Université de Haute Alsace
ENSISA – Mathématiques discrètes I
Augustin Fruchard

Année 2023-2024

Réponses à l'examen du 24 octobre 2023

Sujet A

1. a. $x = (38)_{10} = (212)_4$.

b. $2y = 2(b^2+5) = 3(b-1)^2 \Leftrightarrow b^2 - 6b - 7 = 0 \Leftrightarrow b = 7$ (car $b \geqslant 2$), d'où $y = 7^2 + 5 = (54)_{10}$.

2. La fraction $\dfrac{73}{80.239}$ est bien irréductible car 239 est un nombre premier, donc premier avec 73, et 73 ne divise ni 2 ni 5 (d'ailleurs 73 est lui aussi premier).

$k = 4$ (car $80 = 2^4.5^1$ et $\max(4,1) = 4$) et $\ell = 7$ (car 7 est premier).

La calculatrice donne en effet $\dfrac{73}{80.239} = 0,0038\,\overline{1799163}$.

3. a. $x^2 + (2a-1)x + a^2 - 7a = 0$; $x = \dfrac{1-2a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ avec $\Delta = (2a-1)^2 - 4(a^2-7a) = \cdots = 24a+1$.
Comme a est un entier, pour que cette équation ait une solution entière, il faut que $\sqrt{\Delta}$ soit un entier impair.

b. À la main, les entiers $a \in \{1, \ldots, 6\}$ tels que $24a+1$ est le carré d'un entier sont $a = 1$, 2 et 5.

c. Pour ces valeurs de a, on trouve respectivement $x = 2$, 2 et 1. Tous les nombres cherchés sont donc $(12)_7$, $(22)_7$ et $(51)_7$.

4. $\mathcal{P}(E) = \big\{\emptyset, \{1\}\big\}$ $\qquad \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\big\}$

$\mathcal{P}(E \times E) = \big\{\emptyset, \{(1,1)\}\big\}$ $\qquad \mathcal{P}(E) \times E = \big\{(\emptyset, 1), (\{1\}, 1)\big\}$

$\mathcal{P}(E \cap E) = \big\{\emptyset, \{1\}\big\}$ $\qquad \mathcal{P}(E) \cap E = \emptyset$

$\mathcal{P}(E \cup E) = \big\{\emptyset, \{1\}\big\}$ $\qquad \mathcal{P}(E) \cup E = \big\{\emptyset, \{1\}, 1\big\}$

5. On peut toujours écrire X en fonction de $A \cup X$ et de $A \cap X$, par exemple $X = ((A \cup X) \setminus A) \cup (A \cap X)$. Ceci permet de montrer que f est toujours injective. En effet, si $f(X) = f(Y)$, alors $A \cup X = A \cup Y$ et $A \cap X = A \cap Y$, donc $X = ((A \cup X) \setminus A) \cup (A \cap X) = ((A \cup Y) \setminus A) \cup (A \cap Y) = Y$.

f n'est jamais surjective, quelque soit l'ensemble non vide E et quelle que soit la partie A. Par exemple $(\emptyset, E)$ n'a pas de préimage puisqu'on a toujours $A \cap X \subseteq A \cup X$, alors que $E \not\subseteq \emptyset$.

6. a. A est un ensemble fini (inclus dans E_n) et surtout **non vide** (par exemple $n \in A$). Comme l'ordre $\leqslant$ est total sur E_n, A a bien un plus petit élément.

b. On a $f(a) \leqslant a$ puisque $a \in A$. Comme f est croissante, on a donc $f(f(a)) \leqslant f(a)$, ce qui montre que $f(a)$ aussi est dans A.

c. Comme a est le plus petit élément de A et que $f(a) \in A$, on en déduit que $a \leqslant f(a)$, d'où $a = f(a)$. Ainsi a est bien un point fixe de f.

