Université de Haute Alsace
ENSISA – Mathématiques discrètes I
Augustin Fruchard

Année 2024-2025

Travaux dirigés

Le sigle i.e. signifie “c'est-à-dire” (*id est* en latin) et ssi “si et seulement si”. La résolution des exercices et/ou questions avec une astérisque (*) sera gratifiée d'un demi-carambar.

Principe des pigeons

Exercice 1. On rappelle le principe des pigeons (appelé aussi principe des tiroirs) : si au moins $Np+1$ pigeons habitent un pigeonnier contenant N trous d'envol, alors au moins un trou d'envol (ou tiroir) contient au moins $p+1$ pigeons.

a. * Combien de fous au maximum peut-on disposer sur un échiquier sans que deux soient en prise l'un de l'autre ?

b. Montrer que, parmi cinq points du plan à coordonnées entières, au moins deux d'entre eux ont leur milieu à coordonnées entières.

c. * Démontrer le principe de Dirichlet :
pour tout nombre réel θ et tout entier strictement positif Q, il existe des entiers p et q avec $0 < q \leqslant Q$ tels que $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}$.

d. Quel est le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ ayant la propriété $\mathcal{P}_k$ ci-dessous ?
$\mathcal{P}_k$: pour tous $x_1, \ldots, x_k \in \{1, \ldots, 15\}$ il existe $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$ tels que, ou bien $x_i = x_j$, ou bien $x_i + x_j = 16$.
(Regrouper dans un même tiroir des entiers dont la somme fait 16.)

e. * On se donne 10 entiers entre 1 et 100. Montrer qu'il existe parmi eux deux sous-ensembles disjoints de nombres ayant la même somme.

Exercice 2. On rappelle que le *triangle moitié* d'un triangle est le triangle formé par les milieux de ses côtés.

a. Montrer que, parmi neuf points dans un triangle d'aire 1, trois d'entre eux forment un triangle d'aire au plus $1/4$.

b. Montrer que trois points dans un parallélogramme d'aire $1/2$ forment un triangle d'aire au plus $1/4$.

c. * Montrer que, parmi sept points dans un triangle d'aire 1, on peut en trouver trois qui délimitent un triangle d'aire au plus $1/4$.

Exercice 3. Un jeu de pari sur les résultats de matchs de football vous invite à remplir un carton avec une grille de 13 cases correspondant aux 13 matchs qui seront joués par 26 équipes samedi prochain. Il faut indiquer pour chaque match, A contre B, le résultat que vous anticipez : A gagne, B gagne, ou match nul. Combien de cartons de jeu faut-il remplir et comment faut-il les remplir pour être certain que l'un d'eux comporte au moins cinq prévisions exactes ?

Exercice 4. * Sur chaque case d'un damier carré de taille finie $n \times n$, une flèche indique une des quatre directions. Une fourmi se trouve sur une des cases. Chaque seconde, elle change de case et va sur la case voisine en suivant la direction indiquée par la flèche de la case où elle se trouve. Lorsque la fourmi quitte une case, la flèche de la case qu'elle vient de quitter tourne d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est la seule flèche qui tourne à cet instant. Il y a un mur sur les quatre côtés du damier, sauf à un endroit : une des cases du bord n'a pas de mur. Lorsque la fourmi est bloquée par le mur, elle ne change pas de case, mais la flèche tourne quand même d'un quart de tour. Si la fourmi arrive sur la case du bord sans mur et que la flèche de la case pointe vers la sortie, elle sort. La fourmi finit-elle toujours par sortir ? Si oui, peut-on donner une majoration — ne dépendant que de n — du temps qu'il lui faudra ? Si non, proposer un damier, une sortie, une position de départ pour la fourmi et une configuration des flèches tels que la fourmi reste éternellement sur le damier.

Exercice 5. * Soit $S = (x_1, \ldots, x_N)$ une suite arbitraire de N nombres réels tous différents. On considère une sous-suite croissante de S de la plus grande longueur possible, notée C, et une sous-suite décroissante de S de la plus grande longueur possible, notée D. Montrer que $CD \geqslant N$.
Indication : pour chaque x de la suite, considérer la plus longue sous-suite croissante partant de x, de longueur c, et la plus longue sous-suite décroissante partant de x, de longueur d, puis ranger le couple (c, d) dans un tiroir. Montrer alors que, si deux nombres x et y de la suite sont dans le même tiroir, disons avec x avant y dans la suite, alors, ou bien il existe une sous-suite croissante de S partant de x et de longueur au moins $c+1$, ou bien il existe une sous-suite décroissante de S partant de x et de longueur au moins $d+1$.

