Université de Haute Alsace
ENSISA – Mathématiques discrètes I
Augustin Fruchard

Année 2024-2025

Quelques indications et réponses aux exercices

Principe des pigeons

1.a. 14 : en placer 8 sur la rangée du bas et 6 sur celle du haut. Pour montrer qu'on ne peut pas faire mieux, numéroter les 13 diagonales montant de gauche à droite, plus la diagonale contenant les deux cases restantes (coin en haut à gauche et en bas à droite) pour former 14 tiroirs.

b. Les tiroirs : $T_1 = 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$, l'ensemble des points dont les deux coordonnées sont paires. De même $T_2 = 2\mathbb{N}\times(2\mathbb{N}+1)$, $T_3 = (2\mathbb{N}+1)\times 2\mathbb{N}$ et $T_4 = (2\mathbb{N}+1) \times (2\mathbb{N}+1)$. Deux points dans le même tiroir ont bien leur milieu à coordonnées entières.

c. Notons $\{x\}$ la partie fractionnaire d'un nombre réel x, i.e. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x. Découpons l'intervalle $[0, 1[$ en Q tiroirs $[k/Q, (k+1)/Q[$, $0 \leqslant k < Q$. Parmi les $Q+1$ nombres $0, \{\theta\}, \{2\theta\}, \dots \{Q\theta\}$, au moins deux, disons $\{k\theta\}$ et $\{\ell\theta\}$ avec $k < \ell$, sont dans le même tiroir, ce qui implique $|(k-\ell)\theta - p| < \frac{1}{Q}$, avec $p = \lfloor (k-\ell)\theta \rfloor$ ou $\lfloor (k-\ell)\theta \rfloor + 1$. Diviser enfin par $q = \ell - k$.

d. 8 tiroirs : $\{1, 15\}, \dots \{7, 9\}$ et $\{8\}$. Ainsi on a la propriété $\mathcal{P}_k$ pour $k = 9$. C'est bien le plus petit puisqu'en choisissant un nombre x_i dans chaque tiroir on voit que 8 n'a pas cette propriété.

e. Soit $a_1, \dots, a_{10}$ ces nombres. Pour chaque partie de $A = \{a_1, \dots, a_{10}\}$ la somme de ses éléments est strictement inférieure à $10 \times 100 = 1000$ mais il y a $2^{10} = 1024$ parties différentes, donc au moins deux parties différentes ont la même somme. Si ces deux parties ne sont pas disjointes, on peut leur ôter leur intersection.

2.a. Le triangle moitié découpe le grand triangle en quatre triangles, chacun d'aire 1/4, dont l'un au moins contient trois des neuf points.

b. Choisir un parallélogramme plus petit, de telle façon qu'un des points soit dans un coin du parallélogramme et les deux autres sur les côtés opposés. Choisir un repère du plan de façon à ce que les trois points soient de coordonnées respectivement $A = (0, 0)$, $B = (1, x)$ et $C = (y, 1)$, avec $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Si a désigne l'aire du parallélogramme (donc avec $a \leqslant 1/2$), l'aire du triangle ABC est donnée par $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|.a = \frac{a}{2}(1 - xy) \leqslant \frac{a}{2} \leqslant \frac{1}{4}$.

c. Choisir comme tiroirs les trois parallélogrammes formés par chacun des sommets du grand triangle et par le triangle moitié. Le triangle est bien recouvert par les trois parallélogrammes, qui sont chacun d'aire 1/2, et au moins l'un d'entre eux contient trois des points par le principe des pigeons. Ces trois points forment un triangle d'aire au plus 1/4 d'après le **b.**

Remarque. Cet exemple illustre une situation où les “cases” du principe des pigeons ne sont pas disjointes.

3. Remplir 3 cartons, avec des résultats tous différents, par exemple sur le premier carton A_i gagne B_i pour tout $i = 1, \dots, 13$, sur le deuxième carton B_i gagne A_i, et sur le dernier tous les matches sont nuls. Parmi les 13 résultats, au moins 5 seront sur le même carton.

4. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un parcours infini restant sur le damier. Au moins une case C de ce parcours sera visitée une infinité de fois. Comme la flèche de cette case tourne d'un quart de tour à chaque visite, chacune des quatre cases adjacentes à C sera aussi visitée une infinité de fois. De proche en proche, on voit que toutes les cases du damier seront visitées une infinité de fois, en particulier celle ayant un trou sera visitée au moins quatre fois, ce qui permet à la fourmi de sortir, d'où la contradiction.

On peut donner une borne au temps qu'il faut à la fourmi pour sortir : il suffit qu'elle passe quatre fois sur la case de sortie, donc seize fois sur l'une des cases adjacentes, etc. Comme toutes les cases sont à distance au plus $2n$ de la case de sortie, on est sûr que la fourmi est sortie dès qu'elle est passée au plus 4^{2n} fois sur chaque case, donc au bout de $n^2 4^{2n}$ secondes. L'expérience montre que cette borne est beaucoup trop grande, et un thème de recherche intéressant serait de l'améliorer.

5.

