

Ingeniería de control

Diseño de controladores

Javier Rico Azagra

Curso 2020-2021

Universidad de La Rioja

Diseño de controladores en el dominio del tiempo

Células de adelanto y controladores PD

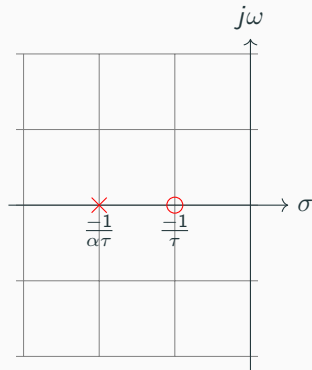
Son controladores de adelanto de fase, hacen al sistema más rápido, para ello introducen un cero y un polo (*cero más cerca del eje $j\omega$*).

Función de transferencia normalizada

$$C(s) = k \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}; \alpha \in (0, 1)$$

Función de transferencia alternativa

$$C(s) = k_{\alpha} \alpha \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}; \alpha \in (0, 1)$$



Células de adelanto y controladores PD

El controlador PD es un caso particular de célula de adelanto, donde el polo está situado en $-\infty$. Es decir $\alpha = 0$.

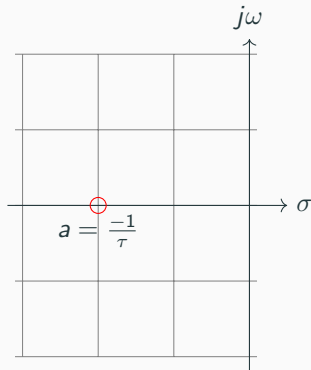
Función de transferencia ideal

$$PD(s) = k(1 + T_d s)$$

$$PD(s) = k_p + k_d s = k_p \left(\frac{k_d}{K_p} s + 1 \right)$$

Podemos emplear

$$PD(s) = k_1(\tau s + 1) = k_2(s + a)$$



Células de adelanto... Diseño en lugar de las raíces

El primer paso es obtener las especificaciones de lazo cerrado. Es decir, los polos deseados en lazo cerrado (*comportamiento deseada*). Ajustamos el comportamiento a un sistema de primer o segundo orden.

Sistema de primer orden

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

- Características
- t_s , $RM=0$

Sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Características:
- t_s , t_p , RM , t_r , etc.

Células de adelanto... Diseño en lugar de las raíces

Estudiamos si el lugar de las raíces pasa por los polos deseados (P_d). Es decir, si la ecuación característica

$$1 + kP(s) = 0,$$

tiene como raíces los polos deseados para un valor de k .

Para ello aplicamos la condición de argumento:

$$\angle P(s)|_{s=P_d} = (2r + 1)180 \rightarrow \text{¿Cumple la condición?}$$

- Si. El lugar de las raíces pasa por P_d , puede emplearse un controlador proporcional para obtener los polos deseados.
- No. El lugar de las raíces no pasa por P_d . Debemos introducir un controlador que garantice que se cumpla la condición de argumento.

Células de adelanto... Diseño en lugar de las raíces

Calculamos la deficiencia angular DA (ángulo necesario para cumplir la c. argumento) que debe aportar $C(s)$. La nueva ecuación característica esta determinada por

$$1 + CP(s) = 0,$$

por lo que la condición de argumento puede expresarse como

$$\angle CP(s)|_{s=P_d} = \angle P(s)|_{s=P_d} + \angle C(s)|_{s=P_d} = (2r + 1)180.$$

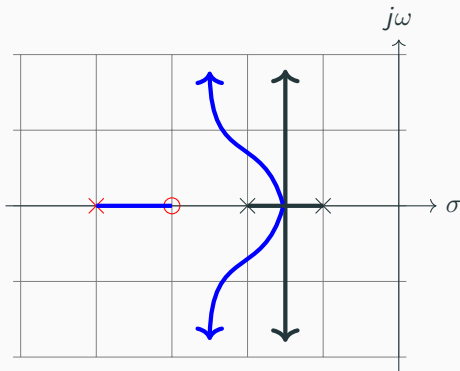
Por lo tanto, la deficiencia angular puede obtenerse como

$$\angle P(s)|_{s=P_d} + DA = (2r + 1)180.$$

- $DA > 0 \rightarrow$ Célula de adelanto de fase.
- $DA < 0 \rightarrow$ Célula de retraso de fase. No tiene sentido.

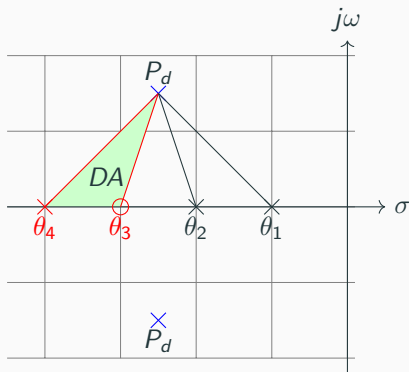
Células de adelanto... Diseño en lugar de las raíces

El controlador de adelanto de fase modifica el lugar de las raíces, haciendo que este pase por los polos deseados. Véase como ejemplo la siguiente figura, en ella se observa como una vez introducido el controlador, las ramas (coloreadas en azul), se desplazan a la izquierda del semiplano derecho, dando lugar a polos más rápidos.



Células de adelanto... Diseño en lugar de las raíces

Matemáticamente, el problema se reduce a encontrar una pareja polo-cero que forme un triángulo cuyo vértice superior presente un ángulo DA .



$$\angle P(s)|_{s=P_d} = -\theta_1 - \theta_2$$

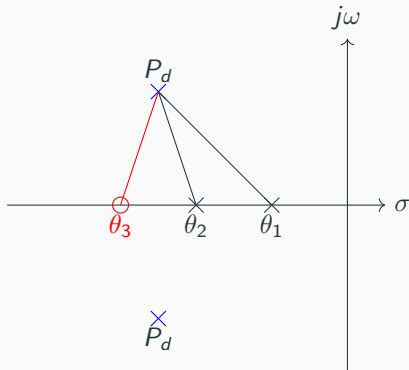
$$\angle C(s)|_{s=P_d} = \theta_3 - \theta_4 = DA$$

Nota

Existen múltiples formas de situar el polo y el cero para aportar DA

Células de adelanto... Diseño en lugar de las raíces

Cuando el controlador es un PD, toda la deficiencia angular es aportada por el cero. Solo existe una solución al problema.



$$\angle P(s)|_{s=P_d} = -\theta_1 - \theta_2$$

$$\angle C(s)|_{s=P_d} = \theta_3 = DA$$

Nota

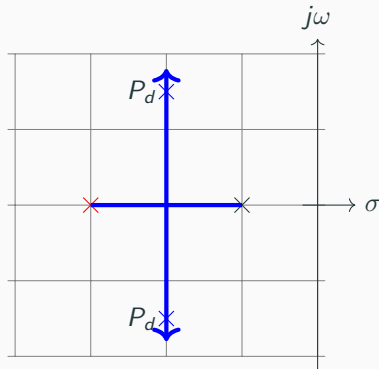
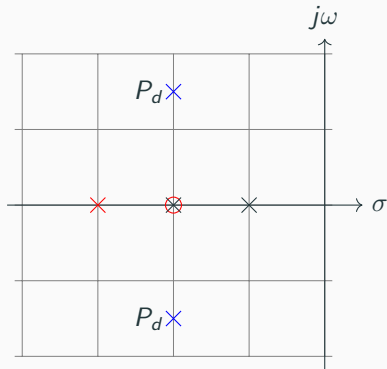
El diseño se realiza aplicando reglas trigonométricas

Cuando trabajamos con células de adelanto, existen varias formas de situar el polo y el cero del controlador. En nuestro caso, estudiaremos tres opciones:

1. Cancelación de polos.
2. Cero en la vertical de P_d .
3. Maximización de α .

Células de adelanto... Cancelación de polos

Cancelamos uno de los polos de la planta con el cero del controlador. De este modo, la posición del polo queda determinada de forma automática.



Problemas

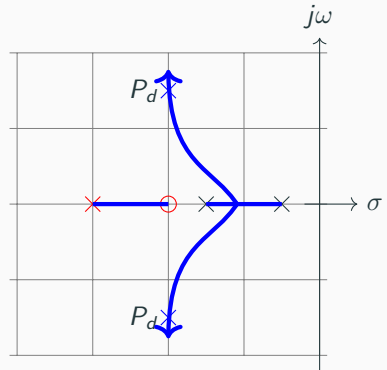
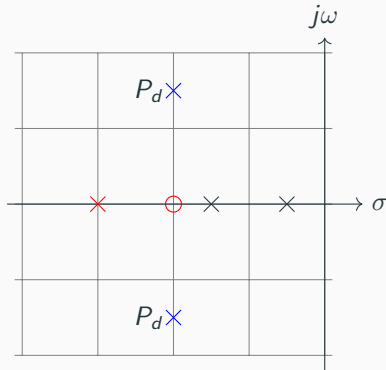
- No pueden cancelarse las soluciones en sistemas reales, dado que existe incertidumbre paramétrica.
- Existe una solución entre el polo y el cero cancelados.

Aplicación

Emplearemos este método cuando el polo de la planta este muy cerca del eje $j\omega$, minimizando su influencia.

Células de adelanto... Cero en la vertical de P_d

Situamos el cero del controlador en el eje real bajo la vertical de los polos deseados. La posición del polo se infiere por trigonometría.



Problemas

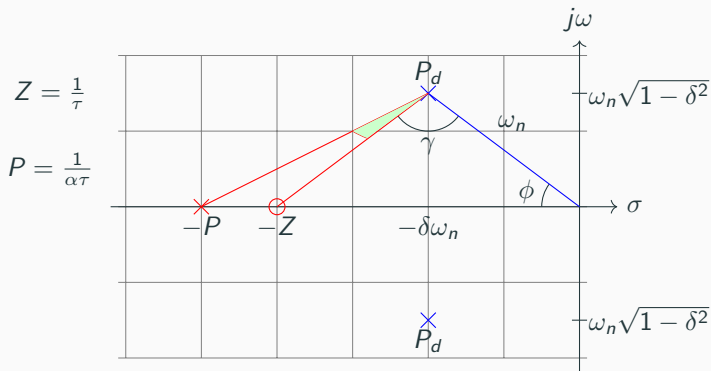
- Tener un cero y polo próximos a los polos de lazo cerrado puede interferir en el comportamiento del sistema en lazo cerrado.
- La deficiencia angular máxima (si se desea emplear una única red de avance de fase) es de 90° .

Aplicación

Emplearemos este método cuando la deficiencia angular sea pequeña.

Células de adelanto... Maximización de α

Situamos el polo y el cero de forma que maximicen el valor de α . Para ello, se parte del siguiente esquema:



Células de adelanto... Maximización de α

Aplicamos el teorema del seno para obtener la relación entre α y γ .

- El triángulo formado por el cero da lugar a

$$\frac{Z}{\sin(\gamma)} = \frac{\omega_n}{\sin(180 - \gamma - \phi)}$$

- El triángulo formado por el polo da lugar a

$$\frac{P}{\sin(\gamma + DA)} = \frac{\omega_n}{\sin(180 - \gamma - \phi - DA)}$$

Dividiendo las dos expresiones se obtiene

$$\frac{Z}{P} = \alpha = \frac{\sin(\gamma) \sin(180 - \gamma - \phi - DA)}{\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi)}.$$

El único parámetro ajustable es γ . Por lo tanto, derivamos la expresión de α en función de γ para obtener el valor que maximiza α .

