# Ingeniería de control

## Sistemas de control en tiempo discreto

Javier Rico Azagra

Curso 2020-2021

Universidad de La Rioja

# Introducción a los sistemas de control en tiempo discreto

# Introducción

**Ventajas de los sistemas de control digitales**

- Pueden ser modificados y ampliados de forma sencilla.
- Su comportamiento es preciso.
- No se ven alterados por condiciones ambientales.
- Permiten algoritmos complejos.

**Desventajas de los sistemas de control digitales**

- Diseño menos intuitivo (más complejo).
- Menor ancho de banda (dependiendo del *hardware*).
- Pueden aparecer problemas numéricos.

# Introducción

**Ventajas de los sistemas de control analógicos**

- Gran ancho de banda.
- Elevada resolución.
- Diseño sencillo e intuitivo.
- Adecuados en sistemas sencillos.

**Desventajas de los sistemas de control analógicos**

- Dependen de las condiciones ambientales.
- No admiten algoritmos complejos.
- No pueden ser modificados o escalados de forma sencilla.

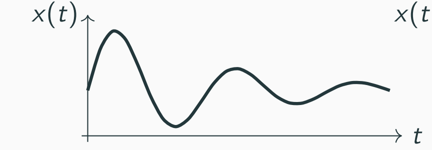
Debemos diferenciar cuatro tipos de señales:

- Señales analógicas en tiempo continuo. La señal está definida en cualquier instante de tiempo y puede presentar cualquier valor.
- Señales cuantificadas en tiempo continuo. La señal está definida en cualquier instante de tiempo y puede su valor debe seleccionarse de un conjunto de posibles valores.
- Señal de datos muestreados. La señal puede tomar cualquier valor pero unicamente esta definida en valores discretos de tiempo.
- Señal digital. Combinación de señal maestreada y cuantificada. Solo está definida en instantes discretos de tiempo y solo puede tomar valores dentro de un conjunto.

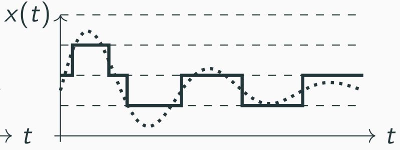
# Introducción. Tipos de señales

Debemos diferenciar cuatro tipos de señales:

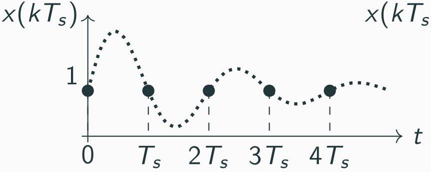
- Señales analógicas en tiempo continuo. La señal está definida en cualquier instante de tiempo y puede presentar cualquier valor.
- Señales cuantificadas en tiempo continuo. La señal está definida en cualquier instante de tiempo y puede su valor debe seleccionarse de un conjunto de posibles valores.
- Señal de datos muestreados. La señal puede tomar cualquier valor pero unicamente esta definida en valores discretos de tiempo.
- Señal digital. Combinación de señal maestreada y cuantificada. Solo está definida en instantes discretos de tiempo y solo puede tomar valores dentro de un conjunto.



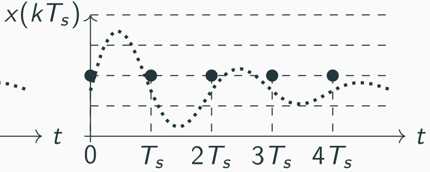

a) Señal analógica




b) Señal cuantificada




c) Señal muestreada




d) Señal digital

# Transformada $\mathcal{Z}$

# Definición de transformada de $\mathcal{Z}$

Considérese una señal $x(t)$ muestreada con un tiempo de muestreo $T_s$, dando una secuencia de números: $x(0), x(T_s), x(2T_s), x(3T_s), \ldots$.
Definimos la transformada $\mathcal{Z}$ como:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(t)\} = \mathcal{Z}\{x(kT_s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s) z^{-k} \tag{1}$$

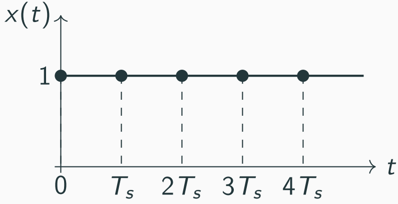
Para una secuencia de números no dependen de $T_s$, esta transformada se expresa como

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(t)\} = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \tag{2}$$

En esta asignatura emplearemos la transformada $\mathcal{Z}$ unilateral. Es decir, que solo contempla tiempos mayores o iguales a cero $t \geq 0 \rightarrow k \geq 0$

# Transformada $\mathcal{Z}$ de un escalón unitario

Escalón unitario muestreado con un periodo $T_s$




$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ x(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

La señal muestreada está determinada por:

$$x(kT_s) = 1,\ 1,\ 1, \ldots, 1 \tag{4}$$

Aplicamos la transformada $\mathcal{Z}$ :

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(kT_s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s) z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-n} \tag{5}$$

# Transformada $\mathcal{Z}$ de un escalón unitario

Conocido que una serie geométrica con razón $r < 1$ cumple

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots ar^n = a\frac{1}{1-r} \tag{6}$$

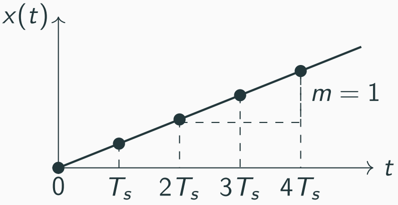
La transformada del escalón se obtiene como:

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots + z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \tag{7}$$

Véase como la transformada $\mathcal{Z}$ es independiente del tiempo con el que se muestrea la señal.

# Transformada $\mathcal{Z}$ de una rampa unitaria

Rampa unitaria muestreada con un periodo $T_s$




$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ x(t) = t & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

La señal muestreada está determinada por

$$x(kT_s) = 0,\ T_s,\ 2T_s,\ 3T_s,\ 4T_s, \ldots, nT_s. \tag{9}$$

Aplicamos la transformada $\mathcal{Z}$ :

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(kT_s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} T_s z^{-k} = T_s z^{-1} + 2T_s z^{-2} + 3T_s z^{-3} + \cdots + nT_s z^{-n} \tag{10}$$

# Transformada $\mathcal{Z}$ de una rampa unitaria

Podemos seguir el siguiente procedimiento para concentrar la serie. En primer lugar sacamos factor común $T_s z^{-1}$, obteniendo

$$X(z) = T_s z^{-1} \left(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots + nz^{-(n-1)}\right) \tag{11}$$

La serie situada en el paréntesis puede expresarse según

$$\begin{aligned} 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-(n-1)} \\ +z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-(n-1)} \\ +z^{-2} + \cdots + z^{-(n-1)} \\ + \cdots + z^{-(n-1)} \end{aligned}$$

En cada una de las líneas puede extraerse factor común $z^{-k}$, dando lugar a series del tipo

$$z^{-k} \left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots + z^{-n}\right) = z^{-k} \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{12}$$

# Transformada $\mathcal{Z}$ de una rampa unitaria

La serie puede expresarse como

$$X(z) = T_s z^{-1} \left( \frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-2}\frac{1}{1-z^{-1}} \right.$$
$$\left. + z^{-3}\frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-4}\frac{1}{1-z^{-1}} + \dots \right) \quad (13)$$

Puede extraerse factor común la fracción $(1-z^{-1})^{-1}$

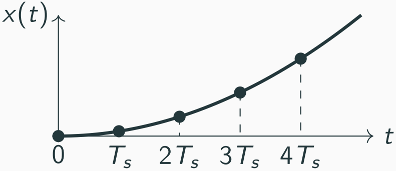
$$X(z) = T_s z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + T_s z^{-4} + \dots\right) \quad (14)$$

Finalmente se obtiene:

$$X(z) = T_s z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{T_s z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{T_s z}{(z-1)^2} \quad (15)$$

# Transformada $\mathcal{Z}$ de una parábola

Parábola muestreada con un periodo $T_s$




$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ x(t) = t^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \tag{16}$$

La señal muestreada está determinada por

$$x(kT_s) = 0,\ T_s^2,\ 2^2 T_s^2,\ 3^2 T_s^2,\ 4^2 T_s^2, \ldots, n^2 T_s^2. \tag{17}$$

Aplicamos la transformada $\mathcal{Z}$:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(kT_s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 T_s^2 z^{-k} = T_s^2 z^{-1} + 2^2 T_s^2 z^{-2} + 3^2 T_s^2 z^{-3} + 4^2 T_s^2 z^{-4}, \ldots, n^2 T_s^2 z^{-n} \tag{18}$$

Seguimos los mismos pasos que en el caso de la rampa

$$X(z) = T_s^2 z^{-1}\left(1 + 2^2 z^{-1} + 3^2 z^{-2} + \cdots + n^2 z^{-(n-1)}\right) \qquad (19)$$

La serie situada en el paréntesis puede expresarse según

$$\begin{aligned} 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-(n-1)} \\ (2m-1)(+z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-(n-1)}) \\ (2m-1)(+z^{-2} + \cdots + z^{-(n-1)}) \\ (2m-1)(+\cdots + z^{-(n-1)}) \end{aligned}$$

donde $m$ corresponde con el número de fila.

