

Stable marriage problem

Problém stabilných manželstiev: Máme N mužov a N žien. Každý muž má svoje preferencie, t. j. usporiadané ženy v poradí, v akom by ich chcel. Aj každá žena má takéto poradie mužov. Cieľom je popárovať ich do manželstiev tak, aby všetky boli *stabilné*. Párovanie je stabilné, ak neexistuje dvojica (muž M , žena Z) taká, že M by bol radšej so Z ako so svojou aktuálnou partnerkou a aj Z by bola radšej s M ako so svojim aktuálnym partnerom.

1.1 Naivný algoritmus

Na začiatku ľubovoľne popáruj mužov a ženy. Prezri všetky dvojice (muž, žena), ktoré momentálne nie sú spolu. Ak obaja preferujú seba navzájom oproti svojim pôvodným partnerom, našli sme problém. Ak neexistuje žiaden problém, môžeme skončiť. Ak existuje, jeden problém si vyberieme a vyriešime ho – dáme dokopy toho muža a ženu a tiež dáme dokopy ich pôvodných partnerov.

Zjavne ak tento algoritmus skončí, tak nájde to, čo hľadáme – je ale vôbec zaručené, že skončí? A ak áno, ako dlho mu to bude trvať?

1.2 Praktická aplikácia

Priradovanie rezidentov na miesta v nemocniciach v USA (a pár iných krajinách): National Resident Matching Program, <http://www.nrmp.org/>.

„The 2010 Main Residency Match was the largest in NRMP history, encompassing more than 37,000 applicants, 4,100 graduate medical education programs, and 25,500 residency training positions.“

Pre takto veľké vstupné dáta už len jediné prezretie všetkých dvojíc (muž, žena) trvá dlho – naivný algoritmus, aj keby fungoval, je zjavne nepoužiteľný.

1.3 Efektívny algoritmus

Inicializácia: všetci muži sú nezadaní, všetky ženy sú nezadané.

Prvé kolo algoritmu: Každý muž požiada o ruku ženu, ktorú má prvú v zozname. Ak má niektorá žena viac ako jedného pytača, tomu, ktorého ona chce najviac, povie „možno“, ostatných rovno odmietne. Ak žena muža odmietne, ten si ju škrtne zo zoznamu.

Každé ďalšie kolo vyzerá podobne. Aktuálne zadaní muži nerobia nič. Nezadaný muž zájde za prvou neškrtnutou ženou na jeho zozname a požiada ju o ruku. (Môže sa stať, že tá žena je už zadaná. Vtedy sa udeje nasledovné: Ak ona chce nového pytača viac, starého odmietne a novému povie „možno“. A naopak, ak viac chce starého pytača, nového odmietne.)

Poznámka: Tento algoritmus navrhli Gale a Shapley už v roku 1962.

1.4 Štandardné otázky

... ktoré teraz treba zodpovedať: Funguje ten algoritmus? A ak áno, ako je efektívny?

V prvom rade dokážeme, že keď algoritmus skončí (t. j. dostane sa do situácie, kedy sa už nič nové nemôže udiť), sú všetci muži popárovaní so ženami.

Sporom. Nech to tak nie je, potom existuje muž M ktorý nikoho nemá, a teda nutne existuje aj žena Z , ktorá tiež nikoho nemá. To, že Z nikoho nemá, znamená, že ju nikdy nikto o ruku nežiadal. A to je hľadaný spor – keďže M nikoho nemá, musel sa už (neúspešne) uchádzať o všetky ženy, vrátane Z .

Tým sme dokázali, že náš algoritmus naozaj nájde nejaké párovanie. Bude ale toto párovanie stabilné?

Opäť sporom. Nech existuje dvojica (M, Z) , ktorá chce byť spolu viac ako s partnermi, ktorých im našiel náš algoritmus. Čo nám to o nich hovorí? M skončil s partnerkou, ktorú chce menej ako Z . To ale znamená, že

niekedy počas behu algoritmu musel M žiadať Z o ruku. No a keďže nie sú spolu, Z ho musela odmietnuť kvôli niekomu, koho chce ona viac ako M – a to je spor s tým, že Z chce M viac ako svojho súčasného partnera.

Tým sme teda už dokázali, že náš algoritmus naozaj rieši zadanú úlohu. A aký je rýchly? Na to si stačí všimnúť, že každý muž požiada nejakú ženu o ruku nanajvýš N -krát, dokopy sa teda odohrá nanajvýš N^2 akcií.

1.5 Demo na webe

Na <http://mathsite.math.berkeley.edu/smp/smp.html> je krásne spracovaná ukážka, oplatí sa preklikať si ju.

1.6 Asymetria algoritmu Galea-Shapleyho

Stabilných párovaní môže byť veľa. Náš algoritmus nájde to z nich, ktoré najviac vyhovuje mužom.

Príklad: Muži M_1, M_2, M_3 , ženy Z_1, Z_2, Z_3 . Ak pre každé i muž M_i najviac chce ženu Z_i , vyrobí náš algoritmus manželstvá $M_i - Z_i$ bez ohľadu na to, čo chcú ženy. Ich muži dokonca môžu byť ich posledné voľby.

V prípade NRMP hrajú rolu „mužov“ nemocnice.