Numération

Sauf mention du contraire, tous les nombres sont écrits en base 10.

Exercice 6. Écrire en base 7 le nombre 916. Écrire en base 3 le nombre 222. Quel est le développement en base 5 du nombre $5^{10}-2$?

Exercice 7. En base 12, on utilise les chiffres de 0 à 9 et les deux lettres A et B (A pour 10 et B pour 11). Soit $x=(A5B)_{12}$; écrire x en base 10. Soit $y=(9875)_{10}$; écrire y en base 12.

Exercice 8. Soit b un entier $\geqslant 4$. Soit $x\in\mathbb{N}$; on suppose que son écriture en base b est 130.

a. Si $b=10$, donner l'écriture de x en base 6.

b. Si $b=9$, donner l'écriture de x en base 10.

c. Si x^2 s'écrit 20200 en base b, déterminer b et x.

Exercice 9. Soit b et x deux entiers. On suppose que x s'écrit 216 en base b et 157 en base $b+1$. Déterminer la valeur de x en base 10.

Exercice 10. * Trouver tous les nombres à deux chiffres écrits en base 7 qui sont égaux au carré de la somme de leurs chiffres.

Exercice 11.
Quel est le développement décimal de $\dfrac{581}{222}$? de $\dfrac{42}{65}$? de $\dfrac{1}{17}$?
Écrire sous forme irréductible le nombre rationnel dont le développement décimal est $0,7777777\ldots$. Même question avec $0,77272727272\ldots$ puis avec $2,0090009000900090\ldots$ Généraliser.

Exercice 12. Écrire le développement décimal de $\dfrac{1}{7},\dfrac{2}{7},\ldots,\dfrac{6}{7}$.
Que remarquez-vous ?
Même question avec $\dfrac{1}{13},\dfrac{2}{13},\ldots,\dfrac{12}{13}$ Même question avec $\dfrac{1}{41},\ldots,\dfrac{40}{41}$.

Exercice 13. On admet que 9 999 999 (sept "9") est divisible par 239. Donner *sans calcul* la longueur de la prépériode et la longueur de la période de $\dfrac{73}{80\times 239}$.

Exercice 14. Démontrer qu'un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. Montrer que, si la période de $1/q$ est égale à $q-1$, alors le développement décimal de p/q est le même que celui de $1/q$ décalé.

Exercice 15. Soit b un entier $\geqslant 2$.

a. Montrer que, pour tout $y\in\mathbb{R}$, on a $0\leqslant\lfloor by\rfloor-b\lfloor y\rfloor\leqslant b-1$.

b. Soit $x\in]0,1[$. Pour tout $n\geqslant 1$, on pose $x_n=\lfloor b^n x\rfloor-b\lfloor b^{n-1}x\rfloor$.

- Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{b^n}=x$. On écrit $x=0,x_1x_2\ldots x_n\ldots$; c'est l'*écriture de x en base b.*

- Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers $b-1$.

c. Soit $x\in\mathbb{R}$. On suppose que l'écriture de x en base 3 est $0,121012101210\ldots$ Déterminer son écriture en base 10.

d. Écrire $0,375$ et $0,85$ en base 2. Écrire $\dfrac{3}{64},\dfrac{23}{64}$ et $\dfrac{3}{5}$ en base 4.

Exercice 16. Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $a_n=\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor$ et $b_n=\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

a. Montrer que $a_n\leqslant b_n$.

b. Montrer que $\sqrt{4n+2}\notin\mathbb{N}$. Indication : quel peut être le reste d'un carré d'entier dans la division par 4 ?

c. Montrer qu'il n'existe aucun entier compris strictement entre $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$.

d. En déduire que $a_n=b_n$.

Exercice 17. On rappelle que $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Soit $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ une fonction telle que $f(1)=1$ et $f(n)\leqslant 2f(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)+n$ pour $n\geqslant 2$. Soit $C=\dfrac{2}{\ln 2}$. Montrer par récurrence que $f(n)\leqslant Cn\ln n$ pour tout $n\geqslant 2$.