En cada una de las filas puede extraerse factor común $T_s z^{-m}$ y puede generarse una seria del tipo: $1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots$

# Transformada $\mathcal{Z}$ de una parábola

Las erie puede expresarse como

$$X(z) = T_s z^{-1} \left( \frac{1}{1-z^{-1}} + 3z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}} + 5z^{-2}\frac{1}{1-z^{-1}} + \dots \right) \quad (20)$$

$$X(z) = \frac{T_s z^{-1}}{1-z^{-1}} \left(1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} \dots \right) \quad (21)$$

El paréntesis puede desarrollarse nuevamente como

$$\begin{aligned} 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(n-1)} \\ 2(z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(n-1)}) \\ 2(z^{-2} + \dots + z^{-(n-1)}) \end{aligned}$$

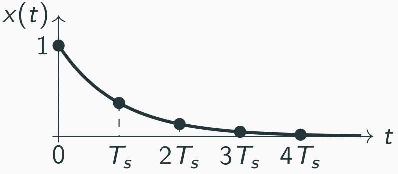
$$X(z) = \frac{T_s z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \left(1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} \dots \right) \quad (22)$$

Finalmente se obtiene:

$$X(z) = \frac{T_s z^{-1}}{(1-z^{-1})^3} \left(1 + z^{-1}\right) = \frac{T_s z(z+1)}{(z-1)^3} \quad (23)$$

# Transformada $\mathcal{Z}$ de una exponencial

Exponencial decreciente muestreada con un periodo $T_s$




$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ x(t) = e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \tag{24}$$

La señal muestreada está determinada por

$$x(kT_s) = 1,\ e^{-aT_s},\ e^{-a2T_s},\ e^{-a3T_s},\ e^{-a4T_s}, \ldots, e^{-anT_s}. \tag{25}$$

Aplicamos la transformada $\mathcal{Z}$:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(kT_s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_s} z^{-k} = 1 + e^{-aT_s} z^{-1} + e^{-a2T_s} z^{-2} + e^{-a3T_s} z^{-3} + \cdots + e^{-anT_s} z^{-n} \tag{26}$$

# Transformada $\mathcal{Z}$ de una exponencial

La transformada puede expresarse como

$$X(z) = 1 + (e^{aT_s}z)^{-1} + (e^{-aT_s}z)^{-2} \\ + e^{-a3T_s}z^{-3} + \cdots + (e^{aT_s}z)^{-n} \quad (27)$$

Por lo que la razón de la serie está determinada por

$$(e^{aT_s}z)^{-1} \quad (28)$$

La transformada del la función exponencial se expresa como

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT_s}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_s}} \quad (29)$$

# Transformada $\mathcal{Z}$ del la función seno

Conocida la transformada de la función exponencial puede obtenerse la transformada de la función senoidal. Dada la relación

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right). \tag{30}$$

La transformada $\mathcal{Z}$ del seno puede expresarse como

$$X(z) = \mathcal{Z}\{\sin(\omega k T_s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\right\} \tag{31}$$

Separamos la transformada en la transformada de dos exponenciales

$$X(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2j}e^{j\omega k T_s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2j}e^{-j\omega k T_s}\right\} \tag{32}$$

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z - e^{+j\omega T_s}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T_s}}\right] \tag{33}$$

# Transformada $\mathcal{Z}$ del la función seno

Sumamos las dos expresiones

$$X(z) = \frac{z}{2j}\left[\frac{(z - e^{-j\omega T_s}) - (z - e^{+j\omega T_s})}{(z - e^{+j\omega T_s})(z - e^{-j\omega T_s})}\right] \tag{34}$$

$$X(z) = \frac{z}{2j}\left[\frac{e^{+j\omega T_s} - e^{-j\omega T_s}}{z^2 - z(e^{+j\omega T_s} + e^{-j\omega T_s}) + 1}\right] \tag{35}$$

El numerador puede expresarse como un seno

$$X(z) = z\left[\frac{\sin(\omega T_s)}{z^2 - z(e^{+j\omega T_s} + e^{-j\omega T_s}) + 1}\right] \tag{36}$$

Aplicando la expresión del coseno

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) \tag{37}$$

Finalmente se obtiene

$$X(z) = z\left[\frac{\sin(\omega T_s)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_s) + 1}\right] = \frac{z\sin(\omega T_s)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_s) + 1} \tag{38}$$

# Transformada $\mathcal{Z}$ del la función coseno

Conocida la transformada de la función exponencial puede obtenerse la trasformada $\mathcal{Z}$ de la función coseno. Dada la relación

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) \tag{39}$$

La transformada $\mathcal{Z}$ del coseno puede expresarse como

$$X(z) = \mathcal{Z}\{\sin(\omega k T_s)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)\right\} \tag{40}$$

Como en el caso anterior, la transformada se separa en la suma de dos transformadas:

$$X(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega k T_s}\right\} + \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}e^{-j\omega k T_s}\right\} \tag{41}$$

En el dominio $\mathcal{Z}$ se obtiene

$$X(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z - e^{+j\omega T_s}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega T_s}}\right] \tag{42}$$

# Transformada $\mathcal{Z}$ del la función coseno

Operamos como en el caso anterior

$$X(z) = \frac{z}{2}\left[\frac{(z - e^{-j\omega T_s}) + (z - e^{+j\omega T_s})}{(z - e^{+j\omega T_s})(z - e^{-j\omega T_s})}\right] \tag{43}$$

$$X(z) = \frac{z}{2}\left[\frac{2z - (e^{+j\omega T_s} + e^{-j\omega T_s})}{z^2 - z(e^{+j\omega T_s} + e^{-j\omega T_s}) + 1}\right] \tag{44}$$

Sustituimos las exponenciales por $\cos \omega T_s$

$$X(z) = z\left[\frac{z - \cos(\omega T_s)}{z^2 - z(e^{+j\omega T_s} + e^{-j\omega T_s}) + 1}\right] \tag{45}$$

La transformada $\mathcal{Z}$ del coseno se expresa como

$$X(z) = z\left[\frac{z - \cos(\omega T_s)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_s) + 1}\right] = \frac{z^2 - z\cos(\omega T_s)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_s) + 1} \tag{46}$$

# Propiedades de la transformada de $\mathcal{Z}$

# Suma de dos funciones

La transformada $\mathcal{Z}$ de la suma de dos funciones es igual a la suma de las transformadas.

$$\mathcal{Z}\{x_1(kT_s) + x_2(kT_s)\} = \mathcal{Z}\{x_1(kT_s)\} + \mathcal{Z}\{x_2(kT_s)\} = X_1(z) + X_2(z) \tag{47}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x_1(kT_s) + x_2(kT_s)\} =& \sum_{k=0}^{\infty}(x_1(kT_s) + x_2(kT_s))z^{-k} \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} x_1(kT_s)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} x_2(kT_s)z^{-k} \\
=& \mathcal{Z}\{x_1(kT_s)\} + \mathcal{Z}\{x_2(kT_s)\} \\
=& X_1(z) + X_2(z)
\end{aligned} \tag{48}$$

# Producto por un escalar

Cuando una función temporal este multiplicada por un escalar, su transformada $\mathcal{Z}$ sera igual al producto del escalar por la transformada $\mathcal{Z}$ de la función.

$$\mathcal{Z}\{ax(kT_s)\} = a\mathcal{Z}\{x(kT_s)\} = aX(z) \tag{49}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{ax(kT_s)\} =& \sum_{k=0}^{\infty} ax(kT)z^{-1} = a\sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)z^{-1} \\ =& a\mathcal{Z}\{x(kT_s)\} = aX(z)\end{aligned} \tag{50}$$

# Teorema del corrimiento

Conocida la transformada $\mathcal{Z}$ de una función temporal, podemos calcular la transformada de la misma función retardada o adelantada en el tiempo empleando las siguientes reglas:

- Retraso de muestras:

$$\mathcal{Z}\{x(kT_s - nT_s)\} = z^{-n}\mathcal{Z}\{x(kT_s)\} = z^{-n}X(z) \tag{51}$$

- Adelanto de muestras:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x(kT_s + nT_s)\} &= z^{n}\mathcal{Z}\{x(kT_s)\} - z^{n}\sum_{k=0}^{n-1} x(kT_s)z^{-k} \\ &= z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT_s)z^{-k}\right] \end{aligned} \tag{52}$$

# Multiplicación por $a^k$

Si puede obtenerse $X(z)$, como la transformada $\mathcal{Z}$ de la serie de datos $x(kT_s)$ obtenidos al muestrear con un periodo $T_s$ la señal $x(t)$; la transformada $\mathcal{Z}$ de la señal $a^k x(t)$ puede obtenerse como

$$\mathcal{Z}\{a^k x(kT_s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k X(kT_s) z^{-K} = X(a^{-1}z) \tag{53}$$

# Teorema de traslación compleja

Si puede obtenerse $X(z)$, como la transformada $\mathcal{Z}$ de la serie de datos $x(kT_s)$ obtenidos al muestrear con un periodo $T_s$ la señal $x(t)$; la transformada $\mathcal{Z}$ de la señal $e^{-at}x(t)$ puede obtenerse como

$$\mathcal{Z}\{e^{-akT_s}x(kT_s)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT_s}X(kT_s)z^{-K} = X(ze^{-aT_s}) \tag{54}$$

