



# Maths et signal CM1 - Introduction et classification des signaux unidimensionnels

---

Joël Dion

1A IR 2024-2025

Joël Dion, enseignant de mathématiques

Bureau 3.50

Me contacter : [joel.dion@uha.fr](mailto:joel.dion@uha.fr)

Objectifs :

- Utiliser les outils mathématiques de l'analyse de Fourier
- Comprendre et mettre en pratique des opérations simples de traitement d'un signal
- Utiliser Python à des fins de calcul et de simulation

Plan global (14h CM - 14h TD) :

1. Introduction
2. Analyse spectrale des signaux périodiques
3. Analyse spectrale des signaux apériodiques
4. Filtrage des signaux
5. Échantillonnage des signaux
6. Analyse corrélative des signaux et signaux aléatoires

## Références principales :

- Maïtine Bergounioux, Mathématiques pour le traitement du signal, éditions Dunod, 2010.
- Francis Cottet, Traitement des signaux et acquisition des données, cours et exercices corrigés, éditions Dunod, 2020.

## Modalités d'évaluation (le 07/01) :

- Examen final de cours sur table (avec partie en Python)

## Remarque générale concernant les démonstrations

Les démonstrations ne sont pas présentées dans ce cours, faute de temps.  
Elles sont consultables dans les ouvrages de référence.

## Exemple introductif et contexte

---

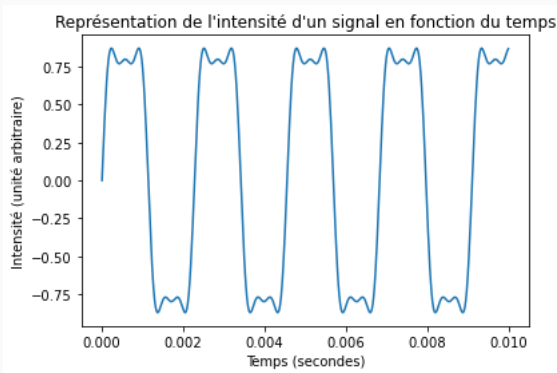
# Exemple introductif et contexte

---

Un exemple tiré de la musique

# Un exemple tiré de la musique

**Exemple.** Considérons le signal sonore suivant. [écouter](#)



Ce signal correspond à une note, le *la 440*, dite **fondamentale**, accompagnée de certaines de ses **harmoniques**.



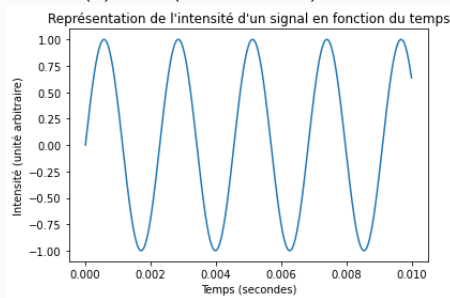
# Un exemple tiré de la musique

Le signal précédent se décompose en une somme de trois fonctions sinusoïdales :

- la fondamentale (ou harmonique de rang 1), le *la* 440,

$$f_1(t) = \sin(2\pi \times 440 \times t)$$

écouter



Quelle est sa période ? sa fréquence ?

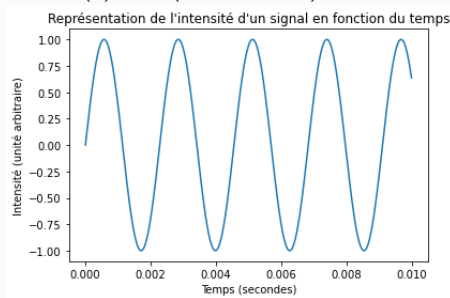
# Un exemple tiré de la musique

Le signal précédent se décompose en une somme de trois fonctions sinusoïdales :

- la fondamentale (ou harmonique de rang 1), le *la* 440,

$$f_1(t) = \sin(2\pi \times 440 \times t)$$

écouter



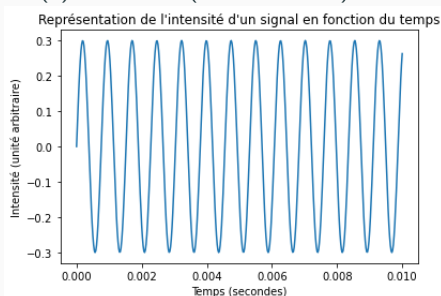
Quelle est sa période ? sa fréquence ? → Elle correspond à un signal périodique de période  $T_1 = \frac{1}{440} \approx 0,00227$  (secondes). Sa fréquence est  $\lambda_1 = \frac{1}{T_1} = 440$  (hertz).