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{[(\cos(\gamma) \sin(\beta)) - \sin(\gamma) \cos(\beta)][\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi)]}{(\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi))^2} + \frac{(\sin(\gamma) \sin(\beta))[\cos(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi) - \sin(\gamma + DA) \cos(180 - \gamma - \phi)]}{(\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi))^2}$$

Donde el parámetro β se define como

$$\beta = 180 - \gamma - \phi - DA.$$

Conocida la relación trigonométrica

$$\sin(A \pm B) = \sin(A) \cos(B) \pm \cos(A) \sin(B),$$

puede obtenerse la siguiente expresión simplificada

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\sin(\beta - \gamma)[\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi)]}{(\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi))^2} - \frac{[\sin(\gamma) \sin(\beta)] \sin(\beta - \gamma)}{(\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi))^2}$$

A continuación, puede extraerse $\sin(\beta - \gamma)$ factor común, dando lugar a

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\sin(\beta - \gamma) [\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi) - \sin(\gamma) \sin(\beta)]}{(\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi))^2}.$$

Desarrollamos $\sin(\gamma + DA)$ y $\sin(\beta)$ para evaluar la ecuación final

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\gamma} = & \frac{\sin(\beta - \gamma) [(\sin(\gamma) \cos(DA) + \sin(DA) \cos(\gamma)) \sin(180 - \gamma - \phi)]}{(\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi))^2} \\ & - \frac{\sin(\beta - \gamma) [\sin(\gamma) (\sin(180 - \gamma - \phi) \cos(DA) - \cos(180 - \gamma - \phi) \sin(DA))]}{(\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi))^2} \end{aligned}$$

Células de adelanto... Maximización de α

Simplificando puede obtenerse

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\sin(\beta-\gamma)[\sin(DA) \cos(\gamma) \sin(180-\gamma-\phi) + \sin(\gamma) \sin(DA) \cos(180-\gamma-\phi)]}{(\sin(\gamma+DA) \sin(180-\gamma-\phi))^2}$$

Los términos

$$\sin(180 - \gamma - \phi) \cos(\gamma) + \cos(180 - \gamma - \phi) \sin(\gamma),$$

pueden substituirse por

$$\sin(180 - \gamma - \phi + \gamma) = \sin(180 - \phi),$$

dando lugar a

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\sin(\beta - \gamma) \sin(DA) \sin(180 - \phi)}{(\sin(\gamma + DA) \sin(180 - \gamma - \phi))^2}.$$

Se iguala la derivada a cero para obtener el valor de γ que maximiza α .
Para lograrlo, se buscan las condiciones que anulan

$$\sin(180 - 2\gamma - \phi - DA) \sin(DA) \sin(180 - \phi) = 0.$$

Pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- $\sin(DA)$ Nunca puede ser cero
- $\sin(180 - \phi)$ Nunca puede ser cero
- La única alternativa de anular la función es anular $\sin(180 - 2\gamma - \phi - DA)$

Despejamos el valor de γ que anula la expresión anterior

$$180 - 2\gamma - \phi - DA = 0$$

$$\gamma = \frac{180 - \phi - DA}{2}$$

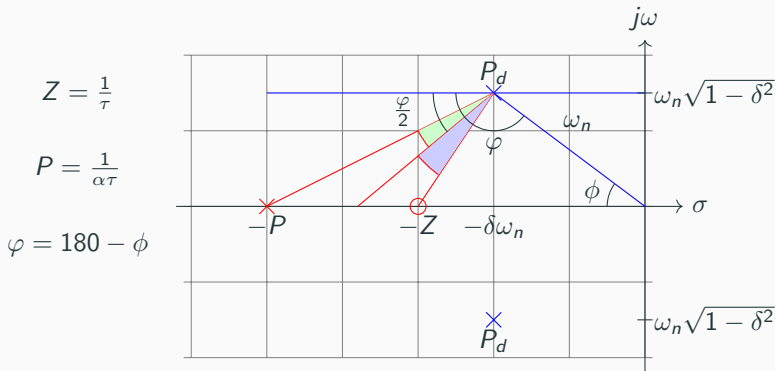
Si desarrollamos la expresión anterior obtenemos:

$$\gamma = \frac{180 - \phi}{2} - \frac{DA}{2}$$

Es decir, para maximizar el valor de α debemos aportar la mitad de la deficiencia angular a cada lado de la bisectriz del ángulo formado por $180 - \phi$.

Células de adelanto... Maximización de α

Esquema gráfico de la ubicación del polo y el cero del controlador:



Pasos para el diseño mediante maximización de α

1. Trazar la línea que une el polo deseado con el origen de coordenadas.
2. Trazar la horizontal que pasa por el polo deseado.
3. Obtener la bisectriz del ángulo formado por las líneas anteriores.
4. Situar el cero y el polo para que aporten $\frac{DA}{2}$ a cada lado de la bisectriz.

Células de adelanto... Ajuste de k

- Situados los polos y ceros por cualquiera de los tres métodos, el último paso es ajustar la ganancia (k) del controlador.
- Para ello, se aplica la condición de módulo al conjunto planta-controlador

$$|CP(s)|_{s=P_D} = \left| \frac{1}{k} \right|$$

Pasos para el diseño en el dominio del tiempo

1. Evaluar la condición de argumento.
2. Calcular la deficiencia angular a aportar por el controlador.
3. Situar el cero (*controlador PD*) ó el polo y el cero (*celula de adelanto*) por uno de los métodos estudiados.
4. Ajustar la ganancia del controlador (*Condición de módulo*).
5. Comprobar el diseño.

Se desea controlar la planta

$$P(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)},$$

empleando una estructura de control en lazo cerrado.

Especificaciones de diseño

1. Tiempo de establecimiento: $t_{s2\%} = 2s$.
2. Rebasamiento máximo porcentual: $RM(\%) = 4.3\%$.
3. Error de posición en régimen permanente: $e_p = 1\%$

Los polos deseados son: $P_d = -2 \pm j2$

Ejemplo

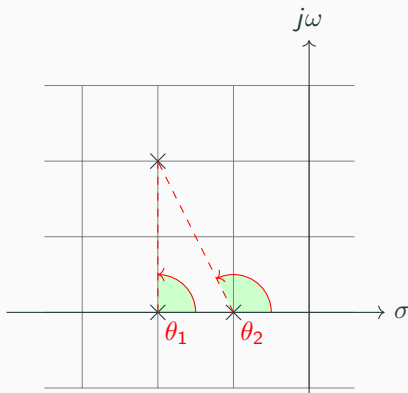
Obtenemos la deficiencia angular para determinar si es necesario emplear una célula de adelanto.

$$DA - \theta_1 - \theta_2 = (2r + 1)180$$

$$DA - 90 - (180 - \arctan(2)) = -180$$

$$DA - 90 - 180 + \arctan(2) = -180$$

$$DA = 90 - \arctan(2) = 26.56$$



Ejemplo. Diseño por cancelación de polos

Diseñamos la célula de adelanto empleando el método de cancelación de polos, que en este caso coincide con el ce cero en la vertical de Pd .

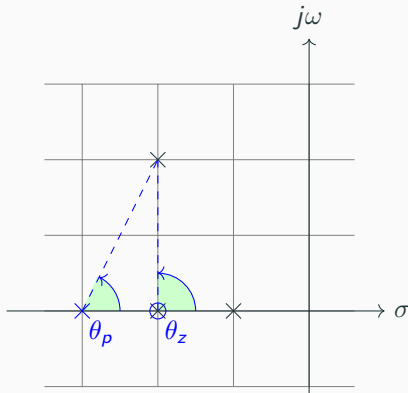
$$DA = \theta_z - \theta_p = 26.56$$

$$\theta_p = 90 - DA = 63.44$$

Obtenemos P

$$\tan(63.44) = \frac{2}{p-2}$$

$$p = \frac{2}{\tan(63.44)} + 1 = 3$$



Ejemplo. Diseño por cancelación de polos

Determinada la posición del polo y del cero, el controlador toma los siguientes valores

$$C(s) = k \frac{(s + z)}{s + p} = k \frac{(s + 2)}{(s + 3)}.$$

Obtenemos la ganancia del controlador (K) aplicando la condición de módulo

$$|CP(s)|_{s=P_d} = \frac{1}{k},$$

que en este caso esta determinada por

$$\left| \frac{10}{(s + 1)(s + 2)} \frac{(s + 2)}{(s + 3)} \right|_{s=-2+j2} = \left| \frac{10}{(s + 1)(s + 3)} \right|_{s=-2+j2} = \frac{1}{k}$$

$$\left| \frac{10}{(-2 + j2 + 1)(-2 + j2 + 3)} \right| = \left| \frac{10}{\sqrt{-1^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 2^2}} \right| = \frac{1}{k} \rightarrow k = 0.5$$

Ejemplo. Diseño por cancelación de polos

El controlador resultante es:

$$C(s) = 0.5 \frac{(s+2)}{(s+3)},$$

y la función de transferencia en lazo cerrado

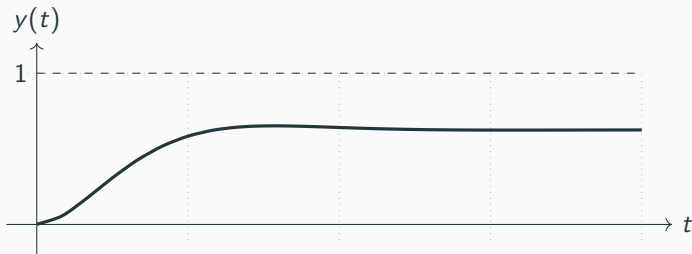
$$\frac{CP(s)}{1 + CP(s)} = \frac{5}{(s+1)(s+3) + 5} = \frac{5}{s^2 + 4s + 8}.$$

Puede comprobarse como el sistema en lazo cerrado presenta los polos deseados. Sin embargo, el error de posición no satisface la condición de diseño.

$$y(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{5}{8} \rightarrow e_p = \frac{3}{8} = 37.5\%$$

Ejemplo. Diseño por cancelación de polos

Respuesta del sistema en lazo cerrado frente a un escalón unitario:



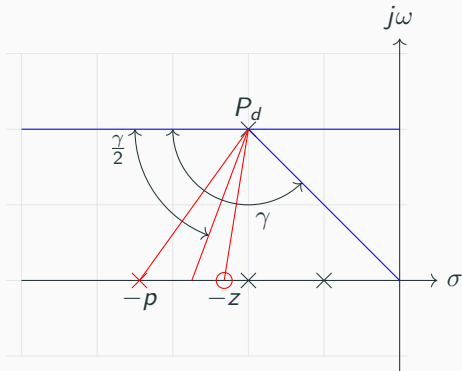
Puede comprobarse como el comportamiento dinámico (forma de la señal) es correcto, pero el error en régimen permanente no cumple con la especificación.

Ejemplo. Diseño por maximización de α

Seguimos los pasos necesarios para determinar la posición del polo y el cero que dan lugar a un ángulo α máximo.