Exercice 18. On considère un arbre *binaire complet* de profondeur infinie. Les nœuds sont numérotés par les entiers strictement positifs de haut en bas et, dans chaque ligne, de gauche à droite. A chaque nœud, on attribue une *valeur* ou *étiquette* de la manière suivante :
- à la racine on attribue le nombre rationnel 1 ;
- si un nœud a l'étiquette p/q (où p et q sont des entiers premiers entre eux), on attribue à ses fils gauche et droit, respectivement, les étiquettes $p/(p+q)$ et $(p+q)/q$.

$$\begin{array}{ccc} & \dfrac{p}{q} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \dfrac{p}{p+q} & & \dfrac{p+q}{q} \end{array}$$

On admet que tous les rationnels strictement positifs figurent une et seule fois dans cet arbre.

a. Représenter les quatre premières lignes de cet arbre.

b. Déterminer le numéro du nœud dont l'étiquette est $\dfrac{22}{35}$.

c. On considère un nœud dont l'étiquette est le rationnel $r = p/q$. Déterminer, d'abord en fonction de p et q, puis en fonction de r l'étiquette du nœud lorsque l'on descend k fois à droite. Même question si l'on descend k fois à gauche.

d. Pour tout $n \geqslant 1$, on note x_n l'étiquette du nœud numéroté n ; ainsi $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \dfrac{1}{3}$, etc. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $x_{n+1} = \dfrac{1}{2\lfloor x_n \rfloor - x_n + 1}$.

e. Calculer x_{64}, x_{65} et x_{66}.

f. Calculer x_{2024}.

Exercice 19. Montrer que $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ et $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ sont irrationnels.

Exercice 20. Soit $e = \exp 1$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$e = S_n + R_n \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{n+1} < n!R_n < \dfrac{1}{n}$. Pour la seconde inégalité, on pourra remarquer que, si $p \geqslant 2$, alors

$$(n+1)\cdots(n+p) > (n+1)^p.$$

b. Déduire de la question précédente que e est irrationnel.

c. En admettant que les puissances entières de e (i.e. les e^a, $a \in \mathbb{N}^*$) sont irrationnelles, montrer que e^r est irrationnel pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$.

d. Soit $x \in \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[$. Montrer que $\ln x$ est irrationnel.

Ensemble

Exercice 21. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$. Pour $r > 0$, on note $B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \|x\| \leqslant r\}$ (c'est la *boule fermée de rayon* r). Écrire en extension les ensembles suivants.

a. $U = B_3 \cap (\mathbb{N} \times \{1\} \times \mathbb{N})$ **b.** $V = B_1 \cap \mathbb{Z}^3$ **c.** $W = (B_3 \setminus B_2) \cap \mathbb{N}^3$

Exercice 22. Soit $E = \{1, 2, 3\}$ Écrire en extension l'ensemble

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{P}(E) \ ; \ 1 \notin A \text{ ou } 2 \in A\}.$$

Exercice 23. Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{1\}$. Déterminer $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Exercice 24. Dans la liste des axiomes de la théorie des ensembles, figure le plus souvent l'axiome de fondation qui dit :

$$\forall X \big(X \neq \emptyset \Rightarrow \exists Y (Y \in X \text{ et } Y \cap X = \emptyset)\big).$$

a. Montrer que, pour tout ensemble A, on a $A \notin A$ (considérer $X = \{A\}$).

b. Montrer qu'il ne peut pas exister d'ensembles $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tels que

$$A_0 \in A_1 \in \cdots \in A_n \in A_0.$$

c. Montrer qu'une suite infinie d'ensembles $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $B_0 \ni B_1 \ni \cdots \ni B_n \ni \ldots$ ne peut pas exister.

Exercice 25. Soit A, B, C et D quatre ensembles. On suppose que $A \subseteq C$, $B \subseteq D$, $C \cap D = \emptyset$ et $A \cup B = C \cup D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

Exercice 26. Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Simplifier les expressions :

$$A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \quad \text{et} \quad A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C).$$

Exercice 27. *Différence symétrique.* Soit E un ensemble non vide. Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E et on pose

$$A \vartriangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

a. Montrer que $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

b. Montrer que $A \vartriangle B = B \vartriangle A$, $A \vartriangle \emptyset = A$, $A \vartriangle E = \overline{A}$ et $\overline{A \vartriangle B} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.

c. Montrer que $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$.

d. A-t-on toujours $A \cup (B \vartriangle C) = (A \cup B) \vartriangle (A \cup C)$?