# Un exemple tiré de la musique

- l'harmonique de rang 3, le *la* 1320,

$$f_3(t) = 0,3 \times \sin(2\pi \times 1320 \times t)$$

écouter



Elle correspond à un signal périodique de période

$$T_3 = \frac{1}{1320} \approx 0,00076 \text{ (s)}.$$

Sa fréquence est  $\lambda_3 = \frac{1}{T_3} = 1320 \text{ (Hz)}$ .

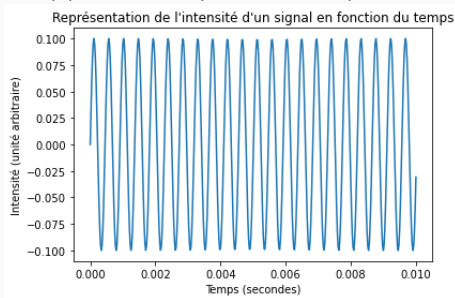
On remarque que  $\lambda_3 = 3\lambda_1$  : la fréquence de la troisième harmonique est le triple de la fréquence fondamentale.

# Un exemple tiré de la musique

- l'harmonique de rang 5, le *la* 2200,

$$f_5(t) = 0,1 \times \sin(2\pi \times 2200 \times t)$$

écouter



Elle correspond à un signal périodique de période

$$T_5 = \frac{1}{2200} \approx 0,00045 \text{ (s)}.$$

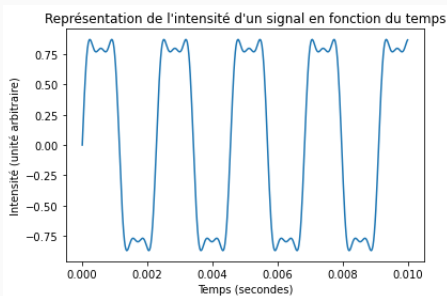
Sa fréquence est  $\lambda_5 = \frac{1}{T_5} = 2200 \text{ (Hz)}$ .

On remarque que  $\lambda_5 = 5\lambda_1$  : la fréquence de la cinquième harmonique est le quintuple de la fréquence fondamentale.

# Un exemple tiré de la musique

L'expression du signal initial est donc

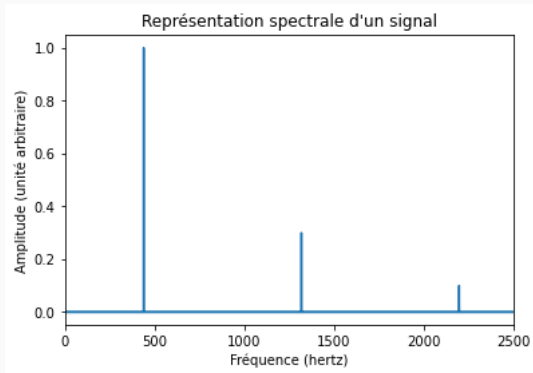
$$f(t) = \sin(2\pi \times 440 \times t) + 0,3 \times \sin(2\pi \times 1320 \times t) + 0,1 \times \sin(2\pi \times 2200 \times t)$$



Il se décompose en la somme de la fondamentale et des harmoniques de rang 3 et 5.

# Un exemple tiré de la musique

Il est possible de représenter l'amplitude des différentes harmoniques en fonction de leur fréquence respective, afin de visualiser leur contribution au signal.



Cette représentation s'appelle la **représentation spectrale** (ou fréquentielle) du signal.

- Comment, à partir de la représentation temporelle du signal, déterminer sa représentation spectrale ?

- Comment, à partir de la représentation temporelle du signal, déterminer sa représentation spectrale ?
- Quel intérêt ?



# Questions d'ordre général

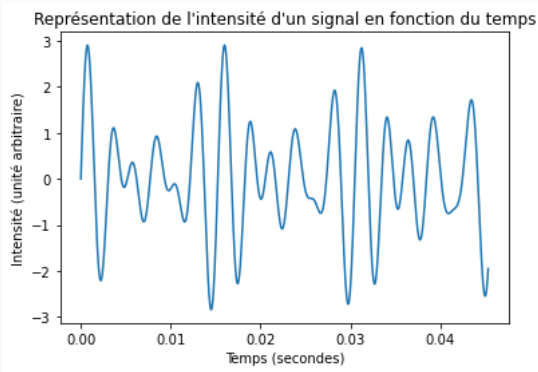
- Comment, à partir de la représentation temporelle du signal, déterminer sa représentation spectrale ?
- Quel intérêt ?

→ On va tenter d'y répondre durant ce cours.