Importante par obtener la transformada de señales $x(t) = e^{-at}\sin(\omega t)$. Conocida la transformada $\mathcal{Z}$ de $\sin(\omega t)$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{\sin(\omega kT_s)\} = \frac{z\sin(\omega T_s)}{z^2 - 2z\cos(\omega T_s) + 1} \tag{55}$$

Se obtiene la transformada $\mathcal{Z}$ de $e^{-at}\sin(\omega t)$ como

$$X_2(z) = \mathcal{Z}\{e^{-aT_s}\sin(\omega kT_s)\} = \frac{e^{-aT_s}z\sin(\omega T_s)}{e^{-2aT_s}z^2 - 2e^{-aT_s}z\cos(\omega T_s) + 1} \tag{56}$$

# Teorema del valor inicial

Este teorema nos permite conocer el primer valor de la serie $x(0)$ a partir de su expresión en el dominio $\mathcal{Z}$

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z) \tag{57}$$

Véase como el limite anterior implica

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z \to \infty} \left[ x(0) + x(T_s)z^{-1} + x(2T_s)z^{-2} + \cdots + x(nT_s)z^{-n} \right] \tag{58}$$

y cunado $z \to \infty$ se obtiene

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{z \to \infty} \left[ x(0) + \frac{x(kT_s)}{\infty} + \frac{x(2T_s)}{\infty} + \cdots + \frac{x(nT_s)}{\infty} \right] = x(0) \tag{59}$$

# Teorema del valor final

Este teorema nos permite conocer el último valor de la serie temporal $x(\infty T_s)$ (régimen permanente) a partir de su expresión en el dominio $\mathcal{Z}$.

Para poder aplicar este teorema, los polos de $X(z)$ deben de estar dentro de un circulo unitario centrado en el origen. Si se cumple esta propiedad puede afirmarse que

$$\lim_{k\to\infty} x(kT_s) = \lim_{z\to 1} \left[(1 - z^{-1})X(z)\right] = \lim_{z\to 1} \left[\frac{z-1}{z} X(z)\right]. \qquad (60)$$

# Diferenciación compleja

Conocida la transformada $X(z)$ de una señal $x(kT_s)$, puede obtenerse la transformada de $kT_s x(kT_s)$ (señal muestreada de $tx(t)$) como:

$$\mathcal{Z}\{tx(t)\} = \mathcal{Z}\{kT_s x(kT_s)\} = -zT_s \frac{dX(z)}{dz} \tag{61}$$

Si se deriva la señal $X(z)$ se obtiene

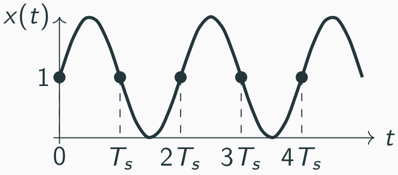
$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} -kx(kT_s)z^{-k-1}, \tag{62}$$

multiplicando a ambos lados $-zT_s$

$$-zT_s \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} kx(kT_s)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(kT_s x(kT_s))z^{-k} \tag{63}$$

# Antitransformada $\mathcal{Z}$

- La antitransformada o transformada inversa $\mathcal{Z}^{-1}$ nos permite obtener la secuencia de valores $x(kT_s)$ a partir de $X(z)$.
- Téngase en cuenta que solo obtendremos la secuencia de datos no la señal $x(t)$. Existen múltiples señales x(t) con una misma $x(kT_s)$.
- Ejemplo:




La secuencia de datos es

$$x(kT_s) = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, \ldots \tag{64}$$

que coincide con la secuencia de datos producida por un escalón unitario muestreado.

# Antitransformada $\mathcal{Z}$

Existen varios métodos para obtener la transformada inversa. En esta asignatura estudiaremos:

- División directa o división polinómica.
- Expansión en fracciones parciales.
- Integral de inversión

Además de estos métodos, puede obtenerse la transformada inversa empleando tablas de antitransformadas.

Como en lo sistemas continuos, debe cumplirse que el numero de polos sea igual o superior al de ceros $n \geq m$

$$Y(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + b_{m-2} z^{m-2} + \cdots + b_1 z^1 + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z^1 + a_0} \tag{65}$$

# Antitransformada $\mathcal{Z}$. División directa

- Consiste en dividir la fracción empleando una división polinómica.
- Dado que e grado del numerador es de orden igual o inferior al del denominador, el cociente resultante es una serie en potencias negativas de $z$.
- Los valores de la serie $x(kT_s)$ se obtienen por inspección directa.
- Método de calculo sencillo e intuitivo pero poco práctico.
- Ejemplo: obtener la transformada inversa de

$$Y(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} \tag{66}$$

# Antitransformada $\mathcal{Z}$. División directa

$$(10z+5)/(z^2-1.2z+0.2) = 10z^{-1}+17z^{-2}+18.4z^{-2}+18.68z^{-2} \quad (67)$$

- Paso 1

$$(10z+5) - 10z^{-1}(z^2-1.2z+0.2) = 17 - 2z^{-1} \quad (68)$$

- Paso 2

$$17 - 2z^{-1} - 17z^{-2}(z^2-1.2z+0.2) = 18.4z^{-1} - 3.4z^{-2} \quad (69)$$

Mediante inspección visual se obtiene la serie de datos

$$y(kT_s) = 0,\ 10,\ 17,\ 18.4,\ 18.68 \quad (70)$$

# Antitransformada $\mathcal{Z}$. Expansión en fracciones parciales

- Consiste en emplear la misma estrategia que empleamos para obtener la transformada inversa de Laplace
- Descomponemos la transformada en fracciones simples.
- Obtenemos la antitransformada directa de cada fracción.
- Combinamos los resultados para obtener la serie de datos.
- Ejemplo: obtener la transformada inversa de

$$Y(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-0.2)} \tag{71}$$

Obtenemos $A$ y $B$:

$$A(z-0.2) + B(z-1) = 10z+5 \tag{72}$$

Agrupando por potencias de $z$ se obtiene

$$s^1 \rightarrow A + B = 10$$
$$s^0 \rightarrow -0.2A - B = 5$$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos el valor de $A$

$$0.8A = 15 \rightarrow A = 15/0.8 = 18.75 \tag{73}$$

Conocido $A$ obtenemos $B$

$$B = 10 - A = 10 - 18.75 = -8.75 \tag{74}$$

La señal puede expresarse como

$$Y(z) = \frac{18.75}{(z-1)} - \frac{8.75}{(z-0.2)} \tag{75}$$

# Antitransformada $\mathcal{Z}$. Expansión en fracciones parciales

Buscamos la atitransformada directa de cada una de las fracciones. Para ello multiplico y divido por $z$ la expresión de $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{18.75z}{(z-1)} - \frac{8.75}{(z-0.2)}\right] \tag{76}$$

Véase como el primer término

$$\frac{18.75z}{(z-1)} \tag{77}$$

Coincide con un escalón de amplitud 18.75.

El término

$$\frac{8.75z}{(z-0.2)} \tag{78}$$

coincide con la transformada de una exponencial que cumpla $e^{aT_s} = 0.2$. Es decir con la transformada de $e^{-1.6k}$

# Antitransformada $\mathcal{Z}$. Expansión en fracciones parciales

Dado que $Y(z)$ presenta multiplicando $z^{-1}$, aplicando el teorema del corrimiento, deberemos de retrasar todas las muestras una posición. Por lo tanto, la antitransformada de $Y(s)$ se obtiene como:

$$\begin{aligned}
x(0) =& 0 \\
x(T_s) =& 18.75 - 8.75e^{-1.6\times 0} = 10 \\
x(2T_s) =& 18.75 - 8.75e^{-1.6\times 1} = 17 \\
x(3T_s) =& 18.75 - 8.75e^{-1.6\times 2} = 18.4 \\
x(4T_s) =& 18.75 - 8.75e^{-1.6\times 3} = 18.68 \\
x(5T_s) =& 18.75 - 8.75e^{-1.6\times 4} = 18.74
\end{aligned}$$

Véase como los resultados son iguales a los obtenidos aplicando división polinómica.

