Nom :
Prénom :

ENSISA IR 1A
Mathématiques et signal
Année 2023/2024

Examen de Mathématiques et signal

Durée : 1h30.
Le sujet compte 3 pages.
Le script Python à compléter, nommé `examen_MS_NOM_Prenom.py`*, est disponible sur Moodle.*
Sont autorisés pour cet examen :

- *une antisèche de format A4,*
- *un ordinateur personnel strictement réservé à l'utilisation de Python (IDE au choix) et de Moodle (section Examen de la page de cours "Mathématiques et signal" uniquement),*
- *vos scripts des TD 1 à 6.*

Les calculatrices physiques ne sont pas autorisées, mais vous pouvez effectuer vos calculs à l'aide de Python ; les résultats obtenus seront exprimés sous forme exacte.
Les scripts Python ainsi que les représentations graphiques associées seront à rendre sur Moodle (section Examen).
Le barème est donné à titre indicatif.

Dans tout le problème, on considère le signal s, $2-$périodique, pair, et défini sur $[0\ ;\ 1]$ par $s(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

Partie 1 - Caractéristiques du signal s — 4 points

1. Donner trois caractéristiques (temporelles et/ou morphologiques) du signal s.
2. Représenter le signal s sur trois périodes à l'aide de Python. Enregistrer l'image obtenue sous le nom `1-2.png`.
3. Déterminer, en justifiant, l'énergie totale de s.
4. Calculer la puissance moyenne totale de s.

Partie 2 - Décomposition en série de Fourier de s — 5 points

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$c_n(s) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \dfrac{1}{1+\pi^2 n^2} & \text{si } n = 2k, \\ \left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) \dfrac{1}{1+\pi^2 n^2} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

2. Représenter de deux façons le spectre bilatéral en amplitude de s, en se limitant à l'harmonique d'ordre 5 :
   (a) à la main,
   (b) et à l'aide de Python. Enregistrer l'image obtenue sous le nom `2-2-b.png`.

Partie 3 - Filtrage du signal s **4 points**

On considère un filtre de fonction de transfert

$$H(f) = \frac{i\frac{f}{f_c}}{1 + i\frac{f}{f_c}},$$

de fréquence de coupure f_c.

1. Donner la nature de ce filtre, en justifiant brièvement.
2. Déterminer la valeur de la fréquence de coupure f_c pour atténuer l'amplitude de la fondamentale du signal s de 50% par le filtre de fonction de transfert H.
3. Sans calculer l'atténuation précise de l'amplitude des autres harmoniques mais en justifiant par des ordres de grandeur, représenter grossièrement le spectre bilatéral en amplitude (limité à l'harmonique d'ordre 5) de s_H, réponse du filtre de fonction de transfert H au signal d'entrée s.
4. Justifier que la réponse impulsionnelle du filtre a pour expression

$$h(t) = \delta(t) - 2\pi f_c \Gamma(t) \mathrm{e}^{-2\pi f_c t} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

5. **Bonus info.** Représenter le spectre bilatéral en amplitude de s_H limité à l'harmonique d'ordre 5, en écrivant un spectre structuré à l'aide de Python.

Partie 4 - Échantillonnage du signal s **3 points**

1. À l'aide de Python, représenter sur trois périodes le signal s_e, version échantillonnée de s à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$. Enregistrer l'image obtenue sous le nom `4-1.png`.
2. Le signal s est-il à bande limitée ? Justifier.
3. Pour simplifier, on suppose arbitrairement dans cette question que l'amplitude des harmoniques d'ordre $n \geqslant 4$ est suffisamment faible pour les négliger, de sorte que le signal s est à bande limitée avec $f_{max} = 3\lambda$, où λ est la fondamentale.

   La condition du théorème d'échantillonnage de Shannon est-elle alors respectée avec la fréquence d'échantillonnage f_e de la question 1 ? Donner les conséquences potentielles sur le spectre.
4. Toujours sous l'hypothèse $f_{max} = 3\lambda$, représenter grossièrement et sur trois périodes le spectre de s_e, avec toujours $f_e = 5$.

Partie 5 - Bruitage du signal s et analyse corrélative ________________ **4 points**

Dans cette partie, on entache le signal s d'un bruit blanc gaussien B d'espérance nulle et de variance σ^2. Le signal aléatoire qui en résulte est noté S. On fait l'hypothèse que sa fonction d'autocorrélation R_S est égale à la somme de ϕ_s, fonction d'autocorrélation de s, et de R_B, fonction d'autocorrélation de B.

1. Rappeler l'expression de R_B.
2. Les valeurs d'une simulation du signal S pendant 10 unités de temps sont données dans le fichier `S.csv` disponible sur Moodle, et peuvent être importées dans Python à l'aide des instructions écrites dans la partie 5 du script `examen_MS_NOM_Prenom.py`.
   (a) Représenter le signal S à l'aide de Python. Enregistrer l'image obtenue sous le nom `5-2-a.png`.
   (b) Donner la fréquence d'échantillonnage utilisée.
   (c) Retrouver la valeur de σ par la méthode de votre choix.
3. Calculer l'expression de la fonction ϕ_s.