e. Montrer que $A \vartriangle B = A \vartriangle C \Leftrightarrow B = C$.

f. * Montrer que Δ est associative (i.e. $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$).

g. Montrer que $A \vartriangle B = \emptyset$ si et seulement si $A = B$.

h. Simplifier $(A \vartriangle C) \vartriangle (C \vartriangle B)$.

i. On suppose dans cette question que E est fini. Montrer que l'application d définie par $d(A, B) = \mathrm{Card}\,(A \vartriangle B)$ est une distance sur $\mathcal{P}(E)$, appelée distance de *Hamming*, i.e. satisfait les axiomes (pour tous $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$) :

(i) $d(A, B) \geqslant 0$,

(ii) $\big(d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B\big)$,

(iii) $d(A, B) = d(B, A)$,

(iv) $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$.

Exercice 28. Soit E un ensemble fini à n éléments. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $\mathcal{P}_k(E) = \{A \in \mathcal{P}(E) \,;\, \mathrm{Card}\, A = k\}$. On rappelle que

$$\mathrm{Card}\, \mathcal{P}_k(E) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}\, P_k(E) = 0 \quad \text{si} \quad k > n.$$

a. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?

b. Montrer que le cardinal de l'ensemble $F = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \,;\, A \cap B = \emptyset\}$ est égal à 3^n.

c. Par des considérations ensemblistes, montrer la formule

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}.$$

Exercice 29. Charles vit à New York au coin de la 23ème rue et de la 10ème avenue. Son école se situe au coin de la 28ème rue et de la 13ème avenue. Combien de chemins différents peut-il emprunter sans faire de détours pour se rendre à son école ?

Application

Exercice 30. Soit $a \in \mathbb{R}$ et E un ensemble non vide. Les applications ci-dessous sont-elles injectives ? surjectives ?

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - a \sin x \qquad f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto 2x - 5$$

$$f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (y, x - y) \qquad f_4 : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), \quad (A, B) \mapsto A \cup B$$

Exercice 31. Soit f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \lfloor x/2 \rfloor$. Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 32. * Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Soit φ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$\varphi(X) = (A \cap X, B \cap X)$$

a. À quelle condition sur A et B la fonction φ est-elle injective ? surjective ?

b. Déterminer φ^{-1} dans le cas où φ est bijective.

Exercice 33. Montrer que la fonction $f : n \mapsto \left|2n - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$ est une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 34. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f(a, b) = \frac{1}{2}(a+b)(a+b+1) + b$.

a. Vérifier que f est bien définie.

b. Soit (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{N}^2$. On suppose que $a + b < c + d$. Montrer, grâce à l'inégalité $b < a + b + 1$, que $f(a, b) < f(c, d)$. En déduire que f est injective.

c. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Trouver un couple (c,d) tel que $f(c,d) = f(a,b)+1$ lorsque $a > 0$ et lorsque $a = 0$.

d. Montrer que f est bijective.

e. À quoi correspond f géométriquement ?

Exercice 35. Soit E un ensemble et $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. En raisonnant par l'absurde, montrer que f ne peut pas être surjective. On pourra considérer $A = \{x \in E \ ; \ x \notin f(x)\}$. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Exercice 36. Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel et soit $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ muni de sa relation d'ordre usuelle. Montrer que toute fonction croissante de E_n dans E_n a au moins un point fixe. Indication : montrer que la partie $A = \{x \in E_n \ ; \ f(x) \leqslant x\}$ a bien un minimum.

Exercice 37. * Soit E un ensemble et soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application croissante pour l'inclusion, i.e $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Montrer que f a au moins un point fixe, i.e. il existe $A \subseteq E$ tel que $f(A) = A$.

Exercice 38. Soit E un ensemble non vide, A une partie de E et soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ définie par $f(X) = (A \cup X, A \cap X)$. Cette application est-elle injective ? surjective ?

Relation

Exercice 39. Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $*$ associative, commutative et dont tous les éléments sont réguliers. Rappelons qu'un élément $x \in E$ est dit *régulier* ou *simplifiable* si, pour tous a, b dans E, on a $(a * x = b * x \Rightarrow a = b)$. On considère sur $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$ définie par $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si $a * d = b * c$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Dans le cas de la multiplication sur $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, quelle est la classe d'équivalence de $(4, -14)$?

