Ingeniería de control

El controlador PID industrial

Javier Rico Azagra

Curso 2020-2021

Universidad de La Rioja

Formatos del controlador PID

El controlador PID

Tradicionalmente el controlador PID (Proporcional Integral Derivativo) responde a la ecuación

$$u(t) = k\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + Td\frac{d}{dt}e(t)\right) \qquad (1)$$

donde:

- $e(t)$ Error
- $u(t)$ Accion de control
- k Ganaciacia
- T_i Tiempo integral
- T_d Tiempo derivativo

El controlador PID

En el dominio de Laplace, el controlador

$$u(t) = k\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int e(t)dt + Td\frac{d}{dt}e(t)\right) \tag{2}$$

puede expresarse según:

$$U(s) = k\left(E(s) + \frac{1}{T_i s}E(s) + TdsE(s)\right), \tag{3}$$

siendo su función de transferencia

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k\left(1 + \frac{1}{T_i s} + Tds\right) \tag{4}$$

El controlador PID

Al controlador PID

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k\left(1 + \frac{1}{T_i s} + Tds\right) \tag{5}$$

se le conoce como PID ideal, no interactivo ó ISA. Recibe este nombre por los siguientes motivos:

- Los tres parámetros son independientes.
- Permite ceros complejo-conjugados.

Véase como el PID puede expresarse según

$$U(s) = k\frac{\left(T_i T_d s^2 + T_i s + 1\right)}{T_i s}, \tag{6}$$

El controlador PID paralelo

El PID en formato paralelo responde a

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \right), \tag{7}$$

y puede reescribirse según

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{\left(k_d s^2 + k_p s + k_i \right)}{s}, \tag{8}$$

Presenta las siguientes características:

- Las parámetros son independientes.
- Admite ceros complejo conjugados.
- Es el más genérico y simplifica los cálculos.
- Su principal desventaja es que los parámetros son adimensionales.

El controlador PID serie o interactivo

Puede obtenerse un equivalente entre los dos formatos:

- Paso de paralelo a ideal

$$k = k_p \tag{9}$$

$$T_i = \frac{k}{k_i} \tag{10}$$

$$T_d = \frac{k_d}{Tk} \tag{11}$$

- Paso de ideal a paralelo

$$k_p = k \tag{12}$$

$$k_i = \frac{k}{T_i} \tag{13}$$

$$k_d = kT_d \tag{14}$$

El controlador PID serie o interactivo

El PID interactivo o serie, responde a una función de transferencia

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k' \left(1 + \frac{1}{T_i' s}\right)(1 + T_d' s). \tag{15}$$

Presenta las siguientes características:

- La parte derivada influye en la parte integral.
- Es más común en los reguladores comerciales analógicos (en desuso)
- Debe su función de transferencia a que es implementado mediante una estructura en serie.
- No admite ceros complejo-conjugados

El controlador PID serie o interactivo

Puede obtenerse un equivalente entre los dos formatos:

- Paso de interactivo a no interactivo

$$k = k' \frac{T_i' + T_d'}{T_i'} \tag{16}$$

$$T_i = T_i' + T_d' \tag{17}$$

$$T_d = \frac{T_i' T_d'}{T_i' + T_d'} \tag{18}$$

- Paso de no interactivo a interactivo

$$k' = \frac{k}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i}\right);\ T_i > 4T_d \tag{19}$$

$$T_i' = \frac{T_i}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i}\right)\ T_i > 4T_d \tag{20}$$

$$T_d' = \frac{T_d}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i}\right)\ T_i > 4T_d \tag{21}$$

Modificaciones del algoritmo PID

Limitación de la acción derivada

Véase como un controlador PID ideal, con función de transferencia

$$PID(s) = k\left(1 + \frac{1}{T_i s} + Tds\right) = k\frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}, \qquad (22)$$

presenta dos ceros y un polo. Por lo tanto, este controlador responde a un sistema que no puede ser implementado en la vida real.

Además, aunque pudiese ser implementado, este tipo de controladores presentan una gran amplificación de ruidos, debido a la magnitud del controlador en alta frecuencia.

Téngase en cuenta que la magnitud de un derivador crece indefinidamente con la frecuencia.

Limitación de la acción derivada

Para solucionar estos problemas se limita la acción derivada, introduciendo un polo de alta frecuencia

$$PID(s) = k\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{Tds}{\frac{Td}{N}s + 1}\right), \tag{23}$$

donde el parámetro N determina la posición del polo. Normalmente se suele escoger $N = 10$.

