群与代数表示论

2020 春

一般线性群表示理论

姓名: 毛松涛　　ID:518070910117

jarlly678@126.com

2020 年 6 月 7 日

目录

摘 要

在这片文章中, 我们讨论了一般线性群的表示理论. 首先, 我们简单介绍了张量空间的概念, 并且引入了对称群和一般线性群以及群代数在其上面的作用. 并介绍了其所诱导的特殊的子空间: 对称张量空间和反对称张量空间, 也给出了著名的 Schur-Weyl 定理. 接下来, 我们引入了杨中心化子的概念, 并对张量空间的分解进行了阐述. 紧接着, 我们对于全文的主定理进行了证明, 并且通过 Schur 模对 $GL(V)$ 的表示进行了剖析, 给出了它的不可约的 n 次齐次表示, 多项式表示, 和有理表示, 并给出了其在 $SL(V)$ 上限制的结果; 之后, 我们对于表示的维数和表示的特征标的计算进行了讨论. 最后, 我们通过一些特殊例子来展现这个表示.

1 引言

V 是一个有限维向量空间, $GL(V)$ 是 V 上的一般线性群,$\mathbb{F}GL(V)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的群代数, 我们在此文章中将 $\mathbb{F}$ 取做为复数域 $\mathbb{C}$. 一般线性群的表示在数论, 代数几何, 量子拓扑等学科中都具有广泛的应用, 因此研究其表示显得非常重要. 而一般线性群的表示和对称群的表示具有着密切关系, 其中最著名的当属 1927 年 Schur 所提出的 Schur-Weyl 定理.$\mathbb{F}S_n$ 的表示理论在 1900 年被 Alfred Young 发现, 当时所用的杨表和杨图的概念之后也被应用于一般线性群的表示理论之中. 此篇文章所利用的工具就是张量空间和杨表中杨中心化子的概念, 对于一般线性群的表示和其维数, 特征标等性质进行了解析, 此文大部分通过模论的语言对一般线性群的表示进行刻画. 此文主定理的证明主要参考了 [1] 和 [2]. 而关于 Schur-Weyl 对偶定理, 也参考了 [3], 对于特征标和维数参考了 [1] 和 [4], 其中所用到的关于杨图和杨表的定义, 可以参考我的另一篇关于对称群表示论的文章 [5]. 其中部分证明由于过于繁琐或与表示理论关联不大, 此文没有叙述, 但是在以上参考文献中都有证明的详细过程.

2 张量空间与 Schur-Weyl 对偶

首先我们在引入具体的定理之前, 介绍所需要的概念和工具: 张量空间, 并在最后引入一个强大的定理:Schur-Weyl 对偶定理, 这是之后一切讨论的前提.

2.1 n 次张量空间

定义 2.1 (n 次张量空间)**.** V 是一个有限维向量空间, 则 V 的 n **次张量空间** (tensor power) 定义为

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{次}} \quad , \quad V^{\otimes 0} = \mathbb{C}$$

定义 2.2 ($GL(V)$ 在 $V^{\otimes n}$ 的作用)**.** V 是一个有限维向量空间, 则 $GL(V)$ 在 $V^{\otimes n}$ 上有一个自然的作用

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_n$$

此作用可以自然地线性扩充为群代数 $\mathbb{C}GL(V)$ 的作用.

定义 2.3 (S_n 在 $V^{\otimes n}$ 的作用). V 是一个有限维向量空间, 则 S_n 在 $V^{\otimes n}$ 上有一个自然的作用

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$$

此作用可以自然地线性扩充为群代数 $\mathbb{C}S_n$ 的作用.