1. Obtenemos el ángulo ϕ : $\phi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$
2. Trazamos una horizontal que pase por los polos deseados.
3. Calculamos el valor de γ : $\gamma = 180^\circ - \phi = 135^\circ$
4. Calculamos la bisectriz de γ : $135^\circ/2 = 65.5^\circ$
5. Aportamos $DA/2$ a cada lado de la bisectriz
 - Ángulo para el polo: $65.5^\circ + 26.56/2 = 78.78^\circ$
 - Ángulo para el cero: $65.5^\circ - 26.56/2 = 52.22^\circ$

Ejemplo. Diseño por maximización de α



Ejemplo. Diseño por maximización de α

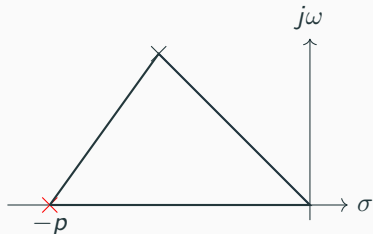
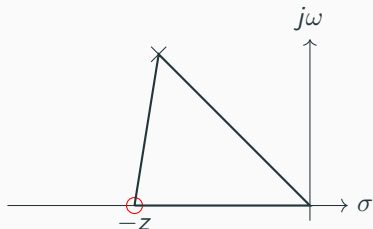
Obtenemos la posición del polo y el cero aplicando el teorema del seno a los triángulos obtenidos en el diagrama anterior.

$$\frac{\omega_n}{\sin(180 - 45 - 52.22)} = \frac{z}{\sin(52.22)}$$

$$z = \frac{\sqrt{8} \sin(52.22)}{\sin(180 - 45 - 52.22)} = 2.32$$

$$\frac{\omega_n}{\sin(180 - 45 - 78.78)} = \frac{p}{\sin(78.78)}$$

$$p = \frac{\sqrt{8} \sin(78.78)}{\sin(180 - 45 - 78.78)} = 3.44$$



Ejemplo. Diseño por maximización de α

Determinada la posición del polo y del cero, el controlador toma los siguientes valores

$$C(s) = k \frac{(s + z)}{(s + p)} = k \frac{(s + 2.32)}{(s + 3.44)}.$$

Obtenemos la ganancia del controlador (K) aplicando la condición de módulo

$$|CP(s)|_{s=P_d} = \frac{1}{k},$$

que en este caso esta determinada por

$$\left| \frac{10}{(s + 1)(s + 2)} \frac{(s + 2.32)}{(s + 3.44)} \right|_{s=-2+j2} = \left| \frac{10(s + 2.32)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} \right|_{s=-2+j2} = \frac{1}{k}$$

$$\left| \frac{10\sqrt{1.32^2 + 2^2}}{\sqrt{-1^2 + 2^2}\sqrt{2^2}\sqrt{1.44^2 + 2^2}} \right| = \frac{1}{k} \rightarrow k = 0.5442$$

Ejemplo. Diseño por maximización de α

El controlador resultante es:

$$C(s) = 0.544 \frac{(s + 2.32)}{(s + 3.44)}.$$

La función de transferencia en lazo cerrado esta determinada por

$$\frac{CP(s)}{1 + CP(s)} = \frac{5}{(s + 1)(s + 2)(s + 3.44) + 5.44(s + 2.32)} = \frac{5.44(s + 2.32)}{(s + 2.442)(s^2 + 4s - 2.44)}$$

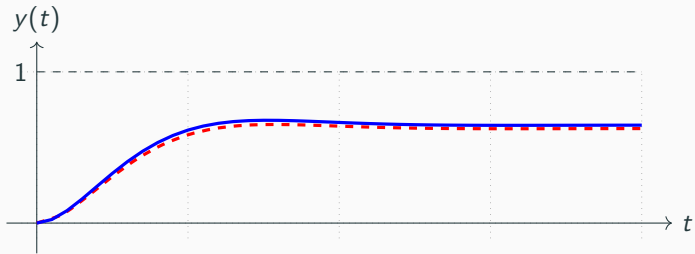
Puede comprobarse como el sistema en lazo cerrado presenta los polos deseados. Pero en este caso, además presenta un polo real en $s = -2.44$ y un cero real en $s = -2.32$.

El error de posición no satisface la condición de diseño

$$y(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{5.44 \cdot 2.32}{2.44 \cdot 8} = 0.647 \rightarrow e_p = 0.352 = 35.2\%$$

Ejemplo. Diseño por cancelación de polos

Respuesta del sistema en lazo cerrado frente a un escalón unitario:



Azul: maximización de α ; Rojo: cancelación de polos.

Puede comprobarse como el comportamiento dinámico (forma de la señal) es correcto, pero el error en régimen permanente no cumple con la especificación.

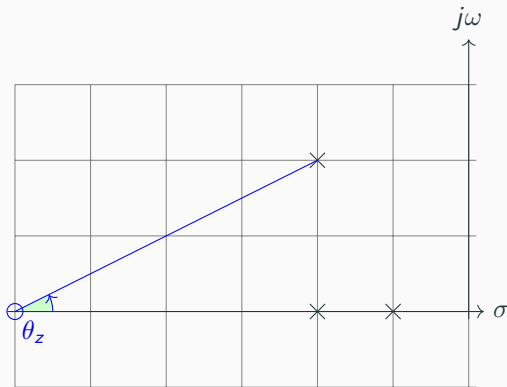
Ejemplo. Diseño con un controlador PD

Obtenemos la posición del cero del controlador.

$$DA = \theta_z = 26.56$$

$$\tan(26.56) = \frac{2}{z - 2}$$

$$z = \frac{2}{\tan(26.56)} + 1 = 6$$



Ejemplo. Diseño con un controlador PD

Determinada la posición del cero, el controlador toma la forma

$$C(s) = k(s + z) = k(s + 6).$$

Obtenemos la ganancia del controlador (K) aplicando la condición de módulo

$$|CP(s)|_{s=P_d} = \frac{1}{k},$$

que en este caso esta determinada por

$$\left| \frac{10}{(s+1)(s+2)}(s+6) \right|_{s=-2+j2} = \left| \frac{10(s+6)}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=-2+j2} = \frac{1}{k}$$

$$\left| \frac{10\sqrt{4^2 + 2^2}}{\sqrt{-1^2 + 2^2}\sqrt{2^2}} \right| = \frac{1}{k} \rightarrow k = 0.1$$

Ejemplo. Diseño con un controlador PD

El controlador resultante es:

$$C(s) = 0.1(s + 6),$$

y la función de transferencia en lazo cerrado

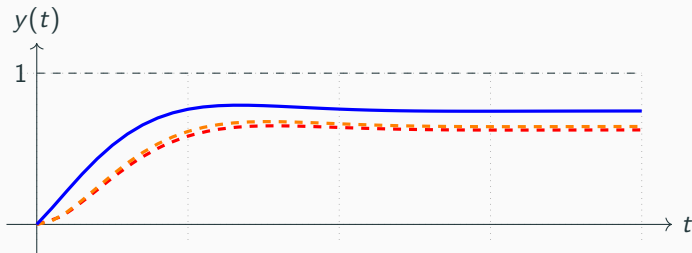
$$\frac{CP(s)}{1 + CP(s)} = \frac{(s + 6)}{(s + 1)(s + 2) + (s + 6)} = \frac{s + 6}{s^2 + 4s + 8}.$$

Puede comprobarse como el sistema en lazo cerrado presenta los polos deseados. Téngase en cuenta que en este caso aparece un cero en $s = -6$. El error de posición no satisface la condición de diseño.

$$y(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{6}{8} \rightarrow e_p = \frac{1}{4} = 25\%$$

Ejemplo. Diseño con un controlador PD

Respuesta del sistema en lazo cerrado frente a un escalón unitario:



Azul: PD; Naranja: maximización de α ; Rojo: cancelación de polos.

Puede comprobarse como el comportamiento dinámico se degrada por la presencia del cero. El error de posición es inferior al del resto de diseños.

Células de retraso y controladores PI

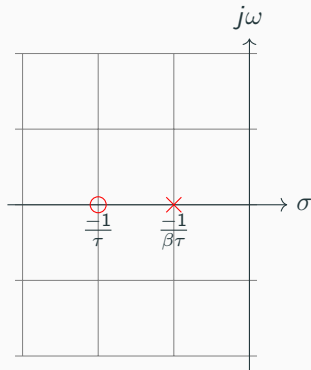
Son controladores de retraso de fase, introducen un cero y un polo (*cero más lejos del eje $j\omega$*) tienen el problema de acercar a los polos de lazo cerrado al eje $j\omega$, pero mejoran el error en régimen permanente.

Función de transferencia normalizada

$$C(s) = k \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}; \beta > 1$$

Función de transferencia alternativa

$$C(s) = k^* \beta \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}; \beta > 1$$



Células de retraso y controladores PI

El controlador PI es un caso particular de célula de retraso con un polo en el origen.

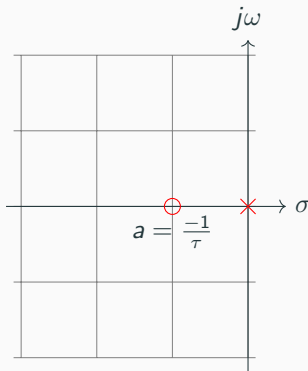
Función de transferencia ideal

$$PI(s) = k \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = k \frac{T_i s + 1}{T_i s}$$

$$PI(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}$$

Podemos emplear

$$PI(s) = k_1 \frac{\tau s + 1}{s} = k_2 \frac{s + a}{s}$$



Este tipo de controlador introduce el polo más cerca del eje $j\omega$ que el cero, perjudicando la estabilidad y la dinámica del sistema. Únicamente nos permitirá mejorar el error en régimen permanente.

¿Como eliminamos el error en régimen permanente?

- Alta ganancia en régimen permanente para eliminar el error.
- Baja ganancia en régimen transitorio para evitar la amplificación de ruidos.

Antes de realizar el diseño del controlador, debemos comprobar que se cumple la condición de argumento. Es decir, el lugar de las raíces pasa por los polos deseados.

$$\angle P(s)|_{s=P_d} = (2r + 1)180 \rightarrow \text{¿Cumple?}$$

- Cumple: Podemos emplear una célula de retraso ó un PI.
- No Cumple: Debemos añadir una célula de adelanto-retraso ó un PID.

Células de retraso ... Diseño en lugar de las raíces

Nuestro objetivo es añadir la célula de retraso para que se reduzca el error en régimen permanente sin distorsionar el comportamiento transitorio (lugar de las raíces).

Estudiamos la ganancia aportada por el controlador.

$$C(s) = k \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1} = k_p \beta \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1} \rightarrow C_e(s) = \beta \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1}$$

- Empleamos K_p para obtener los polos deseados en lazo cerrado.
- Empleamos el resto del controlador $C_e(s)$ para mejorar el error en régimen permanente.

Calculamos k_p mediante la condición de módulo (igual que en lo casos anteriores)

$$|P(s)|_{s=P_d} = \left| \frac{1}{k_p} \right|.$$

Una vez ajustada la ganancia k_p , el sistema en lazo cerrado presentará la dinámica deseada.

$$P_d = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \delta^2}$$

Células de retraso ... Diseño en lugar de las raíces

Antes de ajustar $C_e(s)$, estudiamos el error en régimen permanente:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - R(s) \frac{CP(s)}{1 + CP(s)} = \frac{R(s)}{1 + CP(s)}$$

$$e_{rp}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + CP(s)}$$

Si estudiamos el error para una señal escalón:

$$e_{rp}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1 + CP(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + CP(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} CP(s)}$$

Células de retraso ... Diseño en lugar de las raíces

Si analizamos nuestro controlador $C_e(s)$ obtenemos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} C_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \beta \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1} = \beta$$

Es decir, si hacemos que β crezca, el error en régimen permanente decrecerá.

Comprobamos la ganancia que introduce el controlador en el régimen transitorio (*teorema del valor inicial*):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C_e(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \beta \frac{\tau s + 1}{\beta \tau s + 1} = 1$$

Para tomar un valor de β muy grande sin modificar el lugar de las raíces, tenemos que hacer τ muy pequeño (*si el polo y el cero están próximos no modifican el lugar de las raíces*), de este modo el polo y el cero estarán próximos, cancelando sus efectos.

Ejemplo

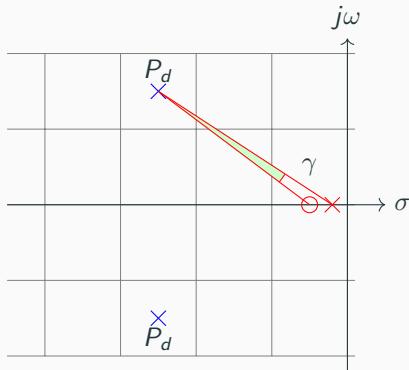
$$\tau = 100 \rightarrow Z = \frac{1}{\tau} = 0.01$$

$$\beta = 100 \rightarrow P = \frac{1}{\beta\tau} = 0.0001$$

El polo y el cero están muy próximos anulando sus efectos en el lugar de las raíces.

