群与代数表示论

2020 春

对称群表示理论

姓名: 毛松涛　　ID:518070910117

jarlly678@126.com

2020 年 6 月 6 日

目录

摘 要

在这片文章中, 我们讨论了对称群的表示理论. 首先, 我们简单介绍了划分的概念, 并且对于对称群 S_n 的共轭类的性质进行了简单的介绍, 同时引出了刻画对称群 S_n 和其群代数 $\mathbb{F}S_n$ 的工具: 杨图和杨表; 紧接着, 我们对于全文的主定理进行了证明, 并且通过 Specht 模对 S_n 的所有表示进行了剖析; 之后, 我们对于表示的维数和表示的特征标的计算进行了讨论, 同时, 我们介绍了对称群表示的限制和提升. 最后, 我们通过具体 S_3 的例子来简单回顾一下整个过程.

1 引言

设 n 是一个正整数, S_n 是 n 元对称群,$\mathbb{F}S_n$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的群代数, 当域 $\mathbb{F}$ 的特征为 0 或大于 n, 则群代数 $\mathbb{F}S_n$ 的任意表示都是半单的, 这个结论由 Maschke 在 1899 年得出的 Maschke 定理可以推得. 任何有限群都可以是对称群的子群, 因此, 任何有限群的表示都可以是对称群的表示的子表示, 因此研究对称群的表示至关重要. 而 $\mathbb{F}S_n$ 的表示理论在 1900 年被 Alfred Young 发现, 之后又被多人所改进. 这篇文章对于杨图和杨表的概念做了基本介绍, 并且利用置换模和 Specht 模对于 S_n 的表示和不可约表示进行了解析, 并分析了其性质如表示维数, 特征标, 表示的提升与限制等, 此文主定理的证明主要参考了 [1] 和 [2]. 而对于表示维数的计算两个公式, 分别参考了 [3] 和 [2], 对于特征标的计算公式 Frobenius 公式, 参考了 [4], 最后关于 S_n 表示的提升和限制的相关内容参考并总结了 [5] 和 [2] 中的描述. 由于关于维数和特征标计算的证明和 Branching 法则的证明过于繁琐且与表示论本身关联不大, 此文没有叙述, 但是在以上参考文献中都有证明的详细过程.

2 基本知识和定义

首先我们在引入具体的定理之前, 介绍所需要的概念和工具.

2.1 划分

定义 2.1 (划分)**.** 正整数 n 的一个**划分** (partition) 是指一个正整数数组 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$, 满足 $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$, 其中每个 λ_i 均为正整数, 并且 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_l$, 记作 $\lambda \vdash n$. 这里 l 称为这个划分的长, 用 $P(n)$ 表示 n 划分的方法数.

例 2.2. $n = 4$ 有五种划分的方法:$(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)$.

定义 2.3 (划分的控制)**.** 设 λ, μ 是 n 的两个划分, 我们说 λ控制μ, 并记作 $\lambda \lhd \mu$, 如果

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geq \mu_1 + \cdots + \mu_k$$

对于任意的 k 成立.

2.2 对称群的共轭类

定义 2.4 (置换的型)**.** S_n 为 n 元对称群, 则对于任意的 $\sigma \in S_n$, σ 可以唯一地写成若干个没有公共元素的积, 其中长为 r 的轮换共有 λ_r 个, 则称置换 σ 的**型**为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$

定理 2.5. *对称群 S_n 中两个置换共轭的充要条件是它们有相同的型.*

证明. 设 σ 和 σ' 是 S_n 中的两个置换, 如果 σ 和 σ' 共轭, 则存在 $\tau \in S_n$, 使得 $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$, 将 σ 表示成无公共元素的轮换的积:

$$\sigma = (ab\cdots c)\cdots(\alpha\beta\cdots\gamma)$$

则

$$\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a)\tau(b)\cdots\tau(c))\cdots(\tau(\alpha)\tau(\beta)\cdots\tau(\gamma))$$

这是因为

$$(\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(a)) = (\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a)) = \tau(b)$$