Exercice 40. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble

$$A = \{(-1,3), (1,\sqrt{2}), (2,\pi), (2,0), (1,-7), (0,0), (-1,-1)\}$$

Tracer le diagramme de Hasse de A ordonné par l'ordre lexicographique $\leqslant_L$, puis celui de A ordonné par l'ordre produit $\leqslant_P$. Pour l'ordre produit, déterminer la borne inférieure de A et la borne supérieure de A.

Exercice 41. Dans $\mathbb{N}$, on considère la relation de divisibilité $|$ définie par $a \,|\, b$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b = ka$.

a. Montrer que $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ et, qu'ainsi ordonné, $\mathbb{N}$ possède un plus petit et un plus grand élément que l'on déterminera.

b. Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de $\{6, 12, 16\}$.

c. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 20\}$. Tracer le diagramme de Hasse de E. L'ensemble E possède-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ? Quels sont les éléments minimaux et les éléments maximaux de E ?

Exercice 42. Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On munit E de la relation d'inclusion. Les éléments de E sont donc des ensembles et une partie de E est un ensemble d'ensembles.

a. Donner une partie $\mathcal{A}$ de E contenant trois éléments, n'admettant pas de plus grand élément, admettant $\{1, 6\}$ comme plus petit élément et $\{1, 3, 5, 6\}$ comme borne supérieure.

b. Soit $\mathcal{B} = \big\{\{1\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{4,5\}, \{1,2,4\}, \{2,4,5,6\}\big\}$.
Tracer le diagramme de Hasse de $\mathcal{B}$. Donner les éléments minimaux et les éléments maximaux de $\mathcal{B}$, ainsi que sa borne inférieure et sa borne supérieure.

Exercice 43. Soit X un ensemble et $*$ une opération commutative sur X. Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur X. On dit que $\preccurlyeq$ est *compatible* avec $*$ si, pour tous $x, y, a \in X$, on a

$$x \preccurlyeq y \ \Rightarrow \ x * a \preccurlyeq y * a$$

a. Donner des exemples d'ensembles munis d'une opération commutative et d'une relation d'ordre compatible avec cette opération.

b. Soit E un ensemble. Dans $\mathcal{P}(E)$, avec lesquelles des opérations $\cap$, $\cup$ et Δ, l'inclusion est-elle compatible ?

c. Soit X un ensemble et $*$ une opération commutative sur X. Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur X compatible avec $*$ et soit $x, y, a, b \in X$ tels que $x \preccurlyeq y$ et $a \preccurlyeq b$. Montrer que $x * a \preccurlyeq y * b$.

d. Soit $(G, +)$ un groupe commutatif, d'élément neutre 0 et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur G compatible avec $+$; on note $N = \{x \in G \ ; x \preccurlyeq 0\}$ et $P = \{x \in G \ ; x \succcurlyeq 0\}$. Pour $A, B \subset G$, on note $-A = \{-g \ ; \ g \in A\}$ et $A + B = \{g + h \ ; \ g \in A, h \in B\}$.

(i) Montrer que $N = -P$, que $P \cap N = \{0\}$ et que $P + P = P$.

(ii) Montrer que $\preccurlyeq$ est totale si et seulement si $P \cup N = G$.

(iii) Soit $G = \mathbb{R}^2$. Vérifier que l'ordre produit $\leqslant_P$ et l'ordre lexicographique $\leqslant_L$ sont compatibles avec l'addition. Représenter P et N pour ces deux relations d'ordre.

(iv) Soit $G = \mathbb{C}$, qu'on identifie à $\mathbb{R}^2$, muni de l'ordre lexicographique $\leqslant_L$. Soit $a \in P$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 \leqslant_L z_2$. A-t-on toujours : $az_1 \leqslant_L az_2$?

e. Soit $(G, +)$ un groupe commutatif, d'élément neutre 0 et P une partie de G telle que $P \cap (-P) = \{0\}$ et $P + P = P$. Montrer que l'on peut définir une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur G, qui soit compatible avec $+$ et telle que $P = \{x \in G\,; x \succcurlyeq 0\}$.

Définition inductive

Exercice 44. Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$ un alphabet à deux lettres et $\mathcal{A}^*$ l'ensemble de tous les mots écrits avec l'alphabet $\mathcal{A}$. On considère la partie L de $\mathcal{A}^*$ définie inductivement par : $B = \{\varepsilon\}$, où ε est le mot vide, et les règles d'induction

- ▷ $f : L \to L$ telle que $f(u) = aub$;
- ▷ $g : L \to L$ telle que $g(u) = bua$;
- ▷ $h : L \times L \to L$ telle que : $h(u, v) = uv$.

