ENSIS A I. R. 1

Réponses à l'examen de mathématiques discrètes 1 du 28 octobre 2022

Exercice 1 *Parmi six nombres entiers tous différents et compris entre 1 et 10, au moins deux d'entre eux ont une somme égale à 11.*
On a cinq tiroirs : $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$ et six nombres, donc au moins deux de ces nombres sont dans le même tiroir. Comme tous les nombres sont différents, leur somme est 11.

Exercice 2 *Soit b un entier ≥ 2 et soit $x, y \in \mathbb{N}$.*

a. *On suppose que l'écriture de x en base 7 est $x = (142)_7$. Donner l'écriture de x en base 10, puis en base 6 :*
$x = 2 + 4.7 + 1.7^2 = 2 + 28 + 49 = (79)_{10} = 72 + 6 + 1 = 2.6^2 + 1.6 + 1 = (211)_6$

b. *On suppose que l'écriture de y en base b est $y = (2014)_b$ et l'écriture de y en base $b+1$ est $y = (1111)_{b+1}$. Déterminer la valeur de b et la valeur de y :*
On a $y = 2b^3 + b + 4 = (b + 1)^3 + (b + 1)^2 + (b + 1) + 1 = b^3 + 4b^2 + 6b + 4$ d'où, en faisant la différence et en factorisant, $b^3 - 4b^2 - 5b = b(b + 1)(b - 5) = 0$, or $b \geq 2$, donc $b = 5$. On obtient $y = 6^4 - 1 = 1295$ (non demandé).

Exercice 3 *Écrire en base 5 les nombres dont l'écriture en base 10 est respectivement $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{25}$, $\frac{1}{6}$, et $\frac{1}{2}$.*

$\frac{3}{5} = (0, 3)_5$ $\quad$ $\frac{11}{25} = (0, 21)_5$ $\quad$ $\frac{1}{6} = (0, 040404...)_5 = (0, \overline{04})_5$ $\quad$ $\frac{1}{2} = 3.\frac{1}{6} = (0, 22\,22\,22...)_5 = (0, \overline{2})_5$

Exercice 4 *Calculer les intersections et réunions ci-dessous :*
$\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$ $\quad$ $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ $\quad$ $\{\emptyset\} \cap \{\{\emptyset\}\} = \emptyset$ $\quad$ $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Exercice 5 *Soit les ensembles $A = \{a, b\}$ et $B = \{1\}$. Écrire $A \times B$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.*

$A \times B = \{(a, 1), (b, 1)\}$ $\quad$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$ $\quad$ $\mathcal{P}(A \times B) = \{\emptyset, \{(a, 1)\}, \{(b, 1)\}, A \times B\}$
$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \big\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\{a\}, \emptyset), (\{a\}, \{1\}), (\{b\}, \emptyset), (\{b\}, \{1\}), (A, \emptyset), (A, \{1\})\big\}$

Exercice 6 *Soit les applications :*

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x + 1| - 2|x| \qquad f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ x \mapsto 2|x + \tfrac{1}{4}| - \tfrac{1}{2} \qquad f_3 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(x^2 - x)$$
$$f_4 : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)^2,\ X \mapsto (X \cap A, X \cup A) \qquad f_5 : \mathcal{P}(E)^2 \to \mathcal{P}(E),\ (X, Y) \mapsto X \cap Y$$

Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
injective	**N**	**O**	**O**	**O**	**N**
surjective	**N**	**O**	**N**	**N**	**O**
bijective	**N**	**O**	**N**	**N**	**N**

Détails (non demandés) : par exemple $f_1(-1) = f_1(3) = -2$ et $f_1(x) \leq |x| + 1 - 2|x| \leq 1$ donc $f_1^{-1}(\{2\})$ est vide.
f_2 et f_3 sont bien à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \geq 0$, $f_2(n) = 2n$ et $f_2(-n) = 2n + 1$.
$f_3(x) = f_3(y) \Leftrightarrow x^2 - x - (y^2 - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = y$ car $x, y \geq 1$, mais $f_3^{-1}(\{2\}) = \emptyset$.
Si $X, Y \subset E$ sont tels que $f_4(X) = f_4(Y)$ alors $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cup A = Y \cup A$, donc $X \setminus A = Y \setminus A$, d'où

$$X = (X \cap A) \cup (X \setminus A) = (Y \cap A) \cup (Y \setminus A) = Y,$$

mais $(E, \emptyset)$ n'a pas de préimage par f_4.
$\forall X \subset E,\ X = f_5(X, X)$ mais $f_5(\emptyset, \emptyset) = f_5(\emptyset, E) = \emptyset$ alors que $\emptyset \neq E$.