Células de retraso... Diseño en lugar de las raíces

Gráficamente nos encontramos con el siguiente análisis:



Criterio de diseño

Diseñamos para que el ángulo aportado sea aproximadamente $\gamma \approx 5$

Cálculo

$$\angle C_e(s)|_{s=P_d} = -\gamma$$

$$\angle \tau s + 1 - \angle \beta \tau s + 1 = -\gamma$$

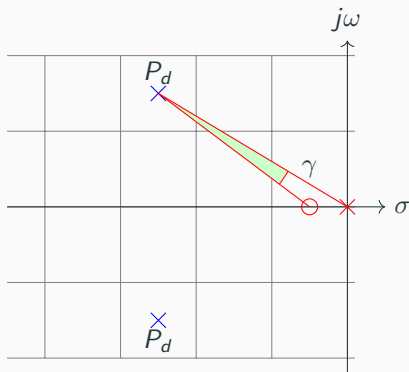
Pasos para el diseño de la célula de retraso

1. Comprobamos que el lugar de las raíces pasa por P_d
2. Obtenemos el valor de k_p (*condición de módulo*)
3. Calculamos la k ($k = k_p\beta$) que cumple la condición de error en régimen permanente
4. Con los datos anteriores obtenemos β
5. Calculo el valor de τ para que $\gamma = 5$

$$\angle C_e(s)|_{s=P_d} = \angle(\tau s + 1)|_{s=P_d} - \angle(\beta\tau s + 1)|_{s=P_d} = -\gamma$$

Células de retraso... Diseño en lugar de las raíces

Cuando trabajamos con controladores PI la posición del polo está fijada. Bastará con seleccionar la posición de cero para que la distorsión del LR sea mínima.



Criterio de diseño

Diseñamos para que el ángulo aportado sea aproximadamente $\gamma \approx 5$

Cálculo

$$\angle PI(s)|_{s=P_d} = -\gamma$$

$$\angle \tau s + 1 - \angle s = -\gamma$$

Pasos para el diseño del controlador PI

1. Comprobamos que el lugar de las raíces pasa por P_d
2. Calculo el valor de τ para que $\gamma = 5$

$$\angle PI(s)|_{s=P_d} = \angle(\tau s + 1)|_{s=P_d} - \angle s|_{s=P_d} = -\gamma$$

3. Obtenemos el valor de k (*condición de módulo*)

Este tipo de controladores están formados por una célula de adelanto y una de retraso o por un controlador PD y un PI. Permiten realizar dos tareas:

- Mejorar la dinámica del sistema (*adelanto de fase o PD*)
- Mejorar el error en régimen permanente (*retraso de fase o PI*)

Emplearemos este tipo de controladores cuando tengamos que corregir los dos efectos descritos, en caso contrario bastará con controladores de adelanto (*célula de adelanto, PD*) ó de retraso (*célula de retraso, PI*).

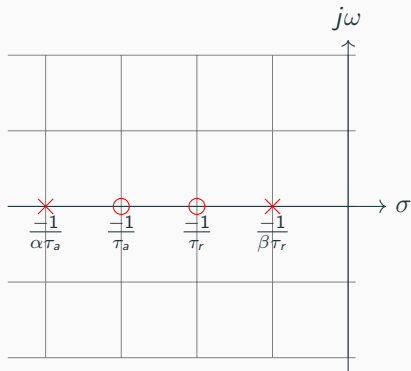
Células de adelanto-retraso y controladores PID

La célula de adelanto retraso aporta dos ceros y dos polos, según el siguiente esquema:

Función de transferencia

$$C(s) = k \frac{(\tau_a s + 1)(\tau_r s + 1)}{(\alpha \tau_a s + 1)(\beta \tau_r s + 1)}$$

$$\alpha \in (0, 1); \beta > 1$$



Células de adelanto-retraso y controladores PID

El controlador PID presenta la siguiente estructura:

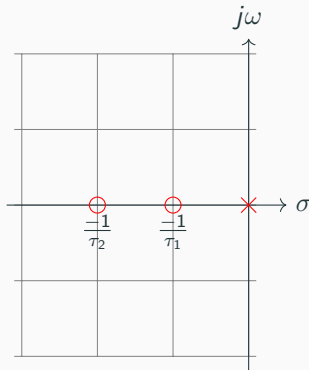
Función de transferencia

$$PID(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

Podemos emplear

$$PID(s) = k \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s}$$



Células de adelanto-retraso y controladores PID

Podemos desarrollar el controlador como dos controladores, uno de adelanto y otro de retraso.

Para la célula de adelanto-retraso obtenemos:

$$C(s) = k \frac{(\tau_a s + 1)(\tau_r s + 1)}{(\alpha \tau_a s + 1)(\beta \tau_r s + 1)} = \frac{k_a(\tau_a s + 1)}{(\alpha \tau_a s + 1)} \cdot \frac{k_r(\tau_r s + 1)}{(\beta \tau_r s + 1)}$$

Para el controlador PID obtenemos:

$$C(s) = k \frac{(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1)}{s} = k(\tau_a s + 1) \cdot \frac{(\tau_b s + 1)}{s}$$

Proceso de diseño célula de adelanto-retraso

1. Diseñamos la célula de adelanto para obtener la dinámica deseada (polos deseados).
2. Diseñamos la célula de retraso para cumplir el error en régimen permanente.
3. El controlador final es el producto de los controladores anteriores.

Proceso de diseño PID

1. Diseñamos el PD para obtener la dinámica deseada (P_d).
2. Diseñamos el PI para eliminar el error sin distorsionar el LR.
3. El controlador final es el producto de los controladores anteriores.

Diseño de controladores en el dominio de la frecuencia

En esta sección estudiamos como realizar los diseños en el dominio de la frecuencia.

Cuando trabajamos en el dominio de la frecuencia, las especificaciones de diseño no se establecen en formato temporal (RM , t_s , t_p , etc). En estos casos, se emplean criterios propios del dominio frecuencial:

- Margenes de estabilidad: MF , MG
- Ancho de banda: ω_{cg}
- Error máximo permitido: e_p , e_v

La relación entre tiempo y frecuencia no es directa.

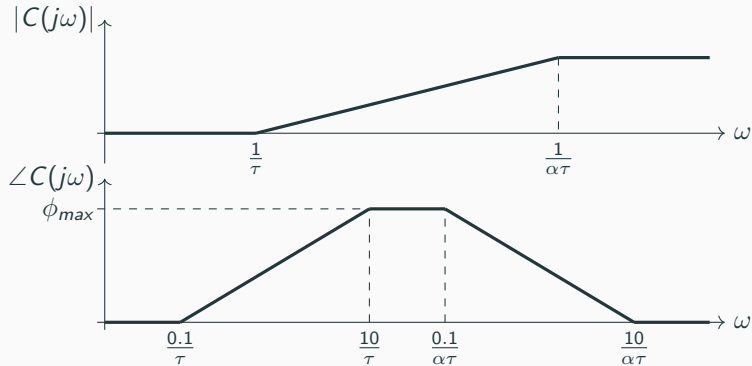
Para determinar ω_{cg} puede emplearse la siguiente aproximación:

$$\omega_{cg} = \frac{8}{t_s \tan MF}$$

Esta aproximación pierde precisión si se emplea con sistemas que poseen múltiples polos y ceros. Deberá ser empleada como punto de partida.

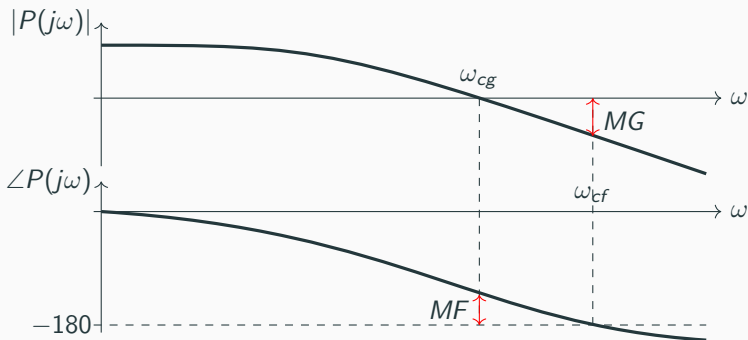
Células de adelanto y controladores PD

Como se describió en la sección anterior. Las células de adelanto de fase permiten mejorar la dinámica del sistema. Es decir, permiten aumentar la estabilidad relativa.



Células de adelanto... Diseño en diagramas de Bode

El objetivo principal del controlador es mejorar el margen de fase de la planta. Considérese que la la planta presenta el siguiente diagrama de Bode.



Podemos emplear la célula de adelanto para mejorar el margen de fase. Para lograrlo, podemos situar el polo y el cero para que aporten la fase positiva en las frecuencias de cruce de ganancia.

Ventaja:

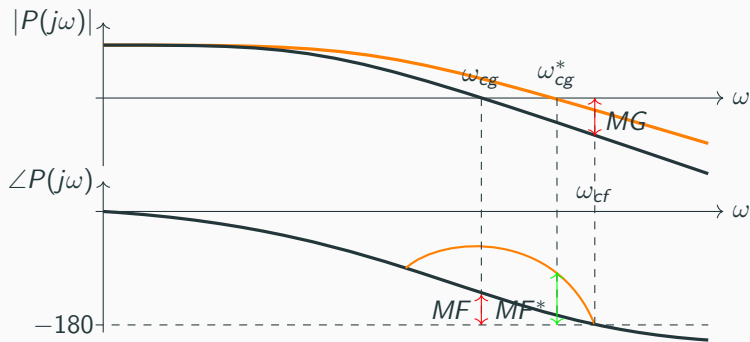
Al aportar fase positiva, el margen de fase aumenta, estabilizando al sistema y mejorando la dinámica de lazo cerrado (siempre que ω_{cg} se escoja de forma adecuada).

Inconveniente:

En la zona en la que la célula de adelanto aporta fase positiva, también añade una ganancia, modificando la frecuencia de cruce de ganancia (ω_{cg}) y con ella, el margen de fase (MF).

Células de adelanto... Diseño en diagramas de Bode

Al aplicar el controlador obtenemos el siguiente diagrama de Bode.



Comprobados los problemas introducidos por la ganancia de la célula, podemos realizar el diseño por dos técnicas:

- Ajustando la ganancia del controlador para compensar la ganancia introducida por el polo y el cero en la pulsación de cruce de ganancia deseada.
- Prediciendo el desplazamiento de la pulsación de cruce de ganancia.

El controlador (*célula de adelanto*), presenta la siguiente estructura:

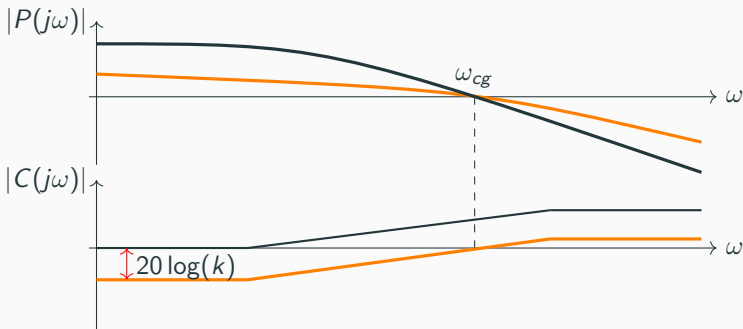
$$C(s) = k \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$$

El diagrama de Bode descrito anteriormente ($C^*(s)$) se realiza sin tener en cuenta la ganancia, por lo tanto podemos ajustar esta para que compense la ganancia aportada por el polo y el cero en la frecuencia de cruce de ganancia.

$$k^{-1} = |C^*(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}} \rightarrow C^*(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1}$$

Células de adelanto... Ajuste de k

Para el diagrama de magnitud obtenemos:



Nota: El diagrama de fase se mantiene constante

La opción anterior desaprovecha k , ganancia que podemos emplear para mejorar el comportamiento del sistema.

En la práctica, el desplazamiento de la pulsación de cruce de ganancia repercute en una pérdida aproximada en el MF de 10^0 . Por lo tanto, diseñaremos el controlador para que aporte 10^0 más de los necesarios y empleamos k para mejorar el error en régimen permanente.

Debemos determinar los siguiente parámetros del controlador:

- ϕ_{max} Ángulo máximo aportado por la célula de adelanto.
- ω_{max} Pulsación en la que se aporta ϕ_{max} .
- $|kP(\omega_{max})|$ Ganancia para la pulsación de diseño.

Del controlador vamos a obtener una serie de expresiones que relacionen los parámetros anteriores con los valores de diseño (α, τ) .

