NOM : **Prénom :**

ENSISA I. R. 1 24 octobre 2023

Examen de mathématiques discrètes 1 (durée : 2 heures)

Exercice 1 — Soit b un entier ≥ 2 et soit $x, y \in \mathbb{N}$.

a. On suppose que l'écriture de x en base 5 est $x = (123)_5$. Donner l'écriture de x en base 10, puis en base 4 :

$x =$

$=$

$= \Big(\qquad \Big)_{10}$ $x = \Big(\qquad \Big)_4$

b. On suppose que l'écriture de y en base b est $y = (105)_b$ et l'écriture de $2y$ en base $b-1$ est $2y = (300)_{b-1}$. Déterminer la valeur de b et celle de y :

Exercice 2 — Dans cet exercice, tous les nombres sont écrits en base 10. On admet que 9 999 999 (sept "9") est divisible par 239. Donner, en expliquant mais **sans calcul**, la longueur de la prépériode et la longueur de la période de $\dfrac{73}{80.239}$, i.e. déterminer les entiers k, ℓ tels que $\dfrac{73}{80.239} = 0, a_1 \cdots a_k \, \overline{a_{k+1} \cdots a_{k+\ell}}$ avec k et ℓ minimaux.

Exercice 3 — Le but de l'exercice est de trouver tous les nombres à deux chiffres écrits en base 7 qui sont égaux au carré de la somme de leurs chiffres. Soit donc $(ax)_7$ un tel nombre (avec $a, x \in \{0, \dots, 6\}$ et $a \neq 0$).

a. Écrire l'équation de degré 2 que doit vérifier x (on trouvera pour discriminant $\Delta = 24a + 1$).

b. Trouver les trois valeurs de a pour lesquelles Δ est le carré d'un entier.

c. Conclure.

Exercice 4 — Soit l'ensemble $E = \{1\}$. Déterminer les ensembles suivants.

$\mathcal{P}(E) =$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) =$

$\mathcal{P}(E \times E) =$

$\mathcal{P}(E) \times E =$

$\mathcal{P}(E \cap E) =$

$\mathcal{P}(E) \cap E =$

$\mathcal{P}(E \cup E) =$

$\mathcal{P}(E) \cup E =$

Exercice 5 — Soit E un ensemble non vide, A une partie de E et soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ l'application définie par $f(X) = (A \cup X, A \cap X)$.

Cette application est-elle injective ? justifier (par une preuve ou un contre-exemple).

Cette application est-elle surjective ? justifier.

Exercice 6 — Soit $n \geq 3$ un entier naturel et soit $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ muni de sa relation d'ordre usuelle. On veut montrer que toute fonction croissante de E_n dans E_n a au moins un point fixe.
Soit donc $f : E_n \to E_n$ une fonction croissante (au sens large, i.e $\forall x, y \in E_n,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$). On cherche $a \in E_n$ tel que $f(a) = a$.

a. Montrer que la partie $A = \{x \in E_n \ ; \ f(x) \leq x\}$ a bien un minimum, noté a dans la suite.

b. Montrer que $f(a) \in A$.

c. Conclure.

Exercice 7 — Soit $E = \{1, 2, 3\}$. On munit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de l'ordre défini par la relation d'inclusion. Donner une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ contenant 4 éléments, n'admettant ni plus petit élément ni plus grand élément, et admettant E comme borne supérieure (plusieurs choix possibles).

$\mathcal{A} = \Big\{$

Exercice 8 — Soit $E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Sur $E \times E$ on considère les deux ordres usuels :
- l'ordre produit $\leq_P$, défini par $(x_1, x_2) \leq_P (y_1, y_2)$ si et seulement si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$;
- et l'ordre lexicographique $\leq_L$ défini par $(x_1, x_2) \leq_L (y_1, y_2)$ si et seulement si $x_1 < y_1$ ou $(x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2)$.

Soit $\mathcal{A}$ la partie de E donnée par $\mathcal{A} = \big\{(3,1), (6,2), (8,4), (5,4), (2,8), (0,5), (1,3)\big\}$.

a. Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{A}$ pour l'ordre lexicographique. On placera à gauche les éléments les plus petits.

Préciser les éléments minimaux, maximaux, l'inf et le sup de $\mathcal{A}$ pour l'ordre lexicographique.

Éléments minimaux : Éléments maximaux :

$\inf \mathcal{A} =$ $\sup \mathcal{A} =$

b. Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{A}$ pour l'ordre produit.

Préciser les éléments minimaux, maximaux, l'inf et le sup de $\mathcal{A}$ pour l'ordre produit.

Éléments minimaux : Éléments maximaux :

$\inf \mathcal{A} =$ $\sup \mathcal{A} =$

Exercice 9 — Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$ un alphabet à deux lettres et $\mathcal{A}^*$ l'ensemble de tous les mots écrits avec l'alphabet $\mathcal{A}$. On note ε le mot vide et on considère la partie L de $\mathcal{A}^*$ définie inductivement par $B = \{a, b\}$ et la règle d'induction $f : L \to L$ telle que $f(u) = aub$.