比较容易验证以上两个作用是良定义的, 在此处不做过多说明. 我们也可以理解为从群代数 $\mathbb{C}S_n$ 和 $\mathbb{C}GL(V)$ 到张量空间上的线性映射的一个代数同态, 具体形式如下

$$\begin{aligned} \mathbb{C}S_n \to &\quad \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V^{\otimes n} \\ \sigma \mapsto &\quad (v \mapsto \sigma v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}GL_n(V) \to &\quad \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V^{\otimes n} \\ g \mapsto &\quad (v \mapsto gv) \end{aligned}$$

2.2 张量空间的子空间

$\mathbb{C}S_n$ 与 $\mathbb{C}GL(V)$ 在 $V^{\otimes n}$ 多行的作用均为线性映射, 因此, 其像为一个 $V^{\otimes n}$ 的一个子空间. 在这里为了定理书写方便, 我们将一般线性群的群代数作用于 $V^{\otimes n}$ 后的像给出如下记号. 并给出了对称张量和反对称张量的定义.

定义 2.4. V 是一个有限维向量空间, $a \in \mathbb{C}S_n$, 则我们将 a 作用与 $V^{\otimes n}$ 的像记作

$$aV^{\otimes n} = \{\sigma v | v \in V^{\otimes n}\}$$

定义 2.5 (对称张量). V 是一个有限维向量空间, 则 V 的 n **次对称张量空间** (symmetric tensors) 定义为

$$S^n V = \{x \in V^{\otimes n} : \sigma x = x \text{ 对于任意的 } \sigma \in S_n \}$$

性质 2.6. *V 是一个有限维向量空间, 则 $\Lambda^n V = sV^{\otimes n} \cong V^{\otimes n}/Y$, 其中 $s = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$,*

$$Y = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{x - \sigma x : x \in V^{\otimes n}, \sigma \in S_n\}$$

定义 2.7 (反对称张量). V 是一个有限维向量空间, 则 V 的 n **次反对称张量空间** (antisymmetric tensors) 定义为

$$\Lambda^n V = \{x \in V^{\otimes n} : \sigma x = \mathrm{sgn}(\sigma) x \text{ 对于任意的 } \sigma \in S_n \}$$

性质 2.8. *V 是一个有限维向量空间, 则 $\Lambda^n V = aV^{\otimes n} \cong V^{\otimes n}/X$, 其中 $a = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma$,*

$$X = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_n : \text{ 存在 } i \neq j \text{ 使得 } v_i = v_j \}$$

以上命题是代数中的一般结论, 在此不作详细说明.

2.3 对偶空间

为更好阐述一般线性群的表示理论, 我们接下来引入对偶空间的概念.

定义 2.9 (对偶空间)**.** V 是一个有限维向量空间, 则 V 的**对偶空间** (dual space) 定义为

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$$

性质 2.10. *V 是一个有限维向量空间, 则关于对偶和对称张量, 反对称张量的关系有如下性质成立:*

$$\Lambda^n(V^\star) \cong (\Lambda^n V)^\star$$

$$S^n(V^\star) \cong (S^n V)^\star$$

2.4 Schur-Weyl 对偶

我们已经知道 $\mathbb{C}S_n$ 和 $\mathbb{C}GL(V)$ 在 $V^{\otimes n}$ 上都有自然的作用, 接下来就需要考察两者的关系,Schur 在 1929 年给出了以下定理.

引理 2.11. *V 是一个 m 维向量空间, 则 $\mathbb{C}S_n$ 和 $\mathbb{C}GL(V)$ 在 $V^{\otimes n}$ 上的作用可交换.*

这是比较容易验证的, 但是下一条定理则显得更加强大且并不显然.

定理 2.12 (Schur-Weyl 对偶)**.** *V 是一个 m 维向量空间, 则*

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_n}(V^{\otimes n}) \cong \mathbb{C}GL(V)$$

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}GL(V)}(V^{\otimes n}) \cong \mathbb{C}S_m$$

这个定理看似简单, 但实则巧妙. 它断言了在 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ 中 $\mathbb{C}S_n$ 作用的像和 $\mathbb{C}GL(V)$ 作用的像互为彼此的中心化子. 也就是 $\phi : \mathbb{C}S_n \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}GL(V)}(V^{\otimes n})$ 和 $\psi : \mathbb{C}GL(V) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}S_n}(V^{\otimes n})$ 是代数同态.