On sait que $L = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_p \cup B_{p+1} \cup \ldots$ où les ensembles B_p sont définis par récurrence de la manière suivante : $B_0 = B$ et $B_{p+1} = B_p \cup f(B_p) \cup g(B_p) \cup h(B_p \times B_p)$.

a. Déterminer B_1 et B_2.

b. Donner une caractérisation des mots appartenant à L.

Exercice 45. Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$ un alphabet à deux lettres et $\mathcal{A}^*$ l'ensemble de tous les mots écrits avec l'alphabet $\mathcal{A}$.

a. Soit n un entier $\geqslant 1$. Combien $\mathcal{A}^*$ contient-il de mots à $2n$ lettres ayant autant de a que de b ?

On note ε le mot vide et on considère la partie L de $\mathcal{A}^*$ définie inductivement par $B = \{\varepsilon\}$ et les règles d'induction $f : L \to L$ telle que $f(u) = aub$ et $g : L \times L \to L$ telle que $g(u, v) = uv$.

b. Déterminer B_1, B_2 et B_3.

c. L'ensemble L contient-il tous les mots s'écrivant avec autant de a que de b, commençant par a et finissant par b ?

Exercice 46. Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$ un alphabet à deux lettres et $\mathcal{A}^*$ l'ensemble de tous les mots écrits avec cet alphabet $\mathcal{A}$. On considère la partie $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}^*$ définie inductivement par : $\{a\} \subset \mathcal{L}$ et $\forall x \in \mathcal{L}$, $bx \in \mathcal{L}$ et $\forall x, y \in \mathcal{L}$, $xy \in \mathcal{L}$.

a. Faire la liste des mots d'au plus trois lettres appartenant à $\mathcal{L}$.

b. Donner une caractérisation des mots appartenant à $\mathcal{L}$.

Exercice 47. La *fonction de Ackermann* est la fonction $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ A(0, n) = n + 1$;

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ A(m, 0) = A(m - 1, 1)$;

(iii) $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ n \in \mathbb{N}^*,\ A(m, n) = A(m - 1, A(m, n - 1))$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A(1, n) = n + 2$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A(2, n) = 2(n + 3) - 3$.

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A(3, n) = 2^{n+3} - 3$.

d. Calculer $A(4, 3)$ et $A(5, 1)$.

Exercice 48. [La fonction 91 de Mac Carthy] Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si} \quad n > 100\,; \\ f(f(n + 11)) & \text{si} \quad n \leqslant 100. \end{cases}$$

Par une récurrence *descendante*, montrer que $f(n)$ est bien défini pour tout $n \leqslant 100$, et calculer sa valeur.

Exercice 49. Soit E un ensemble. Soit B la partie de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les singletons de E. Déterminer la partie A de $\mathcal{P}(E)$ définie par induction à partir de la base B et de la règle d'induction $f : \mathcal{P}(E)^2 \to \mathcal{P}(E)$ définie par $f(X, Y) = X \cup Y$.

Algèbre de Boole

Exercice 50. À partir de la définition d'une algèbre de Boole ($+$ et $\cdot$ commutatives, associatives, chacune distributive par rapport à l'autre, deux neutres 0 et 1 et une opération $\overline{\cdot}$ telle que $a+\overline{a}=1$ et $a\overline{a}=0$), démontrer les règles de calcul suivantes (pour tous $a,b\in B$).

a. Si $a+b=1$ et $ab=0$, alors $b=\overline{a}$.

b. $\overline{\overline{a}}=a$.

c. $\overline{1}=0$ et $\overline{0}=1$.

d. 0 est absorbant pour $\cdot$ et 1 est absorbant pour $+$, i.e. $0\cdot a=0$ et $1+a=1$.

e. $\overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$ et $\overline{a+b}=\overline{a}\,\overline{b}$.

Exercice 51. Soit E un ensemble et $\chi(E)$ l'ensemble des fonctions indicatrices des parties de E : pour $A\subseteq E$, $\mathbf{1}_A(x)=1$ si $x\in A$ et $\mathbf{1}_A(x)=0$ si $x\notin A$. Pour $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B\in\chi(E)$, on pose

$$\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B=\mathbf{1}_{A\cup B}\qquad \mathbf{1}_A\cdot\mathbf{1}_B=\mathbf{1}_{A\cap B}\qquad \overline{\mathbf{1}_A}=\mathbf{1}_{E\setminus A}$$

Vérifier que $\big(\chi(E),+,\cdot,\overline{\cdot}\big)$ est une algèbre de Boole.