即当 σ 把 a 变成 b 时,$\tau\sigma\tau^{-1}$ 把 $\tau(a)$ 变成 $\tau(b)$, 于是 σ' 和 σ 有相同的型. 现设 σ 和 σ' 有相同的型:$\sigma = (ab\cdots c)\cdots(\alpha\beta\cdots\gamma)$, $\sigma' = (a'b'\cdots c')\cdots(\alpha'\beta'\cdots\gamma')$. 令

$$\tau = \begin{pmatrix} ab\cdots c\cdots\alpha\beta\cdots\gamma \\ a'b'\cdots c'\cdots\alpha'\beta'\cdots\gamma' \end{pmatrix}$$

则 $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma'$ □

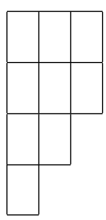
推论 2.6. *S_n 中共轭类的个数等于 n 的划分的个数.*

2.3 杨图与杨表

杨图与杨表的概念在 1900 年被 Alfred Young 所提出, 并用于研究对称群的群表示.

定义 2.7 (杨图)**.** 一个**杨图** (Young diagram) 指的是有限多个方格按行左对齐排列, 并且每一行方格的数量都是非严格单调递减的, 已知每一个杨图对应了一个划分, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$ 对应的杨图为一共 l 行, 并且第 i 行有 λ_i 个方格的杨图, 称其为 λ 型杨图.

例 2.8. 对于一个划分 $\lambda = (3, 3, 2, 1)$, λ 型杨图如下所示:



定义 2.9 (杨表)**.** 一个**杨表** (Young tableau), 指的是将 $1, \cdots, n$ 这 n 个数不重复且不遗漏填入一个杨图中所获得的表, 其中 n 指杨图中方格的个数. 设 $\lambda \vdash n$, 则 λ 型杨图填充 n 个数所得的所有表称为 λ 型杨表.

例 2.10. 如对于划分 $(2,1)$, 一共有 6 中杨表

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

定义 2.11 (标准杨表)**.** 一个杨表被称为**标准杨表**, 如果杨表中每一行和每一列的数字都是递增的. 我们将一个 λ 型杨图所含的 λ 型标准杨表的个数记为 f^λ.

例 2.12. 如对于划分, 标准杨表只有以下 2 种.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

2.4 置换模和 Specht 模

定义 2.13 (置换模)**.** 设 $\lambda \vdash n$, 记 M^λ 为一个以 λ 型杨表的行等价类为基的向量空间, 则 S_n 中的元素在 M^λ 上有一个自然的作用, 则称 M^λ 为**置换模**, 是 S_n 的一个表示.

定义 2.14 (行群)**.** 设 $\lambda \vdash n$, 对于称为 λ 型杨表 t, 可以定义它的**行群** R_t:

$$R_t = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ 保持 } t \text{ 的每行元素不变}\}$$

同样的, 我们可以定义一个杨表的列群:

定义 2.15 (列群)**.** 设 $\lambda \vdash n$, 对于称为 λ 型杨表 t, 可以定义它的**列群** C_t:

$$C_t = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ 保持 } t \text{ 的每列元素不变}\}$$

容易知道 S_n 中的元素对于所有行等价类的集合有一个自然的作用, 对于所有列等价类的集合也有一个自然的作用.

定义 2.16 (行等价类)**.** 我们说两个 λ 型杨表 t_1 和 t_2 **行等价**, 如果这两个杨表的对应的每行都包含相同的元素, 记为 $t_1 \sim t_2$. 容易知道这是一种等价关系, 记 $\{t\}$ 为 t 所处的等价类, 即 $\{t\} = \{t' | t' \sim t\}$.

例 2.17. 若划分为 $\lambda = (n)$, 则杨表只有一种行等价类为:

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline \end{array}$$

其对应的表示为一维的, 其基在所有 S_n 中所有的元素作用下不变. 因此 M^λ 为单位表示.

例 2.18. 若划分为 $\lambda = (1^n)$, 则杨表有 $n!$ 种行等价类, 而每个行等价类可以与 S_n 中的元素一一对应, 因此易知 M^λ 为正则表示.

接下来区别于置换模，可以定义一个杨表的列交错和 Specht 模的概念.

定义 2.19 (列交错和)**.** 设 $\lambda \vdash n$, 对于称为 λ 型杨表 t, 可以定义它的**列交错和**, 记为 e_t:

$$e_t = \sum_{\sigma \in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\{t\}$$

其中 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ 表示置换的符号: 即若 σ 是 S_n 中的奇置换, 则 $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$; 若 σ 是 S_n 中的偶置换, 则 $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$. $\sigma\{t\}$ 表示 σ 自然作用在行等价类 $\{t\}$ 上所得新的行等价类.

