemas críticamente-amortiguados $\delta = 1$

Ecuación de la que se desprende la igualdad

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\omega_n)^2}\right\} = te^{-\omega_n t}. \tag{90}$$

Empleando el resultado anterior en la expresión de y(t) se obtiene

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = k\left[1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n te^{-\omega_n t}\right] \\ = k(1 - (1 + \omega_n te^{-\omega_n t})) \end{aligned} \tag{91}$$



Sistemas con múltiples polos

Cuando un sistema presenta una ecuación característica de orden igual o superior a tres podemos intentar aproximarla el sistema por uno de primer orden o de segundo orden.

Cuando deseemos obtener la respuesta exacta deberemos de aplicar la anti-transformada de Laplace a la salida del sistema $Y(s)$. En el resto de casos podemos emplear aproximaciones.

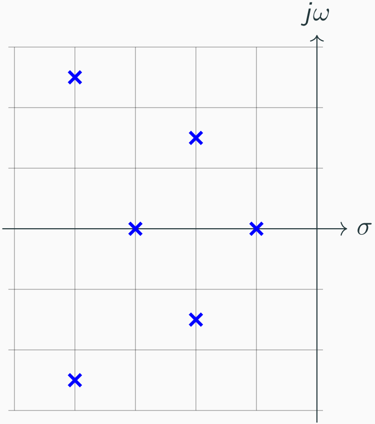
La estructura general de un sistema con múltiples polos es la siguiente

$$P(s) = k\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}, \qquad (92)$$

donde los parámetros p_i y z_j pertenecen al conjunto de número complejos $\mathbb{C}$.

Sistemas con múltiples polos

Cuando un polo o pareja de polos sea mucho mas lento que el resto, dominara el comportamiento del sistema. En estos casos, podremos aproximar el mismo por el polo dominante (más lento).



Ejemplo para un sistema de tercer orden

Considérese un sistema con tres polos que presente la siguiente función de transferencia

$$P(s) = \frac{k}{(s+a)\left(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2\right)}. \tag{93}$$

Donde los polos complejo-conjugados se sitúan más próximos al eje $j\omega$.

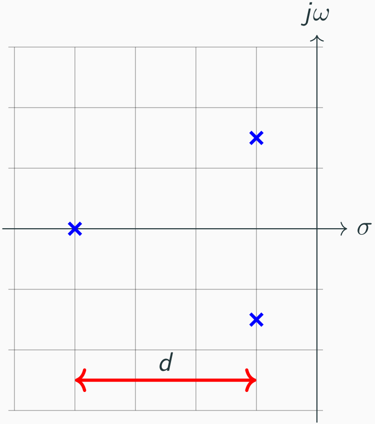
Si la distancia relativa entre los polos es elevada, podemos eliminar el polo más alejado, obteniendo el siguiente sistema.

$$P(s) = \frac{k}{a(\frac{1}{a}s+1)\left(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2\right)} \approx \frac{\frac{k}{a}}{\left(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2\right)} \tag{94}$$

Debemos tener cuidado al eliminar los polos para no modificar la ganancia del sistema.

Sistemas con múltiples polos

Para simplifica debe garantizarse que la distancia relativa ente los polos sea de cinco unidades (tradicionalmente, en la literatura se exige $d = 10$). Este criterio puede ser modificado y depende del criterio del diseñador.



Ejemplo para un sistema de tercer orden

Considérese un sistema con tres polos que presente la siguiente función de transferencia

$$P(s) = \frac{k}{(s+a)\left(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2\right)}. \tag{95}$$

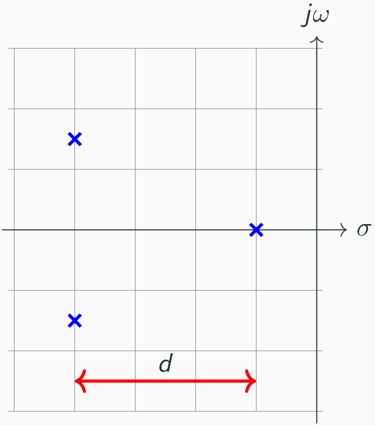
Donde los polos complejo-conjugados se sitúan más próximos al eje $j\omega$.