但是由于此定理证明比较繁琐, 可见参考文献 [1] 和 [3].

3 张量分解

很明显的 $V^{\otimes n}$ 已经可以称为 $\mathbb{C}GL(V)$ 的一个表示, 但是这样表示太过于粗糙, 因此我们应该考虑其不可约表示, 因此就需要将 $V^{\otimes n}$ 进行分解, 由于在特征为 0 的域上, 易知这是一个半单模, 我们可以将其分解为若干个不可约 $\mathbb{C}GL(V)$-模的直和, 关于如何分解, 需要借助关于对称群表示理论中的工具.

3.1 杨中心化子

我们需要借助在对称群的表示理论中的工具———杨表和杨图, 并引入一个概念——杨中心化子, 在此处对于之前涉及的定义只做粗略介绍, 可以参考作者的另一篇文章——对称群表示理论 [5]

定义 3.1 (划分)**.** 正整数 n 的一个**划分** (partition) 是指一个正整数数组 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$, 满足 $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$, 其中每个 λ_i 均为正整数, 并且 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_l$, 记作 $\lambda \vdash n$. 这里 l 称为这个划分的长, 用 $P(n)$ 表示 n 划分的方法数.

定义 3.2 (杨图)**.** 一个**杨图** (Young diagram) 指的是有限多个方格按行左对齐排列, 并且每一行方格的数量都是非严格单调递减的, 已知每一个杨图对应了一个划分, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$ 对应的杨图为一共 l 行, 并且第 i 行有 λ_i 个方格的杨图, 称其为 λ 型杨图.

定义 3.3 (杨表)**.** 一个**杨表** (Young tableau), 指的是将 $1, \cdots, n$ 这 n 个数不重复且不遗漏填入一个杨图中所获得的表, 其中 n 指杨图中方格的个数. 设 $\lambda \vdash n$, 则 λ 型杨图填充 n 个数所得的所有表称为 λ 型杨表.

定义 3.4 (标准杨表)**.** 一个杨表被称为**标准杨表**, 如果杨表中每一行和每一列的数字都是递增的.

定义 3.5 (行群)**.** 设 $\lambda \vdash n$, 对于称为 λ 型杨表 t, 可以定义它的**行群** R_t:

$$R_t = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ 保持 } t \text{ 的每行元素不变}\}$$

定义 3.6 (列群)**.** 设 $\lambda \vdash n$, 对于称为 λ 型杨表 t, 可以定义它的**列群** C_t:

$$C_t = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ 保持 } t \text{ 的每列元素不变}\}$$

以上均为阐述对称群的表示所使用的定义, 接下来, 介绍一个新的定义, 这是引入 Schur 模的关键.

定义 3.7 (杨中心化子)**.** t_λ 是一个 λ 型杨表, 则定义**杨中心化子**:

$$h(t_\lambda) = \sum_{r \in R_{t_\lambda}, c \in C_{t_\lambda}} \operatorname{sgn}(c) rc$$

3.2 张量分解

定理 3.8. *V 是一个有限维向量空间, 则*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{t_\lambda : \lambda \vdash n} h(t_\lambda) V^{\otimes n}$$

在此处 t_λ 取遍所有的 $\lambda \vdash n$ 的 λ 型标准杨表.

引入杨中心化子之后, 由 Schur-Weyl 对偶定理, 因此我们们可知 $h(t_\lambda)V^{\otimes n}$ 是一个 $V^{\otimes n}$ 的子 $\mathbb{C}GL(V)$-模.

由于对于同一个划分 λ 的两个不同杨表 t_1 与 t_2, 易知不同杨表的杨中心化子是彼此共轭的: 存在 $\sigma \in S_n$, $\sigma h(t_{1\lambda})\sigma^{-1} = h(t_{2\lambda})$, 因此其表示互相同构, 我们可以将其记为 h_λ. 我们将举以下例子说明.

