Fundamentos de control Industrial

Introducción a los sistemas de control.

Javier Rico Azagra

Curso 2020-2021

Universidad de La Rioja

Introducción a los sistemas de control

Objetivo

- Comprender y controlar el entorno en beneficio de la humanidad.
- En última instancia, hacer que las máquinas funcionen solas.
- Existen multitud de ejemplos de aplicación cotidianos.
    - Control de la temperatura en hogares y electrodomésticos.
    - Control de velocidad en automóviles.
- Para controlar un sistema debemos conocer como funciona.

Naturaleza de los sistemas

- Su naturaleza física puede pertenecer a multitud de campos:
  - Eléctricos / Electrónicos.
  - Mecánicos.
  - Químicos.
  - Biológicos.
  - Económicos.
  - Etc.
- No es importante el sistema físico, sino las ecuaciones que modelan su comportamiento.
- Problema. El ingeniero de control debe conocer las ecuaciones que describen el comportamiento de los sistemas que desea controlar $\rightarrow$ carácter multidisciplinar.

Modelos matemáticos de sistemas físicos

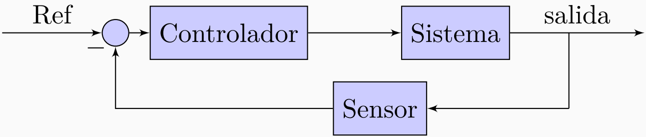
- Las ecuaciones matemáticas que modelan el comportamiento de los sistemas son ecuaciones diferenciales $\rightarrow$ evolucionan con el tiempo.
- Las ecuaciones que describen los sistemas pueden ser:
  - Lineales o No lineales.
  - De parámetros variantes o invariantes con el tiempo.
  - Monovariables o multivariables.
  - Etc.
- En esta asignatura estudiaremos únicamente sistemas SISO (*Single Input Single Output*) y LTI (*Lineales Tiempo Invariantes*).
- Cuanto mejor sea el modelo del sistema mejor sera el control.

Alternativas de control

Para controlar un sistema pueden emplearse dos alternativas:

- Control en lazo abierto.

- Control en lazo cerrado



En esta asignatura estudiaremos los sistemas de control en lazo cerrado.

Ejemplo de sistema en lazo abierto

Un ejemplo típico de sistema en lazo abierto, la tostadora de pan.

- Objetivo de control. Que la tostada tenga un color adecuado
- Entrada del sistema. Tiempo de tostado

Problemas:

- ¿Que pasa si el proceso cambia?
- ¿Que pasa si aparecen perturbaciones?

Solución: lazo cerrado

- La solución a este problema es emplear una estructura de control en lazo cerrado.
- Elementos de un sistema de control en lazo cerrado:
  - Referencia / Consigna / Set point $\rightarrow r(t)$
  - Error $\rightarrow e(t)$
  - Acción de control $\rightarrow u(t)$
  - Actuador
  - Planta / Sistema / Proceso
  - Salida / Variable controlada $\rightarrow y(t)$
  - Sensor
  - Ruido de alta frecuencia

Sistemas en lazo cerrado

- Al conocer el estado de la variable controlada podemos actuar de forma que el error se minimice o sea nulo $\rightarrow$ es la forma de actuar de las personas.
- Desventajas:
  - Aumento del número de componentes y de la complejidad.
  - Mayor coste económico.
  - Introducción de ruido en la medida.
  - Los sistemas pueden hacerse inestables.
- El diseño deberá maximizar las ventajas del control realimentado y minimizar los costes.

La transformada de Laplace

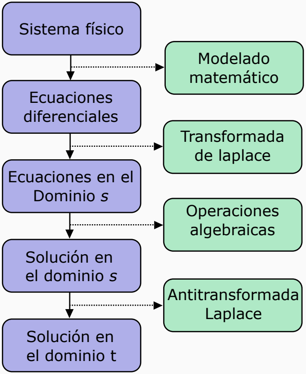
¿Por que la necesitamos?

- La mayoría de los procesos físicos existentes en la naturaleza y estudiados en ingeniería de control presentan un comportamiento que puede modelarse mediante el empleo de ecuaciones diferenciales.
- El estudio de las ecuaciones diferenciales es complejo, dificultando el análisis de los sistemas desde un punto de vista matemático.
- Solución: la transformada de Laplace. Esta herramienta matemática nos permitirá resolver ecuaciones diferenciales de forma sencilla, ahorrando tiempo y esfuerzo.

Proceso de resolución de ecuaciones diferenciales

El proceso empleado para realizar el análisis de los sistemas físicos consta de cuatro etapas.

- Obtener la ecuación diferencial.
- Trasladarla al dominio de la variable compleja.
- Obtener la solución en el dominio s.
- Obtener la solución en el dominio del tiempo.



