Francisco Jarlisson Moreira de Matos - 569933

Moyses vol. 1, cap. 10: Gravitação

$\boxed{01}$ $F_G = F_{cp} \Rightarrow \dfrac{GM_L m}{(R+h)^2} = m \cdot a_{cp} \Rightarrow \dfrac{GM_L}{(R+h)^2} = \dfrac{V^2}{(R+h)}$

$\Rightarrow \dfrac{GM_L}{(R+h)} = \dfrac{4\pi^2 (R+h)^2}{T^2} \Rightarrow M_L = \dfrac{4\pi^2 (R+h)^3}{G T^2} = \dfrac{4\pi^2 (1851 \cdot 10^3)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} (119 \cdot 60)^2} = 7{,}36 \cdot 10^{22}\ kg$

$\boxed{02}$ a) $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M = \dfrac{4\pi R^3 \rho}{3}$

$F_G = F_{cp} \Rightarrow \dfrac{GM\cancel{m}}{R^2} = \dfrac{\cancel{m}}{\cancel{R}} \cdot \left(\dfrac{2\pi R}{T}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{GM}{R} = \dfrac{4\pi^2 R^2}{T^2}$

$\Rightarrow T^2 G \cdot \dfrac{\cancel{4\pi}}{3} \cancel{R^3} \rho = \cancel{4}\pi^{\cancel{2}} \cancel{R^3} \Rightarrow T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}}$

b) $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}52 \cdot 10^3}} = 5060\,s = 84{,}3\,min$

c) $v = \dfrac{2\pi R}{T} = \dfrac{2\pi \cdot 6378000}{5060} = 7919\ m/s$

$\boxed{03}$ a) Vimos que: $\dfrac{R^3}{T^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2}$ $\rightarrow$ $R^3 \cdot \dfrac{V^2}{4\pi^2 R^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow V^2 = \dfrac{GM}{R}$

Mas: $V = \dfrac{2\pi R}{T} \Rightarrow T^2 = \dfrac{4\pi^2 R^2}{V^2}$

Cinético: $K = \dfrac{1}{2} m V^2 = \dfrac{GMm}{2R} \Rightarrow E = K + U = \dfrac{GMm}{2R} - \dfrac{GMm}{R}$

Potencial: $U = \dfrac{-GMm}{R}$

$= \dfrac{-GMm}{2R} = \dfrac{1}{2} U$

b) $V^2 = \frac{GM}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{K}{\sqrt{R}}$

04 a) $g = \frac{GM}{R_p^2}$

$E_i = \frac{mV^2}{2} - \frac{GmM}{R_p} \Rightarrow \frac{mV^2}{2} = \frac{GmM}{R_p} \Rightarrow V^2 = \frac{2GM}{R_p} \Rightarrow V = \sqrt{2gR_p}$

$E_f = 0$

Mas a velocidade V é a do corpo sendo lançado do repouso. Como ele está em órbita já possui velocidade V_0:

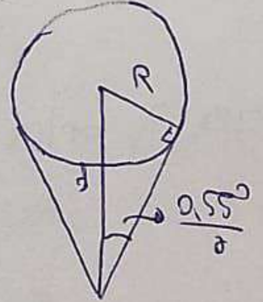
$$V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_p}} = \sqrt{gR_p}$$

Logo, ele só precisa de: $V_e = V - V_0 = \sqrt{2gR_p} - \sqrt{gR_p}$

$$= \sqrt{gR_p}\,(\sqrt{2} - 1)$$

b) $V_e = \sqrt{9{,}8 \cdot 6378000} \cdot (\sqrt{2} - 1) = 3274\,m/s$

05



$sen\left(\frac{0{,}55}{2}\right) = \frac{R}{d} \rightarrow d = \frac{R}{sen\,0{,}275}$

$\mu = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M = \frac{4}{3}\pi\mu R^3$

Kepler: $\frac{d^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{R^3 \cdot 4\pi^2}{sen^3 0{,}275} = G \cdot \frac{4}{3}\pi\mu R^3 T^2$