Numération

6. $(916)_{10}=(2446)_7$ $\quad(222)_{10}=(22020)_3$ $\quad 5^{10}-2=(4\,444\,444\,443)_5$

7. $(A5B)_{12}=(1511)_{10}$ $\qquad(9875)_{10}=(586B)_{12}$

8. a. $(130)_{10}=(334)_6$ $\qquad$ **b.** $(130)_9=(108)_{10}$

c. $2b^4+2b^2=(b^2+3b)^2 \Rightarrow b^2=6b+7 \Rightarrow b=7$ et $x=70$

9. $x=(111)_{10}$ $(b=7)$

10. Un tel nombre, s'il existe, est de la forme $n=(ax)_7$ avec $a,x\in\{0,\dots,6\}$ et $a\neq 0$. On doit avoir $7a+x=(a+x)^2$, d'où une équation de degré 2 d'inconnue x :

$$x^2+(2a-1)x+a^2-7a=0$$

On cherche les valeurs de a pour lesquelles le discriminant est un carré. On trouve $\Delta=24a+1$, et les valeurs de a possibles sont $a=0$ (mais qui donne un nombre à un chiffre $n=1$), $a=1$, qui donne $n=(12)_7$, $a=2$, qui donne $n=(22)_7$, et $a=5$, qui donne $n=(51)_7$.

11. $2,6\,\overline{171}$ $\qquad 0,6\,\overline{461538}$ $\qquad 0,\overline{0588235294117647}$

$\dfrac{7}{9}$ $\qquad \dfrac{1}{10}\left(7+\dfrac{72}{99}\right)=\dfrac{17}{22}$ $\qquad 2+10\dfrac{9}{9999}=\dfrac{2232}{1111}$

12. $\dfrac{1}{7}=0,\overline{142857}$. Les autres $\dfrac{p}{7}$ pour $p=2,\dots,6$ sont obtenus par décalage ; par exemple $\dfrac{4}{7}=0,\overline{571428}$.

$\dfrac{1}{13}=0,\overline{076923}$; $\dfrac{2}{13}=0,\overline{153846}$.Cette fois-ci, les développements de $\dfrac{p}{13}$ pour $1\leqslant p\leqslant 12$ se partagent en deux classes : $\{1,10,9,12,3,4\}$ et $\{2,7,5,11,6,8\}$. Par exemple le développement de $\dfrac{9}{13}$ s'obtient en décalant d'un cran celui de $\dfrac{10}{13}$ (d'où l'ordre choisi pour écrire les deux classes).

Pour les $\dfrac{p}{41}$ on trouve huit classes de cinq nombres, dont les premières sont $\{1,10,18,16,37\}$, $\{2,20,36,32,33\}$, $\{3,30,13,7,29\}$, etc. Ainsi par exemple $\dfrac{1}{41}=0,\overline{02439}$, $\dfrac{20}{41}=0,\overline{48780}$, $\dfrac{29}{41}=0,\overline{70731}$, etc.

13. D'après l'énoncé, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $10^7-1=239N$, donc $\dfrac{1}{239}=\dfrac{N}{10^7-1}$, qui a une période de longueur. Comme 7 est premier, la longueur est forcément 7. Il en est de même pour $\dfrac{73}{239}$ et pour $\dfrac{73}{80\times 239}$.

Pour calculer la longueur de la prépériode de $\dfrac{73}{80\times 239}$, on regarde la plus grande puissance parmi les puissances de 2 et de 5 dans 80. On trouve $80=2^4.5$, donc la prépériode est de longueur 4.

La calculatrice confirme : $\dfrac{73}{80\times 239}=0,0038\,\overline{1799163}$.

14. Cf. cours, section 1.5.

15. a. Plusieurs preuves possibles. Écrire par exemple d'une part $y-1<\lfloor y\rfloor\leqslant y$, multiplier par $-b$ pour obtenir, $-by\leqslant -b\lfloor y\rfloor<-by+b$, et d'autre part $by-1<\lfloor by\rfloor\leqslant by$. En additionnant les deux, on obtient $-1<\lfloor by\rfloor-b\lfloor y\rfloor<b$. Comme ce sont des entiers, on obtient les inégalités demandées.

b. Relire le cours en remplaçant 10 par b.

c. $(0,\overline{1210})_3=\dfrac{(1210)_3}{(2222)_3}=\dfrac{48}{80}=\dfrac{3}{5}=(0.6)_{10}$.

d. $0,375=\dfrac{3}{8}=0+\dfrac{0}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=(0,011)_2$.

$0,85=\dfrac{17}{20}=0+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{5}$. Pour calculer 0,85 en base 2, on a donc besoin de connaître $\dfrac{1}{5}$ en base 2. De même que $\dfrac{1}{101}=0,\overline{0099}$ en base 10, on trouve $\dfrac{1}{5}=(0,\overline{0011})_2$.

On trouve finalement $0,85=(0,11\overline{0110})_2$.

$\dfrac{3}{64}=(0,003)_4$ $\qquad \dfrac{23}{64}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{64}=(0,113)_4$ $\qquad \dfrac{3}{5}=(0,\overline{21})_4$

16. a. Élever au carré les expressions à l'intérieur des crochets, simplifier et utiliser une identité remarquable.

b. Les carrés sont congrus à 0 ou 1 mod 4, donc $4n+2$, qui est congru à 2 mod 4, ne peut pas être le carré d'un entier.

c. Par l'absurde, si un tel entier m existait, en élevant au carré et en simplifiant, on aurait $2\sqrt{n}\sqrt{n+1}<m^2-2n-1<2n+1$. Comme

m^2-2n-1 est entier, on aurait $2\sqrt{n}\sqrt{n+1} < m^2-2n-1 \leqslant 2n$ donc $\sqrt{n}\sqrt{n+1} < n$, une contradiction.

d. On a $b_n < \sqrt{4n+2}$ d'après le **b**, donc $b_n \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ d'après le **c**, donc $b_n \leqslant a_n$ par définition de la partie entière, donc $b_n = a_n$ d'après le **a**.

Observer qu'on n'a pas eu besoin de montrer que $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ n'est pas entier (même si c'est vrai dès que $n \geqslant 1$).