性质 2.20. *容易知道, 当 σ 取遍 C_t 时, $\{\sigma(t)\}$ 恰好不重复地取遍所有的行等价类, 因此*

$$|C_t| = \lambda \text{ 型杨表中行等价类的个数}$$

引理 2.21. *设 t 是一个杨表, π 是一个置换, 则 $e_{\pi t} = \pi e_t$.*

证明. 首先由和 2.5类似的讨论, 容易计算 $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$. 因此, 可以得到

$$\begin{aligned}
e_{\pi t} &= \sum_{\sigma \in C_{\pi t}} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\{\pi t\} \\
&= \sum_{\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\{\pi t\} \\
&= \sum_{\sigma \in C_t} \mathrm{sgn}(\pi\sigma'\pi^{-1})\pi\sigma'\pi^{-1}\{\pi t\} \\
&= \pi \sum_{\sigma \in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma')\sigma'\{t\} \\
&= \pi e_t
\end{aligned}$$

□

接下来我们可以通过以上引理从置换模的表示中提取对称群的不可约表示.

定义 2.22 (Specht 模)**.** 对于一个划分 λ, 其对应的 **Specht 模**, 记为 S^λ, 是一个 M^λ 中由所有 e_t 张成的子模, 其中 t 取遍所有的 λ 型杨表的列置换和.

例 2.23. 若划分为 $\lambda = (n)$, 则只有一种标准杨表为

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array}$$

因此其对应的表示为一维的, 且 $C_t = (1)$, 因此 $e_t = t$, 同时其只有一个行等价类, 因此 e_t 在所有 S_n 中所有的元素作用下不变. 其对应为单位表示.

例 2.24. 若划分为 $\lambda = (1^n)$, 则也只有一种标准杨表为

$$t = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array}$$

在 S_n 的作用下一共有 $n!$ 中行等价类, 因此, 则 e_t 为所有带符号的行等价类的和, 其中符号为该行等价类相对于 t 的置换的符号. 因此对于任意的 $\sigma \in S_n$, $\sigma e_t = \mathrm{sgn}(\sigma)e_t$. 由此可知 t 所对应的表示为符号表示, 即将所有的奇置换映射成 -1, 将所有的偶置换映射成 1.

3 S_n 的不可约表示

接下来的步骤, 我们就要证明: 对于每一个划分 λ, 其 Specht 模是 S_n 的一种不可约表示. 并且对于不同的划分,S^λ 互不同构, 且任何一种 S_n 的不可约, 都有一个划分 λ, 使得该表示同构于 S^λ. 这是一个强大的定理, 它完全阐释出了对称群 S_n 所有不重复的结构, 而我们接下来分成以下步骤来证明.

3.1 杨表的行列性质

引理 3.1. *设 λ, μ 是 n 的两个划分, t 是一个 λ 型杨表, t' 是一个 μ 型杨表, 若对于任意的 i, t' 的第 i 行的所有数字出现在 t 的不同的列中, 则*

$$\lambda \lhd \mu$$

证明. 我们可以按照以下步骤重新排列杨表中的数字

1. 使用 C_t 将 t' 第一行的所有出现数字在 t 中移动到第一行中, 因此我们有 $\lambda_1 \geq \mu_1$
2. 使用 C_t 将 t' 第二行的所有出现数字在 t 中移动到第二行中, 因此我们有 $\lambda_1+\lambda_2 \geq \mu_1+\mu_2$

以这种方式继续操作, 我们可以得到相应的结果 □

引理 3.2. *设 λ, μ 是 n 的两个划分, t 是一个 λ 型杨表, t' 是一个 μ 型杨表, 若 $\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\} \neq 0$ 则 $\lambda \lhd \mu$, 并且若 $\lambda = \mu$, 则 $\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\} = \pm e_t$.*

证明. 若 a 和 b 是 t' 同一行中的两个数, 则 $(ab)\{t'\} = \{t'\}$. 因此 a, b 是 t 中不同列的元素, 否则 $(ab) \in C_t$, 则有

$$\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\} = (ab)\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\} = \operatorname{sgn}((ab))\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\} = -\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\}$$