Exercice 7 *Soit E un ensemble fini non vide et soit $a \in E$. Soit φ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par $\varphi(A) = A \cup \{a\}$ si $a \notin A$ et $\varphi(A) = A \setminus \{a\}$ si $a \in A$. Cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ? involutive ?*

injective : OUI $\quad$ surjective : OUI

bijective : OUI $\quad$ involutive : OUI

Démontrer que E a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Notons $|X|$ le cardinal d'une partie X. On a $|\varphi(A)| = |A| \pm 1$, donc φ envoie toute partie de cardinal pair sur une partie de cardinal impair (et aussi toute partie de cardinal impair sur une partie de cardinal pair). La restriction à φ à l'ensemble des parties de cardinal pair est donc une bijection sur l'ensemble des parties de cardinal impair. Ces deux ensembles ont donc même cardinal.

Exercice 8 *Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Soit φ l'application de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par*

$$\varphi(X, Y) = X \cup Y$$

Montrer que φ est surjective si et seulement si $A \cup B = E$.

Si φ est surjective, alors en particulier φ prend la valeur E, i.e. il existe $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ tels que $X \cup Y = E$. Comme on a $X \cup Y \subseteq A \cup B$, on obtient $A \cup B = E$.

Réciproquement, si $A \cup B = E$, pour tout $Z \subseteq E$, posons $X = A \cap Z$ et $Y = B \cap Z$. Alors on a bien $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ et $\varphi(X, Y) = (A \cap Z) \cup (B \cap Z) = (A \cup B) \cap Z = E \cap Z = Z$, ce qui montre que φ est surjective.

$$\varphi^{-1} \ : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \ Z \mapsto (A \cap Z, B \cap Z).$$

Exercice 9 *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E : Écrire la définition d'une relation d'ordre, d'une relation d'ordre total et d'une relation d'équivalence.* $\forall x, y, z \in E$

Ordre : $x\mathcal{R}x$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y)$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$.

Ordre total : mêmes axiomes que pour ordre, plus : $\forall x, y$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Relation d'équivalence : $x\mathcal{R}x$, $(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$.

Existe-t-il une relation d'ordre sur E qui soit en même temps une relation d'équivalence ?

Oui, mais il n'y a pas le choix : chaque élément n'est en relation qu'avec lui-même. Les classes d'équivalence sont des singletons.

Existe-t-il une relation d'ordre total sur E qui soit en même temps une relation d'équivalence ?

Non si E a plus d'un élément, oui si E est un singleton.

Exercice 10 *Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On munit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E) de l'ordre défini par la relation d'inclusion. Donner une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ contenant 6 éléments, n'admettant ni plus petit élément ni plus grand élément, et admettant $\{2\}$ comme borne inférieure.*

$\mathcal{A} = \big\{\{1, 2\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 2, 4\}; \{2, 3, 4\}\big\}$ (il n'y a pas le choix).

Exercice 11 *Soit $E = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Sur $E \times E$ on considère les deux ordres usuels : l'ordre produit $\leq_P$ et l'ordre lexicographique $\leq_L$. Soit $\mathcal{A}$ la partie de E donnée par $\mathcal{A} = \big\{(2, 0), (1, 3), (6, 2), (4, 5), (6, 8), (7, 6), (9, 4)\big\}$.*

a. *Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{A}$ pour l'ordre lexicographique.*

$(1, 3) \to (2, 0) \to (4, 5) \to (6, 2) \to (6, 8) \to (7, 6) \to (9, 4)$

Un seul élément minimal : $\inf \mathcal{A} = (1, 3)$; un seul élément maximal : $\sup \mathcal{A} = (9, 4)$.

b. *Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{A}$ pour l'ordre produit.* (trop long en TeX, sorry !)