# Antitransformada $\mathcal{Z}$. Integral de inversión

Definimos la anti transformada $\mathcal{Z}^{-1}$ como

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x(kT_s) = \frac{1}{j2\pi}\oint_c X(z)z^{k-1}dz \qquad (79)$$

Aplicando la teoría de la variable compleja, se puede obtener la inversa en termina de residuos

$$x(kT_s) = \sum_{i=1}^{m} \text{Residuo de } X(z)z^{k-1} \text{en el polo } i \text{ de } X(z)z^{k-1} \qquad (80)$$

- Polos simples:

$$R_i = \lim_{z \to z_i} (z - z_i)X(z)z^{k-1} \qquad (81)$$

- Polos múltiples:

$$R_i = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[(z - z_i)^j X(z)z^{k-1}\right] \qquad (82)$$

**Ejemplo:** Obtener la anti transformada de

$$Y(z) = \frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} \tag{83}$$

Obtenemos los residuos:

- Residuo para $z=1$:

$$R_1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}z^{k-1} = \frac{15}{0.8} = 18.75 \tag{84}$$

- Residuo para $z=0.2$:

$$R_2 = \lim_{z\to 1}(z-0.2)\frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}z^{k-1} = \\ -\frac{7}{0.8}0.2^{k-1} = -8.75\times 0.2^{k-1} \tag{85}$$

# Antitransformada $\mathcal{Z}$. Integral de inversión

La serie de datos puede obtenerse empleando

$$y(kT_s) = R_1 + R_2 = 18.75 - 8.75 \times 0.2^{k-1} \tag{86}$$

Obtenemos los cuatro primeros valores

$$\begin{aligned}
x(0) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{-1} = -25 \\
x(T_s) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{0} = 10 \\
x(2T_s) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{1} = 17 \\
x(3T_s) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{2} = 18.4 \\
x(4T_s) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{3} = 18.68 \\
x(5T_s) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{4} = 18.74
\end{aligned}$$

Como puede comprobarse, el primer valor $x(0)$ no coincide con el obtenido empleando los métodos anteriores.

## Antitransformada $\mathcal{Z}$. Integral de inversión

El problema descrito ocurre porque $Y(z)z^{k-1}$ presenta un residuo adicional para $k=0$. Véase como para $k=0$

$$Y(z)z^{k-1}\Big|_{k=0} = \frac{10z+5}{z(z-1)(z-0.2)} \tag{87}$$

presenta un polo en el origen. Por lo tanto, debemos añadir dicho residuo en el cálculo de la transformada inversa. En este caso

$$R_0 = \lim_{z\to 0}(z)\frac{10z+5}{z(z-1)(z-0.2)} = \frac{5}{0.2} = 25 \tag{88}$$

Por lo tanto, la secuencia de valores de salida se puede obtener empleando

$$y(kT_s) = R_0\delta_c(k) + R_1 + R_2 = 25\delta_c(k) + 18.75 - 8.75\times 0.2^{k-1} \tag{89}$$

donde $\delta_c(k)$ corresponde con la función delta de kronecker o impulso discreto

## Antitransformada $\mathcal{Z}$. Integral de inversión

La función delta de kronecker se define como

$$\begin{cases} \delta_c(k) = 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \delta_c(k) = 1 & \text{si } k = 0 \end{cases} \tag{90}$$

Obtenemos los cuatro primeros valores

$$\begin{aligned} x(0) =& 25 + 18.75 - 8.75 \times 0.2^{-1} = 0 \\ x(T_s) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{0} = 10 \\ x(2T_s) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{1} = 17 \\ x(3T_s) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{2} = 18.4 \\ x(4T_s) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{3} = 18.68 \\ x(5T_s) =& 18.75 - 8.75 \times 0.2^{4} = 18.74 \end{aligned}$$

Puede comprobarse como ahora los valores coinciden con los obtenidos con el resto de métodos

# Antitransformada $\mathcal{Z}$. Integral de inversión

- La integral de inversión es un método rápido y cómodo para obtener la antitransformada $\mathcal{Z}$ de una señal.
- Debe de prestarse atención a la aparición de residuos adicionales en el origen.
- Cuando la señal presenta un residuo en el origen, al aplicar el método aparecerán residuos múltiples en el origen, haciendo laboriosa y poco intuitiva la antitransformada por este método.
- Este problema no aparece si existe un cero en el origen

**Ejemplo:** Obtener las antitransformadas de las señales

$$Y_1(z) = \frac{0.8}{(z-1)(z-0.2)}; \quad Y_2(z) = \frac{0.8z}{(z-1)(z-0.2)} \tag{91}$$

Los residuos para las dos señales son los mismos:

- Residuo para $z = 1$:

$$R_1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{0.8}{(z-1)(z-0.2)}z^{k-1} = 1 \tag{92}$$

- Residuo para $z = 0.2$:

$$R_2 = \lim_{z\to 1}(z-0.2)\frac{0.8z}{(z-1)(z-0.2)}z^{k-1} = 0.2^{k-1} \tag{93}$$

# Antitransformada $\mathcal{Z}$. Integral de inversión

El cero en el origen de $Y_2(z)$ cancela el polo en el origen impuesto en $k=0$, por lo que la secuencia de datos $y_2(k)$ es

$$y_2(kT_s) = 1 - 0.2^{k-1} \tag{94}$$

Sin embardo, para $Y_1(z)$ se obtiene un residuo adicional en $z=0$

$$R_0 = \lim_{z \to 0} (z) \frac{0.8}{z(z-1)(z-0.2)} = \frac{0.8}{0.2} = 4 \tag{95}$$

Por lo tanto, la secuencia de valores de salida $y_1(k)$ se puede obtener empleando

$$Y_2(kT_s) = 4\delta_c(k) + 1 - 0.2^{k-1} \tag{96}$$

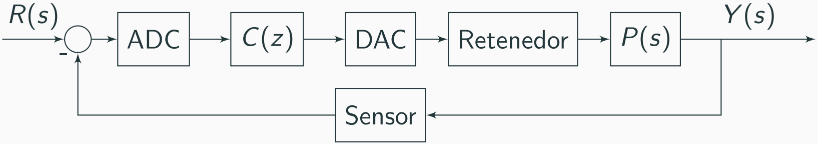
Ejercicio: Obtener la antitransformada por el método de inversión de

$$Y(z) = \frac{0.8}{z(z-1)(z-0.2)} \tag{97}$$

# Arquitectura de control en tiempo discreto

## Arquitectura de control en tiempo discreto

Un sistema de control en tiempo discreto presenta la siguiente estructura




**Elementos del sistema de control**

- Muestreador y retenedor (*Sample and hold*). Elemento que recibe como entrada una señal analógica y mantiene el valor durante un tiempo determinado.

# Arquitectura de control en tiempo discreto

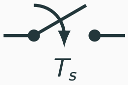
**Elementos del sistema de control**

- Conversor analógico digital. Transforma una señal analógica en digital (un número). Involucra el proceso de cuantificación, dado que el número debe ser seleccionado dentro de un conjunto finito de valores
- Conversor digital analógico. Transforma una valor numérico en una señal analógica.

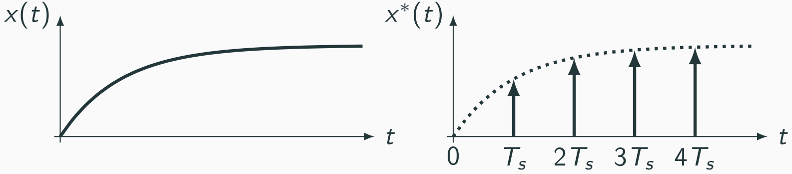
A continuación, vamos a estudiar el comportamiento de estos sistemas desde un punto de vista matemático.

# Muestreador mediante impulsos

Un muestreador por impulsos ideal permite tomar muestras de una señal analógica en tiempo continuo. Tradicionalmente se representa como un interruptor que se cierra instantáneamente cada $T_s$ segundos




A la salida del muestreador obtendremos un tren de pulsos




Se define como $x^*(t)$ a la señal muestreada a partir de $x(t)$.

# Muestreador mediante impulsos

Dada una señal $x(t)$, las señal $x^*(t)$ estará determinada por

$$\begin{aligned} x^*(t) = x(0)\delta(t) + x(T_s)\delta(t - T_s) + x(2T_s)\delta(t - 2T_s) + \dots \\ + x((n-1)T_s), \delta(t - (n-1)T_s) + x(nT_s), \delta(t - nT_s) \end{aligned} \quad (98)$$

señal que puede expresarse como un sumatorio de infinitos términos

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s). \quad (99)$$

La transformada de Laplace de $x^*(t)$ se define como

$$X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s)\right\} \quad (100)$$

Si se desarrolla el sumatorio se obtiene

$$\begin{aligned} X^*(s) = \mathcal{L}\{x(0)\delta(t)\} + \mathcal{L}\{x(T_s)\delta(t - T_s)\} \\ + \mathcal{L}\{x(2T_s)\delta(t - 2T_s)\} + \dots + \mathcal{L}\{x(nT_s)\delta(t - nT_s)\} \end{aligned} \quad (101)$$

# Muestreador mediante impulsos

Los valores $x(kT_s)$ puede extraerse de las transformadas

$$\begin{aligned} X^*(s) = x(0)\mathcal{L}\{\delta(t)\} + x(T_s)\mathcal{L}\{\delta(t-T_s)\} \\ + x(2T_s)\mathcal{L}\{\delta(t-2T_s)\} + \cdots + x(nT_s)\mathcal{L}\{\delta(t-nT_s)\} \end{aligned} \quad (102)$$

Aplicando el teorema del retardo en el tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} X^*(s) = x(0)\mathcal{L}\{\delta(t)\} + x(T_s)e^{-T_s s}\mathcal{L}\{\delta(t)\} \\ + x(2T_s)e^{-2T_s s}\mathcal{L}\{\delta(t)\} + \cdots + x(nT_s)e^{-nT_s s}\mathcal{L}\{\delta(t)\} \end{aligned} \quad (103)$$

Finalmente la transformada de $x^*(t)$ es

$$X^*(s) = x(0) + x(T_s)e^{-T_s s} + x(2T_s)e^{-2T_s s} + x(nT_s)e^{-nT_s s}, \quad (104)$$

expresión que puede concentrarse empleando

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)e^{-kT_s s} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)(e^{T_s s})^{-k} \quad (105)$$

# Muestreador mediante impulsos

Véase como si se emplean las siguientes igualdades

$$e^{T_s s} = z, \quad \frac{1}{T_s}\log(z) = s; \tag{106}$$

la transformada de Laplace es

$$X^*(s)\big|_{s=\frac{1}{T_s}\log(z)} = X^*\left(\frac{1}{T_s}\log(z)\right) = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)z^{-k} \tag{107}$$

Es decir, la transformada de Laplace de la señal muestreada coincide con la transformada $\mathscr{Z}$ de dicha señal se se define $z$ como

$$z = e^{T_s s} \tag{108}$$

# Retenedor

Un retenedor permite transformar señales en tiempo discreto en señales en tiempo continuo.