## Autre exemple

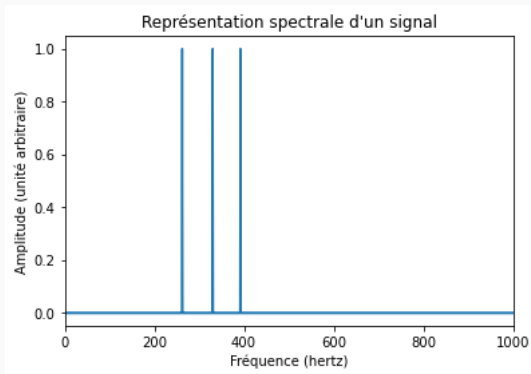
Le signal sonore suivant correspond à l'accord parfait majeur de do.

écouter



## Autre exemple

Voici sa représentation spectrale.



→ Ici, la fonction est en fait périodique de période  $T = \frac{1}{2}$ , donc de fréquence fondamentale  $\lambda = 2$ . Les trois raies correspondent alors respectivement aux harmoniques d'ordre 131, 165 et 196.

# Exemple introductif et contexte

---

Contexte du cours et intérêt du  
traitement du signal

Ce cours traite d'une partie (seulement !) de l'étude des signaux, en abordant certains outils mathématiques indispensables à cette étude.

## Définition 1 : Signal électrique

Un **signal** correspond à la manifestation d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression...) dont la variation transporte une information, d'une source à une destination.

**Remarque.** Les signaux considérés dans ce cours seront des grandeurs électriques variant en fonction du temps et obtenues à l'aide de capteurs.

# Dimension d'un signal

Un signal peut-être :

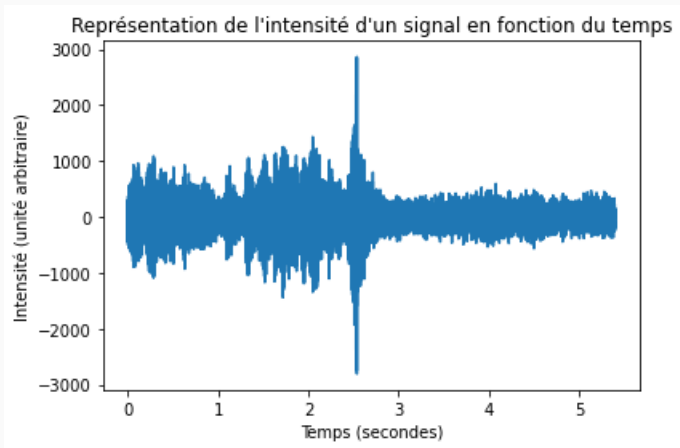
- Unidimensionnel 1D : il s'agit par exemple d'un phénomène ondulatoire comme le son. La variable est le temps  $t$ .
- Bidimensionnel 2D : il s'agit par exemple d'une image. La variable est une variable d'espace représentant les deux coordonnées  $(x, y)$  d'un point de l'image.
- Tridimensionnel 3D : il s'agit par exemple d'une vidéo (suite d'images 2D évoluant dans le temps). La variable est le triplet  $(x, y, t)$ .

Dans ce cours, on s'intéressera uniquement aux signaux unidimensionnels (représentant des grandeurs électriques).

# Exemples de signaux unidimensionnels.

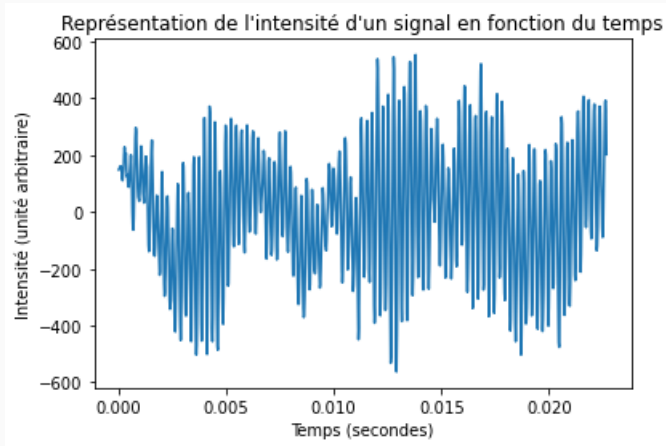
- un son...

→ mesuré entre 0 et 5 secondes...



# Exemples de signaux unidimensionnels.

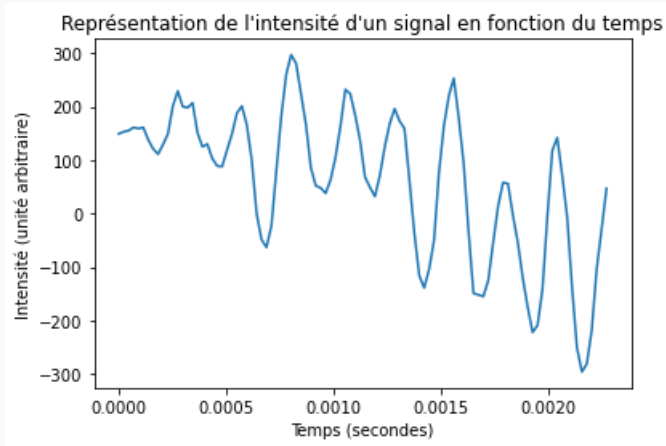
→ le même mesuré entre 0 et 0,02 secondes...





