比较定理高维情况的分析

毛松涛

1 高维中向量的比较

在一维中元素有自然的序，但是在高维中这种自然的序就消失了，也就是说，两个向量的关系，不可以用 $>, =, <$ 其一完全表示，因此我们只能给出如下定义

定义 1.0.1 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ 是两个向量：

(1) 若 $x_i \le y_i, \forall i = 1, 2, \cdots, n$，则记为 $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$；
进一步若 $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ 且 $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$，则记 $\mathbf{x} < \mathbf{y}$；

(2) 若 $x_i \ge y_i, \forall i = 1, 2, \cdots, n$，则记为 $\mathbf{x} \ge \mathbf{y}$；
进一步若 $\mathbf{x} \ge \mathbf{y}$ 且 $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$，则记 $\mathbf{x} > \mathbf{y}$；

(3) 以上两种情况均不成立，则向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 不可比较。

定义 1.0.2 称 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f_1(t, \mathbf{x}), f_2(t, \mathbf{x}), \cdots, f_n(t, \mathbf{x}))^T \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$ 关于 $\mathbf{x}$ 是拟单调不减的，若 $\forall (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}') \in I \times \mathbf{R}^n$，当 $x_j \le x'_j, x_i = x'_i (i = 1, 2, \cdots, n, j \ne i)$ 时有 $f_i(t, \mathbf{x}) \le f_i(t, \mathbf{x}')(i = 1, 2, \cdots, r)$。也就是说 $\mathbf{f}$ 的每一个变量都对于 $\mathbf{x}$ 的每一个变量分别单调不减。

拟单调不增也可以同理定理。

2 第一比较定理的简单推广

定理 2.0.1 设 $f(t, \mathbf{x})$ 与 $F(t, \mathbf{x}) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$，且

(1) $f(t, \mathbf{x}) < F(t, \mathbf{x}), \forall (t, \mathbf{x}) \in I \times \mathbf{R}^n$;

(2) $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 关于 $\mathbf{x}$ 是拟单调不减的，$\mathbf{x} = \varphi(t), \mathbf{x} = \psi(t)$ 分别是方程组

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}, \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

的解，则必有：

(1) 当 $t > t_0$, 且 t 属于 $\varphi(t), \psi(t)$ 共同存在区间时有：$\varphi(t) < \psi(t)$;

(2) 当 $t < t_0$, 且 t 属于 $\varphi(t), \psi(t)$ 共同存在区间时有：$\varphi(t) > \psi(t)$;

证*:* 在区间 I 上令 $\gamma(x) = \psi(t) - \varphi(t)$，则由初值条件和不等式有

$$\gamma(t_0) = 0,\ \gamma'(t_0) = F(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}) > 0$$

因此，存在 $\sigma > 0$，使得 $\gamma(t) > 0$，当 $t_0 < t < t_0 + \sigma$ 如果第一式不成立，设 $t(> t_0)$ 是不成立的点，则有以下两种情况：

(1) $\gamma(t)=0$，即 $\gamma_i(t)=0,\forall i=1,2,\cdots,n$
(2) $\exists i$，使得 $\gamma_i(t)<0$
若有第一种情况，则设 $x_1=min\{t|\gamma(t)=0,t>t_0\}$，则我们推出

$$\begin{cases}\gamma(t_1)=0\\ \gamma(t)>0,(t_1>t)\end{cases}$$

它蕴含 $\gamma(t_1)'\le 0$，矛盾。
若有第二种情况，则设 t_1 为该情况出现的下确界，γ_i 是使得其不成立的分量，则 $\gamma_i(t_1)=0$，并且 $\exists t_2>t_1,\gamma_i(t_2)<0$，则必存在这样的 t_2，使得 $\gamma_i(t_2)<0$，矛盾。同理，第二式也可证。 □

3 第二比较定理的简单推广

定理 3.0.1 设 $f(t,\mathbf{x})$ 与 $F(t,\mathbf{x})\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$ 且

(1) $f(t,\mathbf{x})\le F(t,\mathbf{x}),\forall(t,\mathbf{x})\in I\times\mathbf{R}^n$，且 $f(t_0,\mathbf{x}_0)<F(t_0,\mathbf{x}_0)$;

(2) $f(t,\mathbf{x})$ 关于 $\mathbf{x}$ 是拟单调不减的，$\mathbf{x}=\varphi(t),\mathbf{x}=\psi(t)$ 分别是方程组

$$\begin{cases}\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\\ \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0\end{cases},\ \begin{cases}\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{F}(t,\mathbf{x})\\ \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0\end{cases}$$

的解，则必有：

(1) 当 $t>t_0$, 且 t 属于 $\varphi(t),\psi(t)$ 共同存在区间时有：$\varphi(t)<\psi(t)$;