17. Attention, l'énoncé n'est valide que pour $n \geqslant 2$. Il faut donc initialiser à $n = 2$.

Pour $n = 2$, on a bien $f(2) \leqslant 2f(1)+2 = 4 = C.2\ln 2$ avec la constante C indiquée.

Soit maintenant $n \geqslant 3$. Par récurrence complète, si l'énoncé est vrai pour tout $0 < k < n$, alors il est vrai pour $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, d'où $f(n) \leqslant 2C\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ln\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n \leqslant 2C\frac{n}{2}\ln\frac{n}{2} + n = Cn\ln n + n(-C\ln 2 + 1) \leqslant Cn\ln n$.

Remarque : on a l'impression que la constante $n\,C$ n'est pas optimale, mais on a besoin de cette constante pour l'initialisation à $n = 2$.

18. b. $(100011010)_2 = 282$

c. $r+k\,;\ \dfrac{1}{1/r+k}$

d. Raisonner par récurrence complète en distinguant les trois cas :

(i) le nœud n est un fils gauche, auquel cas $n+1$ est le fils droit ayant même père, donc $x_{n+1} = \dfrac{p+q}{q}$ si $x_n = \dfrac{p}{p+q}$;

(ii) le nœud n est un fils droit pas en bout de ligne, d'un nœud m, auquel cas $n+1$ est le fils gauche du nœud $m+1$. Alors $x_n = \dfrac{p+q}{q}$, où $\dfrac{p}{q} = x_m$, et $x_{n+1} = \dfrac{p'}{p'+q'}$, où $\dfrac{p'}{q'} = x_{m+1}$. L'hypothèse de récurrence permet ensuite d'avoir une relation entre (p,q) et (p',q') ;

(iii) le nœud n est en bout de ligne, auquel cas $n+1$ est au début de la ligne suivante.

e. $x_{64} = \dfrac{1}{7}$, $x_{65} = \dfrac{7}{6}$, $x_{66} = \dfrac{6}{11}$

f. $2024 = (11111101000)_2$, donc partir six fois vers la droite (pour atteindre le nœud d'étiquette 6), puis une fois à gauche (étiquette 6/7), puis une fois à droite (étiquette 13/7), puis trois fois à gauche. On trouve $x_{2024} = \dfrac{13}{46}$.

19. Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Ceci entraînerait $a^2 = 2b^2$, qui est pair, donc a serait pair, donc b impair puisqu'ils sont premiers entre eux, donc $2b^2 \equiv 2 \mod 4$ mais $a^2 \equiv 0 \mod 4$, une contradiction.

De même, si $\sqrt{6} = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, alors $a^2 = 6b^2$ serait pair, donc a serait pair, donc b impair, donc $6b^2 \equiv 2 \mod 4$ mais $a^2 \equiv 0 \mod 4$, une contradiction.

Commentaire : on montre de la même manière (en regardant mod p^k pour tout diviseur premier p de n et un k adéquat) que, si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, alors en fait $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

Si $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, alors son carré aussi, or $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+\sqrt{6}$, donc on aurait $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, une contradiction avec ce qui précède.

Autre méthode : en multipliant par la *quantité conjuguée* $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, on obtient $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$, qui est rationnel. Si $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ était rationnel, alors $\sqrt{3}-\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ aussi, donc leur différence $2\sqrt{2}$ aussi, donc $\sqrt{2}$ aussi, en contradiction avec ce qui précède.

Si $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, alors on aurait $2^b = 3^a$, une contradiction puisque 2^b est pair et pas 3^a.

20. a. On a $n!R_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+p)!} = \frac{1}{n+1} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{n!}{(n+p)!}$ donc $n!R_n > \dfrac{1}{n+1}$ d'une part. D'autre part en majorant $\dfrac{n!}{(n+p)!}$ par $\dfrac{1}{(n+1)^p}$ pour $p \geqslant 2$, on obtient $n!R_n < \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = \frac{1}{n}$.

b. Par l'absurde, si $e = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$, en choisissant $n = b$, on aurait $n!\,e = (n-1)!\,a = n!\,S_n + n!\,R_n$ mais on voit que $n!\,S_n \in \mathbb{N}^*$, donc $n!\,R_n$ serait un entier, ce qui contredit le **a.**

c. Si on avait $x = e^{a/b} \in \mathbb{Q}$ pour certains $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$, on aurait $e^a = x^b \in \mathbb{Q}$. Si $a \in \mathbb{N}^*$ cela contredit le résultat admis, et si a est négatif on aurait $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a} \in \mathbb{Q}$, aussi une contradiction.

d. Contraposée du **c.**

Ensemble

21. En notant xyz l'élément (x,y,z) pour aller plus vite :
$U = \{010, 011, 012, 110, 111, 210\}$,
$V = \{000, 001, 00(-1), 010, 0(-1)0, 100, (-1)00\}$
$W = \{003, 012, 021, 030, 102, 111, 120, 201, 210, 300\}$.

22. Il est commode de commencer par écrire le complémentaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{P}(E)$: $\mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{G} = \{A \in \mathcal{P}(E)\ ;\ 1 \in A \text{ et } 2 \notin A\} = \big\{\{1\}, \{1,3\}\big\}$, puis d'écrire que $\mathcal{G}$ est formé des six autres parties.

23. $\mathcal{P}(A \times B) = \big\{\emptyset, \{(a,1)\}, \{(b,1)\}, \{(a,1),(b,1)\}\big\}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \big\{&(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{1\}), (\{a\},\emptyset), (\{a\},\{1\}),\\ &(\{b\},\emptyset), (\{b\},\{1\}), (\{a,b\},\emptyset), (\{a,b\},\{1\})\big\}.\end{aligned}$$

24. a. Le seul Y donné par l'axiome de fondation est $Y = A$; on a donc $X \cap A = \emptyset$ donc $A \notin A$.

b. Choisir $X = \{A_0, \ldots, A_n\}$: un Y donné par l'axiome de fondation est forcément un des A_i, mais alors A_{i-1} serait un élément de $X \cap A_i$, une contradiction (avec $A_{i-1} := A_n$ si $i = 0$).

c. Choisir $X = \{B_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\}$.