$\Rightarrow \mu = \frac{3\pi}{sen^3 0{,}275 \cdot G T^2} = \frac{3\pi}{(4{,}79 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}$

$$= 1285\ kg/m^3$$

06 Galáxia: $V_g^2 = \frac{GM_g}{R_g}$

Terra-Sol: $V^2 = \frac{GM_S}{R}$

$\rightarrow \frac{M_g}{M_S} = \frac{R_g V_g^2}{G} \cdot \frac{G}{RV^2} = \frac{R_g \cdot V_g^2}{R \cdot V^2}$

a) $V_{0S} = 2.10^5 m/s \rightarrow V_{0S}^2 = \frac{GM_g}{\frac{3}{5}R_g} \Rightarrow \frac{3}{5}V_{0S}^2 = V_g^2$

$\Rightarrow V_g = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot 2.10^5 = 155\ Km/s$

b) $\frac{M_g}{M_S} = \frac{R_g V_g^2}{R \cdot V^2} = \frac{5.10^4 . 9,46.10^{15} . (155.10^3)^2}{1,49.10^{11} . (30.10^3)^2} = 8,47.10^{10}$

07 Densidade da Terra: $d = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{M_{BN}}{\frac{4}{3}\pi(250.R_S)^3}$

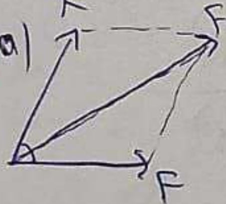
$\Rightarrow M_{BN} = 250^3 \left(\frac{R_S}{R_T}\right)^3 . M_T$

Velocidade de escape: $V_e = \sqrt{\frac{2GM}{250R_S}}$

$= \sqrt{\frac{2G}{\cancel{250R_S}} \cdot 250^{\cancel{3}\,2} \frac{R_S^{\cancel{3}\,2}}{R_T^3} M_T} = \sqrt{2.6,67.10^{-11}.250^2.\frac{(6,95.10^8)^2}{(6,38.10^6)^3}.5,97.10^{24}}$

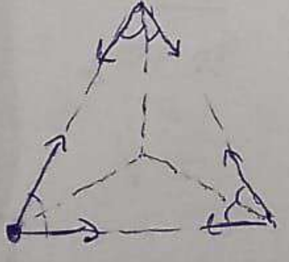
$\cong 3.10^8 m/s = c$

08 a)



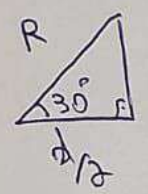
$F_R^2 = F^2 + F^2 + 2F.F.\cos 60° = 3F^2$

$\Rightarrow F_R = F\sqrt{3} = \frac{Gm^2}{d^2}\sqrt{3}$



F_R está na bissetriz (simetria) e aponta para o centro.

b) Para continuarem nessa distância e em órbita circular, F_R deve ser a resultante centrípeta, de raio R:

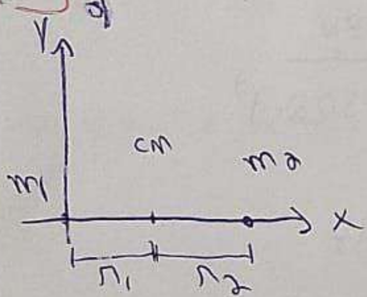


$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{2R} \Rightarrow R = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Logo: $F_R = F_{cp} \Rightarrow m\omega^2 R = \frac{Gm^2}{d^2}\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \omega^2 \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{Gm^2}{d^2}\sqrt{3} \to \omega = \sqrt{\frac{3Gm^2}{d^3}}$$

09



$$r_1 = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot r}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot r$$

$$r_2 = r - r_1 = r - \frac{m_2 r}{m_1+m_2} \Rightarrow r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot r$$

A única força atuando é a gravitacional: $F_G = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

Que é a resultante centrípeta. Para m_1:

$$F_G = F_{cp1} \Rightarrow \frac{G\cancel{m_1}m_2}{r^2} = \frac{\cancel{m_1}}{r_1}\cdot\left(\frac{2\pi r_1}{T}\right)^2 \Rightarrow \frac{Gm_2}{r^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2}$$

$$\Rightarrow \frac{G}{4\pi^2} = \frac{r^2}{m_2 T^2}\cdot\frac{m_2 \cdot r}{m_1+m_2} \Rightarrow \frac{G}{4\pi^2} = \frac{r^3}{T^2(m_1+m_2)}$$