7. De nombreux choix sont possibles. Pour que $\mathcal{A}$ n'ait ni plus petit ni plus grand élément, on ne doit mettre dans $\mathcal{A}$ ni $\emptyset$, ni E. Il reste donc à choisir quatre éléments parmi les six restants : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ et $\{2,3\}$. Il se trouve que chacun de ces quinze choix remplit les conditions. Il est peut-être plus naturel de choisir deux singletons et deux doubletons, par exemple $\mathcal{A} = \big\{\{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\big\}$.

8. a. $(0,5) \to (1,3) \to (2,8) \to (3,1) \to 5,4) \to (6,2) \to (8,4)$.
Un seul élément minimal, qui est aussi le min et l'inf : $(0,5)$.
Un seul élément maximal, qui est aussi le max et le sup : $(8,4)$.

b.

$$\begin{tikzcd}
(0,5) \arrow[rr] & & (2,8) \\
(1,3) \arrow[r] & (5,4) \arrow[r] & (8,4) \\
(3,1) \arrow[r] \arrow[ur] & (6,2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Éléments minimaux : $(0,5)$, $(1,3)$ et $(3,1)$.
Éléments maximaux : $(2,8)$ et $(8,4)$.
Pas de minimum, ni de maximum.
$\inf \mathcal{A} = (0,1)$, $\sup \mathcal{A} = (8,8)$.

9. a. $B_1 = \{a, b, aab, abb\}$,

$B_2 = \{a, b, aab, abb, aaabb, aabbb\}$,
$B_3 = \{a, b, aab, abb, aaabb, aabbb, aaaabbb, aaabbbb\}$.

b. L est l'ensemble de tous les mots ayant d'abord une suite de a, puis une suite de b, avec exactement un a de plus ou de moins que de b ; autrement dit,

$$L = \{a^n b^{n+1} \ ; \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^{n+1} b^n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}.$$

c. Notons E la réunion précédente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les mots $a^n b^{n+1}$ et $a^{n+1} b^n$ sont bien dans B_n, d'où $E \subseteq L$. Réciproquement, on a $B = \{a, b\} \subseteq E$ et E est stable par f, donc $L \subseteq E$.

10. $(a+b)(c+d)(a+c)(b+d) = (a+b)(a+c)(c+d)(b+d) = (a+bc)(cb+d) = (a+bc)(d+bc) = ad+bc$.
$\overline{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{da}} = \overline{\overline{ab}}.\overline{\overline{bc}}.\overline{\overline{cd}}.\overline{\overline{da}} = abbccdda = abcd$.

11. $f(a, b, c) = abc + (a + \overline{a})\,\overline{b}\,(c + \overline{c}) = abc + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$.
$\overline{f}(a, b, c) = ab\overline{c} + \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c}$.
Donc $f(a, b, c) = (\overline{a} + \overline{b} + c)(a + \overline{b} + \overline{c})(a + \overline{b} + c)$.

12. a. $abx + a\overline{b}x + \overline{a}bx + \overline{a}b\overline{x} = abx + ab\overline{x} + \overline{a}bx + \overline{a}b\overline{x}$.

b. $a\overline{b}x = ab\overline{x} = 0$.

c. $a \cap b \subseteq x \subseteq \overline{a} \cup b$.

13. a. $a\overline{a} = 0$, ce qui montre la réflexivité.
Si $a \leqslant b$ alors $ab = a$ et si de plus $b \leqslant a$, alors $ab = b$, donc $a = b$, ce qui montre l'antisymétrie.
Si $a = ab$ et $b\overline{c} = 0$, alors $a\overline{c} = (ab)\overline{c} = a(b\overline{c}) = a.0 = 0$, d'où $a \leqslant c$, ce qui montre la transitivité.

b. On vérifie facilement que $0 \leqslant a \leqslant 1$ pour tout $a \in B$, donc B a un plus petit élément qui est 0 et un plus grand élément qui est 1.

c. Si $B = \mathbb{B} = \{0, 1\}$, elle est totale. Sinon, soit $a \in B \setminus \{0, 1\}$. Alors a n'est pas comparable à $\overline{a}$. En effet, on a $a.\overline{\overline{a}} = a.a = a \neq 0$ donc $a \nleqslant \overline{a}$, et de même $\overline{a}.\overline{a} = \overline{a} \neq 0$ donc $\overline{a} \nleqslant a$. Ainsi cet ordre n'est jamais total dès que $B \neq \mathbb{B}$.