25. Soit $x \in C$; alors $x \in C \cup D = A \cup B$, mais $x \notin D$ puisque $C \cap D = \emptyset$, donc $x \notin B$ puisque $B \subseteq D$, donc $x \in (A \cup B) \setminus B \subseteq A$. Ainsi on a $C \subseteq A$, donc $C = A$ puisque l'autre inclusion est dans les hypothèses. On montre de même que $D = B$.

26. On peut utiliser la distributivité, par exemple

$$A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) = E \cap (A \cup B) = A \cup B$$

et ainsi de suite. On peut aussi avoir recours aux diagrammes de Venn, en précisant bien les régions hachurées. On trouve en fin de compte respectivement $A \cup B \cup C$ et $A \cap B \cap C$.

27. a. La première égalité vient de la définition de $A \setminus B$ et $B \setminus A$. On a toujours $X \setminus Y \subseteq Z \setminus T$ si $X \subseteq Z$ et $Y \supseteq T$, donc $A \setminus B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et de même $B \setminus A \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, d'où une inclusion. Pour l'autre, soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Alors $x \in A \cup B$. Si $x \in A$ alors, comme $x \notin A \cap B$, c'est que $x \notin B$, donc $x \in A \setminus B$. Sinon $x \in B$ et on obtient de même $x \in B \setminus A$. Il pourra être commode d'utiliser aussi $A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$.

b. L'expression est symétrique en A et B.

$$\begin{aligned}A\Delta\emptyset &= (A \cup \emptyset) \cap \overline{A \cap \emptyset} = A \cap \overline{\emptyset} = A \cap E = A.\\ A \Delta E &= (A \cup E) \cap \overline{A \cap E} = E \cap \overline{A} = \overline{A}.\\ \overline{A \Delta B} &= \overline{(A \cup B) \cap \overline{A \cap B}} = \overline{A \cup B} \cup (A \cap B) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B).\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}(A \cap B)\Delta(A \cap C) &= \big[(A \cap B) \cup (A \cap C)\big] \cap \overline{(A \cap B) \cap (A \cap C)}\\ &= \big[(A \cap (B \cup C)\big] \cap \overline{A \cap (B \cap C)}\\ &= A \cap (B \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B \cap C})\\ &= \big[A \cap (B \cup C) \cap \overline{A}\big] \cup \big[A \cap (B \cup C) \cap \overline{B \cap C}\big]\\ &= A \cap (B \cup C) \cap \overline{B \cap C}\\ &= A \cap (B \Delta C).\end{aligned}$$

d. Non : choisir par exemple $A = B = C \neq \emptyset$. On obtient

$$A \cup (B \Delta C) = A \cup (A \Delta A) = A \cup \emptyset = A$$

alors que

$$(A \cup B)\Delta(A \cup C) = A \Delta A = \emptyset \neq A.$$

e. Un des sens est clair. Pour l'autre sens, si $B \neq C$, alors l'un des deux ensembles $B \setminus C$ ou $C \setminus B$ (ou les deux) est non vide. Par exemple, si $B \setminus C \neq \emptyset$, soit $x \in B \setminus C$:

- si $x \in A$ alors $x \in A \setminus C$ donc $x \in A \Delta C$, mais $x \in A \cap B$, donc $x \notin A \Delta B$;

- de même, si $x \notin A$, on trouve que $x \in (A \Delta B) \setminus (A \Delta C)$.

Dans les deux cas on a $A \Delta B \neq A \Delta C$.

Le cas $C \setminus B \neq \emptyset$ est analogue.

f. Par définition et en utilisant le **b**, on a

$$\begin{aligned}A\Delta(B\Delta C) &= \big(A \cap \overline{B \Delta C}\big) \cup \big(\overline{A} \cap (B \Delta C)\big)\\ &= \big(A \cap \big[(\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)\big]\big) \cup \big(\overline{A} \cap \big[(B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)\big]\big)\\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C).\end{aligned}$$

Cette expression est symétrique en A, B et C, donc ne change pas en permutant A et C. En utilisant la commutativité (i.e. $X \Delta Y = Y \Delta X$), on obtient $(A \Delta B)\Delta C = (C \Delta B)\Delta A = A \Delta(B \Delta C)$.

g. Si $A = B$, alors $A \cup B = A \cap B = A$, donc $A \Delta B = A \setminus A = \emptyset$. Réciproquement, si $A \neq B$, alors, ou bien il existe $a \in A \setminus B$ et on a $a \in A \Delta B$, ou bien il existe $b \in B \setminus A$ (ou inclusif) et $b \in A \Delta B$. Dans les deux cas, on a $A \Delta B \neq \emptyset$. On peut aussi utiliser le **e**.

h. $(A\Delta C)\Delta(C\Delta B) = \big(A\Delta(C\Delta C)\big)\Delta B = (A\Delta\emptyset)\Delta B = A\Delta B$.

i. (i) $d(A,B)$ est le cardinal d'un ensemble fini, donc est un nombre $\geqslant 0$,
(ii) $d(A,B)=0 \Leftrightarrow A\Delta B=\emptyset \Leftrightarrow A=B$ d'après le **g**,
(iii) $d(A,B)=d(B,A)$ puisque $A\Delta B = B\Delta A$,
(iv) $A\Delta C \subseteq (A\Delta B)\Delta(B\Delta C)$ d'après le **h**, $\subseteq (A\Delta B)\cup(B\Delta C)$, d'où l'inégalité sur les cardinaux.