Terra-Sol: $F_G = F_{cp} \Rightarrow \frac{GM_S M_T}{R^2} = \frac{\cancel{M_T}}{R}\cdot\frac{4\pi^2 R^2}{T_S^2}$

$$\Rightarrow \frac{G}{4\pi^2} = \frac{R^3}{M_S \cdot T_S^2} = \frac{r^3}{(m_1+m_2)\cdot T^2} \Rightarrow \left(\frac{T}{T_S}\right)^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cdot \frac{M_S}{m_1+m_2}$$

b) $\begin{cases} m_1 + m_2 = 3{,}1 M_S \\ r = 19{,}9 \text{ UA} \\ R = 1 \text{ U.A} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{T}{T_S}\right)^2 = \frac{M_S}{3{,}1 M_S}\left(\frac{19{,}9}{1}\right)^3 \Rightarrow T = 50{,}42 \text{ anos}$

c) $r_1 = \frac{0{,}9}{3{,}1} \cdot 19{,}9 = 5{,}77 \text{ U.A}$

$r_2 = 19{,}9 - 5{,}77 = 14{,}13 \text{ U.A}$

10 Sejam V_1 e V_2 suas velocidades em r. Pela conservação do momento linear:

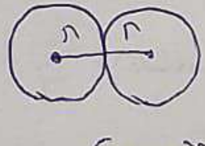
$P_i = P_F \Rightarrow 0 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \Rightarrow V_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot V_1$

Conservação da energia mecânica:

$E_i = E_F \Rightarrow U_i + K_i = U_F + K_F \Rightarrow -\frac{G m_1 m_2}{r_0} = -\frac{G m_1 m_2}{r} + \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}$

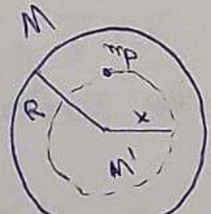
$\Rightarrow G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{m_1 V_1^2}{2}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \Rightarrow V_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{m_1 + m_2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$

$V_2 = -\frac{m_1}{m_2} V_1 = -m_1 \sqrt{\frac{2G}{(m_1 + m_2)} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$

11 

$m = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$

$F_G = \frac{G m \cdot m}{(2r)^2 \cdot 9{,}8} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}}{4 \cdot 9{,}8 \cdot \cancel{(0{,}5)^2}} \cdot (11{,}3 \cdot 10^3)^2 \cdot \frac{16\pi^2}{9} \cdot (0{,}5)^{\cancel{6}\,4} = 2{,}38 \cdot 10^{-4} \text{ kgf}$

12 M
a) 

$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{M'}{\frac{4\pi}{3} x^3} \Rightarrow M' = \frac{x^3}{R^3} \cdot M$

$F_G = -\frac{G m_p M'}{x^2} = -\frac{G m_p}{x^2} \cdot \frac{x^3}{R^3} \cdot M = -\frac{G M m_p}{R^3} \cdot x = -Kx$

Lei de Hooke

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_p}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{(6{,}4 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9 \cdot 10^{24}}} = 5128\,s$

$= 84{,}5 \text{ min}$

b) $E_m = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$ ∴ $E_{sup} = E_{centro} \Rightarrow \frac{kR^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$

$$\Rightarrow v = R\sqrt{\frac{k}{m}} = R.\frac{2\pi}{T} = 6,4.10^6.\frac{2\pi}{5128} = 7,84 \text{ Km/s}$$

13 Seja dm a massa de uma casca esférica de raio x: $dm = \rho V = \rho\, 4\pi x^2 dx$

Se $x > r$, essa casca não produz campo em r (interno).