例 3.9. 若 $\lambda = (1^n)$, 则 $h_\lambda V^{\otimes n} \cong \Lambda^n V$.

例 3.10. 若 $\lambda = (n)$, 则 $h_\lambda V^{\otimes n} \cong S^n V$.

例 3.11. $n = 2$ 时, 有分解 $V \otimes V \cong \Lambda^2 V \oplus S^2 V$.

引理 3.12. *V 是一个 m 维向量空间, $h_\lambda V^{\otimes n}$, $\lambda \vdash n$ 是互不同构的 $\mathbb{C}GL(V)$-模. 进一步, 若 M 是一个 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_n}(V^{\otimes n})$-模且 M 通过自然映射 $\mathbb{C}GL(V) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}S_n}(V^{\otimes n})$ 的限制被视作 $\mathbb{C}GL(V)$-模, 则 M 同构于若干个 $h_\lambda V^{\otimes n}$ 的直和.*

以上引理阐述了 $V^{\otimes n} = \bigoplus_{t_\lambda:\lambda\vdash n} h(t_\lambda)V^{\otimes n}$ 是将 $V^{\otimes n}$ 分解为 $\mathbb{C}GL(V)$-子模, 这些子模要么是不可约的, 要么是 0, 但是一下那些是 0? 以下定理给出了解释.

定理 3.13. *V 是一个 m 维向量空间, 则设 $\lambda \vdash n$, 则*

$$\dim_{\mathbb{C}} h_\lambda V^{\otimes n} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \lambda_{m+1} \neq 0 \\ 1, & \text{如果 } \lambda_{m+1} = 0 \text{ 且 } \lambda_1 = \cdots = \lambda_m \\ \geq 2, & \text{其他} \end{cases}$$

对于以上的定理只是做系统性的阐述, 是为下一节的主定理做铺垫, 在此处不做详细证明. 证明可以参考文献 [1] 和 [4].

4 Schur 模与 $GL(V)$ 的表示

通过以上介绍张量空间和其分解之后, 我们已经知道了一些 $\mathbb{C}GL(V)$ 的不可约表示, 接下来我们将系统的介绍其不可约表示, 我们首先将不可约表示通过进行分类:n 次齐次表示, 多项式表示和有理表示. 这三种表示并不是划分关系, 而是一种包含关系. 我们需要通过 Schur 模对 $\mathbb{C}GL(V)$ 的不可约表示进行刻画, 并将其限制与 $\mathbb{C}SL(V)$ 上得出更多的结果.

4.1 模的分类

定义 4.1. V 是一个 m 维向量空间, 一个有限维的有一组 $w_1, \cdots, w_n$ 为基的 $\mathbb{C}GL(V)$-模 M, 称它为有理的 (多项式的,n 次齐次的), 如果存在有理的 (多项式的,n 次齐次的) 函数 $f_{ij}(X_{rs})(1 \leq i, j \leq h$,$m^2$ 个变量 X_{rs}, $1 \leq r, s \leq m)$ 的映射 $(A_{rs})_{1\leq r,s\leq m} \mapsto (f(A_{rs}))_{1\leq r,s\leq m}$:

$$GL_m(\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{基 } e_i} GL(V) \xrightarrow{\text{表示}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M) \xrightarrow{\text{基 } w_i} M_h(\mathbb{C})$$

容易知道这三种表示具有包含关系, 因此我们通过一些例子来体现他们的联系与区别.

例 4.2. $GL(V)$ 在 $V^{\otimes n}$ 上的作用所导出的自然表示是 n 次齐次表示, 自然为多项式表示和有理表示.

例 4.3. $GL(V)$ 在 V 上的自然作用所导出的对偶表示 V^* 是有理表示但不是多项式或 n 次齐次表示.