Este elemento extrapola los datos entre dos periodos de muestreo empleando un polinomio $q(kT_s + \tau)$ que es evaluado en $0 \leq \tau \leq T_s$:

$$q(kT_s + \tau) = a_n\tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \cdots + a_1\tau + x(kT_s) \tag{109}$$

Véase como para garantizar que en $\tau = 0$ se cumpla $p(kT_s) = x(kT_s)$, es necesario que el termino independiente sea $x(kT_s)$

$$q(kT_s + \tau) = a_n\tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \cdots + a_1\tau + x(kT_s). \tag{110}$$

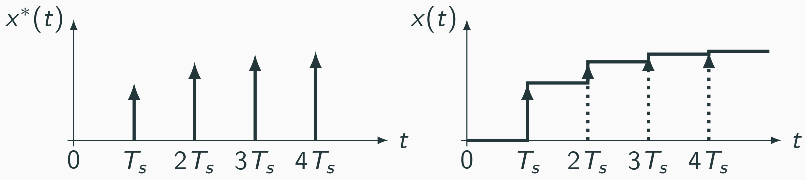
Los retenemodres más empleados son:

- Retenedor de orden cero: $q(kT_s + \tau) = x(kT_s)$
- Retenedor de orden uno:

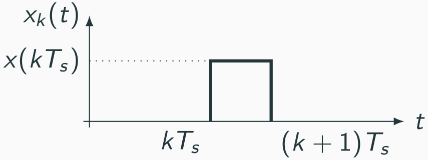
$$q(kT_s + \tau) = (x(kT_s) - x((k-1)T_s))\frac{\tau}{T_s} + x(kT_s)$$

# Retenedor de orden cero. ZOH

El retenedor de orden cero o ZOH (*Zero Order Hold*) presenta el siguiente comportamiento:

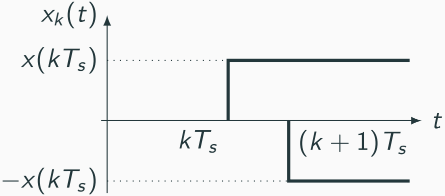



Para obtener la función de transferencia del mismo, debemos analizar uno de los rectángulos generados a la salida del retenedor



# Retenedor de orden cero. ZOH

La señal $x_k(t)$ puede construirse sumando dos escalones de amplitud igual amplitud y signo contrario, que se encuentran retrasados en el tiempo




En el dominio de Laplace, la señal $x_k(t)$ puede expresarse como:

$$X_k(s)\frac{x(kT_s)e^{-kT_s s}}{s} - \frac{x(kT_s)e^{-(k+1)T_s s}}{s}. \tag{111}$$

Operando se obtiene

$$X_k(s) = \frac{x(kT_s)e^{-kT_s s}}{s} - \frac{x(kT_s)e^{-kT_s s}e^{-T_s s}}{s} = x(kT_s)e^{-kT_s s}\left(\frac{1-e^{-T_s s}}{s}\right) \tag{112}$$

La señal $X(s)$ puede construirse sumando infinitos pulsos $X_k(s)$, obteniendo

$$X(s) = x(0)\left(\frac{1-e^{-T_s}}{s}\right) + x(T_s)e^{-T_s s}\left(\frac{1-e^{-T_s}}{s}\right) + \cdots + x(nT_s)e^{-nT_s s}\left(\frac{1-e^{-nT_s}}{s}\right) \quad (113)$$

Dado que todos los sumados contienen $(1-e^{-sT_s})/s$, puede extraerse como factor común

$$X(s) = \left(\frac{1-e^{-T_s}}{s}\right)\left[x(0) + x(T_s)e^{-T_s s} + \cdots + x(nT_s)e^{-nT_s s}\right] \quad (114)$$

dando lugar a la expresión simplificada

$$X(s) = \left(\frac{1-e^{-T_s}}{s}\right)\sum_{k=0}^{\infty} x(kT_s)e^{-kT_s s} \quad (115)$$

donde se observa la relación entre la salida y la señal muestreada $X^*(s)$.

# Retenedor de orden cero. ZOH

En conclusión, la función de transferencia del retenedor de orden cero está determinada por

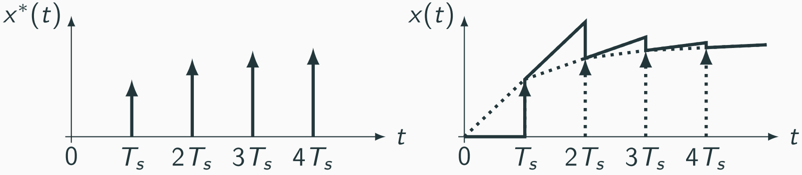
$$X(s) = \left(\frac{1 - e^{-T_s s}}{s}\right) X^*(s) \tag{116}$$

$$\frac{X(s)}{X^*(s)} = ZOH = \left(\frac{1 - e^{-T_s s}}{s}\right) \tag{117}$$

Véase como este elemento permite enlazar sistemas discretos con sistemas continuos, añadiendo una función de transferencia a la planta que trabaja en tiempo continuo.

# Retenedor de orden uno

El retenedor de orden uno emplea la información de la muestra anterior para reconstruir la señal en tiempo contínuo




Para obtener su modelo matemático, debemos sumar en cada periodo una rampa junto con un escalón, y posteriormente restar las mismas señales retardadas en el tiempo $T_s$ segundos.

# Retenedor de orden uno

En un tramo, la señal $X_k(s)$ puede expresarse como

$$X_k(s) = e^{-kT_s s}\frac{x(kT_s)}{s} + e^{-kT_s s}\frac{x(kT_s) - x((k-1)T_s)}{T_s s^2}$$
$$- 2e^{-(k+1)T_s s}\frac{x(kT_s)}{s} + e^{-(k+1)T_s s}\frac{x((k-1)T_s)}{s}$$
$$- e^{-(k+1)T_s s}\frac{x(kT_s) - x((k-1)T_s)}{T_s s^2} \quad (118)$$

Agrupando términos como en el caso del ZOH se obtiene

$$X_k(s) = x(kT_s)e^{-kT_s}\left(\frac{1-2e^{-T_s s}}{s} + \frac{1-e^{-T_s s}}{s^2 T_s}\right)$$
$$x((k-1)T_s)e^{-kT_s}\left(\frac{e^{-T_s s}}{s} - \frac{1-e^{-T_s s}}{s^2 T_s}\right) \quad (119)$$

Téngase en cuenta que el siguiente tramo de la secuencia de salida contempla nuevamente al término $x(xT_s)$ del mismo modo que en este instante de tiempo aparece $x((k-1)T_s)$.

# Retenedor de orden uno

En el instante $(k+1T_s)$ los elementos que dependen de $x(kT_s)$ son

$$x(kT_s)e^{-(k+1)T_s}\left(\frac{e^{-T_s s}}{s}-\frac{1-e^{-T_s s}}{s^2T_s}\right) \tag{120}$$

Por lo tanto, todos los elementos que dependen de $x(kT_s)$ pueden expresarse como

$$x(kT_s)e^{-kT_s}\left(\frac{1-2e^{-T_s s}}{s}+\frac{1-e^{-T_s s}}{s^2T_s}\right) + x(kT_s)e^{-(k+1)T_s}\left(\frac{e^{-T_s s}}{s}-\frac{1-e^{-T_s s}}{s^2T_s}\right) \tag{121}$$

Operando se obtiene

$$x(kT_s)e^{-kT_s}\left(\frac{1-2e^{-T_s s}}{s}+\frac{1-e^{-T_s s}}{s^2T_s}\right) + x(kT_s)e^{-kT_s}\left(\frac{e^{-2T_s s}}{s}-\frac{e^{-T_s s}-e^{-2T_s s}}{s^2T_s}\right) \tag{122}$$

# Retenedor de orden uno

Sacando factor común a todos los términos $x(kT_s)e^{-kT_s s}$ se obtiene

$$x(kT_s)e^{-kT_s}\left(\frac{1-2e^{-T_s s}+e^{-2T_s s}}{s}+\frac{1-2e^{-T_s s}+e^{-2T_s s}}{s^2 T_s}\right) \tag{123}$$

Véase como empleando

$$1-2e^{-T_s s}+e^{-2T_s s}=(1-e^{-T_s s})^2, \tag{124}$$

se obtiene

$$x(kT_s)e^{-kT_s}\frac{\left(1-e^{-T_s s}\right)^2(T_s s+1)}{T_s s^2} \tag{125}$$

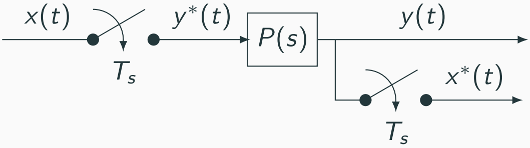
Sumando los infinitos términos se obtiene la función de transferencia del retenedor de orden uno

$$X(s)=\left(1-e^{-kT_s}\right)^2\frac{T_s s+1}{T_s s^2}X^*(s) \tag{126}$$

# Función de transferencia pulso

# Función de transferencia pulso

La función de transferencia pulso relaciona la trasnsformada $\mathcal{Z}$ de la salida muestreada con la transforamada $\mathcal{Z}$ de la entrada muetreada.