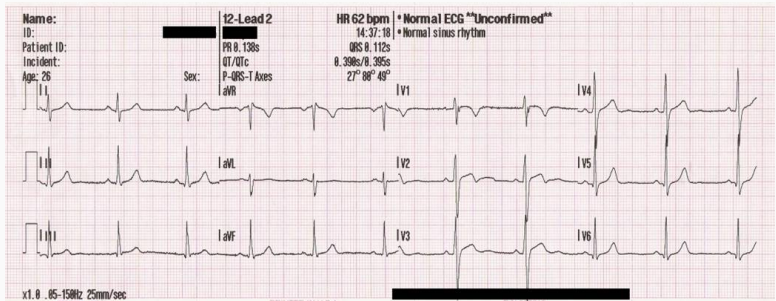
# Exemples de signaux unidimensionnels.

→ et encore le même mesuré entre 0 et 0,002 secondes.



# Exemples de signaux unidimensionnels.

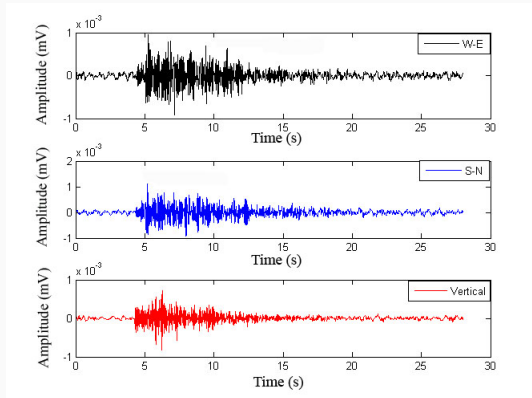
- un électrocardiogramme,



[Wikipedia]

# Exemples de signaux unidimensionnels.

- une onde sismique, etc...



[Wikipedia]

Consiste à étudier la description mathématique des signaux et à réaliser des opérations sur ces mêmes signaux.

- l'élaboration d'un signal (incorporation des informations) :
  - synthèse : *création de signal de forme appropriée (cf exemple introductif)*
  - modulation : *changement de la fréquence ou de l'amplitude d'un signal pour l'adapter aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission*
- l'interprétation d'un signal (extraction des informations) :
  - analyse : *étude des composantes utiles d'un signal (en lien avec les outils mathématiques de l'analyse de Fourier)*
  - filtrage : *atténuation de certaines fréquences présentes dans un signal*
  - détection : *extraction d'un signal d'un bruit de fond (technique de corrélation)*
  - etc...

Pour plus de précisions, se référer à [COT] p.3-4.

La théorie du signal, qui a pour objectif la description mathématique des signaux, repose sur les outils de l'**analyse de Fourier**.

On étudiera un signal de deux points de vue :

- le point de vue **temporel** : étude du signal dans le temps tel qu'il est enregistré,
- le point de vue **fréquentiel** : extraction d'informations "cachées" du signal, mais qui lui sont caractéristiques.

# Classification des signaux unidimensionnels

---

# Classification des signaux unidimensionnels

---

Définitions et premiers exemples

## Définition 2 : Prédictivité d'un signal

- Un signal **déterministe** est un signal dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique.
- Un signal **aléatoire** est un signal dont le comportement temporel est imprévisible.

## Remarques.

- La majeure partie de ce cours traitera l'étude de signaux déterministes.
- L'étude des signaux aléatoires est liée aux probabilités et fera l'objet d'une partie de la fin de ce cours.



## Définition 3 : Modélisation d'un signal déterministe

Un **signal unidimensionnel (déterministe)** peut-être modélisé mathématiquement par une fonction :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ & & t \mapsto f(t) \end{array}$$

**Remarque.** La fonction ne sera pas l'objet mathématique adapté à tous les signaux.

**Exemple.** La fonction  $s : t \mapsto A \sin(2\pi\lambda t + \phi)$ , avec  $A, \lambda \in \mathbb{R}^+$  et  $\phi \in \mathbb{R}$  est un signal dit sinusoïdal.