28. a. 2^n. On peut, ou bien développer $(1+1)^n$ avec le binôme, ou bien dire que, pour construire une partie A de E, on a deux choix possibles pour chaque élément x de E : $x\in A$ ou $x\notin A$. On peut aussi utiliser une récurrence : si $E=\{a_1,\ldots,a_n\}$ on peut distinguer les parties contenant a_n (qui sont au nombre de 2^{n-1} par hypothèse de récurrence) et celles ne le contenant pas (le même nombre), et $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$.

b. Pour construire une partie C de F, on a trois choix, pour chaque élément de E : ou bien $x\in A$, ou bien $x\in B$, ou bien $x\notin A\cup B$. Ce sont trois choix disjoints puisque $A\cap B=\emptyset$.

c. Soit A et B deux ensemble disjoints, de cardinal n et m respectivement. Alors les parties à p éléments de $A\cup B$ s'obtiennent en prenant k éléments dans A et $p-k$ dans B, pour n'importe quel k entre 0 et p.

29. On trouve 56 chemins. En effet, si $f(m,n)$ est le nombre de chemins pour aller sans détour au coin de la $(23+m)$-ième rue et de la $(10+n)$-ième avenue, on a $f(0,n)=f(m,0)=1$ et $f(m,n) = f(m-1,n)+f(m,n-1)$ pour $m,n\geqslant 1$. Terminer en remplissant le tableau pour trouver $f(5,3)$ ou, plus intéressant, remarquer que ce sont les mêmes formules que pour les coefficients binomiaux si on pose $g(m,n)=\binom{m+n}{n}$. Ainsi $f(5,3)=\binom{5+3}{3}=56$.

Application

30. f_1 est toujours surjective ; elle est injective ssi $|a|\leqslant 1$.
f_2 est injective non surjective.
f_3 est bijective et $f_3^{-1}(z,t)=(z+t,z)$.
f_4 est surjective non injective.

31. f est injective non surjective ; g est surjective non injective.
$g\circ f = \mathbf{Id}$, bijective. $f\circ g(x)=x$ si x est pair, $x-1$ si x est impair, ni injective ni surjective.

32. On trouve que φ est injective ssi $A\cup B=E$ et surjective ssi $A\cap B=\emptyset$. Ainsi φ est bijective ssi A et B forment une partition de E. Dans ce dernier cas, $\varphi^{-1}:\mathcal{P}(E)\to\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$ est donnée par $\varphi^{-1}(U,V)=U\cup V$.

33. Distinguer les cas $n\leqslant 0$ et $n\geqslant 1$. On trouve $f(n)=-2n$ si $n\leqslant 0$ et $f(n)=2n-1$ si $n\geqslant 1$. On voit que f est bien injective et surjective.

34. a. L'un des deux entiers $a+b$ ou $a+b+1$ est pair, donc $f(a,b)$ est bien un entier, et de plus positif ou nul.

b. Si $a+b<c+d$, alors $a+b+1\leqslant c+d$ puisque ce sont des entiers, donc $f(a,b)=\frac12(a+b)(a+b+1)+b<\frac12(a+b)(a+b+1)+a+b+1 = \frac12(a+b+1)(a+b+2)\leqslant\frac12(c+d)(c+d+1)\leqslant f(c,d)$. Si $a+b=c+d$ et $(a,b)\neq(c,d)$, alors $b\neq d$, donc $f(a,b)=\frac12(a+b)(a+b+1)+b = \frac12(c+d)(c+d+1)+b\neq f(c,d)$. Dans tous les cas, on a ($(a,b)\neq(c,d)\Rightarrow f(a,b)\neq f(c,d)$).

c. Pour $a>0$, choisir $c=a-1$ et $d=b+1$; pour $a=0$, choisir $c=b+1$ et $d=0$.

d. Comme $f(0,0)=0$, on obtient par récurrence que toutes les valeurs entières $\geqslant 0$ sont atteintes par f.

e. f est une numérotation des points de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ rangés en diagonales $x+y=k$.

35. Par l'absurde, supposons f surjective et soit $a\in E$ tel que $f(a)=A$. Si $a\in A$ alors, par définition de A, a serait l'un des x tel que $x\notin f(x)$, donc $a\notin f(a)=A$. Mais si $a\notin A$ alors, par définition de A, a serait l'un des x tel que $x\in f(x)$, donc $a\in f(a)=A$. Ainsi les deux cas $a\in A$ et $a\notin A$ aboutissent à une contradiction.

36. Soit f une fonction croissante de E dans E. La partie A donnée en indication est non vide (par exemple $n\in A$) et E est fini et totalement ordonné, donc toute partie non vide de E a un plus petit élément, donc A a bien un plus petit élément. Notons-le a. Comme $a\in A$, on a $f(a)\leqslant a$.
Si $a=1$ comme $f(a)\in E$, on a forcément $f(a)=a$.
Si $a\geqslant 2$, alors $a-1\notin A$ par minimalité de a, donc $f(a-1)>a-1$, mais f est croissante, donc $f(a)\geqslant f(a-1)$, donc $f(a)\geqslant a$, et on a à nouveau $f(a)=a$.