Exercice 52. Soit B une algèbre de Boole et $a,b,c\in B$.

a. Simplifier les expressions :

$$a+\overline{ab}\qquad \overline{ab+\overline{a}+\overline{b}}\qquad (a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$$

$$1+a+b\qquad \overline{\overline{a+b}+a}\qquad (a+b)(a+\overline{b})(c+a)(\overline{c}+\overline{a}).$$

b. Montrer la *règle du consensus* $ab+\overline{a}c=ab+\overline{a}c+bc$.

Exercice 53. Soit B une algèbre de Boole et les fonctions

$$f(a,b)=\overline{a}+ab\quad\text{et}\quad g(a,b,c)=a\overline{b}+\overline{c}.$$

Trouver les formes canoniques disjonctives (sommes de mintermes) et conjonctives (produits de maxtermes) de ces deux fonctions.
Même question avec $f(a,b)=(a+b)\overline{a}b$ et $g(a,b,c)=\overline{ab\overline{c}+\overline{a}b}$.

Exercice 54. Soit B une algèbre de Boole et $a,b,c\in B$.

a. Montrer que, si $ac=b\overline{c}$, alors $ac=b\overline{c}=0$.

b. Montrer que, si $ab=1$, alors $a=b=1$.

c. Montrer que, si $a+b=0$, alors $a=b=0$.

Exercice 55. On note $\mathbb{B}=\{0,1\}$ l'algèbre de Boole binaire. Dans $\mathbb{B}^3$, on considère la fonction *majorité* donnée par $m(a,b,c)=0$ si parmi a,b,c il y a deux ou trois 0 et $m(a,b,c)=1$ sinon.

a. Écrire m sous forme de sommes de mintermes.

b. Généraliser aux cas de n variables.

c. Recommencer l'exercice avec la fonction *parité* donnée par $p(a,b,c)=0$ si parmi a,b,c il y a un ou trois 1 et $p(a,b,c)=1$ sinon (i.e. $p(a,b,c)=a+b+c+1 \mod 2$).

Exercice 56. Quelles sont les fonctions booléennes à une variable ? Écrire chacune sous forme de somme de mintermes.

Exercice 57. Soit E un ensemble et A,B deux parties fixées de E. On veut résoudre l'équation

$$(A\cap B)\cup X=B \tag{1}$$

d'inconnue X une partie de E.

a. Écrire sous forme disjonctive $(A\cap B)\cup X$ et B en les considérant comme des expressions des trois variables A,B et X.

b. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

Exercice 58. Soit $E=\{u,v\}$ et B l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(E)$ munie des opérations de réunion, d'intersection et de complémentaire.

a. Écrire B en extension, en utilisant les notations $U=\{u\}$ et $V=\{v\}$.

b. Déterminer toutes les fonctions booléennes à une variable, i.e. de B dans B. Combien y en a-t-il ?

c. Combien y a-t-il de fonctions, booléennes ou non, de B dans B ? Donner **un** exemple de fonction non booléenne de B dans B.

d. Combien y a-t-il de fonctions non booléennes sur B à deux variables ? à trois variables ?

Exercice 59. Soit $(B,+,\cdot,\overline{\cdot})$ une algèbre de Boole. On définit la *somme disjonctive* $\oplus : B\times B\to B$ de la manière suivante

$$a\oplus b=a\overline{b}+\overline{a}b$$

a. Calculer $a \oplus 1$, $a \oplus 0$, $a \oplus a$ et $a \oplus \overline{a}$.

b. Écrire $\overline{a \oplus b}$ sous forme canonique disjonctive (somme de mintermes). En déduire la forme canonique conjonctive (produit de maxtermes) de $a \oplus b$.

c. Soit $a, b \in B$. Montrer que $(a + b) \oplus b = a\overline{b}$.

d. Soit $a, b \in B$. Montrer que $(a \oplus b) + ab = a + b$.

e. Soit $a, b, c \in B$. Écrire $(a \oplus b) \oplus c$ sous forme canonique disjonctive, puis sous forme canonique conjonctive.

f. En déduire que $\oplus$ est associative.

g. Démontrer : $a \oplus b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b$.

h. Comment s'appelle $\oplus$ lorsque B est l'algèbre de Boole des parties d'un ensemble ?