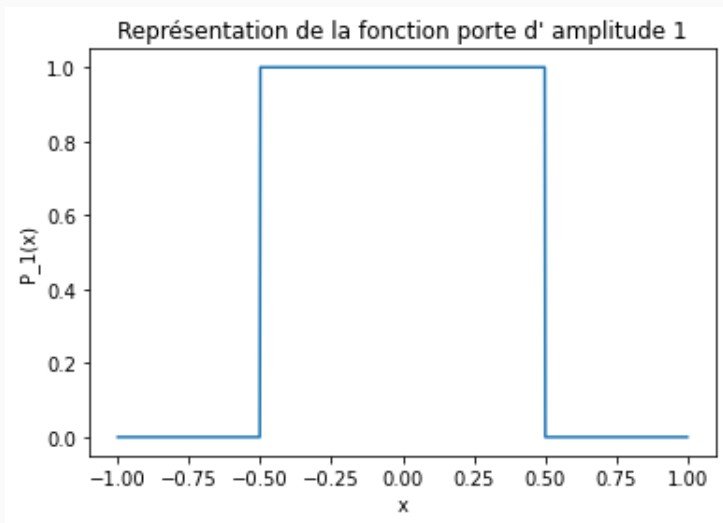
- La fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}]}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}]} &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{a}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Elle s'appelle également fonction rectangle, ou fonction porte d'amplitude  $a$  et peut se noter  $P_a$ .

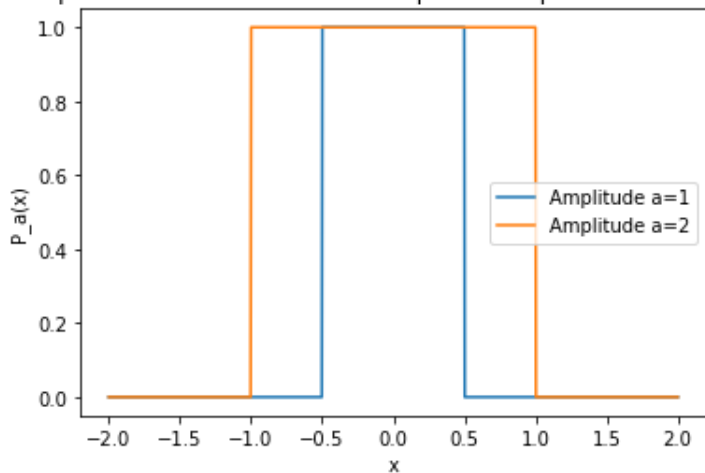
Représenter graphiquement la fonction porte d'amplitude 1.

## Exemples



## Exemples

Représentation de deux fonctions porte d'amplitudes différentes

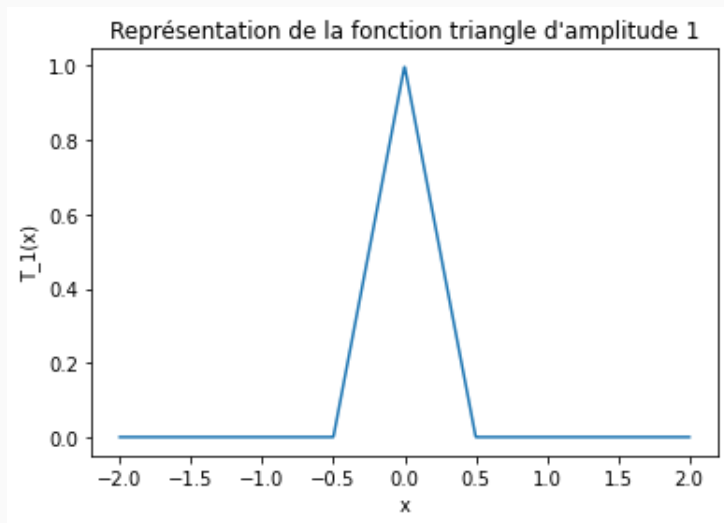


- La fonction triangle d'amplitude  $a$  :

$$\begin{aligned}\Delta_a &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} 1 - \frac{2}{a}|t| & \text{si } |t| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{a}{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

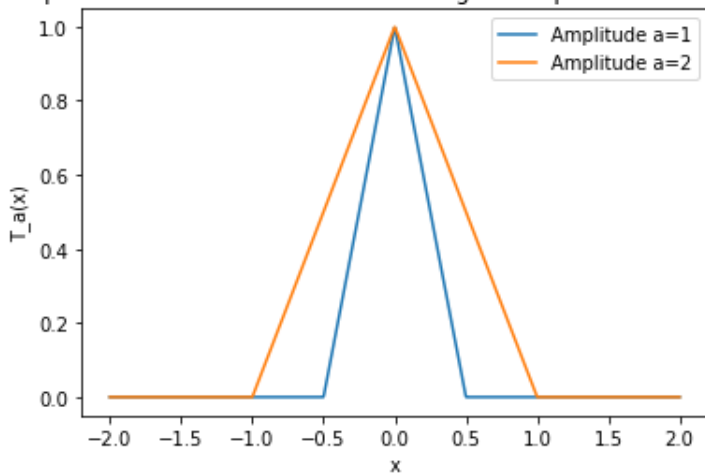
Représenter graphiquement la fonction triangle d'amplitude 1.