On rappelle que $L = B_0 \cup \cdots \cup B_p \cup B_{p+1} \cup \cdots$ où les ensembles B_p sont définis par :

$$B_0 = B \qquad \text{et} \qquad B_{p+1} = B_p \cup f(B_p).$$

a. Compléter :

$B_1 = \big\{$

$B_2 = \big\{$

$B_3 = \big\{$

b. Donner une caractérisation des mots appartenant à L :

c. Démontrer cette caractérisation :

Exercice 10 — Soit $(B, +, \cdot, ^{-})$ une algèbre de Boole et soit $a, b, c \in B$. En détaillant les calculs, simplifier les expressions suivantes :

$(a+b)(c+d)(a+c)(b+d) =$

$\overline{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{da}} =$

Exercice 11 — Soit B une algèbre de Boole. On considère la fonction $f(a, b, c) = abc + \overline{b}$. Déterminer la forme canonique disjonctive (somme de mintermes), puis la forme canonique conjonctive (produit de maxtermes) de f.

$f(a, b, c) =$

$f(a, b, c) =$

Exercice 12 — Soit $(B, +, \cdot, ^{-})$ une algèbre de Boole et soit $a, b \in B$. On considère l'équation d'inconnue $x \in B$

$$ax + \overline{a}b = b \tag{1}$$

a. Écrire chaque côté de cette équation sous forme normale disjonctive (somme de mintermes).

$$=$$

b. En déduire les solutions de (**??**). On écrira ces solutions sous la forme $U\overline{x} = Vx = 0$ où U et V sont des expressions en fonction de $a, b, \overline{a}$ et $\overline{b}$.

c. Lorsque $B = \mathcal{P}(E)$, caractériser les solutions de (**??**) à l'aide d'inclusions (rappel : on a $u \cap \overline{v} = \emptyset \Leftrightarrow u \subset v$).

Exercice 13 — Soit B une algèbre de Boole et $a, b \in B$. On admet les équivalences ci-dessous

$$a\overline{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{a} + b = 1 \;\Leftrightarrow\; ab = a \;\Leftrightarrow\; a + b = b$$

et on note dans la suite $a \leq b$ lorsque ces assertions sont vraies.

a. Montrer que la relation $\leq$ ainsi définie est une relation d'ordre sur B.

b. Cette relation a-t-elle un plus petit élément ? un plus grand élément ? si oui, lesquels ?

c. Cette relation est-elle totale ? Justifier.

NOM : **Prénom :**

ENSISA I. R. 1 24 octobre 2023

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES DISCRÈTES 1 (durée : 2 heures)

Exercice 14 — Soit b un entier ≥ 2 et soit $x, y \in \mathbb{N}$.

a. On suppose que l'écriture de x en base 6 est $x = (123)_6$. Donner l'écriture de x en base 10, puis en base 5 :

$x =$

$=$

$= \Big(\qquad \Big)_{10}$ $\qquad x = \Big(\qquad \Big)_5$

b. On suppose que l'écriture de y en base b est $y = (34)_b$ et l'écriture de $3y$ en base $b+1$ est $3y = (123)_{b+1}$. Déterminer la valeur de b et celle de y :

Exercice 15 — Le but de l'exercice est de trouver tous les nombres à deux chiffres écrits en base 6 qui sont égaux au carré de la somme de leurs chiffres. Soit donc $(ax)_6$ un tel nombre (avec $a, x \in \{0, \ldots, 5\}$ et $a \neq 0$).

a. Écrire l'équation de degré 2 que doit vérifier x (on trouvera pour discriminant $\Delta = 20a + 1$).

b. Trouver l'unique valeur de a pour laquelle Δ est le carré d'un entier.

c. Conclure.

Exercice 16 — Dans cet exercice, tous les nombres sont écrits en base 10. On admet que 9 999 999 (sept "9") est divisible par 239. Donner, en expliquant mais **sans calcul**, la longueur de la prépériode et la longueur de la période de $\dfrac{23}{250.239}$, i.e. déterminer les entiers k, ℓ tels que $\dfrac{23}{250.239} = 0, a_1 \cdots a_k \, \overline{a_{k+1} \cdots a_{k+\ell}}$ avec k et ℓ minimaux.

Exercice 17 — Soit l'ensemble $E = \{a\}$. Déterminer les ensembles suivants.

$\mathcal{P}(E) =$ $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) =$

$\mathcal{P}(E) \cup E =$ $\mathcal{P}(E \cup E) =$

$\mathcal{P}(E) \times E =$ $\mathcal{P}(E \times E) =$

$\mathcal{P}(E) \cap E =$ $\mathcal{P}(E \cap E) =$

Exercice 18 — Soit $n \geq 3$ un entier naturel et soit $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ muni de sa relation d'ordre usuelle. On veut montrer que toute fonction croissante de E_n dans E_n a au moins un point fixe.
Soit donc $f : E_n \to E_n$ une fonction croissante (au sens large, i.e $\forall x, y \in E_n,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$). On cherche $a \in E_n$ tel que $f(a) = a$.

a. Montrer que la partie $A = \{x \in E_n\ ;\ x \leq f(x)\}$ a bien un maximum, noté a dans la suite.

b. Montrer que $f(a) \in A$.

c. Conclure.