La fase máxima (ϕ_{max}) es aportada en la pulsación ω_{max} , que se sitúa en la media logarítmica de las pulsaciones del polo y el cero.

$$\log(\omega_{max}) = \frac{\log(\frac{1}{\tau}) + \log(\frac{1}{\alpha\tau})}{2} = \frac{\log \frac{1}{\alpha\tau^2}}{2} = \log \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}} \rightarrow \omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}}$$

El ángulo máximo aportado por el controlador será:

$$\phi_{max} = \angle C(j\omega_{max}) = \arctan(\tau\omega_{max}) - \arctan(\alpha\tau\omega_{max})$$

Buscamos otra forma de expresar el ángulo para que sólo dependa de α (*Multiplico por el conjugado*).

$$C(j\omega_{max}) = \frac{\tau j\omega_m + 1}{\alpha \tau j\omega_m + 1} = \frac{(\tau j\omega_m + 1)(-\alpha \tau j\omega_m + 1)}{(\alpha \tau j\omega_m + 1)(-\alpha \tau j\omega_m + 1)} = \frac{(\tau j\omega_m + 1)(-\alpha \tau j\omega_m + 1)}{1 + \alpha^2 \tau^2 \omega_m^2}$$

Desarrollamos la parte real e imaginaria:

$$C(j\omega_{max}) = \frac{(1 + \alpha \tau^2 \omega_m) + (j \tau \omega_m (1 - \alpha))}{1 + \alpha^2 \tau^2 \omega_m^2}$$

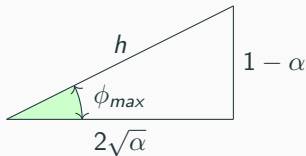
El ángulo máximo aportado por el controlador será:

$$\phi_{max} = \arctg \frac{\tau \omega_m (1 - \alpha)}{1 + \alpha \tau^2 \omega_m^2}$$

Conocido el valor de ω_{max} , calculado anteriormente, obtenemos:

$$\phi_{max} = \arctg \frac{\tau \frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}} (1 - \alpha)}{1 + \alpha\tau^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}}\right)^2} = \arctg \frac{\frac{(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha}}}{1 + 1} = \arctg \frac{(1 - \alpha)}{2\sqrt{\alpha}}$$

Conocida esta relación, podemos obtener otras relaciones trigonométricas que relacionen α y ϕ_{max}



$$\phi_{max} = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$$\phi_{max} = \arccos \frac{2\sqrt{\alpha}}{1 + \alpha}$$

$$h = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (2\sqrt{\alpha})^2} = 1 + \alpha$$

Con las expresiones anteriores podemos calcular el valor de α en función del ángulo máximo aportado ϕ_{max} . En nuestro caso, emplearemos la expresión:

$$\phi_{max} = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}}$$

En la pulsación ω_{max} , la célula aporta la siguiente magnitud:

$$|C(j\omega_{max})| = \frac{\sqrt{\tau^2 \omega_{max}^2 + 1}}{\sqrt{\alpha^2 \tau^2 \omega_{max}^2 + 1}} = \frac{\sqrt{\tau^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\alpha^2 \tau^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

La nueva pulsación de cruce de ganancia (ω_{cg_2}) estará en la pulsación que cumpla $|kC^*P(j\omega_{cg_2})| = 1$. Si nuestra célula aporta una ganancia $1/\sqrt{\alpha}$, en la pulsación ω_{cg_2} , podemos encontrar la pulsación ω_{cg_2} según:

$$|kP(j\omega_{cg_2})| = \sqrt{\alpha}.$$

Conocida la pulsación en la que se aporta la fase máxima, podemos calcular el valor de la constante de tiempo

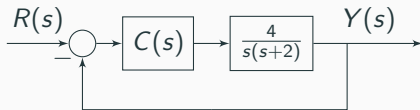
$$\omega_{cg_2} = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau} \rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}$$

Pasos para el diseño de la célula de adelanto

1. Determinar el valor de k para cumplir las restricciones de error permanente
2. Estudiar el margen de fase del conjunto $kP(s)$ ($MF_{inicial}$)
3. Calcular el ángulo que debe aportar la célula
$$\phi_{max} = MF + 10 - MF_{inicial}$$
4. Calcular el valor de $\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}}$
5. Calcular el valor de $\omega_m \rightarrow |kP(j\omega_m)| = \sqrt{\alpha}$
6. Determinar la constante de tiempo $\tau = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}}$

Células de adelanto. Ejemplo

Se desea controlar la planta $P(s)$ mediante el empleo en un lazo de realimentación negativa. Para ello se emplea el controlador $C(s)$, que será el encargado de que el sistema resultante en lazo cerrado cumpla con las especificaciones de diseño. Diseñamos el controlador para que presente las siguientes características:



- Error de velocidad $e_v = \frac{1}{20}$
- Margen de fase mínimo 50°

Células de adelanto. Ejemplo

1. Obtenemos la ganancia (k) del controlador que nos permite satisfacer la condición para el error de velocidad:

$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + kP(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + kP(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} skP(s)}$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} skP(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{4k}{s(s+2)} = \frac{4k}{2} = 2k$$

$$e_v = \frac{1}{2k} = \frac{1}{20} \rightarrow k = 10$$

2. Calculada la ganancia del controlador, estudiamos el margen de fase actual (*a partir de ahora trabajaremos con el sistema $kP(j\omega)$*).

$$MF = 180^\circ + \angle kP(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}}$$

Células de adelanto. Ejemplo

Calculamos la pulsación de cruce de ganancia para poder calcular el margen de fase.

$$|kP(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}} = 1$$
$$\frac{40}{\omega_{cg} \sqrt{\omega_{cg}^2 + 4}} = 1 \rightarrow \omega_{cg} = 6.168 \text{ rad/s}$$

Conocida la pulsación de cruce de ganancia obtenemos el margen de fase actual:

$$MF = 180^\circ + \angle kP(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}} = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \frac{\omega_{cg}}{2} = 17.96^\circ$$

El margen de fase es inferior al deseado, por lo tanto debemos aplicar una célula de adelanto de fase.

El cálculo del margen de fase puede realizarse de forma gráfica si disponemos del diagrama de Bode

3. Calculamos el ángulo máximo que debe aportar el controlador.

$$MF + 10^\circ = MF_{inicial} + \phi_{max}$$

$$\phi_{max} = MF + 10^\circ - MF_{inicial} = 50^\circ + 10^\circ - 17.96^\circ = 42^\circ$$

4. Obtenemos el valor de α .

$$\alpha = \frac{1 - \sin 42}{1 + \sin 42} = 0.1982$$

5. Calculamos la pulsación en la que debemos aportar la fase máxima:

$$|kP(j\omega_m)| = \sqrt{\alpha}$$

$$\frac{40}{\omega_m \sqrt{\omega_m^2 + 4}} = \sqrt{0.1982} \rightarrow \omega_m = 9.37 \text{ rad/s}$$

6. Calculado el valor de ω_m , obtenemos el valor de la constante de tiempo τ .

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} \rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{9.37\sqrt{0.1982}} = 0.24$$

El controlador obtenido resultante es :

$$C(s) = 10 \frac{0.24s + 1}{0.0475s + 1}$$

Podemos comprobar que el sistema cumple las condiciones de diseño calculando el margen de fase del conjunto planta-controlador. Obtenemos la frecuencia de cruce de ganancia:

$$|CP(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}} = 1$$

Células de adelanto. Ejemplo

$$\frac{40\sqrt{(0.23\omega_{cg})^2 + 1}}{\omega_{cg}\sqrt{\omega_{cg}^2 + 4}\sqrt{(0.0475\omega_{cg})^2 + 1}} = 1 \rightarrow \omega_{cg} = 9.37\text{rad/s}$$

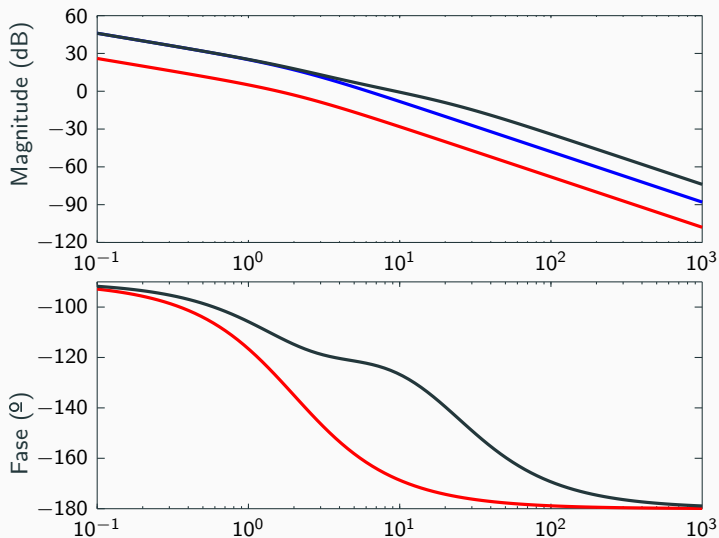
Conocida la frecuencia de cruce de ganancia, obtenemos el margen de fase:

$$MF = 180 + \angle CP(j\omega_{cg})$$

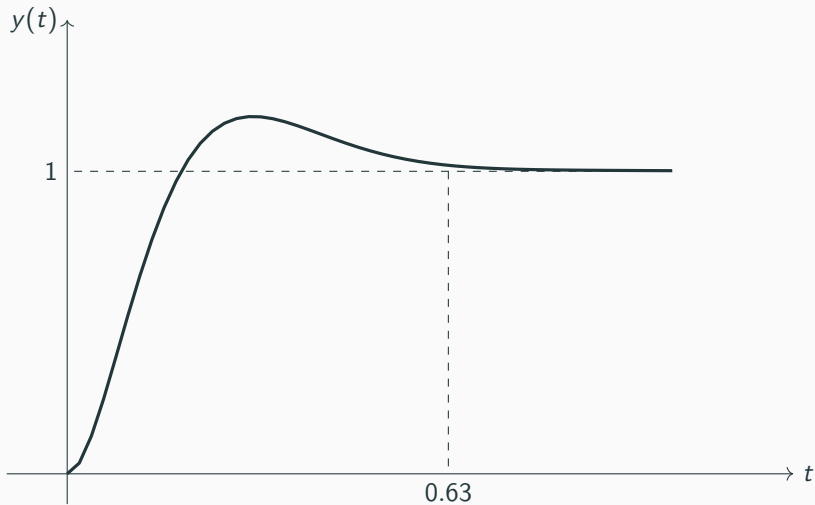
$$MF = 180^\circ + \arctan 0.24\omega_{cg} - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_{cg}}{2} - \arctan 0.0475\omega_{cg} = 54^\circ$$

En este caso obtenemos un margen de fase superior a 50° , por lo tanto, cumplimos con las condiciones de diseño.