4.2 n 次齐次模

定义 4.4 (Schur 模)**.** V 是一个 m 维向量空间, 对于 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$ 且 $\sum_i \lambda_i = n$, 定义

$$D_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)}(V) = h_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)}(V^{\otimes n})$$

将其称为 **Schur 模**或 **Weyl 模**.

定理 4.5. *V 是一个 m 维向量空间, 每个 n 次齐次 $\mathbb{C}GL(V)$-模都是不可约子模的直和, Schur 模 $D_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)}(V)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$, 且 $\sum_i \lambda_i = n$ 给出了所有互不同构的 n 次齐次 $\mathbb{C}GL(V)$-模.*

这是一个构造性的证明, 可以参考 [1].

4.3 多项式模

引理 4.6. *每个 $GL(\mathbb{C})$ 的多项式模都可分解为子模的直和, 每个子模中 $g \in \mathbb{C}^\star$ 的作用即为 g^r 的数乘.*

引理 4.7. *V 是一个 m 维向量空间, 每个多项式 $\mathbb{C}GL(V)$-模都可分解为一些 n 次齐次 $\mathbb{C}GL(V)$-模的直和.*

证明. 取表示 $\rho : GL(V) \to GL(U)$ 是一个 $GL(V)$ 在空间 U 上的表示, 则有一个嵌入映射 $C^\star \to GL(V)$. 因此可以将 U 视作为 $\mathbb{C}^\star$ 的多项式表示, 因此由 4.7,

$$U = U_0 \oplus \cdots \oplus U_N$$

其中 $\alpha 1 \in GL(V)$ 作用在 U_n 上为 α^n 的数乘.
设 $u \in U_n$, $g \in GL(V)$, 将 gu 写成如下形式

$$gu = u_0 + \cdots u_N$$

其中 $u_i \in U_i$, $0 \leq i \leq N$. 则对于 $\alpha \in \mathbb{C}^\star$, 有 $(\alpha 1)gu = g(\alpha 1)u$. 因此

$$u_0 + \alpha u_1 + \cdots + \alpha^N u_N = \alpha^n u_0 + \cdots + \alpha^n u_N$$

因此对于 $i \neq n$, $u_i = 0$. 因此 $gu \in U_n$, 并且 U_n 是 U 的 $\mathbb{C}GL(V)$-子模. 因此 $\alpha 1$ 作用在 U_n 上为 α^n 的数乘, 则 U_n 是一个 n 次齐次 $\mathbb{C}GL(V)$-模. □

定理 4.8. *V 是一个 m 维向量空间, 每个多项式 $\mathbb{C}GL(V)$-模都是不可约子模的直和, Schur 模给出了所有互不同构的不可约 n 次齐次 $\mathbb{C}GL(V)$-模, Schur 模 $D_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)}(V)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$ 给出了所有互不同构的不可约多项式 $\mathbb{C}GL(V)$-模.*

4.4 有理模

定义 4.9 (行列式模). V 是一个 m 维向量空间, 设 $n \in \mathbb{Z}$, 则一维的 $\mathbb{C}GL(V)$-模对应于表示

$$GL(V) \to C^{\star}$$

$$g \mapsto (\det g)^n$$

称其为行列式模, 记作 $\det^n$

性质 4.10. *V 是一个 m 维向量空间, 则*

$$\det{}^1 \cong \Lambda^m V, \quad \det{}^n \cong (\det{}^1)^n \text{ 若 } n \geq 0\ , \quad \det{}^n \cong (\det{}^n)^{\star} \text{ 若 } n \geq 0$$

定义 4.11. V 是一个 m 维向量空间, 我们可以将 Schur 模进行推广: 若 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$ 但 $\lambda_m < 0$, 可定义

$$D_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)}(V) = D_{(\lambda_1-\lambda_m,\cdots,\lambda_{m-1}-\lambda_m,0)}(V) \otimes \det{}^{\lambda_m}$$