Debe tenerse en cuenta que N, además de desplazar el polo de alta frecuencia, distorsiona la posición de los ceros del controlador

$$PID(s) = k\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{Tds}{\frac{Td}{N}s + 1}\right) = \\ k\left(\frac{T_i s(\frac{Td}{N}s + 1) + \frac{Td}{N}s + 1 + T_i Tds^2}{T_i s(\frac{Td}{N}s + 1)}\right), \tag{24}$$

Limitación de la acción derivada

El controlador resultante al aplicar el filtro de la acción derivada es:

$$PID(s) = k\left(\frac{T_i T_d s^2(\frac{1}{N}+1) + s(\frac{Td}{N}+T_i)+1}{T_i s(\frac{Td}{N}s+1)}\right), \tag{25}$$

donde los ceros de controlador se parecen más a los ideales cunado N crece.

Otra alternativa para solucionar este problema es filtrar la señal antes del controlador, lo que se traduce en un controlador PID con polos adicionales.

$$PID(s) = k\left(1+\frac{1}{T_i s}+Tds\right)\frac{1}{den(s)}, \tag{26}$$

Limitación de la acción derivada

El controlador resultante al aplicar el filtro de la acción derivada es:

$$PID(s) = k\left(\frac{T_i T_d s^2(\frac{1}{N}+1)+s(\frac{Td}{N}+T_i)+1}{T_i s(\frac{Td}{N}s+1)}\right), \tag{27}$$

donde los ceros de controlador se parecen más a los ideales cunado N crece.

Otra alternativa para solucionar este problema es filtrar la señal antes del controlador, lo que se traduce en un controlador PID con polos adicionales.

$$PID(s) = k\left(1+\frac{1}{T_i s}+Tds\right)\frac{1}{den(s)}, \tag{28}$$

El filtro empleado suele ser de primer orden

$$PID(s) = k\left(1 + \frac{1}{T_i s} + Tds\right)\frac{1}{sT_f + 1}, \tag{29}$$

o de segundo orden

$$PID(s) = k\left(1 + \frac{1}{T_i s} + Tds\right)\frac{1}{(sT_f)^2/2 + sT_f + 1}. \tag{30}$$

Normalmente suele emplearse $\delta = 1/\sqrt{(}2)$. Cuando se emplea un controlador PI, suele emplearse $T_f = T_i/N$ y cuando se emplea un controlador PID, el tiempo del filtro se escogen según: $T_f = T_d/N$, donde N suele seleccionarse en el rango $N \in (2;\ 20)$.

Pesos en la consigna. Ceros del controlador

Es conocido que en un sistema de control con realimentación unitaria, con controlador

$$C(s) = \frac{num_c(s)}{den_c(s)} \tag{31}$$

y planta

$$P(s) = \frac{num_p(s)}{den_p(s)}, \tag{32}$$

la función de transferencia de lazo cerrado, que relaciona la referencia con la salida, esta determinada por:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} &= \frac{\frac{num_c(s)num_p(s)}{den_c(s)den_p(s)}}{1 + \frac{num_c(s)num_p(s)}{den_c(s)den_p(s)}} \\ &= \frac{num_c(s)num_p(s)}{num_c(s)num_p(s) + den_c(s)den_p(s)} \end{aligned} \tag{33}$$

Pesos en la consigna. Ceros del controlador

- Los ceros del controlador aparecen en la función de transferencia de lazo cerrado.
- En el diseño del controlador, solo se tiene en cuenta la ec. característica de lazo cerrado.
- Los ceros distorsionan el comportamiento de lazo cerrado, incrementando el sobreimpulso de las respuestas.
- Este efecto es más acusado en la acción de control.