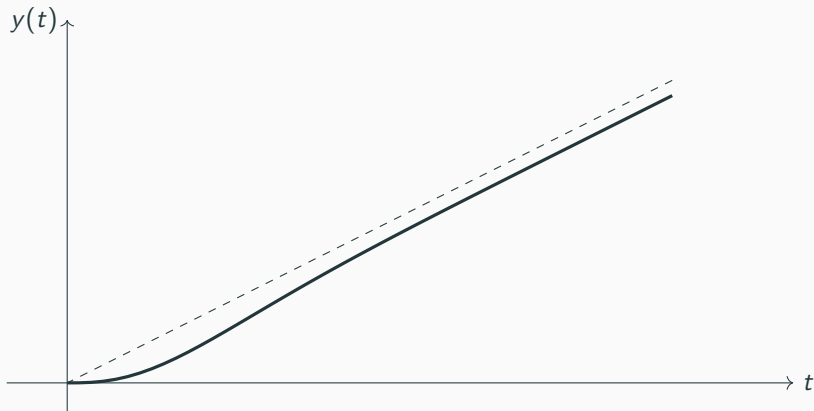
Células de adelanto. Ejemplo



Células de adelanto. Ejemplo

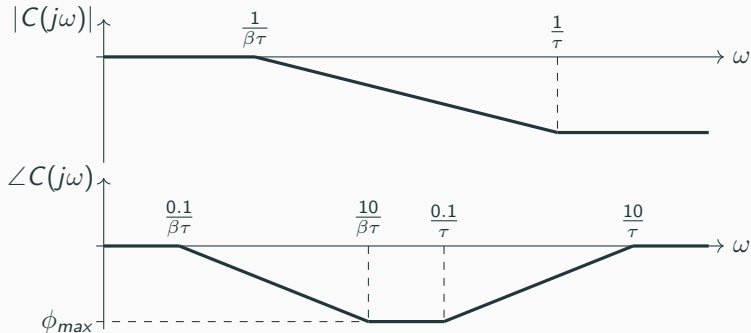


Células de adelanto. Ejemplo



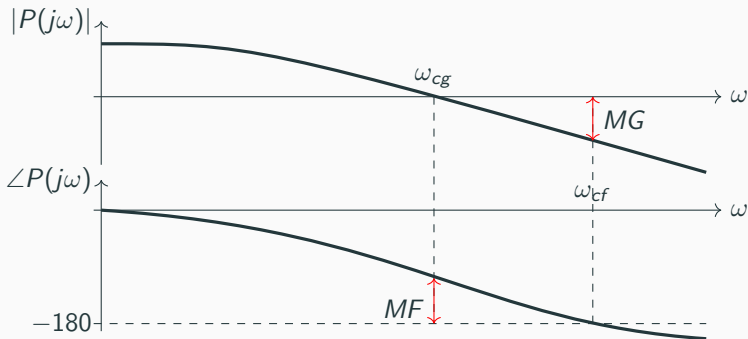
Células de retraso... Diseño en diagramas de Bode

La célula de retraso presenta una pareja de polo-cero real. El cero siempre se sitúa en frecuencias mayores a las del polo, lo que implica aportar una fase negativa.



Células de retraso... Diseño en diagramas de Bode

El problema de la célula de retraso es que introduce fase negativa, reduciendo el margen de fase del sistema. Partiendo de la siguiente planta:



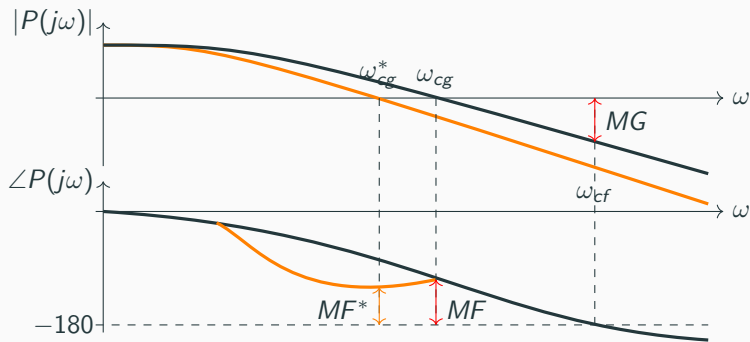
Podemos situar la célula para que cuando nos acercamos a las frecuencias de interés deje de aportar fase, de este modo no modificamos el margen de fase.

Inconveniente

- No podemos situar la célula de retraso alejándola demasiado, así que tomamos como criterio situarla para que ω_{cg} coincida con $\frac{10}{\tau}$.
- La ganancia del controlador cambia la pulsación de cruce de ganancia ω_{cg} .
- En realidad obtendremos un desplazamiento, así que deberemos calcular la pulsación de cruce de ganancia añadiendo al MF 8º.

Células de retraso... Diseño en diagramas de Bode

Al aplicar el controlador obtenemos el siguiente diagrama de Bode.



La ganancia introducida por el controlador en alta frecuencia está determinada por: (*no tenemos en cuenta k*)

$$|C_e(j\omega)| = \frac{\sqrt{\tau j\omega + 1}}{\sqrt{\beta \tau j\omega + 1}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\tau j\omega + 1}}{\sqrt{\beta \tau j\omega + 1}} = \frac{\tau}{\beta \tau} = \frac{1}{\beta}$$

Conociendo este valor, podemos ajustar la célula de retraso para modificar la pulsación de cruce de ganancia.

Pasos para realizar el diseño

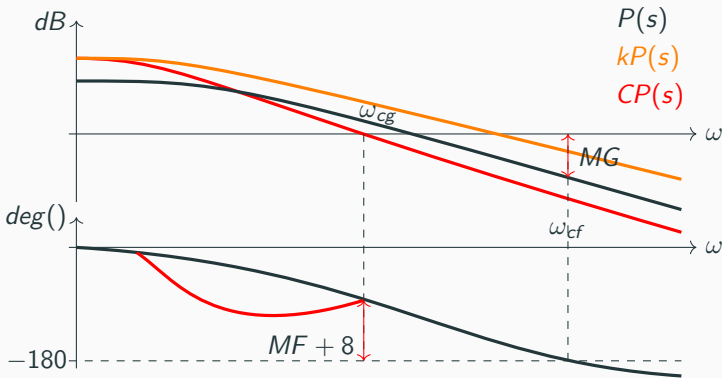
1. Diseñamos k para cumplir las condiciones de error en régimen permanente
2. Buscamos la frecuencia a la que se obtiene el MF deseado más un factor de corrección de 8°

$$\angle P(j\omega_{cg}) = -180 + MF + 8 \rightarrow \omega_{cg}$$

3. Obtenemos el valor de τ : $\omega_{cg} = \frac{10}{\tau} \rightarrow \tau$
4. Calculamos el valor de β para obtener la pulsación de cruce de ganancia deseada: $|kP(j\omega_{cg})| = \beta$

Células de retraso... Diseño en diagramas de Bode

Al aplicar el controlador obtenemos el siguiente diagrama de Bode.



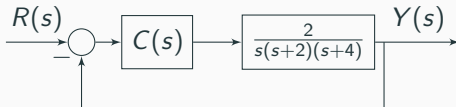
Células de retraso. Ejemplo

Diseñar una célula de retraso en el dominio de la frecuencia, para controlar la planta:

$$P(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+4)}$$

Las condiciones que deberá presentar el sistema gobernado en lazo cerrado son las siguientes:

- Error frente a la rampa en régimen estacionario $e_v = 0.01s$
- Margen de fase mínimo 40°



Células de retraso. Ejemplo

1. Determinamos la ganancia necesaria para cumplir la condición de error en régimen permanente.

$$e_v = \frac{1}{k_v} \rightarrow k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s k P(s)$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2k}{s(s+2)(s+4)} = \frac{k}{4}$$

$$e_v = 0.01 = \frac{1}{\frac{k}{4}} = \frac{4}{k} \rightarrow k = 400$$

2. Buscamos la pulsación en la que obtenemos el margen de fase deseado más el factor corrector.

$$\angle k P(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}} = -180^\circ + MF + 8^\circ$$

$$-90 - \arctan \frac{\omega_{cg}}{2} - \arctan \frac{\omega_{cg}}{4} = -180^\circ + 40^\circ + 8^\circ \rightarrow \omega_{cg} = 1.04 \text{ rad/s}$$

Células de retraso. Ejemplo

3. Calculamos el valor de la constante de tiempo τ para que la célula deje de aportar fase en la frecuencia ω_{cg} (pulsación esquina).

$$\omega_{cg} = \frac{10}{\tau} \rightarrow \tau = \frac{10}{\omega_{cg}} = 9.63$$

4. Calculado el valor de τ obtenemos β para que la pulsación de cruce de ganancia coincida con la deseada.

$$|kP(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}} = \beta$$
$$\frac{400 \cdot 2}{\omega_{cg} \sqrt{\omega_{cg}^2 + 2^2} \sqrt{\omega_{cg}^2 + 4^2}} \approx 82.7 = \beta$$

1. Con los parámetros anteriores obtenemos el siguiente controlador:

$$C(s) = 400 \frac{9.63s + 1}{796.2s + 1}$$

En el dominio de la frecuencia tanto las células de adelanto como las de retraso se emplean para reducir el error en régimen permanente.

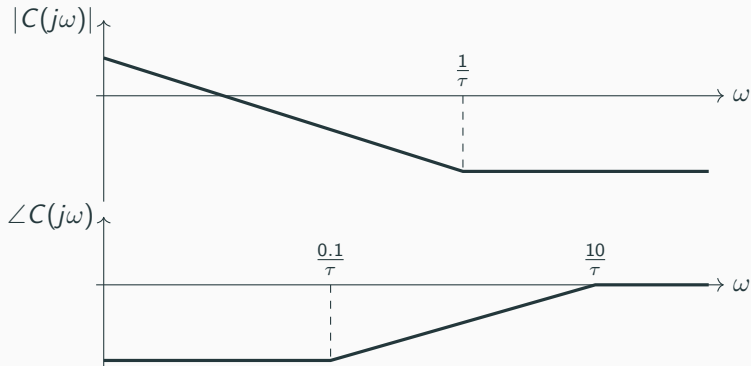
¿Que controlador debo emplear?

- Las células de adelanto dan lugar a diseños que presentan mayores pulsaciones de cruce de ganancia ω_{cg} . Es decir, mayor ancho de banda y por lo tanto, transitorios más rápidos.
- Las células de retraso dan lugar a diseños que presentan menores pulsaciones de cruce de ganancia ω_{cg} . Es decir menor ancho de banda y por lo tanto transitorios más lentos.

Siempre que sea posible debemos emplear células de adelanto de fase.

PI como célula de retraso

Como se estudio en la sección anterior, el controlador PI es una célula de retraso con un polo en el origen. Su diagrama de bode es:



PI... Diseño en diagramas de Bode

El controlador PI elimina el error en régimen permanente. Por lo tanto, no debemos emplear la ganancia k para este propósito. En este caso k se emplea para obtener la pulsación de cruce de ganancia deseada.

Pasos para realizar el diseño

1. Buscamos la frecuencia a la que se obtiene el MF deseado más un factor de corrección de 8º

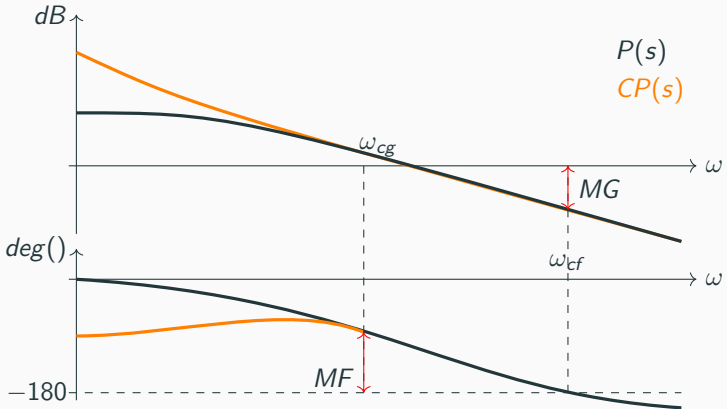
$$\angle P(j\omega_{cg}) = -180 + MF + 8 \rightarrow \omega_{cg}$$

2. Obtenemos el valor de τ : $\omega_{cg} = \frac{10}{\tau} \rightarrow \tau$
3. Calculamos el valor de k para obtener la pulsación de cruce de ganancia deseada: $|CP(j\omega_{cg})| = 1$

$$|C^*(j\omega_{cg})P(j\omega_{cg})| = \frac{\sqrt{\tau^2\omega_{cg}^2 + 1}}{\omega_{cg}} |P(j\omega)| = \frac{1}{k}$$

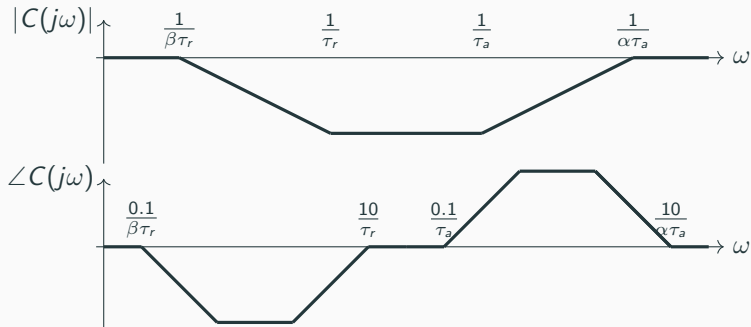
PI... Diseño en diagramas de Bode

Al aplicar el controlador obtenemos el siguiente diagrama de Bode.