Se $x < r$, é como se toda a massa dm estivesse no centro da casca. O efeito em r é:

$$\frac{dF}{m} = -\frac{G\,dm}{r^2} = -\frac{G}{r^2}.\rho 4\pi x^2 dx = -\frac{4\pi\rho G}{r^2}x^2 dx$$

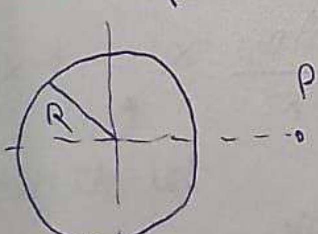
$$\Rightarrow \frac{F}{m} = -\frac{4\pi\rho G}{r^2}\int_a^r x^2 dx = -\frac{4\pi\rho G}{3r^2}(r^3 - a^3) = -\frac{4\pi\rho G}{3}.r\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$

Uma casca de raio x, com x bem próximo de r, tem efeito: $\frac{dF}{m} = -\frac{4\pi\rho G}{r^2}.x^2 dx \cong -4\pi\rho G.dx$ (linear)

Logo, para uma camada delgada:

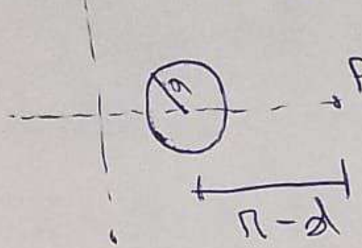
$$\frac{F}{m} = -4\pi\rho G\int_a^r dx = -4\pi\rho G(r-a)$$

14 Esfera maciça, de raio R, distante r do ponto P:



$$\frac{F}{m_p} = -\frac{GM}{r^2}$$

Esfera maciça, de raio a, distante (r-d) de P

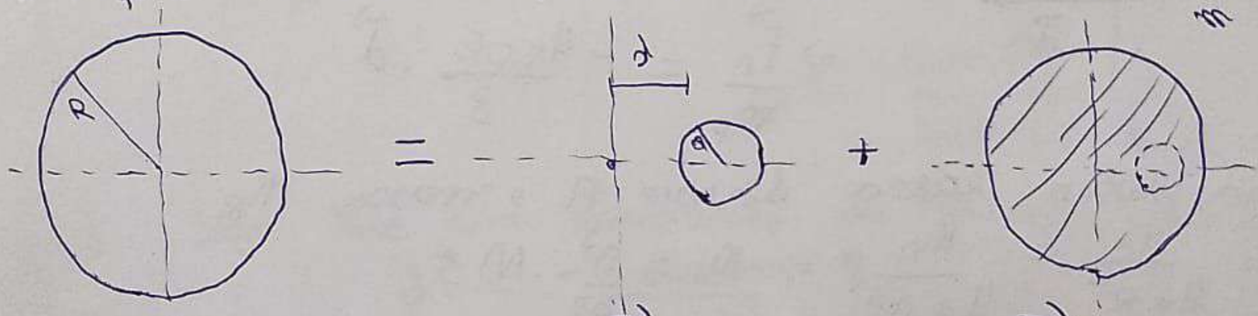


$$\frac{F_a}{m_p} = -\frac{G m_a}{(r-d)^2}$$

Mas: $\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} = \frac{m_a}{\frac{4\pi}{3}a^3} \rightarrow m_a = \frac{a^3}{R^3}\cdot M$

$$\Rightarrow \frac{F_a}{m_p} = -\frac{GM}{(r-d)^2}\cdot\frac{a^3}{R^3} = -\frac{GM}{r^2}\cdot\frac{(a/R)^3}{(1-\frac{d}{r})^2}$$

A esfera maciça de raio R é composta pela esfera maciça de raio a mais uma porção oca (sem a esfera de raio a), que produz um campo $\frac{\vec{F}_c}{m}$:



$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_c$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{F}_c}{m_p} = \frac{\vec{F}}{m_p} - \frac{\vec{F}_a}{m_p} \Rightarrow \frac{\vec{F}_c}{\vec{F}} = 1 - \frac{F_a}{F}$$

$$= 1 - \frac{GM}{r^2}\cdot\frac{(a/R)^3}{(1-\frac{d}{r})^2}\cdot\frac{r^2}{GM} = 1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3\cdot\frac{1}{\left[1-\frac{d}{r}\right]^2}$$

b) Seja r_1 a distância de P' até O. O efeito da esfera maciça de R em P' seria dado por:

$$\frac{\vec{F}_1}{m_p} = -\frac{GM}{R^3}\vec{r}_1 \qquad \left(\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m'}{\frac{4\pi}{3}r_1^3}\right)$$