Definición de transformada de Laplace

Definimos la transformada directa de Laplace según la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

Lateralizada en el tiempo (definida para $t \geq 0$):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{2}$$

Donde la variable compleja corresponde con: $s = \sigma + j\omega$

Propiedades de la transformada de Laplace

Suma de dos funciones

La transformada de Laplace de la suma de dos funciones temporales es igual a la suma de las transformadas.

$$\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=\mathcal{L}\{f_1(t)\}+\mathcal{L}\{f_2(t)\}=F_1(s)+F_2(s) \tag{3}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\} &= \int_0^\infty (f_1(t)+f_2(t))e^{-st}\cdot dt \\ &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}\cdot dt + \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}\cdot dt \\ &= \mathcal{L}\{f_1(t)\}+\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_1(s)+F_2(s)\end{aligned} \tag{4}$$

Producto por un escalar

Cuando una función temporal este multiplicada por un escalar su transformada sera igual al producto del escalar por la transformada de la función.

$$\mathcal{L}\{af(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} = aF(s) \tag{5}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t)\} =& \int_0^{\infty} af(t)e^{-st}dt = a\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}dt \\ =& a\mathcal{L}\{f(t)\} = aF(s)\end{aligned} \tag{6}$$

Retardo en el tiempo

Conocida la transformada de Laplace de una función temporal, podemos calcular la transformada de la misma función retardada en el tiempo empleando la siguiente regla:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as}F(s) \tag{7}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)1(t-a)\} =& \int_0^{\infty} f(t-a)1(t-a)e^{-st}dt \\
=& \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+a)} = \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s\tau}e^{-sa} \\
=& e^{-sa}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} = \mathcal{L}\{f(t)\}e^{-as} = F(s)e^{-as}
\end{aligned} \tag{8}$$

Transformada de la derivada

Podemos obtener directamente la transformada de la derivada de una función si conocemos la transformada de la función sin derivar.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)^{+} = sF(s) - f(0^{+}) \tag{9}$$

La formula general para una derivada de orden n es:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^{+}) - s^{n-2} f^{'}(0^{+}) - \cdots - s f^{n'}(0^{+}) \tag{10}$$

Transformada de la integral

Podemos calcular la transformada de la integral de una función temporal si conocemos la transformada de la función aplicando la siguiente propiedad.

$$\mathcal{L}\left\{\int_o^\infty f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int_o^\infty f(t)dt\right]_{t=0}}{s} \tag{11}$$

Demostración:

$$g(t) = \int_0^\infty f(t)dt \rightarrow g'(t) = f(t) \tag{12}$$

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g'(0) = s\mathcal{L}\left\{\int_o^\infty f(t)dt\right\} - \mathcal{L}\{f(0)\} \tag{13}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_o^\infty f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} + \frac{1}{s}\left[\int_o^\infty f(t)dt\right]_{t=0} \tag{14}$$

Teorema del valor inicial

Este teorema nos permite conocer el valor inicial de una función temporal a partir de su expresión en el dominio de la frecuencia. Este valor es conocido como el valor de arranque de la función.

$$\lim_{t \to o} f(t) = \lim_{s \to \infty} [sF(s)] \tag{15}$$

Para poder aplicarlo $F(s)$ debe ser una función racional propia. $F(s) = num(s)/den(s)$. Orden del denominador $den(s)$ mayor que el del numerador $num(s)$.

Teorema del valor final

Este teorema nos permite conocer el valor de una señal temporal para $t = \infty$ (régimen permanente) a partir de su expresión en el dominio de la frecuencia. Para poder aplicar este teorema la señal debe cumplir las siguientes características:

- $f(t)$ y $f^{'}(t)$ sean transformables.
- Existe limite de $f(t)$ cuando t tiende a infinito.
- $sF(s)$ es analítica en el semiplano derecho s.

Si se cumplen estas propiedades podemos afirmar

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} \left[s \cdot F(s) \right]. \tag{16}$$

Señales periodicas

Si $f_1(t)$ corresponde con un segmento de una señal periódica $f(t)$, la transformada de Laplace de la señal periódica será

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}, \tag{17}$$

donde T corresponde con el periodo de la señal $f(t)$.

Integral de convolución

Debemos definir la convolución como el proceso por el que dos señales temporales interactuan, produciendose la modulación de una de las señales (*s*eñal modulada) a partir de la otra (*s*eñal moduladora).
En nuestro caso la señal modulada sera la entrada a los sistemas, y la moduladora la naturaleza de dichos sistemas. Un ejemplo de este proceso es aplicar una señal de entrada a un AO (*a*mplificador operacional) configurado como amplificador no inversor, la señal de salida del sistema es la convolucionada y el AO representa la señal convolucionadora.

$$g(t) = f(t) \otimes h(t) = \int_0^{\infty} f(t-\tau) \cdot h(\tau) d \tag{18}$$

$$G(s) = F(s)H(s) \tag{19}$$

Antitransformada de Laplace

Conocida una función en el dominio de la frecuencia $F(s)$ podemos obtener la misma funcion expresada en el dominio del tiempo $f(t)$ aplicando la transformada inversa de Laplace (*a*ntitransformada de Laplace). Este será el último paso en el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales. La definición de la antitransformada es la siguiente:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(s) e^{st} ds \tag{20}$$

La integral anterior presenta un cálculo complejo, que no esta comprendido en los objetivos de la asignatura. En nuestro caso se expondrá el método de cálculo de residuos.