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{\frac{num_c(s)}{den_c(s)}}{1 + \frac{num_c(s)num_p(s)}{den_c(s)den_p(s)}} = \frac{num_c(s)den_p(s)}{num_c(s)num_p(s) + den_c(s)den_p(s)} \quad (34)$$

Pesos en la consigna. Ceros del controlador

Véase como la función de transferencia

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{num_c(s)den_p(s)}{num_c(s)num_p(s) + den_c(s)den_p(s)} \tag{35}$$

presenta la siguiente estructura de polos-ceros:

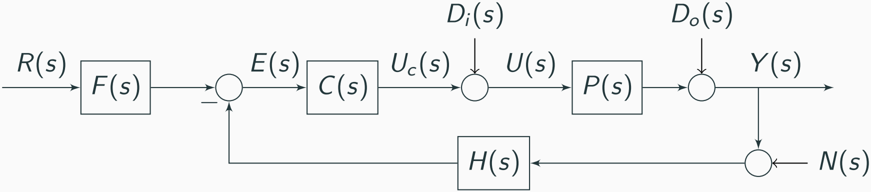
- Número de polos: polos de la planta n_p + polos del controlador n_c.
- Número de ceros: ceros de controlador m_c + polos de la planta n_p.

En le caso de un PID ideal tenemos $n_c = 1$ y $m_c = 2, porlotanto$:

- Número de polos: $n_p + n_c = n_p + 1$.
- Número de ceros: $n_p + m_c = n_p + 2$.

Es decir, la respuesta de lazo cerrado para la acción de control presenta más ceros que polos.

Este problema puede resolverse empleando estructuras de control con dos grados de libertad.



En estos casos, la respuesta de lazo cerrado esta determinada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = F(s)\frac{num_c(s)num_p(s)}{num_c(s)num_p(s) + den_c(s)den_p(s)} \tag{36}$$

y

$$\frac{U(s)}{R(s)} = F(s)\frac{num_c(s)den_p(s)}{num_c(s)num_p(s) + den_c(s)den_p(s)} \tag{37}$$

Pesos en la consigna. Empleo de prefiltros

Si empleamos un prefiltro

$$F(s) = \frac{1}{num_c(s)}, \tag{38}$$

podemos eliminar los ceros introducidos por el controlador, obteniendo

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{num_p(s)}{num_c(s)num_p(s) + den_c(s)den_p(s)} \tag{39}$$

y

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{den_p(s)}{num_c(s)num_p(s) + den_c(s)den_p(s)} \tag{40}$$

Véase como ahora las funciones de transferencia de lazo cerrado presentan más polos que ceros, eliminado el problema descrito anteriormente.

Pesos en la consigna. Empleo de prefiltros

Debe tenerse en cuenta que el prefiltro debe tener ganancia unitaria, es decir

$$\lim_{s \to 0} = F(s) = 1 \tag{41}$$

Para consegur una ganancia unitaria, podemos emplear las siguientes alternativas

$$F(s) = \frac{b_0}{b_n s^n + b_{n_1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \tag{42}$$

$$F(s) = \frac{1}{b_n s^n / a_0 + b_{n_1} s^{n-1} / b_0 + \cdots + b_1 s / b_0 + 1} \tag{43}$$

donde

$$b_n s^n + b_{n_1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \tag{44}$$

corresponde con el numerador del controlador $C(s)$.

En el caso de un PID ideal, el prefiltro toma la forma

$$F(s) = \frac{1}{T_i T_d s^2 + T_s + 1}. \tag{45}$$

En el caso de un PID con limitación de la acción derivada, el prefiltro toma la forma

$$F(s) = \frac{1}{T_i T_d s^2(\frac{1}{N} + 1) + s(\frac{Td}{N} + T_i) + 1}. \tag{46}$$

Un cambio en uno de los parámetros, produce un cambio en el prefiltro, dificultando su ajuste.

Pesos en la consigna

Los pesos en la consigna permiten implementar un prefiltro de forma alternativa. Considérese un controlador PID que responde a la siguiente ecuación:

$$u(t) = k\left(e_p(t) + \frac{1}{T_i}\int e_i(t)dt + T_d\frac{de_d(t)}{dt}\right)$$

donde los errores $e_p(t)$, $e_p(t)$ y $e_p(t)$, están determinados por

$$e_p(t) = r(t)b - y(t),$$

$$e_i(t) = r(t) - y(t)$$

y

$$e_d(t) = r(t)c - y(t).$$

Donde $b \in (0,\ 1)$ y $c \in (0,\ 1)$.