Préciser les éléments minimaux, maximaux, l'inf et le sup de $\mathcal{A}$ pour l'ordre produit.

Éléments minimaux : $(1, 3)$, $(2, 0)$ Éléments maximaux : $(6, 8)$, $(7, 6)$, $(9, 4)$

$\inf \mathcal{A} = (1, 0)$ $\sup \mathcal{A} = (9, 8)$

Exercice 12 *Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$. On considère la partie L de $\mathcal{A}^*$ définie par $B = \{a\}$ et la règle d'induction $f : L \times L \to L$ telle que : $f(u, v) = ubv$. On rappelle que $L = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_p \cup B_{p+1} \cup \ldots$ où $B_0 = B$ et $B_{p+1} = B_p \cup f(B_p \times B_p)$.*

a. $B_1 = \{a, aba\}$, $B_2 = \{a, aba, ababa, abababa\}$

$B_3 = \{a, aba, ababa, abababa, ababababa, abababababa, ababababababa, abababababababa\}$

b. $L = \{a(ba)^n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble peut aussi être noté $L = a(ba)^*$.

c. Si $a(ba)^n \in L$ alors $a(ba)^{n+1} = f(a, a(ba)^n) \in L$. Comme $a \in L$, une récurrence montre que $a(ba)^* \subseteq L$. Réciproquement $a(ba)^*$ contient a et est stable par la règle d'induction, puisque $f\big(a(ba)^m, a(ba)^n\big) = a(ba)^{m+n+1}$, d'où l'égalité.

Exercice 13 *Soit $(B, +, \cdot, \overline{})$ une algèbre de Boole. et soit $a, b, c \in B$. Simplifier les expressions suivantes :*
$(a+c)b+\overline{a}bc+\overline{b}c = ab+bc+\overline{a}bc+\overline{b}c = ab+(1+\overline{a})bc+\overline{b}c = ab+1.bc+\overline{b}c = ab+bc+\overline{b}c = ab+(b+\overline{b})c = ab+1.c = ab+c.$

$\overline{\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}} = \overline{(\overline{a}+\overline{b})+(\overline{b}+\overline{c})+(\overline{c}+\overline{a})} = \overline{(\overline{a}+\overline{a})+(\overline{b}+\overline{b})+(\overline{c}+\overline{c})} = \overline{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}} = \overline{\overline{a}}\,\overline{\overline{b}}\,\overline{\overline{c}} = abc.$

Exercice 14 *Soit B une algèbre de Boole. On considère la fonction $f(a, b, c) = ab + \overline{b}c$. Déterminer la forme canonique disjonctive (somme de mintermes), puis la forme canonique conjonctive (produit de maxtermes) de f.*

$f(a, b, c) = ab(c+\overline{c})+(a+\overline{a})\overline{b}c = abc+ab\overline{c}+a\overline{b}c+\overline{a}\overline{b}c$ d'où $\overline{f}(a, b, c) = a\overline{b}\overline{c}+\overline{a}bc+\overline{a}b\overline{c}+\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ (mintermes manquants), d'où $f(a, b, c) = (\overline{a}+b+c)(a+\overline{b}+\overline{c})(a+\overline{b}+c)(a+b+c)$

Exercice 15 *Soit $(B, +, \cdot, \overline{})$ une algèbre de Boole et soit $a, b \in B$. On considère l'équation d'inconnue $x \in B$*

$$ab\overline{x} + bx = \overline{a}x + abx \tag{1}$$

a. *Écrire chaque côté de cette équation sous forme normale disjonctive (somme de mintermes).*

$$ab\overline{x} + abx + \overline{a}bx = \overline{a}bx + \overline{a}\overline{b}x + abx$$

b. *En déduire les solutions de (1).* En "simplifiant", on obtient :