定理 4.12. *V 是一个 m 维向量空间, 每个有理 $\mathbb{C}GL(V)$-模都是不可约子模的直和, Schur 模 $D_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)}(V)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$ 给出了所有互不同构的不可约有理 $\mathbb{C}GL(V)$-模.*

证明. 有理函数 $f : GL(V) \to \mathbb{C}$ 有形式 $f = \frac{p}{\det^i}$, 其中 p 是一个多项式函数.
因此若 M 是一个有理 $\mathbb{C}GL(V)$-模则存在某个 N, 使得 $M_1 = M \oplus \det^N$ 是多项式模. 由于 M_1 可分解为不可约模的直和, 因此 M 也可分解为不可约模的直和. 因为 $\det^N$ 是一维表示, 因此若 M 不可约则 M_1 也不可约, 因此 M_1 有形式

$$M_1 \cong D_{(\mu_1,\cdots,\mu_m)}(V) \text{ 对于一些 } \mu_1 \geq \cdots \geq u_m$$

因此, $M = D_{(\mu_1-n,\cdots,\mu_m-n)}(V)$. □

推论 4.13. *每个一维的有理 $\mathbb{C}GL(V)$ 模均为 $\det^n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$*

4.5 $SL(V)$ 的表示

$SL(V)$ 为一般线性群, 即 V 上所有行列式为 1 的线性变换的全体, 接下来我们可以将 $\mathbb{C}GL(V)$ 的表示限制在 $\mathbb{C}SL(V)$ 上, 注意到行列式为 1 的事实, 在 $\mathbb{C}GL(V)$ 上的不同表示在 $\mathbb{C}SL(V)$ 上可以同构, 因此商去行列式的部分, 我们可以得到以下的结果.

定理 4.14. *V 是一个 m 维向量空间, 作为 $SL(V)$ 的表示, $D_\lambda V^{\otimes n} \cong D_\mu V^{\otimes n}$ 当且仅当对于每个 i, $\lambda_i - \mu_i$ 是相等的.*

推论 4.15. *V 是一个 m 维向量空间, 每个有理 $\mathbb{C}SL(V)$-模都是不可约子模的直和, Schur 模 $D_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)}(V)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n = 0$ 给出了所有互不同构的不可约有理 $\mathbb{C}SL(V)$-模.*

综合以上, 我们对于 $\mathbb{C}GL(V)$ 的不可约表示有以下总结:

$$n \text{ 次齐次表示} \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0, \sum_i \lambda_i = n$$

$$\text{多项式表示} \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0$$

$$\text{有理表示} \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$$

5 特征标和维数公式

在知道所有的不可约表示的方法后, 接下来就是确定不可约表示的维数和特征标, 在此处就需要用到两个著名的公式 Weyl 特征标公式和 Weyl 维数公式, 在不通过张量空间和杨中心化子写出不可约表示的时候, 直接根据其划分确定不可约表示的维数, 通过特征值计算特征标.

5.1 Weyl 特征标公式

定理 5.1 (Weyl 特征标公式). *V 是一个 m 维向量空间, $g \in GL(V)$, 其有特征值为 $x_1, x_2 \cdots, x_m$. 记 $x = (x_1 \cdots, x_m)^T$,χ_λ 为表示 h_λ 的特征标, 则*

$$\chi_\lambda(g) = \frac{|x^{l_1}, \cdots, x^{l_m}|}{|x^{m-1}, \cdots, 1|}$$

其中 $l_i = \lambda_i + m - i$.

对于特征标理论的证明, 可以参考文献 [4].

5.2 Weyl 维数公式

定理 5.2 (Weyl 维数公式). *V 是一个 m 维向量空间, 则*

$$\dim h_\lambda = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq m}(l_i - l_j)}{\prod_{1\leq i<j\leq m}(i-j)}$$

其中 $l_i = \lambda_i + m - i$.