Es decir, la función de transferencia pulso esta determinada por:

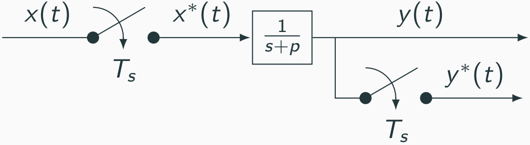
$$\frac{Y(z)}{U(z)} = P(z) \tag{127}$$

Para obtener la transformada pulso debemos obtener al antitransformada de P(s) y posteriormente la transformada $\mathcal{Z}$

$$P(s) \rightarrow p(t) \rightarrow p(kT_s) \rightarrow P(z) \tag{128}$$

Este proceso puede acortarse si se conocen las transformadas de las funciones elementales.

**Ejemplo:** Calcular la función de transferencia pulso de




Obtenemos la antitransformada de $P(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+p}\right\} = e^{-pt} \tag{129}$$

La señal muestreada esta determinada por

$$e^{kT_sp} = 1,\ e^{-T_sp},\ e^{-2T_sp},\ e^{-3T_sp}, \ldots \tag{130}$$

y su transformada $\mathcal{Z}$ por

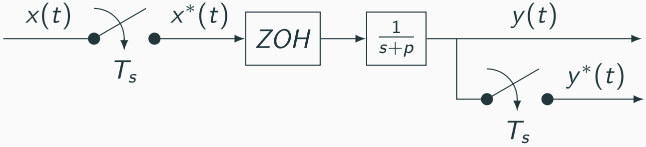
$$\mathcal{Z}\left\{e^{-kT_sp}\right\} = \frac{z}{z - e^{-T_sp}} \tag{131}$$

# Función de transferencia pulso

Por lo tanto, la función de transferencia pulso está determinada por

$$P(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z - e^{-T_s p}} \tag{132}$$

**Ejemplo:** Calcular la función de transferencia pulso de




Obtenemos la antitransformada de $P(s)$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-T_s}}{s} \frac{1}{s+p}\right\} \tag{133}$$

Dado que $e^{-sT_s} = z^{-1}$, la expresión anterior puede expresarse como

$$(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s+p}\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{G(s)\right\}, \tag{134}$$

donde $G(s)$ está determinada por

$$G(s) = \frac{1}{s(s+p)} \tag{135}$$

Separamos $G(s)$ en fracciones simples

$$G(s) = \frac{1}{s(s+p)} = \frac{k_1}{s(s+p)} + \frac{k_2}{(s+p)}, \tag{136}$$

donde

$$k_1 = \lim_{s \to 0} s\frac{1}{s(s+p)} = \frac{1}{p} \tag{137}$$

y

$$k_2 = \lim_{s \to -p} (s+p)\frac{1}{s(s+p)} = \frac{1}{-p}, \tag{138}$$

La descomposición en fracciones simples queda

$$G(s) = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+p)}\right] \tag{139}$$

Conocidas las antitransformadas y transformadas $\mathcal{Z}$ de cada uno de los términos se obtiene $G(z)$ como

$$G(z) = \frac{1}{p}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z+e^{-pT_s})}\right] \tag{140}$$

La función de transferencia pulso se obtiene como producto de $G(z)$ y $(1-z^{-1})$

$$P(z) = (1-z^{-1})\frac{1}{p}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z+e^{-pT_s})}\right] \tag{141}$$

$$P(z) = \frac{1}{p}\frac{(1-e^{-pT_s})}{(z+e^{-pT_s})} \tag{142}$$

# Ecuación en diferencias

Podemos determinar la salida de un sistema en un instante de tiempo obteniendo la ecuación den diferencias que modela la ecuación diferencial.

Considérese una función de transferencia pulso genérica

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = P(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} \dots b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots z_1 z + a_0}, \tag{143}$$

que garantiza $n \geq m$.

Para obtener la ecuación en diferencias debe expresarse la ecuación anterior en potencias negativas de $z$. Es decir, debemos dividir el nuemrador y el denominador por $z^n$ obteniendo

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = P(z) = \frac{b_m z^{-n+m} + b_{m-1} z^{-n+m-1} \dots b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} \dots a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} \tag{144}$$

# Ecuación en diferencias

Una vez obtenida la ecuación en diferencias puede expandirse la misma pasando el denominador a la parte izquierda de la ecuación. De este modo se obtiene

$$\begin{aligned} Y(z)(1 + a_{n-1}z^{-1} \dots a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}) = \\ U(z)(b_m z^{-n+m} + b_{m-1} z^{-n+m-1} \dots b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}) \end{aligned} \quad (145)$$

Despejamos $Y(z)$ pasando los términos que presentan potencias negativas al lado derecho de la ecuación

$$\begin{aligned} Y(z) = -a_{n-1}z^{-1}Y(z) - \dots - a_1 z^{-n+1} Y(z) + a_0 z^{-n} Y(z) \\ + b_m z^{-n+m} U(z) + b_{m-1} z^{-n+m-1} U(z) + \dots \\ + b_1 z^{-n+1} U(z) + b_0 z^{-n} U(z) \end{aligned} \quad (146)$$

Sustituimos $Y(z)$ por $y(kT_s)$, $U(z)$ por $u(kT_s)$

$$\begin{aligned} y(kT_s) = -a_{n-1}z^{-1}y(kT_s) - \dots - a_1 z^{-n+1}y(kT_s) + a_0 z^{-n}y(kT_s) \\ + b_m z^{-n+m}u(kT_s) + b_{m-1}z^{-n+m-1}u(kT_s) + \dots \\ + b_1 z^{-n+1}u(kT_s) + b_0 z^{-n}u(kT_s) \end{aligned} \tag{147}$$

Por último, aplicamos el teorema del corrimiento

$$\begin{aligned} y(kT_s) = -a_{n-1}y((k-1)T_s) - \dots - a_1 y((k-n-1)T_s) + a_0 y((k-n)T_s) \\ + b_m u((k-n+m)T_s) + b_{m-1}u((k-n+m-1)T_s) + \dots \\ + b_1 u((k-n+1)T_s) + b_0 u((k-n)T_s) \end{aligned} \tag{148}$$

# Ecuación en diferencias

Véase como la ecuación en diferencias depende únicamente de los as acciones de control pasadas, de las salidas pasadas y de la acción de control actual.

Esta ecuación nos permite simular sistemas de control digitales e implementar los controladores diseñados en tiempo discreto.

# Análisis del plano $\mathcal{Z}$

## Análisis del plano $\mathcal{Z}$

- A continuación vamos a estudiar el plano $\mathcal{Z}$ para aplicar las estrategias de control clásico en sistemas de control digitales.
- El objetivo de determinar como se comportan los polos del plano $\mathcal{Z}$ para realizar semejanzas con los polos en tiempo continuo.
- Para ello vamos a emplear la igualdad

$$z = e^{sT_s} \tag{149}$$

- Dado que la variable compleja $s$ puede expresarse como $s = \sigma + j\omega$, podemos expresar $z$ como

$$z = e^{sT_s} = e^{T_s(\sigma + j\omega)} = e^{T_s\sigma} e^{jT_s\omega}, \tag{150}$$

  que es equivalente al empleo de

$$z = e^{\sigma T_s} \left(\cos(\omega T_s) + j\sin(\omega T_s)\right) \tag{151}$$

# Traslación del eje imaginario

A continucación, vamos a estudiar como se traslada el eje imaginario. Es decir, los valores que toma $z$ cuando la parte real $\sigma$ es nula: $s = 0 + j\omega$. Todos los puntos que cumplen $\sigma = 0$ toman valores en el plano $z$ determinados por:

$$z = e^{T_s 0} e^{j T_s \omega} = e^{j T_s \omega}. \tag{152}$$

Es decir, son números complejos que presentan módulo unitario $|z| = 1$.

Estos números complejos pueden expresarse empleando la siguiente ecuación

$$z = \left(\cos(\omega T_s) + j \sin(\omega T_s)\right). \tag{153}$$

Para observar mejor la transformación vamos a trasladar cuatro puntos: $s = \frac{j\omega_s}{2}$, $s = \frac{j\omega_s}{4}$, $s = 0$, $s = -\frac{j\omega_s}{4}$, $s = -\frac{j\omega_s}{2}$.