这与 $\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\} \neq 0$ 矛盾, 因此由 3.1, $\lambda \lhd \mu$.
若 $\lambda = \mu$, 由上述讨论知 $t' \in C_t t$, 因此 $\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\} = \pm\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t\} = \pm e_t$. □

推论 3.3. *给定 $m \in M^\lambda$ 和一个 λ 型杨表 t, 有 $\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma m \in \mathbb{F}e_t$.*

证明. 根据定义,m 是 $\{t'\}$ 的线性组合, 其中 t' 是 λ 型杨表. 同时, 根据 3.2, 我们知道 $\sum_{\sigma\in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\{t'\} = 0$ 或 $\pm e_t$, 得证 □

3.2 内积空间

定义 3.4 (M^λ 中内积)**.** 在 M^λ 上可定义对称双线性函数 $\langle -, - \rangle$:

$$\langle \{t\}, \{t'\} \rangle = \delta_{\{t\},\{t'\}} = \begin{cases} 1, & 若\{t\} = \{t'\}; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

易验证这是一个内积结构, 并且在 S_n 的作用下保持不变.

性质 3.5. 设 $V \subseteq M^\lambda$ 是一个子表示, 则 $V \supseteq S^\lambda$ 或 $V \subseteq (S^\lambda)^\perp$.

证明. 设 $v \in V$, 根据 3.3, 若 $\sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma v \neq 0$, 则 $e_t \in V$. 并且由于 e_t 形成了一个 S_n 作用下的单个轨道, 则对于任意的 t', $e_{t'} \in V$. 因此 $S^\lambda \subseteq V$ 否则 $\sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma v = 0$ 对于任意 $v \in V$ 和 t, 我们可以得到

$$0 = \left\langle \sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma v, \{t\} \right\rangle = \left\langle v, \sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\{t\} \right\rangle = \langle v, e_t\rangle$$

因此 $v \in (S^\lambda)^\perp$, 则 $V \subseteq (S^\lambda)^\perp$. $\square$

3.3 Specht 模与不可约表示

推论 3.6. *Specht* 模 S^λ 是 S_n 的不可约表示.

证明. 设 $V \subsetneq S^\lambda$ 是一个子表示. 根据 3.5, $V \subseteq (S^\lambda)^\perp$. 因此

$$V \subseteq S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$$

因此 S^λ 是不可约表示. $\square$

引理 3.7. 设 $f : M^\lambda \to M^\mu$ 是一个表示的映射且 $S^\lambda \not\subseteq \ker(f)$, 则 $\lambda \lhd \mu$, 并且若 $\lambda = \mu$, 则 f_{S_λ} 是一个数乘变换.

证明. 设 t 是一个 λ 型杨表. 若 $e_t \notin \ker(f)$, 则

$$0 \neq f(e_t) = f(\sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\{t\}) = \sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma f(\{t\})$$

由于 $f\{t\}$ 是 μ 型杨表的线性组合, 根据 3.2, 我们可知 $\lambda \lhd \mu$.
若 $\lambda = \mu$, 则根据 3.2, $\sum_{\sigma\in C_t} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma f(\{t\}) \in \mathbb{F}e_t$. 因此 $f(e_t)$ 是某个 e_t 的数乘倍, 并且由于 S_n 在 e_t 的作用是可迁的, 则一定存在一样的 α, 使得 $f(v) = \alpha v$ 对于任意 $v \in S^\lambda$ 均成立. $\square$

推论 3.8. 我们有 $M^\lambda = S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$, 并且 $(S^\lambda)^\perp$ 是一些 $\mu \lhd \lambda$ 且 $u \neq \lambda$ 的 $(S^\mu)^\perp$ 的直和. 并且任何 S_n 的不可约表示均同构于某个 S_λ.