## Exemples



## Exemples

Représentation de deux fonctions triangle d'amplitudes différentes



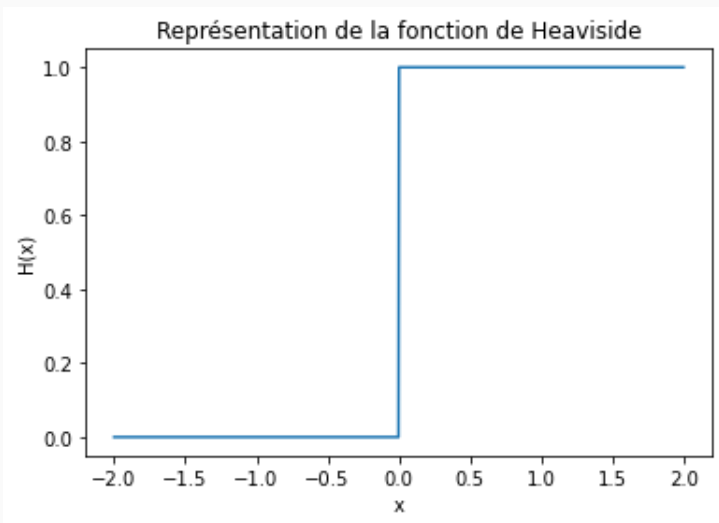
- La fonction de Heaviside, généralement notée  $\Gamma$  (parfois  $u$  ou  $\mathcal{H}$ ) :

$$\begin{aligned}\Gamma &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Représenter graphiquement la fonction de Heaviside.



## Exemples



- La distribution (ou impulsion) de Dirac  $\delta$  :

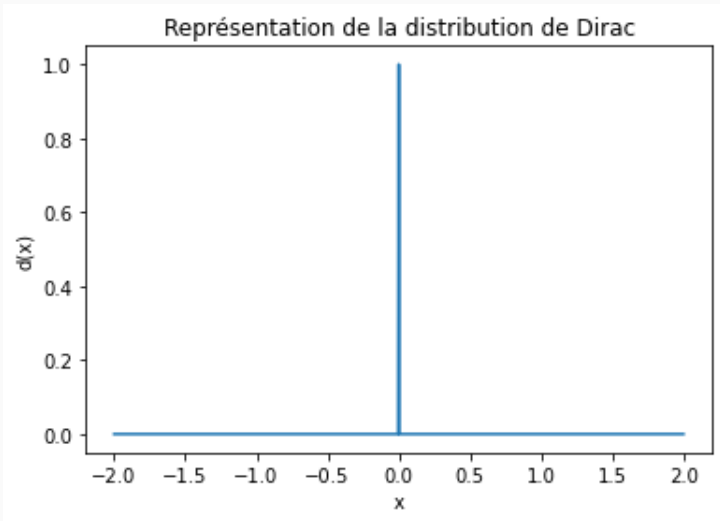
$$\begin{aligned}\delta &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} "+\infty" & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{si } t \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

qui vérifie  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ .

Mathématiquement,  $\delta$  n'est pas une fonction.

Comment représenter graphiquement l'impulsion de Dirac ??

# Exemples



**Remarque.** Selon les conventions, il peut y avoir une flèche en "haut du pic".

L'utilisation d'une fonction pour représenter un signal mène à certaines situations peu crédibles en pratique, comme :

- un signal avec des discontinuités,
- un signal défini sur  $\mathbb{R}^-$  (non causal),
- un signal à valeurs complexes,
- un signal à énergie théorique infinie,
- un signal à spectre infini.

→ L'intérêt est de simplifier la réalité, mais nécessite ensuite une interprétation pour la retrouver. Plus de détails dans [COT] p.11-12.

# Classification des signaux unidimensionnels

---

Classification temporelle

## Définition 4 : Période d'un signal

- Le signal est dit  **$T$ -périodique** lorsque la fonction  $f$  est  $T$ -périodique, c'est-à-dire lorsqu'il existe un nombre réel  $T \neq 0$  tel que

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Sinon, le signal est dit **apériodique**.

**Exemple.** Le signal sinusoïdal  $s : t \mapsto A \sin(2\pi\lambda t + \phi)$ , avec  $A, \lambda \in \mathbb{R}^+$  et  $\phi \in \mathbb{R}$  est-il périodique ? Si oui, la donner.