# Traslación del eje imaginario

Téngase en cuenta que $\omega_s$ es la pulsación de muestreo:

$$\omega_s = 2\pi\frac{1}{T_s} \tag{154}$$

- Traslación del punto $s = 0 + j\frac{\omega_s}{2}$

$$z = \cos(\frac{\omega_s}{2}T_s) + j\sin(\frac{\omega_s}{2}T_s) = \cos(\pi) + j\sin(\pi) = -1 + j0 \tag{155}$$

- Traslación del punto $s = \frac{j\omega_s}{4}$

$$z = \cos(\frac{\omega_s}{4}T_s) + j\sin(\frac{\omega_s}{4}T_s) = \cos(\frac{\pi}{2}) + j\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + j \tag{156}$$

- Traslación del punto $s = 0 + j0$

$$z = \cos(0\,T_s) + j\sin(0\,T_s) = \cos(0) + j\sin(0) = 1 + j0 \tag{157}$$

# Traslación del eje imaginario

- Traslación del punto $s = 0 - j\frac{\omega_s}{4}$

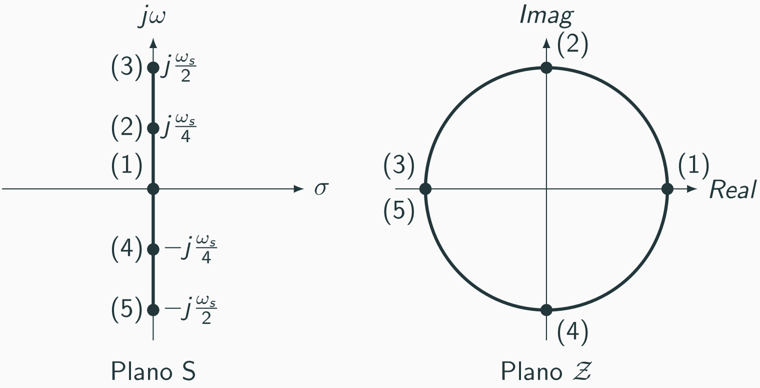
$$z = \cos(\frac{-\omega_s}{4}T_s) + j\sin(\frac{-\omega_s}{4}T_s)$$
$$= \cos(\frac{-\pi}{2}) + j\sin(\frac{-\pi}{2}) = 0 - j \quad (158)$$

- Traslación del punto $s = 0 - j\frac{\omega_s}{2}$

$$z = \cos(\frac{-\omega_s}{2}T_s) + j\sin(\frac{-\omega_s}{2}T_s)$$
$$= \cos(-\pi) + j\sin(-\pi) = -1 - j0 \quad (159)$$

# Traslación del eje imaginario

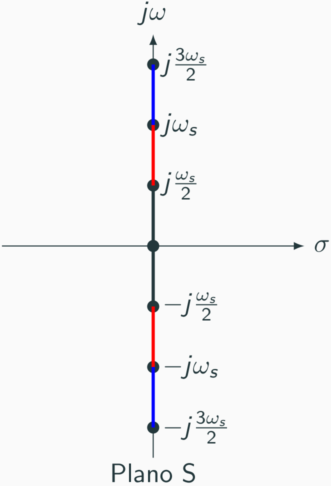
Se obtiene la siguiente transformación:

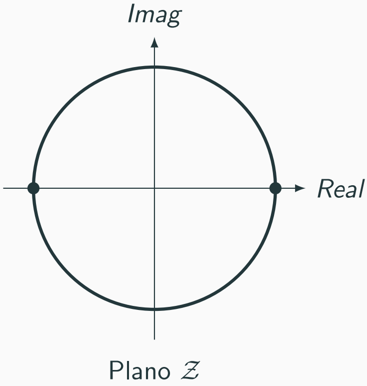



¿Donde se ubican el resto de puntos del eje $j\omega$?

# Traslación del eje imaginario

Cada segmento de eje con longitud $\omega_s$ se transforma en una circunferencia.



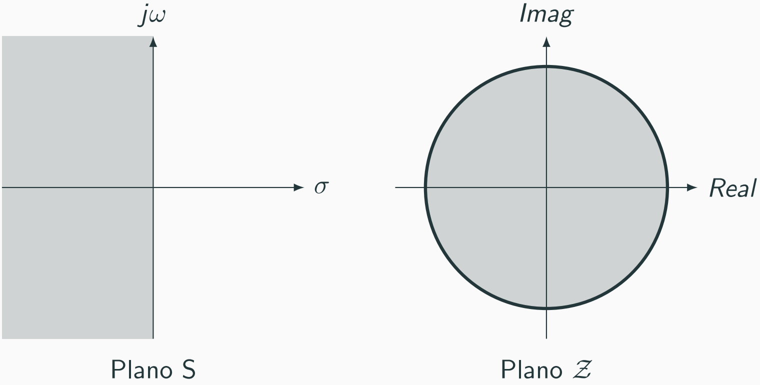



# Traslación de la región estable

¿Donde se encuentra la región de polos estables? Corresponde con puntos del plano S que presentan parte real negativa. Por lo tanto

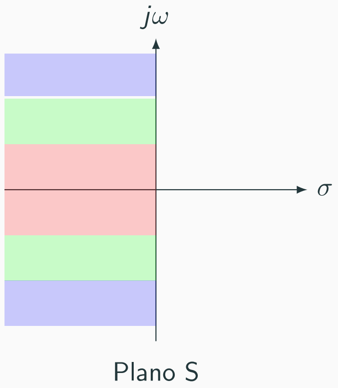
$$z = e^{-\sigma T_s} e^{j T_s \omega} \tag{160}$$

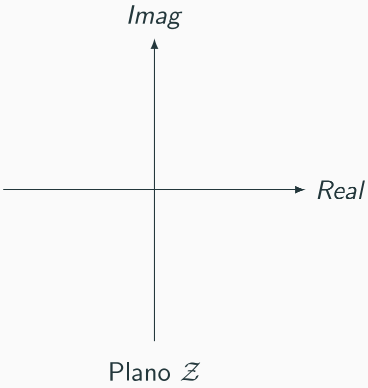
Dado que $e^{-\sigma T_s} < 1$, son puntos con módulo inferior a la unidad.



# Bandas de trabajo

Véase como un polo en el plano $\mathcal{Z}$, corresponde con infinitos polos en el plano S, uno en cada una de las bandas de trabajo.



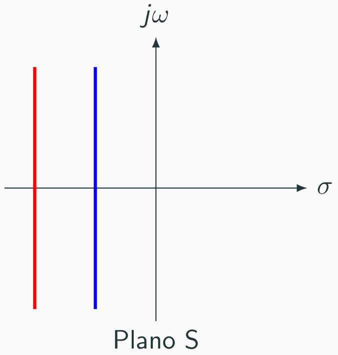

Debemos trabajar **siempre en la banda primaria**

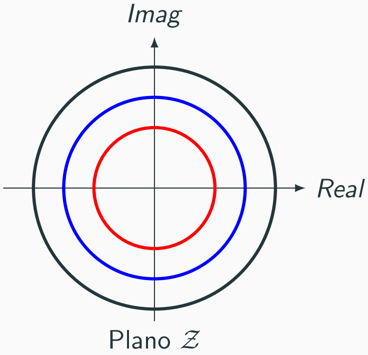
# Traslación de polos con el mismo tiempo de establecimiento

Los polos que presentan el mismo tiempo de establecimiento presentan la misma parte real

$$z = e^{-\sigma_1 T_s} e^{j T_s \omega}. \tag{161}$$

Los polos rápidos presentan módulos pequeños y los lentos módulos más grandes



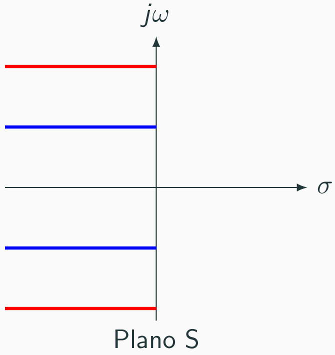



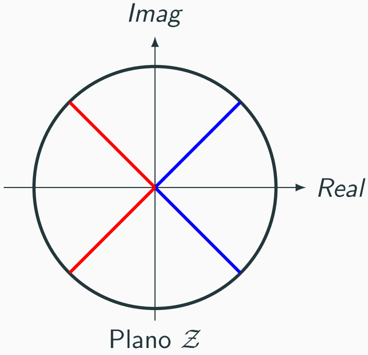
# Traslación de polos con la misma parte imaginaria

Los polos que presentan el mismo la misma parte imaginaria

$$z = e^{-\sigma T_s} e^{jT_s\omega_1}. \tag{162}$$

Presentan el mismo ángulo con respecto de la horizantal. Cuanto mayor es la parte imaginaria mayor es el ángulo,



# Aproximaciones para la digitalización de controladores

# Aproximaciones para la digitalización de controladores

Cuando el controlador se va ha implementar en un sistema de control discreto, tenemos dos alternativas:

- Diseñar el sistema de control en tiempo discreto.

$$P(s) \rightarrow P(z) \rightarrow C(z)$$

- Diseñar el controlador en tiempo continuo y posteriormente discretizarlo.

$$P(s) \rightarrow C(s) \rightarrow C(z)$$

A pesar de que el diseño de controladores en el plano $\mathcal{Z}$ no es mucho más complejo que el diseño en el plano S, la mayor parte de los diseñadores diseña el sistema de control en tiempo continuo.