Sujet B

14. a. $x = (51)_{10} = (201)_5$.

b. $3y = 3(3b + 4) = (b + 1)^2 + 2(b + 1) + 3 \iff b^2 - 5b - 6 = 0 \iff b = 6$ (car $b \geqslant 2$), d'où $y = (22)_{10}$.

15. a. $x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 6a = 0$; $x = \dfrac{1 - 2a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ avec $\Delta = (2a - 1)^2 - 4(a^2 - 6a) = \cdots = 20a + 1$.
Comme a est un entier, pour que cette équation ait une solution entière, il faut que $\sqrt{\Delta}$ soit un entier impair.

b. À la main, le seul entier $a \in \{1, \ldots, 5\}$ tel que $20a + 1$ est le carré d'un entier est $a = 4$.

c. Pour cette valeur de a, on trouve $x = 1$. L'unique nombre cherché est donc $(41)_6 = (25)_{10}$.

16. La fraction $\dfrac{23}{250.239}$ est bien irréductible car 239 est un nombre premier, donc premier avec 23, et 23 ne divise ni 2 ni 5 (d'ailleurs 23 est lui aussi premier).
$k = 3$ (car $250 = 2^1.5^3$ et $\max(1, 3) = 3$) et $\ell = 7$ (car 7 est premier).
La calculatrice donne en effet $\dfrac{23}{250.239} = 0,000\,\overline{3849372}$.

17. $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$ $\qquad$ $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$
$\mathcal{P}(E) \cup E = \{\emptyset, \{a\}, a\}$ $\qquad$ $\mathcal{P}(E \cup E) = \{\emptyset, \{a\}\}$
$\mathcal{P}(E) \times E = \{(\emptyset, a), (\{a\}, a)\}$ $\qquad$ $\mathcal{P}(E \times E) = \{\emptyset, \{(a, a)\}\}$
$\mathcal{P}(E) \cap E = \emptyset$ $\qquad$ $\mathcal{P}(E \cap E) = \{\emptyset, \{a\}\}$

18. a. A est un ensemble fini (inclus dans E_n) et surtout **non vide** (par exemple $1 \in A$). Comme l'ordre $\leqslant$ est total sur E_n, A a bien un plus grand élément.

b. On a $a \leqslant f(a)$ puisque $a \in A$. Comme f est croissante, on a donc $f(a) \leqslant f(f(a))$, ce qui montre que $f(a)$ aussi est dans A.

c. Comme a est le plus grand élément de A et que $f(a) \in A$, on en déduit que $f(a) \leqslant a$, d'où $a = f(a)$. Ainsi a est bien un point fixe de f.

19. f n'est jamais injective. Par exemple $f(E, E) = f(\emptyset, \emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$ alors que $(E, E) \neq (\emptyset, \emptyset)$.

f n'est jamais surjective non plus car $X \setminus Y$ et $Y \setminus X$ ne s'intersectent jamais. Par exemple (E, E) n'a pas de préimage.

20. Pour que $\mathcal{A}$ n'ait ni plus petit ni plus grand élément, on ne doit mettre dans $\mathcal{A}$ ni $\emptyset$, ni son sup $\{a, b, c\}$. Il reste donc à choisir cinq éléments parmi les six restants : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$. Il se trouve que chacun de ces six choix remplit les conditions. On peut par exemple écarter le dernier $\{b, c\}$ et choisir $\mathcal{A} = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\big\}$.