37. Choisir pour A l'intersection de toutes les parties $X \subseteq E$ qui sont telles que $f(X) \subseteq X$.

38. f n'est jamais surjective, quelle que soit la partie A. En effet, pour qu'une paire $(Y, Z) \in \mathcal{P}(E)^2$ ait un antécédent X, il faut déjà que le premier terme $Y = A \cup X$ contienne le deuxième $Z = A \cap X$. Par exemple la paire $(E, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent.
En revanche f est toujours injective car on peut reconstituer X à partir de $A \cup X$ et $A \cap X$. Par exemple, on a $X = \big((A \cup X) \setminus A\big) \cup (A \cap X)$. Ainsi, si X et $X' \in \mathcal{P}(E)$ sont tels que $f(X) = f(X') = (Y, Z)$, alors $X = \big(Y \setminus A\big) \cup Z = X'$.

Relation

39. $\mathcal{R}$ est clairement réflexive et symétrique. Si $(a, b)\mathcal{R}(c, d)\mathcal{R}(e, f)$ alors $a * d = b * c$ et $c * f = d * e$ donc $a * d * c * f = b * c * d * e$. En permutant et simplifiant par $c*d$, on obtient $a*f = b*e$, ce qui prouve la transitivité. la classe de $(4, -14)$ est l'ensemble $\{(2k, -7k) ; k \in \mathbb{Z}^*\}$ qui correspond à la fraction irréductible $-2/7$.

40. $\inf_P A = (-1, -7) \notin A$, $\sup_P A = (2, \pi) = \max_P A$.

41. a. $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 1$ et $\sup \mathbb{N} = \max \mathbb{N} = 0$.

b. $\inf\{6, 12, 16\} = 2$ et $\sup\{6, 12, 16\} = 48$.

c. $\inf E = \min E = 1$, $\sup E = 80 \notin E$ donc E n'a pas de max. Un seul élément minimal : 1. Éléments maximaux : 9, 16, 20.

42. a. Un seul choix possible : $\mathcal{A} = \big\{\{1, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 5, 6\}\big\}$

b. Élements minimaux $\{1\}$ et $\{4\}$; pas de minimum ; éléments maximaux $\{1, 2, 4\}$ et $\{2, 4, 5, 6\}$; pas de maximum ; $\inf \mathcal{B} = \emptyset$ et $\sup \mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$.

43. a. Un des ensembles usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel $\leqslant$, avec pour $*$ l'addition ; les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}+$ avec pour $*$ la multiplication ; ou encore $\mathbb{N}$ muni de l'ordre partiel "divise", avec pour $*$ la multiplication.

b. Avec $\cap$ et $\cup$, mais pas avec Δ.

c. On a $x * a \preccurlyeq y * a = a * y \preccurlyeq b * y = y * b$.

d. (i) On a $x \in N \Leftrightarrow x \preccurlyeq 0 \Leftrightarrow x + (-x) \preccurlyeq 0 + (-x)$ (car $\preccurlyeq$ est compatible avec $+$) mais $x + (-x) = 0$ par définition de l'élément symétrique, et $0 + (-x) = -x$ par définition de l'élément neutre, donc $x \in N \Leftrightarrow 0 \preccurlyeq -x \Leftrightarrow -x \in P \Leftrightarrow x \in -P$.
Si $x \in P \cap N$, alors $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq 0$, donc $x = 0$ par antisymétrie d'une relation d'ordre. Réciproquement on a bien $0 \in P \cap N$ par réflexivité d'une relation d'ordre. Ainsi $P \cap N = \{0\}$.
On a $P = P{+}0 \subseteq P{+}P$ (i.e. $P = \{x{+}0 ; x \in P\} \subseteq \{x{+}y ; x, y \in P\}$). Réciproquement, si $x, y \in P$ alors $0 \preccurlyeq x$ et $0 \preccurlyeq y$, donc $0 = 0{+}0 \preccurlyeq x{+}y$ d'après le **c**, i.e. $x + y \in P$, d'où l'autre inclusion.

(ii) Si $\preccurlyeq$ n'est pas totale, soit $a, b \in G$ deux éléments incomparables, i.e. tels que $a \not\preccurlyeq b \not\preccurlyeq a$. Alors $a - b$ n'est ni dans N ni dans P (par exemple, si $a - b \in N$, alors on aurait $a = (a - b) + b \preccurlyeq 0 + b = b$). Ainsi $P \cup N \neq G$ si $\preccurlyeq$ n'est pas totale.
Réciproquement, si $P \cup N \neq G$ c'est que $P \cup N \subsetneq G$. Alors un élément $a \in G \setminus P \cup N$ n'est pas comparable à 0, donc $\preccurlyeq$ n'est pas totale.

(iii) Pour l'ordre produit, P est le quart de plan fermé en haut à droite et N est le quart de plan fermé en bas à gauche. Pour l'ordre lexicographique, P est le demi-plan ouvert à droite union le demi-axe fermé vertical supérieur.

(iv) Non : choisir par exemple $a = z_2 = i$ et $z_1 = 0$.

e. Définissons $\preccurlyeq$ par $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow b - a \in P$. On a bien $a \preccurlyeq a$ puisque $0 \in P$; on a $(a \preccurlyeq b \preccurlyeq a) \Rightarrow b - a \in P \cap (-P) = \{0\} \Rightarrow a = b$; et enfin on a $(a \preccurlyeq b \preccurlyeq c) \Rightarrow (a \preccurlyeq c)$ puisque $b - a$ et $c - b \in P$ entraînent $c - a = (b - a) + (c - b) \in P + P = P$, i.e. $c - a \in P$. Ainsi $\preccurlyeq$ est bien une relation d'ordre. Par notre définition de $\preccurlyeq$, on a bien $x \in P \Leftrightarrow x \succcurlyeq 0$. Enfin, on a pour tous $a, x, y \in G$ tels que $x \preccurlyeq y$, $x - y \in P$ donc $(x + a) - (y + a) \in P$, d'où $x + a \preccurlyeq y + a$. Ainsi $\preccurlyeq$ est bien compatible avec $+$.