Si la distancia relativa entre los polos es elevada, podemos eliminar el polo más alejado, obteniendo el siguiente sistema.

$$P(s) = \frac{k}{(s+a)\left(\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\delta}{\omega_n}s + 1\right)} \approx \frac{\frac{k}{\omega_n^2}}{(s+a)} \tag{96}$$

Debemos tener cuidado al eliminar los polos para no modificar la ganancia del sistema.

Sistemas con múltiples polos



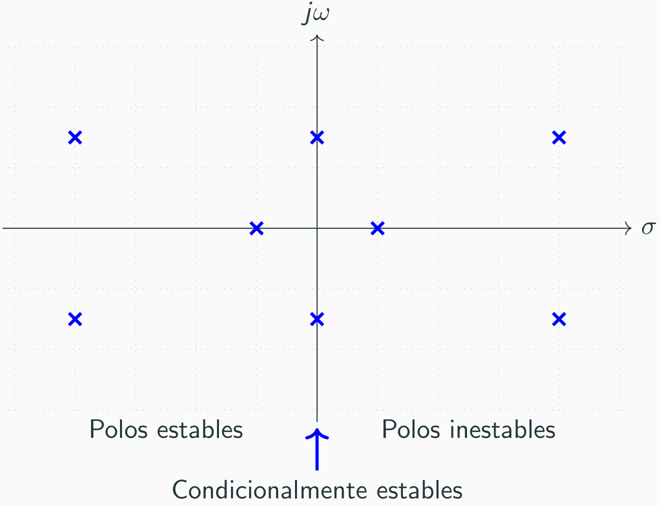
Sistemas inestables

Definición:
Un sistema es estable si sometido a una señal o conjunto de señales acotadas en el tiempo, responde con señales acotadas en el tiempo.

Es decir un sistema es estable cuando al someterlo a una señal finita, la respuesta del sistema se establece en un valor finito.

Función de transferencia:
Un sistema definido por su función de transferencia es estable, si **todos** *sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s. En el caso que algún polo se encuentre en el eje imaginario, el sistema será marginalmente estable.*

Sistemas inestables



Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh-Hurwitz nos permite conocer si un sistema presenta soluciones (*raíces*) en el semiplano derecho, indicándonos si es o no estable. Debemos destacar que este método no indica la posición de las raíces, unicamente determina si existen soluciones en el semiplano derecho.
El criterio de Routh-Hurwitz se basa en los siguientes criterios:

1. Para que todas las raíces de una ecuación polinomica tengan su parte real negativa, es condición necesaria, pero no suficiente, que ninguno de los coeficientes sea nulo y que todos ellos tengan el mismo signo.
2. La condición necesaria y suficiente, para que todas las raíces de una ecuación polinómica tengan su parte real negativa, es que todos determinantes de Hurwitz formados a partir de los coeficientes del polinomio sean positivos.

Por lo tanto, para determinar la estabilidad del un sistema

$$G(s) = \frac{N(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \tag{97}$$

debemos de seguir el siguiente proceso para aplicar el criterio de Routh-Hurwitz:

1. Estudiamos los signos del denominador.
    - Si hay al menos uno negativo, el sistema es inestable.
    - Si todos son positivos pasamos al paso 2º.
2. Construimos la tabla de Routh-Hurwitz. Para construir la tabla seguimos con las siguientes pautas.
    - 1ª Columna: potencias de s
    - 1ª Fila: coeficientes alternos comenzando por el primero.
    - 2ª Fila: coeficientes alternos comenzando por el segundo.
    - Resto de filas: coeficientes Hurwitz.

Obtenemos la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots \\
s^{n-3} & B_0 & B_1 & B_2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
s^0 & a_0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Donde los coeficientes A son calculados a partir de las dos filas superiores, para el primer elemento tendremos:

$$
A_0 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \tag{98}
$$

Continuamos calculando los coeficientes A cambiando los elementos de la segunda columna, el pivote (*elemento que divide al determinante* a_{n-1}) y la primera fila permanecen constantes, dando lugar a la siguiente expresión par el calculo de A_2:

$$A_1 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \tag{99}$$

Calculados todos los coeficientes A, calculamos los coeficientes B. En este caso, empleamos las dos filas inmediatamente superiores.

$$B_0 = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ A_0 & A_1 \end{vmatrix} \tag{100}$$

Continuamos con este análisis hasta terminar la tabla, que si esta bien realizada, presentara el termino a_0 en la última fila.