$$ab\overline{x} = \overline{a}\overline{b}x = 0$$

c. *Lorsque $B = \mathcal{P}(E)$, caractériser les solutions de (1) à l'aide d'inclusions.* Les solutions de (1) sont les parties x telles que

$$a \cap b \subseteq x \subseteq a \cup b.$$

Exercice 16 *Montrer que, parmi cinq points dans un carré de côté 1, au moins deux d'entre eux sont à une distance inférieure ou égale à 3/4.*
En découpant le carré en quatre carrés, chacun de côté $1/2$, on obtient qu'au moins un des petits carrés contient au moins deux des points. Ces points sont donc à distance au plus $\sqrt{2}/2$ (longueur de la diagonale), or $\sqrt{2}/2 < 3/4$ (pour le voir on peut élever au carré : $2/4 = 8/16 < 9/16$).

Exercice 17 *Soit b un entier ≥ 2 et soit $x, y \in \mathbb{N}$.*

a. *On suppose que l'écriture de x en base 8 est $x = (133)_8$. Donner l'écriture de x en base 10, puis en base 5 :*

$x = 1.8^2 + 3.8 + 3 = 64 + 24 + 3 = (91)_{10} = 75 + 15 + 1 = 3.5^2 + 3.5 + 1 = (331)_5$

b. *On suppose que l'écriture de y en base b est $y = (321)_b$ et l'écriture de y en base $b+1$ est $y = (212)_{b+1}$. Déterminer la valeur de b et la valeur de y :*

$y = 3b^2 + 2b + 1 = 2(b + 1)^2 + (b + 1) + 2 = 2b^2 + 5b + 5$, d'où $b^2 - 3b - 4 = (b - 4)(b + 1) = 0$, or $b \geq 2$, donc $b = 4$. on obtient $y = 3.4^2 + 2.4 + 1 = 48 + 8 + 1 = 57$.

Exercice 18 *Écrire en base 6 les nombres dont l'écriture en base 10 est respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{1}{5}$, et $\frac{1}{7}$.*

$\frac{1}{2} = (0,3)_6$, $\quad \frac{11}{36} = (0,15)_6$, $\quad \frac{1}{5} = (0,111\ldots)_6 = (0,\overline{1})_6$, $\quad \frac{1}{7} = (0,050505\ldots)_6 = (0,\overline{05})_6$.

Exercice 19 *Soit les ensembles $A = \{a\}$ et $B = \{1, 2\}$. Écrire $A \times B$, $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.*
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2)\}$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$ $\quad \mathcal{P}(A \times B) = \big\{\emptyset, \{(a, 1))\}, \{(a, 2)\}, A \times B\big\}$
$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \big\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, B), (A, \emptyset), (A, \{1\}), (A, \{2\}), (A, B)\big\}$

Exercice 20 *Calculer les ensembles ci-dessous :*

$\emptyset \times \{\emptyset\} = \emptyset$	$\{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{(\emptyset, \emptyset)\}$
$\{\emptyset \times \emptyset\} = \{\emptyset\}$	$\{\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}\} = \{\{(\emptyset, \emptyset)\}\}$

Exercice 21 *Soit les applications :*

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto |x+1| - 2|x| \qquad f_2 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N} \quad x \mapsto \tfrac{1}{2}(x^2 - x) \qquad f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad x \mapsto 2|x + \tfrac{1}{4}| - \tfrac{1}{2}$$

$$f_4 : \mathcal{P}(E)^2 \to \mathcal{P}(E) \quad (X, Y) \mapsto X \cap Y \qquad f_5 : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)^2 \quad X \mapsto (X \cup A, X \cap A)$$

Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
injective	**N**	**O**	**O**	**N**	**O**
surjective	**N**	**N**	**O**	**O**	**N**
bijective	**N**	**N**	**O**	**N**	**N**

