

Funkcionálne rovnice

Jozef Rajník, 5. 4. 2021

Pekný úvod do funkcionálnych rovníc vrátane rozbehových úloh aj s riešeniami nájdete materiáli [3]. Materiál [2] sumarizuje pokročilejšie metódy riešenia, obsahuje tiež aj cvičenia na dokazovanie rôznych vlastností. Napokon [1] a [4] sú rozsiahle materiály na túto tému s veľkým množstvom úloh.

Úloha 1 ([3]). Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí $f(x+y) = x + f(y)$.

Úloha 2 (MO62 A-I-4, Sýrska príprava na MO 2013, KMS 2017-L3-8). Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky nenulové reálne čísla x, y platí

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

Úloha 3 (KMS 2018-L3-7). Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajúce $abcd = 1$ platí

$$(f(a) + f(b)) \cdot (f(c) + f(d)) = (a + b) \cdot (c + d).$$

Úloha 4 (KMS 2018-L1-9). Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(x + yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y + f(x)).$$

Úloha 5 (KMS 2019-L2-9). Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre ľubovoľné dve reálne čísla x, y platí

$$f(x + y)f(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3.$$

Úloha 6 (KMS 2013-Z2-10). Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(yf(x + y) + f(x)) = 4x + 2yf(x + y).$$

Úloha 7 (KMS 2014-L2-10). Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right) \left(f(y) + \frac{1}{2}\right).$$

Literatúra

- [1] Ljubomir Davidov, Funkcinální rovnice, Škola mladých matematiků, Praha (1984). Dostupné na <http://dml.cz/data/handle/10338.dmlcz/404099/monography.pdf>
- [2] Martin Fraas, Funkcionální rovnice, dostupné na <https://prase.cz/library/FunkcionalneRovniceFK/FunkcionalneRovniceFK.pdf>
- [3] Ján Mazák, Funkcionálne rovnice, dostupné na https://old.kms.sk/~mazo/matematika/funkcionalne_rov.pdf
- [4] Vít Musil, Funkcionální rovnice, dostupné na <https://prase.cz/library/FunkcionalniRovniceVM/FunkcionalniRovniceVM.pdf>

Náznaky riešení

2 Skúste dosádzať $+1$ a -1 za rôzne premenné. Vyriešte ako sústavu rovníc, s jednou neznámou $f(x)$ a druhou $f(-x)$.

3 Skúste si dosadiť x , $1/x$ a dve jednotky v rôznych poradiach. Vyriešete sústavu rovníc, kde sú $f(x)$ a $f(1/x)$ ako premenné. Dostanete, že $f(x) \in x, 1/x$. Vylúčte situáciu, žeby pre nejaké $1 \neq x \neq y \neq 1$ platilo $f(x) = x$ a $f(y) = 1/y$.

4 Dosádzaním 0 a 1 za x a y určte $f(0)$ a $f(1)$.

Dosad'ťte si len za jednu premennú.

Užitočné dosadenia sú $(x, 0)$ a $(1, x)$.

5 Určte $f(0)$ a $f(1)$, to má dve možnosti.

Dosad'ťte $(x, 1-x)$, aby ste dostali $f(x+y) = f(1)$.

Substitúciou výrazu $3x^2 - 3x + 1$, ktorý vám vyjde na oboch stranách, za t máte predpis $f(t) = t$, resp. $f(t) = -t$ pre značnú časť reálnych čísel t .

Dokážte nepárnosť a vzťah $f(2x) = 2f(x)$, pomocou nich rozšírte predpis na všetky reálne čísla.

6 • Dosad'ťte $y = 0$ a z výsledného vzťahu ukážte injektívnosť.

• Zisítite vhodným dosadzovaním $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

• Dosad'ťte tak, aby $x+y$ bola konštanta, ktorej funkčnú hodnotu viete. Všimnite si, že pri takýchto dosádzaniach sa vám odčítavajú nejaké x -ká na pravej strane. Zvoľte také dosadenie, aby ste sa x -iek napravo úplne zbavili.

• Potom využite injektívnosť.