(2) 当 $t<t_0$, 且 t 属于 $\varphi(t),\psi(t)$ 共同存在区间时有：$\varphi(t)>\psi(t)$。

证: $f(t,\mathbf{x}),F(t,\mathbf{x})\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$ 且 $f(t,\mathbf{x})\le F(t,\mathbf{x}),f(t_0,\mathbf{x}_0)<F(t_0,\mathbf{x}_0)$, 我们取 $\epsilon=\frac{1}{2}(F(t,\mathbf{x})-f(t,\mathbf{x}))$, 则 $\exists\delta$, 使得当 $(t,x)\in\bar{\mathbf{R}}:\{(t,x)\,|\,|t-t_0|\le\delta,\|x-x_0\|\le\delta\}$, 有 $|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})-\mathbf{f}(t_0,\mathbf{x}_0)|<\epsilon,|\mathbf{F}(t,\mathbf{x})-\mathbf{F}(t_0,\mathbf{x}_0)|<\epsilon$, 代入 $\epsilon=\frac{1}{2}(\mathbf{F}(t_0,\mathbf{x}_0)-\mathbf{f}(t_0,\mathbf{x}_0)|)$ 得 $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})<\mathbf{F}(t,\mathbf{x})$，由引理得出结论两式在闭区间 $\bar{\mathbf{R}}$ 内成立，我们假设 1) 在闭区域 $\bar{\mathbf{R}}$ 外不成立，t_1 是第一个使结论不成立的点，$t_0<t<t_1$, 即在 $t_0<t<t_1$ 时结论 a) 仍然成立：$\varphi(t)<\psi(t)$，且有 $\varphi_i(t_1)<\psi_i(t_1),i=1,2,\cdots,m\le n,\varphi_j(t_1)=\psi_j(t_1)(i\ne j)$，则有：当 $0<t_1-t\ll 1$ 时 $\varphi_k(t)=\psi_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$，而当 $0<t_1-t\ll 1$ 时我们有

$$\frac{d\varphi_k(t_1)}{dt}=\mathbf{f}_k(t_1,\varphi_1(t_1),\cdots,\varphi_n(t_1))\le\mathbf{F}_k(t_1,\varphi_1(t_1),\cdots,\varphi_n(t_1))\le\mathbf{F}_k(t_1,\psi_1(t_1),\cdots,\psi_n(t_1))=\frac{d\psi_k(t_1)}{dt}$$

则有

$$\frac{\varphi_k(t)-\varphi_k(t_1)}{t-t_1}<\frac{\psi_k(t)-\psi_k(t_1)}{t-t_1}\,(0<t-t_1\ll 1)$$

所以 $\varphi_k(t)>\psi_k(t)$，矛盾。故假设不成立，a) 在闭区域 $\bar{\mathbf{R}}$ 外成立。

假设 b) 不成立，t_2 是第一个使结论不成立的点：$t_2<t_0$，则在 $t_2<t<t_0$ 时，$\varphi(t)<\psi(t)$，且有 $\varphi_i(t_2)=\psi_i(t_2),i=1,2,\cdots,n\le m,\varphi_j(t_2)>\psi_j(t_2)(i\ne j)$，因此：当 $0<t-t_2\ll 1$ 时有 $\varphi_k(t)>\psi_k(t),k=1,2,\cdots,n$，对每一个满足 $\varphi_i(t_2)=\psi_i(t_2)$ 的 i，当 $t_2\le t\le t_0$，我们有：

$$\varphi_i(t)=\varphi_i(t_2)+\int_{t_2}^{t}\mathbf{f}_i(s,\varphi_1(s),\varphi_2(s),\cdots\varphi_n(s))ds$$

$$\psi_i(t) = \psi_i(t_2) + \int_{t_2}^{t} \mathbf{F}_i(s, \psi_1(s), \psi_2(s), \cdots \psi_n(s)) ds$$

所以 $\varphi_i(t) - \psi_i(t) = \int_{t_2}^{t} (\mathbf{f}_i(s, \varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots \varphi_n(s)) ds - \mathbf{F}_i(s, \psi_1(s), \psi_2(s), \cdots \psi_n(s))) ds > 0$ 故 $\exists \epsilon \in (t_2, t_0)$，使 $\mathbf{f}_i(\epsilon, \varphi_1(\epsilon), \varphi_2(\epsilon), \cdots, \varphi_n(\epsilon)) - \mathbf{F}_i(\epsilon, \psi_1(\epsilon), \psi_2(\epsilon), \cdots, \psi_n(\epsilon))(t - t_2) > 0$，所以 $\mathbf{f}_i(\epsilon, \varphi_1(\epsilon), \varphi_2(\epsilon), \cdots, \varphi_n(\epsilon)) > \mathbf{F}_i(\epsilon, \psi_1(\epsilon), \psi_2(\epsilon), \cdots, \psi_n(\epsilon)), \epsilon \in (t_2, t_0)$。与条件 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \le \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ 矛盾。故假设不成立，即结论 2) 在 $t < t_0$，且属于 $\varphi(t), \psi(t)$ 共同存在区间有 $\varphi(t) > \psi(t)$，成立。 □

由此可见，课本中的第一比较定理与第二比较定理是以上结论的推论。

4 总结

在高维中，比较定理很难得到比较好的推广是由于高维的向量之间很难有比较好的序结构，也就是很难定义向量的大小比较。但是许多人为定义的序结构又是很难满足比较定理的形式，因此，定义两个向量之间的关系为大于，小于，等于或者不可比较。这样对于可比较的情况比较定理还是成立的。但是如果维数比较高的话，大多数的向量之间是不可比较的，因此，高维中的比较定理很难有比较好的普适性。