Étude d'une base de Gröbner en deux variables

Encadrant. Jérémy Berthomieu (jeremy.berthomieu@lip6.fr)

Mots clés. Calcul formel, bases de Gröbner, interpolation

Contexte. Étant donné un système d'équations polynomiales $f_1 = \cdots = f_r = 0$ où $f_1, \ldots, f_r$ sont des polynômes en x et y à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, on s'intéresse au calcul des solutions de ce système. Une base de Gröbner [3, Chap. 2] de l'idéal $\langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ est une famille de générateurs ayant de bonnes propriétés que ce soit pour tester l'appartenance à l'idéal ou pour résoudre le système.

Les bases de Gröbner dépendent d'un ordre monomial, c'est-à-dire de comment on compare les monômes. Dans le cas d'une variable x, nous n'avons pas trop le choix : $1 \prec x \prec x^2 \prec \cdots$. En deux variables, nous avons en plus $1 \prec y \prec y^2 \prec \cdots$ et devons choisir comment comparer x et y. Même si nous faisons le choix $y \prec x$, qui implique que $y^2 \prec xy \prec x^2$, ceci ne dit rien sur qui est plus grand entre y^2 et x par exemple. L'ordre lexicographique fait l'hypothèse que $y^i \prec x$ quel que soit l'entier i et nous souhaitons étudier les bases de Gröbner d'idéaux pour cet ordre-là.

Description du travail attendu. Lorsque le système polynomial a un nombre fini de solutions, la base de Gröbner associée pour l'ordre lexicographique contient au moins deux polynômes non nuls particuliers : un purement en y et un dont le plus grand monôme est une puissance de x. Mais qu'en est-il des autres ? Peut-on les prévoir dans certaines situations ?

Une première tâche sera de se familiariser avec les bases de Gröbner et de montrer l'existence de ces deux polynômes bien particuliers.

Une seconde tâche sera l'étude de la base de Gröbner de l'intersection de deux idéaux qui ont des bases de Gröbner similaires : par exemple l'intersection de $\langle h_1(y), x - g_1(y) \rangle$ et $\langle h_2(y), x - g_2(y) \rangle$ avec h_1 et h_2 premiers entre eux admet la base de Gröbner pour l'ordre lexicographique $\{h_1 h_2(y), x - g_3(y)\}$ où g_3 satisfait

$$g_3 = g_1 \bmod h_1, \quad g_3 = g_2 \bmod h_2.$$

Que se passe-t-il si l'on remplace $x - g_1(y)$ et $x - g_2(y)$ par des polynômes de degré 2 en x ? Ou que se passe-t-il si les bases de Gröbner ont plus que deux polynômes ?

À ces fins, on pourra étudier les articles [1, 4]. Des tests seront effectués en implémentant les calculs nécessaires sur Maple [2].

Références

[1] E. Becker, T. Mora, M.G. Marinari, and C. Traverso. The shape of the shape lemma. In *Proceedings ISSAC 1994*, pages 129–133. ACM, 1994.

[2] L. Bernardin, P. Chin, P. Demarco, K. O. Geddes, D. E. G. Hare, K. M. Heal, G. Labahn, J. Mccarron, M. B. Monagan, D. Ohashi, and S. M. Vorkoetter. Maple programming guide, 1996.

[3] D. A. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms (third edition)*. Springer-Verlag New-York, 2007.

[4] D. Lazard. Ideal bases and primary decomposition : case of two variables. *J. Symb. Comput.*, 1(3) :261–270, 1985.