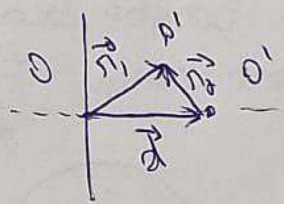
Seja r_2 a distância de p' até O', da esfera de raio a, mas de densidade $-\rho$:

$$\frac{M_a}{\frac{4\pi}{3} r_2^3} = -\frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} \Rightarrow M_a = -M \cdot \frac{r_2^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{F_2}}{m_p} = -\frac{G}{r_2^2}\left(-\frac{M r_2^3}{R^3}\right) = \frac{GM}{R^3} \cdot \vec{r_2}$$

Logo: $\frac{\vec{F_R}}{m_p} = \frac{\vec{F_1}}{m_p} + \frac{\vec{F_2}}{m_p} = -\frac{GM}{R^3}\vec{r_1} + \frac{GM}{R^3}\vec{r_2} = \frac{GM}{R^3}\left(\vec{r_2} - \vec{r_1}\right)$

$$= \frac{4\pi\rho G}{3}\left(\vec{r_2} - \vec{r_1}\right)$$

Mas: 

$\vec{r_1} = \vec{d} + \vec{r_2} \Rightarrow \vec{r_2} - \vec{r_1} = -\vec{d}$

$$\Rightarrow \frac{\vec{F_R}}{m_p} = -\frac{4\pi\rho G}{3} \cdot \vec{d}$$

$\boxed{15}$ Seja uma esfera de raio r e massa M_R:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M_R}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow M_R = \frac{r^3}{R^3} \cdot M$$

Vamos adicionar nela uma casca esférica de raio r, espessura dr e massa dm:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{dm}{4\pi r^2 \cdot dr} \Rightarrow dm = \frac{3M}{R^3} \cdot r^2 \cdot dr$$

Ao adicionar essa casca na esfera r, a variação da energia potencial será de:

$$dU_r = -\frac{G \cdot M_r \cdot dm}{r} = -\frac{G}{r} \cdot \frac{r^3}{R^3} \cdot M \cdot \frac{3M}{R^3} r^2 dr = -\frac{3GM^2}{R^6} \cdot r^4 dr$$

Logo: $U_{esf} = \int_0^R dU_r = -\frac{3GM^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R}$

16 Seja dm um elemento de massa do fio, a uma distância x da partícula m, com $D-L \le x \le L$

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx} \rightarrow dm = \frac{M}{L}\,dx$$

Atração entre dm e m:

$$dF = -\frac{Gm}{x^2}\cdot\frac{M}{L}\,dx = -\frac{GmM}{L}\cdot\frac{dx}{x^2}$$

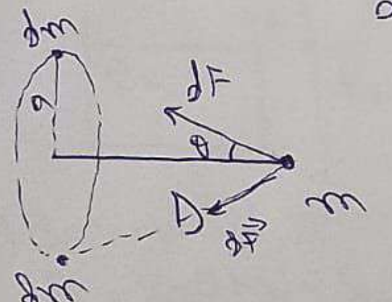
$$\rightarrow F = \int_{D-L}^{D} dF = -\frac{GmM}{L}\int_{D-L}^{D} x^{-2}\,dx = -\frac{GmM}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_{D-L}^{D}$$

$$= -\frac{GmM}{L}\left[-\frac{1}{D} + \frac{1}{D-L}\right]$$

$$= -\frac{GmM}{D(D-L)} \rightarrow d$$

17 Seja dm um elemento de massa do anel.

$$d\vec{F} = -\frac{Gm\,dm}{(a^2+D^2)}$$



Para dm, existe outro dm oposto no anel, que vai cancelar a componente vertical. Logo, cada dm contribui com:

$$dF_x = dF\cdot\cos\theta = -\frac{Gm\,dm}{(a^2+D^2)}\cdot\frac{D}{\sqrt{a^2+D^2}}$$

$$\Rightarrow F_R = \int dF_x = -\frac{GmD}{(a^2+D^2)^{3/2}}\int dm = -\frac{GmMD}{(a^2+D^2)^{3/2}}$$