21. a. $(1, 4) \to (2, 2) \to (2, 5) \to (3, 4) \to (3, 8) \to (5, 1) \to (7, 3)$.
Un seul élément minimal, qui est aussi le min et l'inf : $(1, 4)$.
Un seul élément maximal, qui est aussi le max et le sup : $(7, 3)$.

b.

$$\begin{tikzcd}
(1,4) \arrow[r] \arrow[dr] & (2,5) \arrow[r] & (3,8) \\
(2,2) \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & (3,4) \arrow[ur] & \\
(5,1) \arrow[r] & (7,3) &
\end{tikzcd}$$

Éléments minimaux : $(1, 4)$, $(2, 2)$ et $(5, 1)$.
Éléments maximaux : $(3, 8)$ et $(7, 3)$.
Pas de minimum, ni de maximum.
$\inf \mathcal{A} = (1, 1)$, $\sup \mathcal{A} = (7, 8)$.

22. a. $B_1 = \{\varepsilon, a, b\}$,
$B_2 = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, bb\}$,
$B_3 = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa, aab, abb, bbb\}$.

b. L est l'ensemble de tous les mots ayant d'abord une suite (éventuellement vide) de a, puis une suite de b, chacune de longueur arbitraire ; autrement dit,

$$L = \{a^m b^n \ ; \ m, n \in \mathbb{N}\}.$$

c. Notons $E = \{a^m b^n \ ; \ m, n \in \mathbb{N}\}$. On montre par récurrence sur $m + n$ que, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, le mot $a^m b^n$ est dans B_{m+n}, d'où $E \subseteq L$. Réciproquement, on a $B = \{\varepsilon\} \subseteq E$ et E est stable par f et g, donc $L \subseteq E$.

23. $(a + b)(b + c)(c + a) + ab + bc + ca = (ac + b)(c + a) + ab + bc + ca$
$= acc + bc + aca + ba + ab + bc + ca = ab + bc + ca + ab + bc + ca$
$= ab + bc + ca.$
$\overline{\overline{\overline{a} + \overline{b}} \cdot \overline{\overline{b} + \overline{c}} \cdot \overline{\overline{c} + \overline{a}}} = \overline{\overline{\overline{a}}\,\overline{\overline{b}} \cdot \overline{\overline{b}}\,\overline{\overline{c}} \cdot \overline{\overline{c}}\,\overline{\overline{a}}} = \overline{ab \cdot bc \cdot ca} = \overline{abc}$ $(= \overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$.

24. $f(a, b, c) = abc + ab\overline{c} + ab\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} = abc + ab\overline{c} + \overline{a}b\overline{c}$.
$\overline{f}(a, b, c) = a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$.
Donc $f(a, b, c) = (\overline{a} + b + \overline{c})(\overline{a} + b + c)(a + \overline{b} + \overline{c})(a + b + \overline{c})(a + b + c)$.

25. a. $abx + a\overline{b}x + \overline{a}bx + \overline{a}\overline{b}x + \overline{a}b\overline{x} = abx + ab\overline{x} + \overline{a}bx + \overline{a}b\overline{x}$.

b. $a\overline{b}x = \overline{a}\overline{b}x = ab\overline{x} = 0 \iff \overline{b}x = ab\overline{x} = 0$.

c. $a \cap b \subseteq x \subseteq b$.

26. a. On a $a\overline{b} = 0 \iff \overline{a\overline{b}} = \overline{0} \iff \overline{a} + b = 1$.
Ensuite, si $ab = a$, alors en multipliant par $\overline{b}$, on obtient $0 = a.0 = ab\overline{b} = a\overline{b}$. Réciproquement, si $\overline{a} + b = 1$, alors $a = a.1 = a(\overline{a} + b) = a\overline{a} + ab = 0 + ab = ab$.
De même, si $a + b = b$, alors $\overline{a} + b = \overline{a} + a + b = 1 + b = 1$ et, réciproquement, si $a\overline{b} = 0$, alors

$$b = 0 + b = a\overline{a} + b = (a + b)(\overline{a} + b) = (a + b).1 = a + b.$$

b. $a\overline{a} = 0$, ce qui montre la réflexivité.
Si $a \leqslant b$ alors $ab = a$ et si de plus $b \leqslant a$, alors $ab = b$, donc $a = b$, ce qui montre l'antisymétrie.
Si $a = ab$ et $bc = b$, alors $a = ab = abc = ac$, d'où $a \leqslant c$, ce qui montre la transitivité.