Cálculo de residuos

El primer paso para obtener la antitransformada de Laplace es obtener la expresión $F(s)$ en forma de polos-ceros, de este modo $F(s)$ tendrá la siguiente estructura

$$F(s) = \frac{num(s)}{den(s)} = \frac{num(s)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \cdots (s - p_n)}. \qquad (21)$$

$num(s) \rightarrow$ Polinomio numerador
$den(s) \rightarrow$ Polinomio denominador

Cálculo de residuos

Tras obtener la función de transferencia en su forma de polos-ceros, debemos de aplicar el calculo de los residuos, obteniendo $F(s)$ en forma de fracciones simples.

$$F(s) = \frac{\Delta_1}{s - p_1} + \frac{\Delta_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{\Delta_n}{s - p_n} \tag{22}$$

Calcularemos los residuos aplicando la siguiente expresión:

$$\Delta_i = \lim_{s \to p_i} [(s - p_i)F(s)] \tag{23}$$

Tras obtener los residuos obtenemos la siguiente función en el dominio del tiempo (*t*abla de antitransformadas).

$$f(t) = \Delta_1 e^{p_1 t} + \Delta_2 e^{p_2 t} + \cdots + \Delta_n e^{p_n t} \tag{24}$$

Residuos de raíces múltiples

Cuando el sistema presenta n raíces iguales debemos desarrollar dicha raiz en la suma de n factores.

$$\frac{\Delta}{(s-p)^k} = \frac{\Delta_1}{(s-p)} + \frac{\Delta_2}{(s-p)^2} + \cdots + \frac{\Delta_k}{(s-p)^k} \tag{25}$$

Calcularemos los residuos de los polos múltiples según la siguiente expresión.

$$\Delta_i = \frac{1}{(k-i)!} \lim_{s \to p_i} \left[\frac{d^{k-i}}{ds^{k-i}} \left[(s-p_i) F(s) \right] \right] \tag{26}$$

Residuos de raíces complejas

Por ultimo cuando tengamos polos complejos conjugados debemos desarrollar su expresión siguiendo el siguiente proceso.

$$F(s) = \frac{b1s + b_0}{s^s + a_1 s + a_0} = \frac{b_1 s + b_0}{(s+c)^2 + \omega} = b_1 \frac{s + \frac{b_0}{b_1}}{(s+c)^2 + \omega} \tag{27}$$

A partir de la tabla de antitansformadas puden obtenerse expresiones del tipo:

$$f(t) = Ae^{-ct}\sin(\omega t) + Be^{-ct}\cos(\omega t) \tag{28}$$

La función de transferencia

- Definimos la función de transferencia de un sistema como la relación entre la entrada y salida del mismo expresada en el dominio de la frecuencia.
- Para realizar el cálculo de la función de transferencia deberemos tomar todas las condiciones iniciales nulas.
- Que las condiciones iniciales sean nulas es una de las desventajas de la función de transferencia frente al modelo de estado.
- La función de transferencia de un sistema representa la dinámica del mismo, y para poder calcularla el sistema debe ser del tipo LTI (*Lineal Tiempo Invariante*).

La función de transferencia

Dado un sistema cuya ecuación de comportamiento esta determinada por:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n t} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1} t} + \cdots + a_0 y(t) = \\ b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m t} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1} t} + \cdots + b_0 r(t) \quad (29)$$

donde :

- $y(t) \rightarrow$ Salida del sistema
- $r(t) \rightarrow$ Entrada del sistema
- $a_n \rightarrow$ Coeficientes del denominador
- $b_n \rightarrow$ Coeficientes del numerador

La función de transferencia

Aplicando la transforma da de Laplace obtenemos

$$Y(s)\left[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0\right] = R(s)\left[b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0\right] \quad (30)$$

Definimos la función de transferencia como el cociente entre la salida y la entrada.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \quad (31)$$

El oden del denominador sera mayor o igual al del denominador $n \geq m$

La función de transferencia

- Podemos observar que la función de transferencia nos permite conocer la salida del sistema $Y(s)$ en función de la entrada $R(s)$, permitiéndonos obtener el sistema representado como un diagrama de bloques.
- La función de transferencia es el cociente de dos polinomios, numerador y denominador. El denominador contiene los polos del sistema, mientras que el numerador contiene los ceros del sistema.
- Se denomina *ecuación característica* al polinomio del denominador de la función de transferencia:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{32}$$

Polos y ceros

Ecuación característica (denominador):

- Este polinomio recibe este nombre puesto que determina en gran medida el comportamiento del sistema.
- Los valores de s que hacen cumplir la ecuación característica (*raices*) se denominan polos del sistema.
- Denominaremos sistema de orden n al que presente una ecuación característica con n raíces o polos.

Numerador:

- Las raíces del numerador se denominan ceros del sistema.
- Por norma general, su impacto en el comportamiento del sistema es menos importante que el de los polos.

Diagrama de polos-ceros

Determinada la función de transferencia de un sistema podemos trazar su diagrama de polos y ceros, en el que veremos representados los mismos en el plano s.

Criterio para el trazado:

- Polos con un aspa ($\times$).
- Ceros con un circulo ($\circ$).