Détails (non demandés) : par exemple $f_1(-1) = f_1(3) = -2$ et $f_1(x) \leq |x| + 1 - 2|x| \leq 1$ donc $f_1^{-1}(\{2\})$ est vide.
f_2 et f_3 sont bien à valeurs dans $\mathbb{N}$.
$f_2(x) = f_2(y) \Leftrightarrow x^2 - x - (y^2 - y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow x = y$ car $x, y \geq 1$, mais $f_2^{-1}(\{2\}) = \emptyset$.
Pour $n \geq 0$, $f_3(n) = 2n$ et $f_3(-n) = 2n + 1$.
$\forall X \subset E,\ X = f_4(X, X)$ mais $f_4(\emptyset, \emptyset) = f_4(\emptyset, E) = \emptyset$ alors que $\emptyset \neq E$.
Si $X, Y \subset E$ sont tels que $f_5(X) = f_5(Y)$ alors $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cup A = Y \cup A$, donc $X \setminus A = Y \setminus A$, d'où

$$X = (X \cap A) \cup (X \setminus A) = (Y \cap A) \cup (Y \setminus A) = Y,$$

mais $(\emptyset, E)$ n'a pas de préimage par f_5.

Exercice 22 *Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. Soit φ l'application de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par*

$$\varphi(X, Y) = X \cup Y$$

Montrer que φ est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Si φ est injective alors, comme $\varphi(A \cap B, B) = \varphi(\emptyset, B) = B$, on doit avoir $A \cap B = \emptyset$.

Réciproquement, si $A \cap B = \emptyset$ et si $U, X \subseteq A$ et $V, Y \subseteq B$ sont tels que $\varphi(U, V) = \varphi(X, Y)$, alors $U \cup V = X \cup Y$. On en déduit $(U \cup V) \cap A = (X \cup Y) \cap A$, mais on a $(U \cup V) \cap A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$, $U \cap A = U$ (puisque $U \subseteq A$) et $V \cap A \subseteq B \cap A = \emptyset$, donc $(U \cup V) \cap A = U$ et de même $(X \cup Y) \cap A = X$, d'où $U = X$. En intersectant par B l'égalité $U \cup V = X \cup Y$, on montre de même que $V = Y$, ce qui montre que φ est injective.

$$\varphi^{-1}\ : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B),\ Z \mapsto (A \cap Z, B \cap Z).$$

Exercice 23 $=$ **Exercice 8**

Exercice 24 *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E : Écrire la définition d'une relation d'ordre, d'une relation d'ordre total et d'une relation d'équivalence. $\forall x, y, z \in E$*

Ordre : $x\mathcal{R}x$, $\quad(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y)$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$.

Ordre total : mêmes axiomes que pour ordre, plus : $\forall x, y$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Relation d'équivalence : $x\mathcal{R}x$, $\quad(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application. On munit $\mathbb{R}$ de son ordre naturel.
À quelle condition sur f la relation sur E définie par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ est-elle une relation d'ordre ?

Il faut que la relation soit antisymétrique ; or, si $f(x) = f(y)$, comme on a $f(x) \leq f(y) \leq f(x)$ c'est que $x\mathcal{R}y\mathcal{R}x$, donc $x = y$. Une condition nécessaire est donc que f soit injective. Réciproquement, si f est injective, on vérifie que $\mathcal{R}$ est bien une relation d'ordre.

Lorsque cette condition est satisfaite, cet ordre est-il toujours total ?

Oui : pour tous $x, y \in E$, on a ou bien $f(x) \leq f(y)$ ou bien $f(y) \leq f(x)$ donc deux éléments sont toujours comparables.

Exercice 25 *Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On munit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E) de l'ordre défini par la relation d'inclusion. Donner une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ contenant 6 éléments, n'admettant ni plus petit élément ni plus grand élément, et admettant $\{1, 2, 3\}$ comme borne supérieure.*

$\mathcal{A} = \big\{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}\big\}$ (il n'y a pas le choix).

Exercice 26 *Soit $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Sur $E \times E$ on considère les deux ordres usuels : l'ordre produit $\leq_P$ et l'ordre lexicographique $\leq_L$. Soit $\mathcal{A}$ la partie de E donnée par $\mathcal{A} = \big\{(0,2), (3,1), (2,4), (3,7), (8,3), (5,5), (9,0)\big\}$.*

a. *Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{A}$ pour l'ordre lexicographique.*

$(0,2) \to (2,4) \to (3,1) \to (3,7) \to (5,5) \to (8,3) \to (9,0)$

Un seul élément minimal : $\inf \mathcal{A} = (0,2)$; un seul élément maximal : $\sup \mathcal{A} = (9,0)$.

b. *Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{A}$ pour l'ordre produit.* (trop long en TeX, sorry !)