## Définition 4 : Période d'un signal

- Le signal est dit  **$T$ -périodique** lorsque la fonction  $f$  est  $T$ -périodique, c'est-à-dire lorsqu'il existe un nombre réel  $T \neq 0$  tel que

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Sinon, le signal est dit **apériodique**.

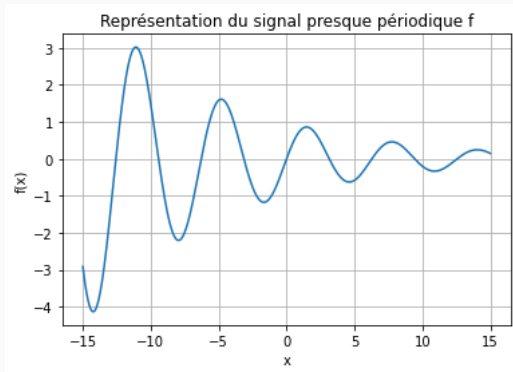
**Exemple.** Le signal sinusoïdal  $s : t \mapsto A \sin(2\pi\lambda t + \phi)$ , avec  $A, \lambda \in \mathbb{R}^+$  et  $\phi \in \mathbb{R}$  est-il périodique ? Si oui, la donner.

→ Oui, et sa période est  $T = \frac{1}{\lambda}$ .

# Classification temporelle

**Remarque.** Certains signaux apériodiques peuvent être qualifiés de pseudo-périodiques, ou presque périodiques.

**Exemple.** Le signal  $f : t \mapsto \sin(t)e^{-0,1t}$  défini sur  $\mathbb{R}$  admet une pseudo-période égale à  $2\pi$ .





# Classification des signaux unidimensionnels

---

Classification énergétique

## Définition 5 : Énergie d'un signal

Soit  $f$  un signal.

- Son énergie sur un intervalle  $I$  est définie par :

$$E_I = \int_I |f(t)|^2 dt.$$

- Son énergie totale est définie par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

**Remarque.** Cette définition est licite, en autorisant éventuellement une valeur de l'énergie infinie lorsque  $|f|^2$  n'est pas intégrable. Un signal peut donc être :

- à énergie finie,
- ou à énergie infinie.

**Exemple.** Calculer l'énergie, d'abord sur une période en cas de périodicité, puis totale, des signaux  $f$ ,  $g$  et  $P_a$  définis par :

1.  $f : t \mapsto \sin(t)$  sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $g : t \mapsto \Gamma(t)e^{-0,1t}$  sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $P_a : t \mapsto P_a(t)$  sur  $\mathbb{R}$ , où  $a > 0$ .

# Classification énergétique

1. Le signal  $f$  est  $2\pi$ -périodique, donc on commence par calculer son énergie sur une période.

# Classification énergétique

1. Le signal  $f$  est  $2\pi$ -périodique, donc on commence par calculer son énergie sur une période.

- Son énergie sur  $[0 ; 2\pi]$  est :

$$\begin{aligned} E_{[0 ; 2\pi]} &= \int_0^{2\pi} |\sin(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi - \frac{1}{4} (\sin(4\pi) - \sin(0)) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

# Classification énergétique

1. Le signal  $f$  est  $2\pi$ -périodique, donc on commence par calculer son énergie sur une période.

- Son énergie sur  $[0 ; 2\pi]$  est :

$$\begin{aligned} E_{[0 ; 2\pi]} &= \int_0^{2\pi} |\sin(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi - \frac{1}{4} (\sin(4\pi) - \sin(0)) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

- Son énergie sur une période étant non-nulle, on en déduit que son énergie totale est infinie.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin(t)|^2 dt = +\infty.$$

2. Le signal  $g$  n'est pas périodique donc on calcule directement son énergie totale.

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(t)e^{-0,1t}|^2 dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-0,2t} dt \\ &= \left[ \frac{1}{-0,2} e^{-0,2t} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{0,2} \\ &= 5. \end{aligned}$$

3. Le signal  $P_a$  n'est pas périodique donc on calcule directement son énergie totale.

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |P_a(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 1^2 dt \\ &= a. \end{aligned}$$



## Définition / Proposition 6 : Puissance moyenne d'un signal

Soit  $f$  un signal.

- Sa puissance moyenne sur un intervalle  $I = [a ; b]$  est définie par :

$$P_I = \frac{1}{b-a} \int_I |f(t)|^2 dt.$$

- Sa puissance moyenne totale est définie par :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt,$$

et si  $f$  est  $T$ -périodique, sa puissance moyenne totale est égale à :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt.$$

Un signal peut donc être :

- à puissance moyenne totale finie,
- ou à puissance moyenne totale infinie.