Pesos en la consigna

Los pesos en la consigna permiten implementar un prefiltro de forma alternativa. Considérese un controlador PID que responde a la siguiente ecuación:

$$u(t) = k\left(e_p(t) + \frac{1}{T_i}\int e_i(t)dt + T_d\frac{de_d(t)}{dt}\right)$$

donde los errores $e_p(t)$, $e_p(t)$ y $e_p(t)$, están determinados por

$$e_p(t) = r(t)b - y(t),$$

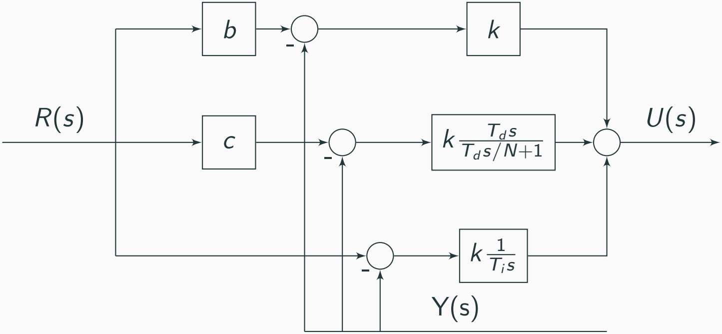
$$e_i(t) = r(t) - y(t)$$

y

$$e_d(t) = r(t)c - y(t)$$

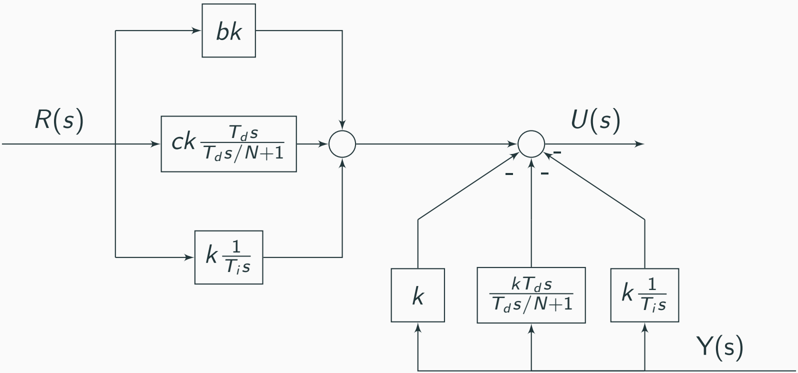
Pesos en la consigna

El controlador anterior responde a la siguiente estructura:



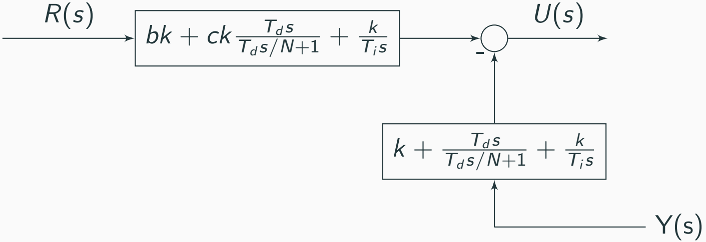
Pesos en la consigna

Retrasando los bloques situados a la derecha de los restadores se obtiene:



Pesos en la consigna

A continuación, se agrupan los bloques en paralelo, obteniendo:



El bloque conectado a la señal de referencia toma la forma:

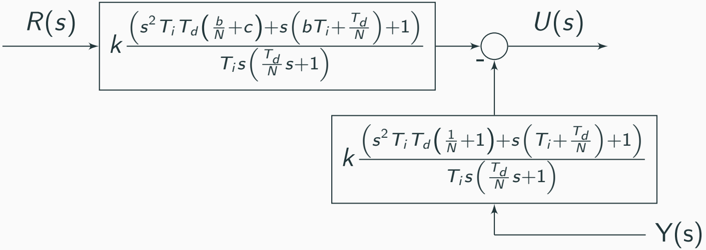
$$k\left(b + \frac{1}{T_i s} + c\frac{T_d s}{\frac{T_d}{N}s+1}\right) = k\frac{\left(s^2 T_i T_d\left(\frac{b}{N}+c\right) + s\left(bT_i + \frac{T_d}{N}\right) + 1\right)}{T_i s\left(\frac{T_d}{N}s+1\right)}$$

Pesos en la consigna

El bloque conectado a la variable gobernada puede expresarse según:

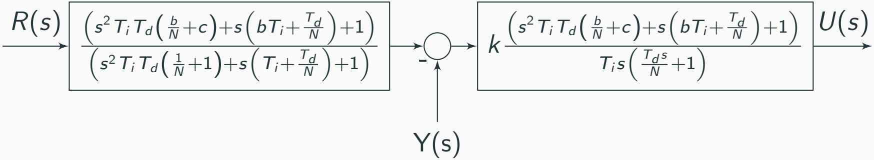
$$k\left(1+\frac{1}{T_i s}+1\frac{T_d s}{\frac{T_d}{N}s+1}\right)=k\frac{\left(s^2 T_i T_d\left(\frac{1}{N}+1\right)+s\left(T_i+\frac{T_d}{N}\right)+1\right)}{T_i s\left(\frac{T_d}{N}s+1\right)}$$