Finalizada la tabla aplicamos el siguiente criterio:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea estable es que todos los elementos de la segunda columna de la tabla de Routh-Hurwitz tengan el mismo signo. En caso contrario, el número de cambios de signo, es igual al número de polos situados en el semiplano derecho, contribuyendo a la inestabilidad del sistema.

$$\begin{array}{c|c c c c}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots \\
s^{n-3} & B_0 & B_1 & B_2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
s^0 & a_0 & 0 & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Ejemplo:
Determinar si la planta $P(s)$ es estable:

$$P(s) = \frac{4}{s^3 + 3s^2 + 2s + 4}. \tag{101}$$

Analizamos la ecuación característica de la planta:

$$e.c. = s^3 + 3s^2 + 2s + 4 \tag{102}$$

Como todos los coeficientes son positivos, debemos obtener la tabla de Routh-Hurwitz, que en este caso toma la siguiente estructura:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & 4 \\ s^1 & A_1 & A_2 \\ s^0 & B_1 & \end{array}$$

Criterio de Routh-Hurwitz

Obtenemos los elementos indeterminados A1, A2, B1:

$$A_1 = \frac{-1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}$$

$$A_2 = \frac{-1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$B_1 = \frac{-1}{\frac{2}{3}}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Calculados los coeficientes de Routh, puede obtenerse la siguiente tabla de Routh Hurwitz:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & 4 \\ s^1 & \frac{2}{3} & 0 \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

Todos los coeficientes son positivos, por lo tanto, el sistema es estable.

Ejemplo:
Determinar si la planta $P(s)$ es estable:

$$P(s) = \frac{100}{s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 3s + 100}. \tag{103}$$

Analizamos la ecuación característica de la planta:

$$e.c. = s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 3s + 100 \tag{104}$$

Como todos los coeficientes son positivos, debemos obtener la tabla de Routh-Hurwitz, que en este caso toma la siguiente estructura:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 7 & 100 \\
s^3 & 5 & 3 & 0 \\
s^2 & A_1 & A_2 & \\
s^1 & B_1 & B_2 & \\
s^0 & C_1 & &
\end{array}$$

Obtenemos los coeficientes de Routh Hurwitz:

$$A_1 = \frac{-1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \frac{32}{5}$$

$$A_2 = \frac{-1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 100$$

$$B_1 = \frac{-5}{32}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ \frac{32}{5} & 100 \end{vmatrix} = \frac{-601}{8}$$

$$B_2 = \frac{-5}{32}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ \frac{32}{5} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Calculados los coeficientes de Routh, puede obtenerse la siguiente tabla de Routh Hurwitz:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 7 & 100 \\ s^3 & 5 & 3 & \\ s^2 & \frac{32}{5} & 100 & \\ s^1 & \frac{-601}{8} & 0 & \\ s^0 & 100 & & \end{array}$$

En este hay dos cambios de signo, por lo tanto, dos soluciones en el plano derecho (inestables).

Criterio de Routh-Hurwitz. Casos particulares

Al aplicar el criterio de Routh-Hurwitz, pueden aparecer casos particulares.

a) Fila con todos los elementos nulos.
   Cuando todos los elementos de una fila son nulos, el sistema presenta parejas de raíces reales con signos opuestos o parejas de raíces complejo-conjugadas en el eje imaginario. Para continuar desarrollando la tabla debe derivarse la fila superior.

b) El primer elemento de una fila es nulo.
   En este caso, no podemos construir el resto de elementos de la tabla, puesto que el pivote es nulo y los elementos de la fila toman valor infinito. En estos casos debemos substituir el valor nulo por un valor ϵ positivo e infinitesimal, que nos permitirá calcular el resto de elementos.