证明. 在这里我们断言当 $S^\lambda \cong S^\mu$, 则 $\lambda = \mu$. 通过对同构的延拓选择 $f : M^\lambda \to M^\mu$, 有下图

$$\begin{tikzcd} M^\lambda \arrow[r, "f"] & M^\mu \\ S^\lambda \arrow[u] \arrow[r, "\cong"] & S^\mu \arrow[u] \end{tikzcd}$$

根据 3.7, $\lambda \lhd \mu$, 根据对称性知 $\mu \lhd \lambda$. 因此 $\lambda = \mu$.
因此由数量关系可知任何 S_n 的不可约表示都是 S^λ.
最后假设 $S^\mu \subseteq (S^\lambda)^\perp$, 则可以选择 f 为嵌入映射使得下图交换

$$\begin{tikzcd} M^\mu \arrow[r, "f"] & M^\lambda \\ S^\mu \arrow[u] \arrow[r] & (S^\lambda)^\perp \arrow[u] \end{tikzcd}$$

由 3.7, $\mu \lhd \lambda$, 因此由于 $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$ 知 $\mu \neq \lambda$. □

定理 3.9. 所有 n 的划分 $\lambda \vdash n$ 对应的 *Specht* 模构成了所有 S_n 的在 $\mathbb{F}$ 上的不可约代数表示.

此证明可以由上面的讨论直接给出.

推论 3.10. 将 S_n 的表示做线性扩充, 则所有 n 的划分 $\lambda \vdash n$ 对应的 *Specht* 模构成了所有 $\mathbb{F}S_n$ 的不可约代数表示.

定理 3.11. 设 λ 是一个划分, 则集合

$$\{e_t : t \text{ 是一个标准 } \lambda \text{ 型杨表}\}$$

构成了 S^λ 作为向量空间的一组基.

这是一个组合证明, 具体可以参见 [1], 基本方法是利用字典序将所有的标准型进行排列, 然后依次搜索和调整得到任何杨表的行等价类可以写成标准型杨表的行等价类的线性组合.

推论 3.12. 对于任意一个划分 λ,

$$\dim S^\lambda = f^\lambda$$

4 勾长公式和 Frobenius 公式

在知道所有的不可约表示的方法后, 接下来就是确定不可约表示的维数和特征标, 在此处就需要用到两个著名的公式勾长公式和 Frobenius 公式, 在不通过杨表写出不可约表示的形状的时候, 直接根据杨图的形状来计算不可约表示的维数和其特征标.

4.1 勾长公式

性质 4.1. 设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \vdash n$ 是一个划分, 则

$$\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_l!}$$

这是一个简单的组合计数公式, 证明在此处就不再赘述.

根据 3.12, 为了计算一个划分对应的不可约表示的维数 $\dim S^\lambda$, 我们只需计算其对应的标准杨表的个数 f^λ.

定理 4.2. n 是一个正整数, 则

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$$

证明. 在群表示论中, 所有不可约表示维数的平方和等于群的阶, 并且根据 3.12, 这个定理是显然的. □

定义 4.3. 设 λ 是一个杨图, 则对于每一个图中的方格 u, 我们可以定义一个方格的**勾** (hook): 这个方格所有正右侧和正下方的方格, 也包括这个方格本身. 对于勾中包含方格的数量, 称为方格 u 的**勾长** (hook-length), 将其记为 $h_\lambda(u)$.

例 4.4. 考虑一个划分为 $\lambda = (5, 5, 4, 2, 1)$, 则左下图表示了一个特定方格的勾, 右下图表示了所有方格的勾长

	u	$\times$	$\times$	$\times$
	$\times$			
	$\times$			

9	7	5	4	2
8	6	4	3	1
6	4	2	1	
3	1			
1				

定理 4.5 (Hook-length 公式)**.** 设 $\lambda \vdash n$ 是一个划分,$h_\lambda(u)$ 是对应杨图方格的勾长, 则

$$\dim S^\lambda = f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{u\in\lambda} h_\lambda(u)}$$

相关证明可参阅 [3].

例 4.6.

$$\dim S^{(5,5,4,2,1)} = f^{(5,5,4,2,1)} = \frac{17!}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6^2\cdot 5\cdot 4^3\cdot 3^2\cdot 2\cdot 1^5} = 3403400$$

定理 4.7 (行列式算法公式)**.** 设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l) \vdash n$ 是一个划分, 则

$$\dim S^\lambda = f^\lambda = n! \left| \frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right|$$

相关证明可参阅 [2].