Définition inductive

44. a. $B_1 = \{\varepsilon, ab, ba\}$ $B_2 = \{\varepsilon, ab, ba, aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa\}$

b. Tous les mots ayant autant de a que de b (à justifier !).

45. a. $\binom{2n}{n}$

b. $B_1 = \{\varepsilon, ab\}$ $\quad B_2 = \{\varepsilon, ab, aabb, abab\}$

$$B_3 = \{\varepsilon, ab, aabb, abab, aaabbb, aababb, abaabb, ababab, aabbaabb, aabbabab, ababaabb, abababab\}$$

c. Non : par exemple il n'a pas le mot *abbaab*. C'est l'ensemble des mots ayant autant de a que de b et dont tous les débuts de mots ont au moins autant de a que de b. En remplaçant a par la parenthèse ouvrante et b par celle fermante, on retrouve le langage des parenthèses.

46. a. $a, aa, ba, aaa, aba, baa, bba.$

b. Tous les mots terminant par a (récurrence sur la longueur).

47. d. $A(4,1) = A(3, A(3,1)) = 2^{16} - 3$ donc $A(4,2) = A(3, A(4,1))$
$= 2^{2^{16}} - 3$ et $A(4,3) = 2^{2^{2^{16}}} - 3$.

48. On a $f(101) = 91$, puis $f(100) = f(f(111)) = f(101) = 91$. Par récurrence descendante complète, si $n \leqslant 100$ est tel que $f(k) = 91$ pour tout k vérifiant $n+1 \leqslant k \leqslant 101$, montrons que $f(n) = 91$.
- Si $90 \leqslant n \leqslant 100$, alors $f(n) = f(f(n+11))$, mais $n + 11 > 100$, donc $f(n+11) = (n+11) - 10 = n+1$ donc $f(n) = f(n+1) = 91$ par hypothèse de récurrence.
- Et si $n < 90$, alors $n+1 \leqslant n+11 \leqslant 101$, donc $f(n) = f(f(n+11)) = f(91) = 91$.

49. A est l'ensemble des parties finies de E.

Algèbre de Boole

50. a. On a $\overline{a} = 1 \cdot \overline{a} = (a+b)\overline{a} = a\overline{a} + b\overline{a} = 0 + b\overline{a} = b\overline{a} = \overline{a}b$.
On a par ailleurs $b = 1 \cdot b = (a+\overline{a})b = ab + \overline{a}b = 0 + \overline{a}b = \overline{a}b$. Ainsi on a $\overline{a} = \overline{a}b = b$.

b. On a $\overline{\overline{a}} + \overline{a} = \overline{a} + \overline{\overline{a}} = 1$ et $\overline{\overline{a}} \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot \overline{\overline{a}} = 0$, donc $\overline{\overline{a}} = a$ d'après le **a**.

c. On a $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ et $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$, donc $\overline{1} = 0$ et $\overline{0} = 1$ d'après le **a**.

d. Montrons d'abord les idempotences : $a = a \cdot 1 = a \cdot (a + \overline{a}) = a \cdot a + a \cdot \overline{a} = a \cdot a + 0 = a \cdot a$ et symétriquement $a = a + 0 = a + (a \cdot \overline{a}) = (a+a) \cdot (a + \overline{a}) = (a+a) \cdot 1 = a + a$.
Puis $a + 1 = a + (a + \overline{a}) = (a+a) + \overline{a} = a + \overline{a} = 1$ et symétriquement $a \cdot 0 = a \cdot (a \cdot \overline{a}) = (a \cdot a) \cdot \overline{a} = a \cdot \overline{a} = 0$.

e. On calcule $(a+b) \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b}) = \cdots = 0$ et $(a+b) + (\overline{a} \cdot \overline{b}) = \cdot = 1$; on en déduit grâce à **a** que $\overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$. On obtient l'autre égalité en utilisant **b**.

51. Vérifier un à un tous les axiomes.

52. a.

1	0	$ac + bd$
1	$a + \overline{b}$	$a\overline{c}$

b. $ab + \overline{a}c + bc = ab + \overline{a}c + (a + \overline{a})bc = a(b + bc) + \overline{a}(c + bc) = a(b(1+c)) + \overline{a}(c(1+b)) = ab1 + \overline{a}c1 = ab + \overline{a}c.$

53. $f(a,b) = \overline{a}b + \overline{a}\overline{b} + ab = \overline{a} + b$, $g(a,b,c) = a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + ab\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}\overline{c} = (a + b + \overline{c})(a + \overline{b} + \overline{c})(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$
$f(a,b) = \overline{a}b = (a+b)(\overline{a}+b)(\overline{a}+\overline{b})$, $g(a,b,c) = (\overline{a}+\overline{b}+c)(a+\overline{b}+\overline{c})(a+\overline{b}+c) = abc + a\overline{b}\overline{c} + a\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$

54. a. $ac = a(cc) = (ac)c = (b\overline{c})c = b(\overline{c}c) = b0 = 0.$

b. $a = a1 = a(ab) = (aa)b = ab = 1$, puis en remplaçant 1 par a : $b = 1b = ab = 1$.

c. Passer aux complémentaires et utiliser **b**, ou bien : $a = a + 0 = a + (a+b) = (a+a) + b = a + b = 0$.