证明. 对于任意的 $t \in \mathbb{C}$, 令 $x_m = 1, x_{m-1} = e^t, \cdots, x_1 = e^{(m-1)t}$, 记 $x = x = (x_1 \cdots, x_m)^T$, 则由范德蒙行列式公式可知

$$|x^{l_1}, \cdots, x^{l_m}| = \prod_{1\leq i<j\leq m}(e^{l_i t} - e^{l_j t})$$

其中次数最低的项为 $\prod_{1\leq i<j\leq m}((l_i - l_j)t)$. 同理 $|x^{m-1}, \cdots, 1| = \prod_{1\leq i<j\leq m}((j-i)t)$. 取 $g_t = \mathrm{diag}(x_1, \cdots, x_m)$, 则由 5.2,

$$\dim h_\lambda = \chi_\lambda(1) = \lim_{t\to 0}\chi_\lambda(g_t) = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq m}(l_i - l_j)}{\prod_{1\leq i<j\leq m}(i-j)}$$

□

这里用到了性质: 表示的维数等于表示在单位元上的特征标.

6 一些例子

最后我们通过一些例子来展示一些特殊的表示所对应的 λ 的取值, 我们也可以注意到, 对于某一个表示的对偶表示, 其对应的 λ 即为将各个分量取负, 再将排序的顺序颠倒即可.

例 6.1. V 是一个 m 维向量空间, 则对于 $\lambda = (0, 0, \cdots, 0, 0)$, 则 $D_\lambda(V)$ 为单位表示.

例 6.2. V 是一个 m 维向量空间, 则对于 $\lambda = (i, i, \cdots, i, i)$, 则 $D_\lambda(V)$ 为一维表示 $\det^i$.

例 6.3. V 是一个 m 维向量空间, 则对于 $\lambda = (1, 0, \cdots, 0, 0)$, 则 $D_\lambda(V)$ 为自然表示 V.

例 6.4. V 是一个 m 维向量空间, 则对于 $\lambda = (0, 0, \cdots, 0, -1)$, 则 $D_\lambda(V)$ 为自然表示的对偶表示 V^*.

例 6.5. V 是一个 m 维向量空间, 则对于 $\lambda = (n, 0, \cdots, 0, 0)$, 则 $D_\lambda(V)$ 为对称张量表示 $S^n V$.

例 6.6. V 是一个 m 维向量空间, 则对于 $\lambda = (0, 0, \cdots, 0, -n)$, 则 $D_\lambda(V)$ 为对称张量表示的对偶表示 $(S^n V)^*$.

例 6.7. V 是一个 m 维向量空间, 则对于 $\lambda = (1, \cdots, 1, 0 \cdots, 0)$(其中前 n 个为 1, 后 $m-n$ 个为 0, 且 $n \leq m$), 则 $D_\lambda(V)$ 为反对称张量表示 $\Lambda^n V$.

例 6.8. V 是一个 m 维向量空间, 则对于 $\lambda = (0, \cdots, 0, -1 \cdots, -1)$(其中前 $m-n$ 个为 0, 后 n 个为 -1, 且 $n \leq m$), 则 $D_\lambda(V)$ 为反对称张量表示的对偶表示 $\Lambda^n V$.

参考文献

[1] S. Martin and M. Stuart, *Schur algebras and representation theory.* Cambridge University Press, 1993, vol. 112.

[2] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory: a first course.* Springer Science & Business Media, vol. 129.

[3] R. Goodman and N. R. Wallach, *Symmetry, representations, and invariants.* Springer, 2009, vol. 255.

[4] V. Lakshmibai and J. Brown, *Flag varieties: an interplay of geometry, combinatorics, and representation theory.* Springer, 2018, vol. 53.

[5] "Representation theory of the symmetric group," Songtao Mao. [Online]. Available: https://bigbigchina-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/vn406_vip365_tech/EVBZpvVj7tFOr1oS6AqhfLUB_O_IIWatwyPKA_gmQgwsRw?e=41NVkn