Células de adelanto-retraso

El diagrama de Bode de la célula de adelanto-retraso presentara el siguiente esquema:



En este caso puede fijarse una tercera condición de diseño, normalmente la pulsación de cruce de ganancia deseada ω_{cg} .

Pasos para realizar el diseño

1. Diseñamos k para cumplir las condiciones de error en régimen permanente
2. Estudiamos el margen de fase en la pulsación de cruce de ganancia deseada: $MF_a = 180 + \angle kP(j\omega_{cg})$
3. Calculamos el ángulo máximo a aportar por la red de adelanto de fase: $\phi_{\max} = MF + 8 - MF_a$
4. Obtenemos el valor de α : $\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{\max}}{1 + \sin \phi_{\max}}$
5. Determinar la constante de tiempo de la red de adelanto: $\tau_a = \frac{1}{\omega_{cg} \sqrt{\alpha}}$
6. Obtenemos el valor de la constante de tiempo para la red de retraso τ_r : $\omega_{cg} = \frac{10}{\tau_r} \rightarrow \tau_r = \omega_{cg}/10$
7. Calculamos el valor de β para obtener la pulsación de cruce de ganancia deseada: $|C_a P(j\omega_{cg})| = 1 \rightarrow \beta$

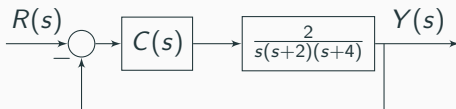
Células de adelanto-retraso. Ejemplo

Diseñar una célula de retraso en el dominio de la frecuencia, para controlar la planta:

$$P(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+4)}$$

Las condiciones que deberá presentar el sistema gobernado en lazo cerrado son las siguientes:

- Error frente a la rampa en régimen estacionario $e_v = 0.05s$
- Margen de fase mínimo 40°
- Pulsación de cruce de ganancia $\omega_{cg} = 3\text{rad/s}$



Células de adelanto-retraso. Ejemplo

1. Determinamos la ganancia necesaria para cumplir la condición de error en régimen permanente.

$$e_v = \frac{1}{k_v} \rightarrow k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s k P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2k}{s(s+2)(s+4)} = \frac{k}{4}$$

$$e_v = 0.05 = \frac{1}{20} \frac{1}{\frac{k}{4}} = \frac{4}{k} \rightarrow k = 80$$

2. Calculamos el ángulo que debe aportar la célula de adelanto del controlador

$$MF_{inicial} = 180^\circ - \angle kP(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}}$$

$$MF_{inicial} = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \frac{\omega_{cg}}{2} - \arctg \frac{\omega_{cg}}{4} = -3.17^\circ$$

El ángulo que debe aportar la red de adelanto es:

$$MF + 8 = MF_{inicial} + \phi_{max}$$

$$\phi_{max} = MF + 8^\circ - MF_{inicial} = 40^\circ + 8^\circ - 3.17^\circ = 51.2^\circ$$

3. Calculamos el valor de α que permite aportar el ángulo calculado

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}} = 0.1242$$

4. Calculamos el valor de τ_a para aportar el ángulo en la pulsación de cruce de ganancia

$$\omega_{cg} = \frac{1}{\tau_a \sqrt{\alpha}} \rightarrow \tau_a = \frac{1}{\omega_{cg} \sqrt{\alpha}} = 0.946$$

5. Con los parámetros anteriores obtenemos la red de adelanto:

$$C_a(s) = 80 \frac{0.946s + 1}{0.0423s + 1}$$

Células de adelanto-retraso. Ejemplo

6. Calculamos la constante de tiempo de la célula de retraso para que deje de aportar fase en la pulsación de cruce de ganancia.

$$\omega_{cg} = \frac{10}{\tau_r} \rightarrow \tau_r = \frac{10}{\omega_{cg}} = 3.33$$

7. Obtenemos el valor de β para que la pulsación de cruce de ganancia coincida con la deseada.

$$|C_a P(j\omega)|_{\omega=\omega_{cg}} = \beta$$

$$\frac{80 \cdot 4 \sqrt{(0.946\omega_{cg})^2 + 1}}{\omega_{cg} \sqrt{\omega_{cg}^2 + 4} \sqrt{\omega_{cg}^2 + 16} \sqrt{(0.0423\omega_{cg})^2 + 1}} = 8.4$$

8. Con el valor de β obtenemos la célula de retraso necesaria

$$C_r(s) = \frac{3.33s + 1}{28s + 1}$$

El controlador resultante es:

$$C(s) = C_a(s)C_r(s) = 80 \frac{(0.946s + 1)(3.33s + 1)}{(0.0423s + 1)(28s + 1)}$$

En la bibliografía existen otros métodos de diseño que emplean $\alpha = \beta^{-1}$.
Es decir, la célula de adelanto-retraso toma la estructura

$$C(s) = k \frac{(\tau_a s + 1)(\tau_r s + 1)}{(\tau_a / \beta s + 1)(\beta \tau s + 1)}$$

Pasos para realizar el diseño

1. Diseñamos k para cumplir las condiciones de error en régimen permanente
2. Estudiamos el margen de fase en la pulsación de cruce de ganancia deseada: $MF_a = 180 + \angle kP(j\omega_{cg})$
3. Calculamos el ángulo máximo a aportar por la red de adelanto de fase: $\phi_{\max} = MF + 8 - MF_a$
4. Obtenemos el valor de β : $\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{\max}}{1 + \sin \phi_{\max}} \rightarrow \beta = \alpha^{-1}$
5. Obtenemos el valor de la constante de tiempo para la red de retraso τ_r : $\omega_{cg} = \frac{10}{\tau_r} \rightarrow \tau_r = 10/\omega_{cg}$
6. Calculamos el valor de τ_a trazando una recta de 20db que pase por $|kC_r(j\omega_{cg})P(j\omega_{cg})|$. El corte de esta recta con la línea de 0dB corresponde con la frecuencia esquina de la red de adelanto $10/\tau_a$.

Células de adelanto-retraso. Ejemplo

Repetimos el diseño para el ejemplo anterior con este segundo método.

1. Determinamos la ganancia necesaria para cumplir la condición de error en régimen permanente.

$$e_v = 0.05 = \frac{1}{20} = \frac{1}{\frac{k}{4}} = \frac{4}{k} \rightarrow k = 80$$

2. Calculamos el ángulo que debe aportar la célula de adelanto del controlador

$$\phi_{max} = MF + 8^\circ - MF_{inicial} = 40^\circ + 8^\circ - 3.17^\circ = 51.2^\circ$$

3. Calculamos el valor de β que permite aportar el ángulo calculado

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}} = 0.1242 \rightarrow \beta = \alpha^{-1} = 8.05$$

4. Calculamos el valor de τ_r

$$\tau_r = \frac{10}{\omega_{cg}} = \frac{10}{3} = 3.33$$

5. Con los parámetros anteriores obtenemos la red de retraso:

$$C_r(s) = \frac{3.33s + 1}{26.85s + 1}$$

Células de adelanto-retraso. Ejemplo

6. Calculamos la constante de tiempo de la célula de adelanto para conseguir la ω_{cg} deseada

$$|kC_r(j\omega_{cg})P(j\omega_{cg})| = 0.3691$$

$$\tau_a = \frac{\beta}{10(\log(wcg)+|20\log(0.3691)|/20)} = 0.991$$

7. Con el valor de τ_a obtenemos la red de adelanto necesaria

$$C_r(s) = \frac{0.991s + 1}{0.123s + 1}$$

8. El controlador resultante es

$$C(s) = kC_a(s)C_r(s) = 80 \frac{(0.991s + 1)(3.33s + 1)}{(0.123s + 1)(26.85s + 1)}$$

Métodos tabulares

Estos métodos permiten obtener controladores PID de forma directa aplicando tablas de diseño. Normalmente se emplean las tablas de Ziegler-Nichols, pero pueden emplearse otras.

En nuestro caso emplearemos:

- Tablas de Ziegler- Nichols
- Tablas CHR (Chien-Hronest-Reswick)

Podemos obtener el diseño por dos técnicas, dependiendo del experimento empleado para caracterizar al sistema.

Respuesta al escalón

Empleamos un sistema en lazo abierto para conseguir una respuesta al escalón sobre la que obtener los parámetros

Respuesta en frecuencia

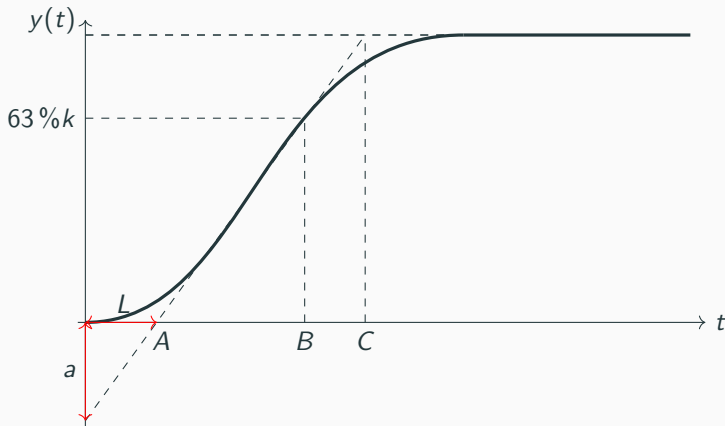
Empleamos un sistema en lazo cerrado para conseguir una respuesta oscilante sobre la que obtener los parámetros

Trabajan con el controlador PID estándar:

$$C(s) = k\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)$$

Métodos Tabulares ... Respuesta en al escalón

Aplicamos un escalón unitario en la entrada (*zona lineal*) y observamos la respuesta. Realizamos el siguiente análisis gráfico



Conocidos los parámetros de la respuesta al escalón, podemos obtener el controlador mediante la siguiente tabla.

Tabla ZN para respuesta al escalón

Controlador	k	T_i	T_d	T_p
P	$1/a$			$4L$
PI	$0.9/a$	$3L$		$5.7L$
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$	$3.4L$

El parámetro T_p representa el periodo de oscilación aproximado del sistema en lazo cerrado.

Con los mismos parámetros podemos obtener controladores por las tablas CHR. En primer lugar, debemos determinar la tabla a emplear según la función del controlador:

- Rechazo de perturbaciones (*Regulador*)
- Seguimiento de referencias (*Tracking*)

Seleccionada la tabla deberemos tomar los parámetros para un sobreimpulso máximo del 0 % o del 20 %.

Tabla CHR para rechazo de perturbaciones

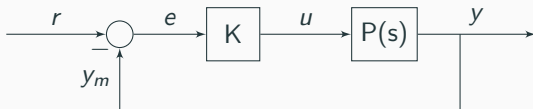
Sobreimpulso		0 %			20 %	
Controlador	k	T_i	T_d	k	T_i	T_d
P	$0.3/a$			$0.7/a$		
PI	$0.6/a$	$4L$		$0.7/a$	$2.3L$	
PID	$0.95/a$	$2.4L$	$0.42L$	$1.2/a$	$2L$	$0.42L$

Tabla CHR para seguimiento de referencias

Sobreimpulso		0 %			20 %	
Controlador	k	T_i	T_d	k	T_i	T_d
P	$0.3/a$			$0.7/a$		
PI	$0.35/a$	$1.2L$		$0.6/a$	L	
PID	$0.6/a$	L	$0.5L$	$0.95/a$	$1.4L$	$0.47L$

En este caso empleamos un sistema en lazo cerrado con k variable

Sistema de control en lazo cerrado



Ajustamos k para que el sistema oscile (*límite de estabilidad*), anotando el valor de k_u y el periodo de oscilación T_u

Tabla ZN para respuesta en frecuencia

Controlador	k	T_i	T_d	T_p
P	$0.5/k_u$			T_u
PI	$0.4/k_u$	$0.8 T_u$		$1.4 T_u$
PID	$0.6/k_u$	$0.5 T_u$	$0.125 T_u$	$0.85 T_u$

Ajuste de PID's por asignación de polos

El objetivo es realizar un ajuste matemático del controlador de forma que la ecuación característica coincida con la deseada.