**Exemple.** Calculer la puissance moyenne des signaux  $f$ ,  $g$  et  $h$  définis par :

1.  $f : t \mapsto \sin(t)$  sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $g : t \mapsto \Gamma(t)e^{-0,1t}$  sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $h : t \mapsto \Gamma(t)e^{0,1t}$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Le signal  $f$  est  $2\pi$ -périodique, donc on calcule sa puissance moyenne sur une période.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \times \pi \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

cf. exemple précédent

2. Le signal  $g$  n'est pas périodique donc on commence par calculer sa puissance moyenne sur  $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$ , puis on fait tendre  $T$  vers  $+\infty$ .

2. Le signal  $g$  n'est pas périodique donc on commence par calculer sa puissance moyenne sur  $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$ , puis on fait tendre  $T$  vers  $+\infty$ .

$$\begin{aligned}P_{\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]} &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |\Gamma(t)e^{-0,1t}|^2 dt \\&= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-0,2t} dt \\&= \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{-0,2} e^{-0,2t} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\&= \frac{1}{0,2T} \left( 1 - e^{-0,1T} \right) \\&= \frac{5}{T} \left( 1 - e^{-0,1T} \right) \\&\xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

3. Le signal  $h$  n'est pas périodique donc on commence par calculer sa puissance moyenne sur  $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$ , puis on fait tendre  $T$  vers  $+\infty$ .

$$\begin{aligned}P_{\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\Gamma(t)e^{0,1t}|^2 dt \\&= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{0,2t} dt \\&= \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{0,2} e^{0,2t} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\&= \frac{1}{0,2T} (1 - e^{0,1T}) \\&= \frac{5}{T} (1 - e^{0,1T}) \\&\xrightarrow{T \rightarrow +\infty} +\infty\end{aligned}$$

## **Proposition 7 : Propriétés de l'énergie totale et de la puissance moyenne totale**

Soit  $f$  un signal.

- Si sa puissance moyenne totale est un nombre fini non nul, alors son énergie totale est infinie.
- Si son énergie totale est finie, alors sa puissance moyenne totale est nulle.

**Exemples.** Se référer à ceux des diapositives précédentes.



# Classification des signaux unidimensionnels

---

Classification spectrale

Un signal peut également être classifié par la largeur de sa bande :

- signal à large bande,
- signal à bande étroite,

ou selon le domaine de sa fréquence moyenne :

- signal à basse fréquence ( $< 250$  kHz),
- signal à haute fréquence (entre 250 kHz et 30 MHz),
- signal à très haute fréquence (entre 30 MHz et 300 MHz),
- etc...

→ Plus de détails dans [COT] p.15-16 ou sur le site de l'ANFR.

# Classification des signaux unidimensionnels

---

Classification morphologique

## Définition 8 : Morphologie d'un signal

Soit  $f$  un signal.

- Si sa variable  $t$  est continue, le signal  $f$  est dit (à temps) **continu**.
- Si sa variable de temps  $t$  est discrète, le signal  $f$  est dit (à temps) **discret**.

L'amplitude de  $f$  peut également être continue ou discrète (quantifiée).

- Un signal à temps et amplitude continus est dit analogique.
- Un signal à temps continu et amplitude discrète est dit quantifié.
- Un signal à temps discret et amplitude continue est dit échantillonné.
- Un signal à temps et amplitude discrets est dit numérique, ou logique.

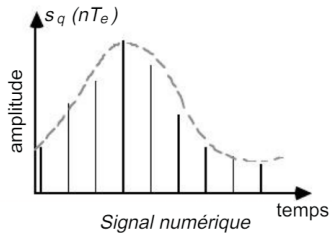
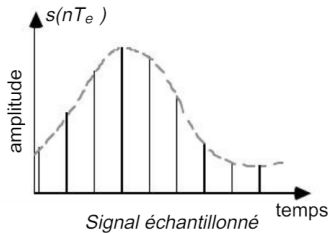
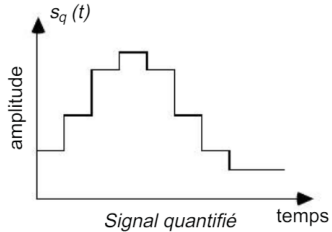
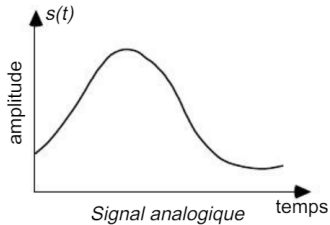
## Définition 9 : Numérisation d'un signal

On appelle **numérisation** d'un signal l'opération qui consiste à faire passer un signal de la représentation dans le domaine des temps et des amplitudes continus au domaine des temps et des amplitude discrets, qui se décompose en deux étapes :

- l'échantillonnage,
- la quantification.

**Remarque.** Le passage du signal numérique au signal analogique est appelé restitution, ou interpolation, du signal.

# Classification morphologique



*D'après [COT] p.17*