Préciser les éléments minimaux, maximaux, l'inf et le sup de $\mathcal{A}$ pour l'ordre produit.

Éléments minimaux : $(0,2)$, $(3,1)$, $(9,0)$ Éléments maximaux : $(3,7)$, $(5,5)$, $(8,3)$, $(9,0)$

Remarquer que $(9,0)$ est à la fois maximal et minimal : il n'est comparable à aucun autre élément.
$\inf \mathcal{A} = (0,0)$ $\sup \mathcal{A} = (9,7)$

Exercice 27 *Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$. On note ε le mot vide et on considère la partie L de $\mathcal{A}^*$ définie inductivement par $B = \{\varepsilon\}$ et la règle d'induction $f : L \times L \to L$ telle que : $f(u,v) = abuv$. On rappelle que $L = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_p \cup B_{p+1} \cup \ldots$ où les ensembles B_p sont définis par : $B_0 = B$ et $B_{p+1} = B_p \cup f(B_p \times B_p)$.*

a. *Compléter :*

$B_1 = \big\{\varepsilon, ab\big\}$ $B_2 = \big\{\varepsilon, ab, abab, ababab\big\}$

$B_3 = \big\{\varepsilon, ab, abab, ababab, abababab, ababababab, abababababab, ababababababab\big\}$

b. *Donner une caractérisation des mots appartenant à L :*

L est le langage de tous les mots de la forme $(ab)^n$. On peut utiliser la notation $L = (ab)^*$.

c. *Démontrer cette caractérisation :*

On vérifie par récurrence sur n que B_n contient le mot $(ab)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc L contient le langage $(ab)^*$. Réciproquement, le langage $(ab)^*$ contient le mot vide et est stable par la relation d'induction : en effet on a $f\big((ab)^m, (ab)^n\big) = (ab)^{m+n+1}$. Par minimalité de L, on a donc $L \subseteq (ab)^*$, d'où l'égalité entre ces deux langages.

Exercice 28 = Exercice 13

Exercice 29 *Soit B une algèbre de Boole. On considère la fonction $f(a,b,c) = a\overline{b} + \overline{a}c$. Déterminer la forme canonique disjonctive (somme de mintermes), puis la forme canonique conjonctive (produit de maxtermes) de f.*

$f(a,b,c) = a\overline{b}(c + \overline{c}) + \overline{a}(b + \overline{b})c = a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}c$
donc $\overline{f}(a,b,c) = abc + ab\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$ (les mintermes manquants)
d'où $f(a,b,c) = (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})(\overline{a} + \overline{b} + c)(a + \overline{b} + c)(a + b + c)$

Exercice 30 *Soit $(B, +, \cdot, {}^-)$ une algèbre de Boole et soit $a, b \in B$. On considère l'équation d'inconnue $x \in B$*

$$(ab + \overline{a}\overline{b})x = a(x + b) \tag{2}$$

a. *Écrire chaque côté de cette équation sous forme normale disjonctive (somme de mintermes).*

$$abx + \overline{a}\overline{b}x = ax + ab = a(b + \overline{b})x + ab(x + \overline{x}) = abx + a\overline{b}x + abx + ab\overline{x}$$
$$abx + \overline{a}\overline{b}x = abx + a\overline{b}x + ab\overline{x}$$

b. *En déduire les solutions de (2).*

En “simplifiant”, on obtient $\overline{a}\overline{b}x = a\overline{b}x = ab\overline{x} = 0$. En factorisant, on obtient $\overline{b}x = ab\overline{x} = 0$.

c. *Lorsque $B = \mathcal{P}(E)$, caractériser les solutions de (2) à l'aide d'inclusions.*

Les solutions de (2) sont toutes les parties x de E telles que $a \cap b \subseteq x \subseteq b$.