例 4.8.

$$\dim S^{(5,5,4,2,1)} = f^{(5,5,4,2,1)} = 17! \begin{vmatrix} \frac{1}{5-1+1} & \frac{1}{5-1+2} & \frac{1}{5-1+3} & \frac{1}{5-1+4} & \frac{1}{5-1+5} \\ \frac{1}{5-2+1} & \frac{1}{5-2+2} & \frac{1}{5-2+3} & \frac{1}{5-2+4} & \frac{1}{5-2+5} \\ \frac{1}{4-3+1} & \frac{1}{4-3+2} & \frac{1}{4-3+3} & \frac{1}{4-3+4} & \frac{1}{4-3+5} \\ \frac{1}{2-4+1} & \frac{1}{2-4+2} & \frac{1}{2-4+3} & \frac{1}{2-4+4} & \frac{1}{2-4+5} \\ \frac{1}{1-5+1} & \frac{1}{1-5+2} & \frac{1}{1-5+3} & \frac{1}{1-5+4} & \frac{1}{1-5+5} \end{vmatrix} = 3403400$$

4.2 Frobenius 公式

定理 4.9. 设 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$,$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_l)$, 是 n 的两个划分, 则 M^λ 的特征标在 S_n 中形为 μ 的共轭类的值为一下多元多项式中 $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_l^{\lambda_l}$ 的系数, 多项式为

$$\prod_{i=1}^{m} (x_1^{\mu_i} + x_2^{\mu_i} + \cdots + x_l^{\mu_i})$$

定理 4.10 (Frobenius 公式)**.** 设 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$,$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_m)$, 是 n 的两个划分, 则 S^λ 的特征标在 S_n 中形为 μ 的共轭类的值为一下多元多项式中 $x_1^{\lambda_1+l-1} x_2^{\lambda_2+l-2} \cdots x_l^{\lambda_l}$ 的系数, 多项式为

$$\prod_{1\le i<j\le l} (x_i - x_j) \prod_{i=1}^{m} (x_1^{\mu_i} + x_2^{\mu_i} + \cdots + x_l^{\mu_i})$$

相关证明可参阅 [4].

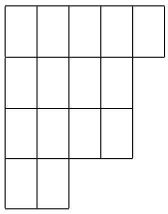
5　表示的提升与限制

5.1　杨束

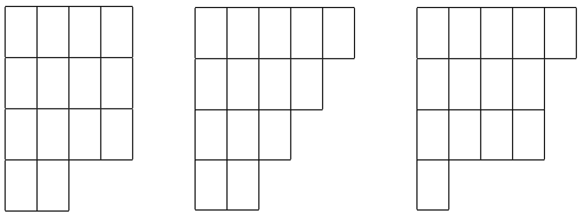
接下来考虑关于不可约表示的限制和提升的问题, 在这之前我们首先映入一个概念: 杨束. 在杨图中, 可以定义自然的偏序关系, 具体定义如下.

定义 5.1 (杨束)**.** λ 和 μ 是两个杨图, 如果 μ 可以通过 λ 添加一个方格所得到的, 则记作 $\lambda \nearrow \mu$. 这种偏序关系集称为**杨束** (Young lattice).

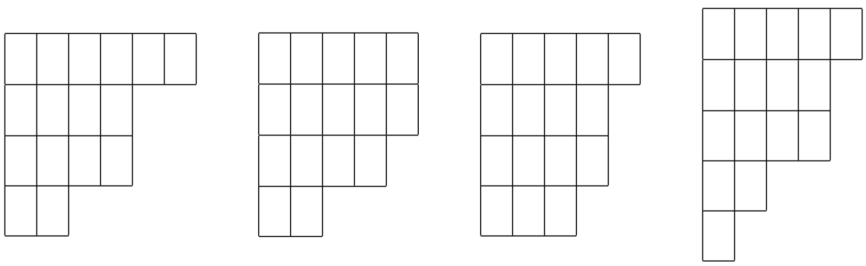
例 5.2. 如 $\lambda = (5,4,4,2)$, 则

$\lambda =$ 

将其中移除一个方格, 可得到一下三种



因此满足 $\mu \nearrow \lambda$ 的 μ 有 $(4,4,4,2),(5,4,3,2),(5,4,4,1)$ 这三种.
同样的将其添加一个格子, 可以得到有以下四种



因此满足 $\lambda \nearrow \mu$ 的 μ 有 $(6,4,4,2),(5,5,4,2),(5,4,4,3),(5,4,4,2,1)$ 这三种.