Debe tenerse en cuenta que esta alternativa presenta problemas dado que da como resultado una aproximación. Para emplearla deberán tenerse las precauciones necesarias.

# Aproximaciones para la digitalización de controladores

Puede seguirse la siguiente norma

- Si el tiempo de muestro es una limitación, se recomienda diseñar el sistema de control en tiempo discreto.
- Si el tiempo de muestreo ni es una limitación, puede diseñarse el sistema en tiempo continuo.

A continuación, se muestran una serie de aproximaciones que permiten transformar controladores en tiempo continuo en controladores en tiempo discreto.

# Aproximación por la derivada. Retraso de muestra

Podemos emplear la aproximación de la derivada por retraso de muestra para aproximar la variable S.

- Dada una señal $x(t)$, la transformada de Laplace de su derivada en tiempo continuo esta determinada por

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) \tag{163}$$

- La derivada puede aproximarse en tiempo discreto por

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(kT_s) - x((k-1)T_s)}{T_s} \tag{164}$$

- La derivada de la señal en el dominio $\mathcal{Z}$ puede expresarse como

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \approx \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{T_s} = \frac{z-1}{zT_s}X(z) \tag{165}$$

Podemos igualar la aproximación de la derivada a la variable compleja para obtener la aproximación.

# Aproximación por la derivada. Retraso de muestra

De este modo se obtiene

$$s = \frac{z-1}{zT_s} \rightarrow z = \frac{1}{T_s s + 1} \tag{166}$$

Conocida como aproximación de Euler por retraso de muestra (*Euler backward*).

Para analizar la precisión de la aproximación estudiamos como se transforma el eje $j\omega$. Para ello substituimos $s = j\omega$, obteniendo

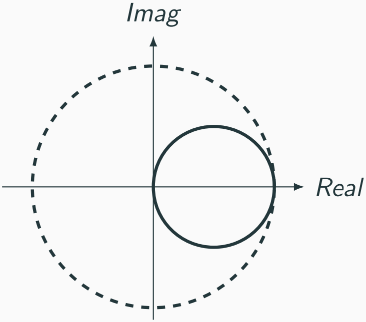
$$z = \frac{1}{T_s j\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{T_s^2\omega^2}} \angle - \arctan \omega T_s \tag{167}$$

Damos valores a $\omega$ para obtener los puntos del eje imaginario

- $\omega = 0 \rightarrow z = 1 + j0 = 1\angle 0$
- $\omega = \infty \rightarrow z = \infty\angle - 90$

# Aproximación por la derivada. Retraso de muestra

Esta aproximación transforma en el eje $j\omega$ en una circunferencia de diametro 1 centrada en el punto 0.5.




Plano $\mathcal{Z}$

# Aproximación por la derivada. Adelanto de muestra

Podemos emplear la aproximación de la derivada por adelanto de muestra para aproximar la variable S.

- Dada una señal $x(t)$, la transformada de Laplace de su derivada en tiempo continuo esta determinada por

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) \tag{168}$$

- La derivada puede aproximarse en tiempo discreto por

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x((k+1)T_s) - x(kT_s)}{T_s} \tag{169}$$

- La derivada de la señal en el dominio $\mathcal{Z}$ puede expresarse como

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \approx \frac{zX(z) - X(z)}{T_s} = \frac{z-1}{T_s}X(z) \tag{170}$$

Podemos igualar la aproximación de la derivada a la variable compleja para obtener la aproximación.

# Aproximación por la derivada. Adelanto de muestra

De este modo se obtiene

$$s = \frac{z-1}{T_s} \rightarrow z = \left(\frac{s}{T_s} + 1\right) \tag{171}$$

Conocida como aproximación de Euler por adelanto de muestra (*Euler forward*).

Para analizar la precisión de la aproximación estudiamos como se transforma el eje $j\omega$. Para ello substituimos $s = j\omega$, obteniendo

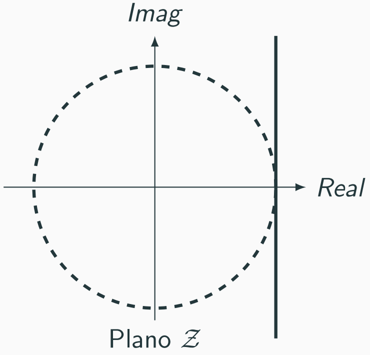
$$z = \frac{1}{T_s}(j\omega + 1) = \sqrt{\frac{\omega^2}{T_s^2} + 1}\angle - \arctan\omega \tag{172}$$

Damos valores a $\omega$ para obtener los puntos del eje imaginario

- $\omega = 0 \rightarrow z = 1 + j0 = 1\angle 0$
- $\omega = \infty \rightarrow z = 1 + j\infty = 0\angle - 90$

# Aproximación por la derivada. Adelanto de muestra

Esta aproximación transforma el eje $j\omega$ en un línea recta desplazada al punto $-1$.



# Aproximación por la integral. Bilineal o Tustin

Podemos emplear la aproximación de la integral para aproximar la variable S.

- Dada una señal $x(t)$, la transformada de Laplace de su integral en tiempo continuo esta determinada por

$$\mathcal{L}\left\{\int x(t)dt\right\} = \frac{1}{s}X(s) \tag{173}$$

- La integral puede aproximarse en tiempo discreto por

$$i(t) = \int x(t)dt \approx i((k-1)T_s) + \frac{x(kT_s) + x((k-1)T_s)}{2}T_s \tag{174}$$

- La integral de la señal en el dominio $\mathcal{Z}$ puede expresarse como

$$\mathcal{Z}\left\{i(t)\right\} = i(z) = i(z)z^{-1} + \frac{X(z) + z^{-1}X(z)}{2}T_s \tag{175}$$

$$i(z)(1-z^{-1}) = \frac{1-z^{-1}}{2}T_sX(z) \rightarrow i(z) = \frac{1+z^{-1}}{2(1-z^{-1})}T_sX(z) \tag{176}$$

# Aproximación por la integral. Bilineal o Tustin

Podemos igualar la aproximación de la integral a la inversa de la variable compleja para obtener la aproximación. De este modo se obtiene

$$s^{-1} = \frac{T_s}{2}\frac{z+1}{z-1} \rightarrow s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \rightarrow z = \frac{-\frac{T_s}{2}s+1}{\frac{T_s}{2}s+1} \tag{177}$$

Conocida como aproximación bilineal, trapezoidal o de Tustin.

Para analizar la precisión de la aproximación estudiamos como se transforma el eje $j\omega$. Para ello substituimos $s = j\omega$, obteniendo

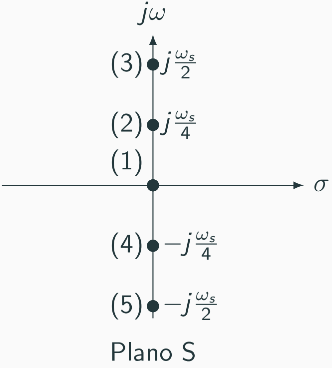
$$z = \frac{-\frac{T_s}{2}j\omega+1}{\frac{T_s}{2}j\omega+1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{T_s}{2}\omega\right)^2+1}}{\sqrt{\left(\frac{T_s}{2}\omega\right)^2+1}}\angle -\arctan\frac{T_s}{2}\omega - \arctan\frac{T_s}{2}\omega \tag{178}$$

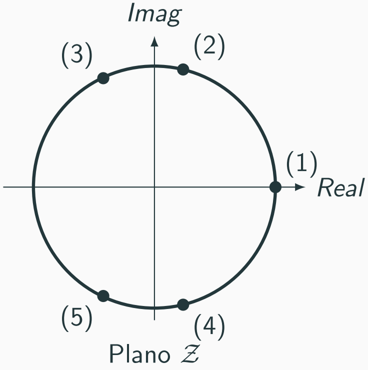
Multiplicando por el conjugado se obtiene

$$z = \frac{\left(-\frac{T_s}{2}j\omega+1\right)\left(-\frac{T_s}{2}j\omega+1\right)}{\frac{T_s^2}{4}\omega^2+1} = \frac{\left(1-\frac{T_s^2\omega^2}{4}\right)-jT_s\omega}{\frac{T_s^2}{4}\omega^2+1} \tag{179}$$

# Aproximación por la integral. Bilineal o Tustin

El eje $j\omega$ se transforma en una única circunferencia. Véase como en este caso los infinitos puntos del eje se sitúan en una única circunferencia



# Proceso para digitalización de procesos continuos

**Digitalización de controladores**

1. Diseño del controlador en el dominio del tiempo.
2. Selección del tipo de aproximación a emplear.
3. Selección del tiempo de muestreo. Debe de seleccionarse un tiempo de muestreo que garantice que se toman cinco muestras por cada constante de tiempo. Deben tenerse en cuenta las constantes de tiempo del controlador y el ancho de banda del sistema en lazo cerrado.
4. Cálculo de controlador digital.
5. Cálculo de la ecuación en diferencias.