55. a. $m(a,b,c) = abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c + \overline{a}bc.$

b. $m(a_1, \ldots, a_n) = \displaystyle\sum_{\text{Card } I \geqslant n/2} m_I$, où $m_I = \prod_{i \in I} a_i \prod_{i \notin I} \overline{a_i}$

c. $p(a,b,c) = ab\overline{c} + a\overline{b}c + \overline{a}bc + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$ $\quad p(a_1, \ldots, a_n) = \displaystyle\sum_{\text{Card } I \in 2\mathbb{N}} m_I$,
où $m_I = \prod_{i \in I} a_i \prod_{i \notin I} \overline{a_i}$

56. Quatre fonctions booléennes à une variable : $f_1(a) = 0$, $f_2(a) = a$, $f_3(a) = \overline{a}$, $f_4(a) = 1$. f_1, f_2 et f_3 sont déjà écrites sous forme de sommes de mintermes, et $f_4(a) = a + \overline{a}$.

57. a. $(A \cap B) \cup X = (A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap \overline{X}) \cup (A \cap \overline{B} \cap X) \cup (\overline{A} \cap B \cap X) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap X)$
$B = (A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap B \cap X) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{X})$

b. Par comparaison, X vérifie l'équation ssi les trois termes $A \cap \overline{B} \cap X$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap X$ et $\overline{A} \cap B \cap \overline{X}$ sont vides. On a $A \cap \overline{B} \cap X = \overline{A} \cap \overline{B} \cap X = \emptyset$ ssi $\overline{B} \cap X = \emptyset$, ce qui s'interprète comme $X \subset B$, et $\overline{A} \cap B \cap \overline{X} = \emptyset$ s'interprète comme $\overline{A} \cap B \subset X$. Ainsi les solutions de l'équation sont toutes les parties X vérifiant $\overline{A} \cap B \subset X \subset B$.

58. a. $B = \{\emptyset, U, V, E\}$.

b. Il y a quatre fonctions booléennes à une variable : $f_1(X) = \emptyset$, $f_2(X) = X$, $f_3(X) = \overline{X} = E \setminus X$, $f_4(X) = E$.

c. Il y a $4^4 = 256$ fonctions de B dans B, dont 4 booléennes et 252 non booléennes. La fonction constante égale à U est un exemple de fonction non booléenne de B dans B.

d. Il y a $4^{4^2} = 4\,294\,967\,296$ fonctions de B^2 dans B, parmi lesquelles $2^{2^2} = 16$ sont booléennes, donc $4\,294\,967\,280$ fonctions non booléennes à deux variables. Il y a $4^{4^3} = 4^{64}$ fonctions à trois variables, dont $2^{2^3} = 256$ booléennes, et toutes les autres non booléennes.

59. a. On trouve successivement $\overline{a}$, a, 0 et 1.

b. $(a+b)(\overline{a}+\overline{b})$

c. $(a+b) \oplus b = (a+b)\overline{b} + \overline{a}\overline{b}b = a\overline{b} + 0 + 0 = a\overline{b}$

d. $(a \oplus b) + ab = \overline{\overline{a}+\overline{b}}$ (seul minterme manquant) $= a+b$

e. $(a \oplus b) \oplus c = a\overline{b}\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + abc + \overline{a}\overline{b}c$.

f. L'expression du **e** est symétrique en a, b et c. Comme $\oplus$ est clairement commutative, on a

$$(a \oplus b) \oplus c = (b \oplus c) \oplus a = a \oplus (b \oplus c)$$

g. $a \oplus b = 0 \Rightarrow a\overline{b} + \overline{a}b = 0 \Rightarrow a\overline{b} = \overline{a}b = 0 \Rightarrow a = a1 = a(b+\overline{b}) = ab + 0 = (a+\overline{a})b = 1b = b$.

h. La différence symétrique, cf exercice 23.

60. a. On peut utiliser les mintermes et maxtermes, en se rappelant que deux sommes de mintermes sont égales ssi les mintermes n'apparaissant que dans l'une des sommes sont nuls, symétriquement pour les maxtermes.
Ainsi par exemple $a = ab + a\overline{b}$, donc on a $a = ab$ ssi $a\overline{b} = 0$.
De même $b = (a+b)(\overline{a}+b)$, donc $b = a+b$ ssi $\overline{a}+b = 1$.
Par ailleurs $\overline{a}+b = \overline{a\overline{b}}$, donc l'un vaut 0 ssi l'autre vaut 1.

b. $a\overline{a} = 0$, ce qui montre la réflexivité. Si $a \leqslant b$ alors $ab = a$ et si de plus $b \leqslant a$, alors $ab = b$, donc $a = b$, ce qui montre l'antisymétrie. Si $a = ab$ et $b\overline{c} = 0$, alors $a\overline{c} = (ab)\overline{c} = a(b\overline{c}) = a0 = 0$, d'où $a \leqslant c$, ce qui montre la transitivité.

c. On vérifie facilement $0 \leqslant a \leqslant 1$ pour tout $a \in B$.

d. On a par exemple $(ab)\overline{a} = a(\overline{a+b}) = 0$

e. (i) $ab = ac = a \Rightarrow a(bc) = (ab)c = ac = a$
(ii) $a = a+b = a+c \Rightarrow a = a+b+c$

f. (i) $a \leqslant b \Rightarrow a\overline{b} = 0 \Rightarrow \overline{b}(\overline{\overline{a}}) = 0 \Rightarrow \overline{b} \leqslant \overline{a}$
(ii) $a \leqslant b \Rightarrow ab = a \Rightarrow (ac)(bc) = (ab)(cc) = (ab)c = ac \Rightarrow ac \leqslant bc$
$a \leqslant b \Rightarrow a+b = b \Rightarrow (a+c)+(b+c) = (a+b)+c = b+c \Rightarrow a+c \leqslant b+c$

61.

62.