接下来考虑这样一个问题: 给定了一个 S_n 的表示 S^λ, 如何确定其在 S_{n-1} 上的限制表示, 和其在 S_{n+1} 上的诱导表示. 接下来的定理即是确定的方法.

5.2　Branching 法则

定理 5.3 (Branching 法则)**.** *设 $\lambda \vdash n$, 则*

$$\mathrm{Res}_{S_{n-1}} S^\lambda \cong \bigoplus_{\mu:\mu\nearrow\lambda} S^\mu \qquad \mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} S^\lambda \cong \bigoplus_{\mu:\lambda\nearrow\mu} S^\mu$$

具体证明可参考 [2].

例 5.4. 根据 5.2, 我们可以得到以下两个关于表示的限制和提升的公式

$$\mathrm{Res}_{S_{14}} S^{(5,4,4,2)} = S^{(4,4,4,2)} \oplus S^{(5,4,3,2)} \oplus S^{(5,4,4,1)}$$

$$\mathrm{Ind}_{S_{15}}^{S_{15}} S^{(5,4,4,2)} = S^{(6,4,4,2)} \oplus S^{(5,5,4,2)} \oplus S^{(5,4,4,3)} \oplus S^{(5,4,4,2,1)}$$

这种关系可以不断进行下去, 因此我们在研究复杂的表示时可以不断分解为简单的表示. 以下式子给出了方法.

推论 5.5.

$$S^{\lambda} \cong \bigoplus_{\mu:\lambda\nearrow\mu} S^{\mu} \cong \bigoplus_{\nu:\nu\nearrow\lambda\nearrow\mu} S^{\nu} \cong \cdots \cong \bigoplus_{\emptyset=\lambda^{(0)}\nearrow\lambda^{(1)}\nearrow\cdots\nearrow\lambda^{(n)}=\lambda} S^{\emptyset}$$

6 一个例子

例 6.1. 下通过 $\mathbb{C}S_3$ 的不可约表示来说明上述方法:

Step1 首先确定 $n=3$ 的划分.$3=3=2+1=1+1+1$, 因此 S_3 一共有 3 个共轭类, 在同构意义下有 3 个不可约表示.

Step2 以下根据划分确定三种不可约表示

- 对于划分 $\lambda=(3)$, 由 2.23可知其为 1 维的单位表示.
- 对于划分 $\lambda=(1,2)$, 其标准杨表为以下两种:

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad t_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

同时 $|C_2|=2$, 易知

$$e_1 = \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{3} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|cc|}\hline 3 & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad e_2 = \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|cc|}\hline 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

因此分别计算出 S_n 中各个元素在 e_1, e_2 这组基下自然作用的矩阵, 得到表示 ρ 为一下结果

$$\rho((1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho((12)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho((13)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho((23)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho((132)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 对于划分 $\lambda=(1,1,1)$, 由 2.24可知其为 1 维的符号表示.

因此,S_n 共有以上三种不可约表示.

Step3 这三种表示的维数容易从上述过程看出, 亦可以由公式得到: 对于单位表示和符号表示, $\dim S^\lambda = \frac{3!}{3\cdot2\cdot1}$. 对于 $\lambda = (2,1)$ 的情况, $\dim S^\lambda = \frac{3!}{3\cdot1\cdot1} = 2$ 计算三种表示的特征标: 由 4.10(Frobenius 公式) 可知, 分别计算多项式的系数, 从而计算不可约特征标表如下

	1	3	2
	(1)	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Step4 群代数 $\mathbb{C}S_n$ 的表示可以由 S_n 的表示在复数域上线性扩充得到.

参考文献

[1] G. D. James, *The representation theory of the symmetric groups.* Springer, 2006, vol. 682.

[2] B. E. Sagan, *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.* Springer Science & Business Media, 2013, vol. 203.

[3] J. S. Frame, G. d. B. Robinson, and R. M. Thrall, "The hook graphs of the symmetric group," *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 6, pp. 316–324, 1954.

[4] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory: a first course.* Springer Science & Business Media, vol. 129.

[5] A. B. Block and R. Van Peski, "Representation theory of the symmetric group: The verhsik-okounkov approach," 2018.