Exercice 19 — Soit E un ensemble non vide et soit $f : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ l'application définie par $f(X, Y) = (X \setminus Y, Y \setminus X)$.

Cette application est-elle injective ? justifier (par une preuve ou un contre-exemple).

Cette application est-elle surjective ? justifier.

Exercice 20 — Soit $E = \{a, b, c, d\}$. On munit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de l'ordre défini par la relation d'inclusion. Donner une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ contenant 5 éléments, n'admettant ni plus petit élément ni plus grand élément, et admettant $\{a, b, c\}$ comme borne supérieure (plusieurs choix possibles).

$\mathcal{A} = \Big\{$

Exercice 21 — Soit $E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Sur $E \times E$ on considère les deux ordres usuels :
- l'ordre produit $\leq_P$, défini par $(x_1, x_2) \leq_P (y_1, y_2)$ si et seulement si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$;
- et l'ordre lexicographique $\leq_L$ défini par $(x_1, x_2) \leq_L (y_1, y_2)$ si et seulement si $x_1 < y_1$ ou $(x_1 = y_1$ et $x_2 \leq y_2)$.

Soit $\mathcal{A}$ la partie de E donnée par $\mathcal{A} = \big\{(2,2), (3,4), (1,4), (5,1), (3,8), (2,5), (7,3)\big\}$.

a. Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{A}$ pour l'ordre lexicographique. On placera à gauche les éléments les plus petits.

Préciser les éléments minimaux, maximaux, l'inf et le sup de $\mathcal{A}$ pour l'ordre lexicographique.

Éléments minimaux : Éléments maximaux :

$\inf \mathcal{A} =$ $\sup \mathcal{A} =$

b. Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{A}$ pour l'ordre produit.

Préciser les éléments minimaux, maximaux, l'inf et le sup de $\mathcal{A}$ pour l'ordre produit.

Éléments minimaux : Éléments maximaux :

$\inf \mathcal{A} =$ $\sup \mathcal{A} =$

Exercice 22 — Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$ un alphabet à deux lettres et $\mathcal{A}^*$ l'ensemble de tous les mots écrits avec l'alphabet $\mathcal{A}$. On note ε le mot vide et on considère la partie L de $\mathcal{A}^*$ définie inductivement par $B = \{\varepsilon\}$ et les règles d'induction $f : L \to L$ telle que $f(u) = au$ et $g : L \to L$ telle que $g(u) = ub$.

On rappelle que $L = B_0 \cup \cdots \cup B_p \cup B_{p+1} \cup \cdots$ où les ensembles B_p sont définis par :

$$B_0 = B \qquad \text{et} \qquad B_{p+1} = B_p \cup f(B_p) \cup g(B_p).$$

a. Compléter :

$B_1 = \big\{$

$B_2 = \big\{$

$B_3 = \big\{$

b. Donner une caractérisation des mots appartenant à L :

c. Démontrer cette caractérisation :

Exercice 23 — Soit $(B, +, \cdot, ^-)$ une algèbre de Boole et soit $a, b, c \in B$. En détaillant les calculs, simplifier les expressions suivantes :

$(a+b)(b+c)(c+a)+ab+bc+ca =$

$\overline{(\overline{\overline{a}+\overline{b}}) \cdot (\overline{\overline{b}+\overline{c}}) \cdot (\overline{\overline{c}+\overline{a}})} =$

Exercice 24 — Soit B une algèbre de Boole. On considère la fonction $f(a,b,c) = ab + b\overline{c}$. Déterminer la forme canonique disjonctive (somme de mintermes), puis la forme canonique conjonctive (produit de maxtermes) de f.

$f(a,b,c) =$

$f(a,b,c) =$

Exercice 25 — Soit $(B, +, \cdot, ^-)$ une algèbre de Boole et soit $a, b \in B$. On considère l'équation d'inconnue $x \in B$

$$x + \overline{a}b\overline{x} = b \tag{2}$$

a. Écrire chaque côté de cette équation sous forme normale disjonctive (somme de mintermes).

$$=$$

b. En déduire les solutions de (**??**). On écrira ces solutions sous la forme $U\overline{x} = Vx = 0$ où U et V sont des expressions en fonction de $a, b, \overline{a}$ et $\overline{b}$.

c. Lorsque $B = \mathcal{P}(E)$, caractériser les solutions de (**??**) à l'aide d'inclusions (rappel : on a $u \cap \overline{v} = \emptyset \Leftrightarrow u \subset v$).

Exercice 26 — Soit B une algèbre de Boole et $a, b \in B$.

a. Démontrer les équivalences ci-dessous

$$a\overline{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{a} + b = 1 \;\Leftrightarrow\; ab = a \;\Leftrightarrow\; a + b = b.$$

On note dans la suite $a \leq b$ si ces assertions sont vraies.

b. Montrer que la relation $\leq$ ainsi définie est une relation d'ordre sur B.