Pasos para diseñar empleando asignación de polos:

1. Determinar la ecuación característica del sistema controlado (empleamos t_s y RM)
2. Seleccionar el controlador a emplear: PD, PI, PID, otros.
3. Modificación si procede de la ecuación característica para que presente igual número de polos que $PC(s)$
4. Obtener la ecuación característica: $1 + PC(s)$
5. Ajustar los coeficientes para que $1 + PC(s)$ coincida con la ec. deseada

Ejemplo 1

Se desea controlar la planta

$$p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

situándola en un lazo de realimentación negativa. Los objetivos para el funcionamiento en lazo cerrado son:

- Error de posición nulo: $e_p = 0$
- Tiempo de establecimiento: $t_s = 2$
- Rebasamiento máximo: $RM = 4.6\%$

Ejemplo 1

1. Obtenemos la ecuación característica deseada en lazo cerrado:

- Rebasamiento máximo: 4.6 % $\rightarrow \delta = 1/\sqrt{2}$
- Tiempo de establecimiento : 2 $\rightarrow \omega_n = 2\sqrt{2}$

La ecuación característica deseada es:

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 8$$

2. Estudio del controlador necesario:

El controlador a emplear será un PI o un PID, debido a la necesidad de introducir la acción integral ($e_p = 0$).

3. Estudio del número de polos de lazo cerrado:

Número de polos de lazo cerrado: 3 (2 planta + 1 controlador)

4. ¿nº de polos de lazo cerrado = nº de polos de la ec. deseada ?

- Si. No necesitamos emplear polos de alta frecuencia
- No. Tenemos que añadir polos de HF

Ejemplo 1

En este caso $3 \neq 2$, por lo que tenemos que añadir un polo de HF. Como los polos deseados se sitúan en $s = -2 \pm 2j$ situamos el polo de alta frecuencia en -10. La nueva ecuación característica es:

$$(s + 10)(s^2 + 4s + 8) = s^3 + 14s^2 + 48s + 80$$

4. Selección del controlador

Dado que la ec deseada presenta orden tres, necesitamos un controlador con tres parámetros libres, por lo tanto PID.

5. Calculo de la ec. de lazo cerrado

$$s(s+1)(s+2) + (k_d s^2 + k_p s + k_i) = s^3 + (3 + k_d)s^2 + (2 + k_p)s + k_i$$

6. Igualamos ec. de lazo cerrado y ec. deseada

$$s^3 + 14s^2 + 48s + 80 = s^3 + (3 + k_d)s^2 + (2 + k_p)s + k_i$$

Ejemplo 1

Obtenemos los parámetros del controlador:

$$3 + k_d = 14 \rightarrow k_d = 11$$

$$2 + k_p = 48 \rightarrow k_p = 46$$

$$k_i = 80 \rightarrow k_i = 80$$

El controlador final es:

$$C(s) = 46 + \frac{80}{s} + 11s$$

Ejemplo 2

Se desea controlar la planta

$$p(s) = \frac{2}{(5s + 1)}, \quad (1)$$

situándola en un lazo de realimentación negativa. Los objetivos para el funcionamiento en lazo cerrado son:

- Error de posición nulo: $e_p = 0$
- Tiempo de establecimiento: $t_s = 2$
- Rebasamiento máximo: $RM = 4.6 \%$

Ejemplo 2

1. Obtenemos la ecuación característica deseada en lazo cerrado:
Igual que en el ejemplo anterior:

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 8$$

2. Estudio del controlador necesario:
El controlador a emplear será un PI o un PID, debido a la necesidad de introducir la acción integral ($e_p = 0$).
3. Estudio del número de polos de lazo cerrado:
Número de polos de lazo cerrado: 2 (1 planta + 1 controlador)
4. ¿nº de polos de lazo cerrado = nº de polos de la ec. deseada ?
Sí. No necesitamos emplear polos de alta frecuencia

Ejemplo 2

4. Selección del controlador

Dado que la ec. deseada presenta orden dos necesitamos un controlador con dos parámetros libres, por lo tanto PI.

5. Calculo de la ec. de lazo cerrado

$$s(5s + 1) + 2(k_p s + k_i) = 5s^2 + (1 + 2k_p)s + 2k_i$$

Cuidado, en este caso el termino s^2 esta multiplicado por 5. Para que se pueda igualar con la ec. deseada hay que transformar la ecuación por:

$$s^2 + \frac{(1 + 2k_p)}{5}s + \frac{2}{5}k_i$$

Otra opción es transformar al comienzo del ejercicio $p(s)$ por

$$p(s) = \frac{2}{(5s + 1)} = \frac{2/5}{(s + 0.2)}.$$

Ejemplo 2

6. Igualamos ec. de lazo cerrado y ec. deseada

$$s^2 + 4s + 8 = s^2 + \frac{(1 + 2k_p)}{5}s + \frac{2}{5}k_i$$

Obtenemos los parámetros del controlador:

$$\frac{(1 + 2k_p)}{5} = 4 \rightarrow k_p = 9.5$$

$$\frac{2}{5}k_i = 8 \rightarrow k_i = 20$$

El controlador final es:

$$C(s) = 18 + \frac{20}{s}$$

Ejemplo 3

Se desea controlar la planta

$$p(s) = \frac{2}{s(s+1)}, \quad (2)$$

situándola en un lazo de realimentación negativa. Los objetivos para el funcionamiento en lazo cerrado son:

- Error de posición frente a referencias nulo: $e_p = 0$
- Tiempo de establecimiento: $t_s = 2$
- Rebasamiento máximo: $RM = 4.6\%$

Ejemplo 3

1. Obtenemos la ecuación característica deseada en lazo cerrado:
Igual que en el ejemplo anterior:

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 8$$

2. Estudio del controlador necesario:
El controlador a emplear será un P o un PD, debido a que no es necesario introducir la acción integral (la planta es de tipo 1).
3. Estudio del número de polos de lazo cerrado:
Número de polos de lazo cerrado: 2 (2 planta + 0 controlador)
4. ¿nº de polos de lazo cerrado = nº de polos de la ec. deseada ?
Sí. No necesitamos emplear polos de alta frecuencia

Ejemplo 3

4. Selección del controlador

Dado que la ec. deseada presenta orden dos necesitamos un controlador con dos parámetros libres, por lo tanto PD.

5. Calculo de la ec. de lazo cerrado

$$s^2 + 4s + 8 = s^2 + (1 + 2k_d)s + 2k_p$$

Ejemplo 3

6. Igualamos ec. de lazo cerrado y ec. deseada

$$s^2 + 4s + 8 = s^2 + (1 + 2k_d)s + 2k_p$$

Obtenemos los parámetros del controlador:

$$(1 + 2k_d) = 4 \rightarrow k_d = 1.5$$

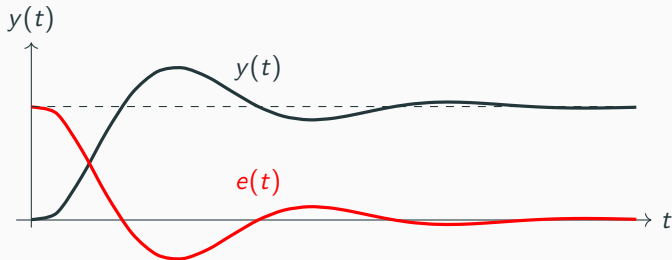
$$2k_p = 8 \rightarrow k_p = 4$$

El controlador final es:

$$C(s) = (4 + 1.5s)$$

Indices de error

- El empleo de índices de error es una potente herramienta que permite evaluar el comportamiento de los sistemas de control.
- Estos índices buscan cuantificar de forma numérica el *performance* (el comportamiento) la respuesta del sistema en lazo cerrado a partir del estudio de la señal de error.
- Estos índices pueden ser empleados para determinar la ecuación característica deseada.



Indices de error

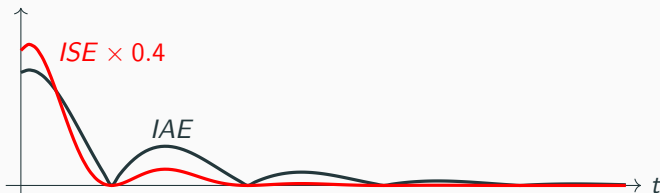
Intentar minimizar el área del error no tiene sentido (los máximos negativos compensan los positivos), surgen los siguientes índices:

- IAE: Índice del valor absoluto del error

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt$$

- ISE: Índice del error al cuadrado

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt$$



Indices de error

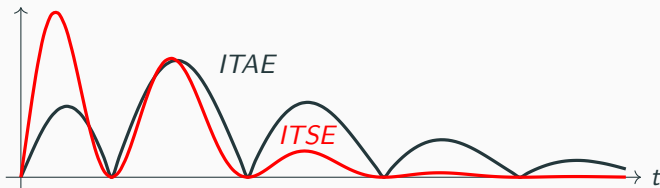
Podemos hacer estos índices más selectivos multiplicando las funciones que los definen por el tiempo, de este modo obtenemos:

- ITAE: Índice del tiempo por el valor absoluto del error

$$ITAE = \int_0^T t \cdot |e(t)| dt$$

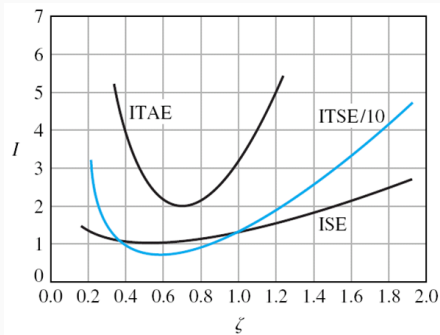
- ITSE: Índice del tiempo por el cuadrado del error

$$ITSE = \int_0^T t \cdot e^2(t) dt$$



Indices de error

Puede demostrarse que para una función de transferencia con tiempo de establecimiento normalizado, el índice de error depende del amortiguamiento relativo. A continuación, se muestra la evolución del valor del índice de error en función del amortiguamiento relativo.



Diseñaremos el controlador ajustando los coeficientes de la ecuación característica de lazo cerrado para que esta minimice el índice de error.

Ejemplo: tabla para el índice ITAE

$$n = 1 \rightarrow s + \omega_n$$

$$n = 2 \rightarrow s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$$

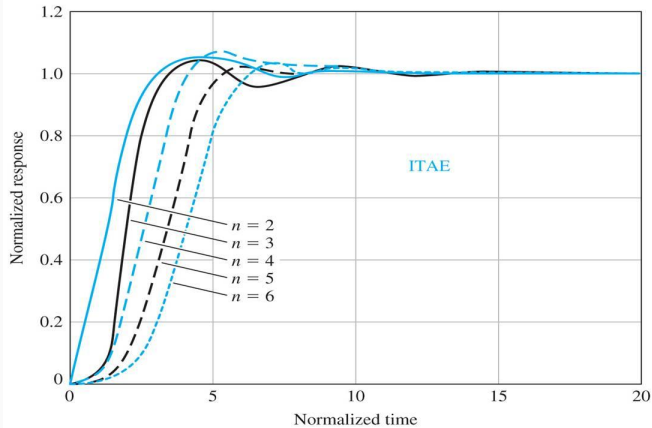
$$n = 3 \rightarrow s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

$$n = 4 \rightarrow s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$n = 5 \rightarrow s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

$$n = 6 \rightarrow s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.6\omega_n^2 s^4 + 8.6\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$$

Respuestas ante el escalón empleando el índice ITAE



Pasos para diseñar empleando indices de error

1. Obtener la ecuación característica deseada en función del número de polos obtenidos en lazo cerrado.
2. Determinar el valor de ω_n en función de las especificaciones de diseño. $\omega_n T_s = T_{s_n}$
3. Seleccionar el controlador a emplear: PD, PI, PID, otros.
4. Obtener la ecuación característica: $1 + PC(s)$
5. Ajustar los coeficientes para que $1 + PC(s)$ coincida con la ec. deseada