El diagrama de bloques puede expresarse como:



Pesos en la consigna

Adelantando el bloque situado en la realimentación a la posición habitual del controlador se obtiene:



Puede comprobarse como el controlador implementado sigue siendo un PID. Es decir, los pesos no modifican el controlador. Únicamente implementan un prefiltro.

Pesos en la consigna

El prefiltro implementado presenta la siguiente función de transferencia

$$F(s) = \frac{\left(s^2 T_i T_d \left(\frac{b}{N} + c\right) + s\left(bT_i + \frac{T_d}{N}\right) + 1\right)}{\left(s^2 T_i T_d \left(\frac{1}{N} + 1\right) + s\left(T_i + \frac{T_d}{N}\right) + 1\right)}$$

Este tipo de estructuras simplifican el proceso de ajuste del prefilto, dado que se encuentra ligada a los parámetros del controlador.

Véase como el prefiltro cancela los ceros del controlador e introduce dos ceros que dependen de los parámetros b y c.

- I+PD. $b = c = 0$. Cancela los dos ceros del controlador.
- IP+D. $b = 1$, $c = 0$. Cancela los dos ceros del controlador e introduce el cero $s(bT_i + T_d/N) + 1$
- ID+P. $b = 0$, $c = 1$. No se recomienda su empleo
- Pueden emplearse otras alternativas. Ajuste manual.

WindUp de la Acción integral

- El *windup* de la acción de integral es un fenómeno no lineal que ocurre debido a la saturación de la acción de control.
- Este fenómeno puede colapsar el sistema de control y degradar por completo su comportamiento.
- Todos los sistemas de control que contengan integradores deben incorporar mecanismos *anti-windup*.
- Los mecanismos *anti-windup* buscan desconectar la acción de control integral cuando la acción de control satura.

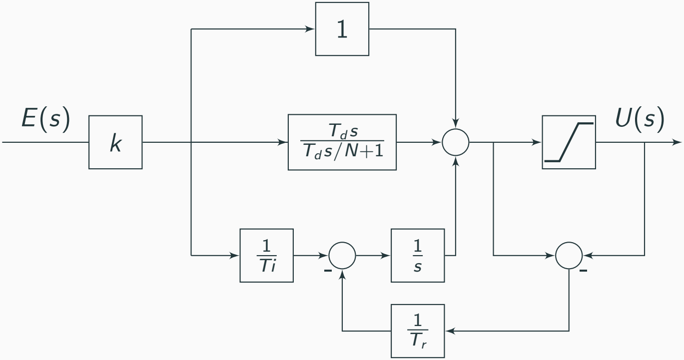
WindUp de la Acción integral

Descripción del problema:

- Cuando la acción de control satura, el lazo de control se rompe y el sistema trabaja en lazo abierto.
- Dado que la acción de control aplicada difiere de la calculada, la tasa de decrecimiento del error es inferior a la predicha por el controlador.
- La acción integra intenta corregir este comportamiento aumentando la acción de control, pero este aumento no produce cambios en la variable gobernada.
- Cuando la variable gobernada se aproxima al punto de consigna y el error se reduce, la acción de control decrece desde un valor elevado, produciendo que se siga aportando acción de control de forma innecesaria.
- Este comportamiento produce un pico en la respuesta conocido como *windup*.

WindUp de la Acción integral

Para eliminar los problemas producidos por la saturación de la acción de control puede emplearse la siguiente estructura



WindUp de la Acción integral

- El tiempo de reset T_r actúa como constante de tiempo para realizar el reset del integrador.
- Cuanto menor sea T_r, más rápido se desconectara el integrador.
- Valores muy pequeños producen desconexión del integrador para pequeñas desviaciones de la señal mediad, que son amplificadas por la acción derivada.

Recomendaciones para la selección de T_r:

- Cuando el controlador sea un PI $\rightarrow T_r = T_i$
- Cuando el controlador sea un PID $\rightarrow T_d < T_r < T_i$
- Se recomienda $T_r = \sqrt{TiTd}$