Exercice 60. Soit B une algèbre de Boole et $a, b \in B$.

a. Démontrer les équivalences

$$a\overline{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{a} + b = 1 \;\Leftrightarrow\; ab = a \;\Leftrightarrow\; a + b = b$$

On notera par la suite $a \leqslant b$ si les assertions ci-dessus sont vraies.

b. Montrer que la relation $\leqslant$ ainsi définie est une relation d'ordre (partiel a priori).

c. Montrer que cette relation a un plus petit élément et un plus grand élément.

d. Montrer que $ab \leqslant a \leqslant a + b$ pour tous $a, b \in B$.

e. Montrer que l'on a pour tous $a, b, c \in B$

(i) $(a \leqslant b$ et $a \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant bc$,

(ii) $(a \leqslant c$ et $b \leqslant c) \Rightarrow a + b \leqslant c$.

f. Montrer que la relation $\leqslant$ est compatible avec les opérations de B au sens suivant : pour tous $a, b, c \in B$, on a

(i) $a \leqslant b \Rightarrow \overline{b} \leqslant \overline{a}$,

(ii) $a \leqslant b \Rightarrow (ac \leqslant bc$ et $a + c \leqslant b + c)$.

Exercice 61. * Soit B une algèbre de Boole de cardinal fini. Le but de l'exercice est de démontrer que B est isomorphe à l'algèbre de Boole des parties d'un ensemble fini, un théorème attribué à Stone.

Un *atome de B* est un élément non nul minimal pour la relation $\leqslant$ de l'exercice **??**. On note A l'ensemble des atomes de B. Ainsi, on a

$$a \in A \;\Leftrightarrow\; a \in B \setminus \{0\} \text{ et } \forall b \in B \; (b < a \Rightarrow b = 0)$$

où la notation $b < a$ signifie $a \neq b \leqslant a$. Le but de l'exercice est de construire un isomorphisme entre $(B, +, ., \overline{\cdot})$ et $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{\cdot})$.

a. Montrer que, si a et a' sont deux atomes distincts, alors $aa' = 0$.

b. Montrer que, pour tout $b \in B \setminus \{0\}$, il existe $a \in A$ tel que $a \leqslant b$. *Indication* : sinon il existe une suite infinie $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $b = b_0 > b_1 > b_2 > \cdots$, contredisant l'hypothèse B finie.

c. Montrer que $\sum_{a \in A} a = 1$. *Indication* : par l'absurde, si $b = \sum_{a \in A} a \neq 1$, appliquer la question **??** à $\overline{b}$.

On définit $f : \mathcal{P}(A) \to B$, $X \mapsto \sum_{a \in X} a$.

d. Montrer que, pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, on a $f(X \cup Y) = f(X) + f(Y)$.

e. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{P}(A)$, $f(X)f(\overline{X}) = 0$ et $f(X) + f(\overline{X}) = 1$. En déduire que $f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$, puis que $f(X \cap Y) = f(X)f(Y)$ pour tous $X, Y \in \mathcal{P}(A)$.

f. Montrer que $(f(X) = 0 \Rightarrow X = \emptyset)$. En déduire que f est un morphisme injectif.

g. Pour $b \in B$, soit $g(b) = \{a \in A \,;\, a \leqslant b\}$. Montrer que $f(g(b)) = b$. Pour l'inégalité $b \leqslant f(g(b))$, on pourra raisonner par l'absurde et appliquer la question **??** à $c = b \sum_{a \notin g(b)} a$.

h. Conclure.

i. Montrer que le cardinal d'une algèbre de Boole finie est une puissance de 2.

Exercice 62. * Une partie de $\mathbb{N}$ est dite *cofinie* si son complémentaire est fini.

a. Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

b. Soit B l'ensemble des parties finies ou cofinies de $\mathbb{N}$. Montrer que B, muni des opérations usuelles de réunion, intersection et complémentaire, est une algèbre de Boole.

c. Montrer que B ne peut pas être isomorphe à l'algèbre de Boole des parties d'un ensemble.

Remarque. Un autre résultat de Stone est que toute algèbre de Boole est isomorphe à une sous-algèbre de l'ensemble des parties d'un ensemble.