Deliteľnosť

Jozef Rajník

Vlastnosti deliteľnosti

O celých číslach a, d hovoríme, že *číslo a je deliteľné číslom d*, resp. *číslo d delí číslo a*, ak existuje také celé číslo k, pre ktoré platí

$$a = k \cdot d.$$

Túto vlastnosť vieme zapísať ako $d \mid a$.

$5 \mid 20$, $-12 \mid 60$, $-18 \mid -18$.

Prejdeme si niekoľko základných tvrdení, ktoré okolo deliteľnosti platia. Pre ľubovoľné celé čísla a, b, c, d platí:

1. $a \mid a$.
2. $a \mid 0$.
3. $1 \mid a$.
4. $0 \mid a$ práve vtedy, keď $a = 0$.
5. Ak $d \mid a$ a $d \mid b$, tak aj $d \mid (a + b)$.
6. Ak $d \mid a$ a $d \mid b$, tak aj $d \mid (a - b)$.
7. Ak $d \mid a$, tak aj $d \mid ca$.
8. Ak $a \mid b$ a $c \mid d$, tak aj $ac \mid bd$.
9. Ak $a \mid b$ a $b \mid c$, tak aj $a \mid c$.
10. Ak $ac \mid bc$ a $c \neq 0$, tak $a \mid b$.
11. Ak $d \mid a \pm b$ a $d \mid a$, tak $d \mid b$.

Dôležitý odhad, ktorý nám môže pomôcť získať lepšie vzťahy o číslach a, b: Ak $b \neq 0$ a $a \mid b$, tak $|a| \leq |b|$. Dokonca, ak neplatí $a = b$, tak $2|a| \leq |b|$.

Pri deliteľnosti sú dôležité prvočísla. *Prvočíslo* je také prirodzené číslo, ktoré má práve dvoch kladných deliteľov: 1 a samého seba. Jedno z ich významných použití je, že každé prirodzené číslo sa dá jednoznačne (až na poradie) napísať ako súčin prvočísel. Napr $220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$. Pomocou rozkladu na prvočísla sa dajú mnohé veci dokázať alebo si lepšie predstaviť. Ak máme dané všeobecne nejaké číslo a, zvykneme je rozklad na prvočísla zapisovať ako

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

kde p_1, p_2, …, p_n sú prvočísla (vhodne zvolené) a α_1, α_2, …, α_n sú nezáporné celé čísla.

Najväčší spoločný deliteľ čísel a, b je najväčšie také celé číslo d, že $d \mid a$ aj $d \mid b$. Označujeme ho (a, b). Ak $(a, b) = 1$, hovoríme, že čísla a a b sú *nesúdeliteľné*. *Najmenší spoločný násobok* čísel a, b je najmenšie také prirodzení číslo n, že $a \mid n$ a $b \mid n$. Označujeme ho $\mathrm{nsn}(a, b)$ alebo $[a, b]$. Medzi najväčším spoločným deliteľom a najmenším spoločným násobkom platí vzťah

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b.$$

Teraz môžeme ukázať niekoľko dôležitých vlastností prvočísel a nesúdeliteľných čísel.

- Ak p je prvočíslo a $p \mid ab$, tak $p \mid a$ alebo $p \mid b$.
- Ak $(d, a) = 1$ a $d \mid ab$, tak $d \mid b$.

Úlohy

Úloha 1. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré $n - 3 \mid n^3 - 3$.

Úloha 2 (KMS 14/15-L1-3)**.** Nájdite všetky prvočísla p a q také, že $p \mid q^2 - 4$ a tiež $q \mid p^2 - 1$.

Úloha 3 (MO60-B-II-2)**.** Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí

$$a \mid b \qquad \text{a zároveň} \qquad b + 1 \mid 3a + 4.$$

Úloha 4 (MO60-C-S-3)**.** Nech x, y sú také kladné celé čísla, že obe čísla $3x + 5y$ a $5x + 2y$ sú deliteľné číslom 60. Zdôvodnite, prečo číslo 60 delí aj súčet $2x + 3y$.

Úloha 5 (MO60-C-I-2)**.** Dokážte, že výrazy $23x+y$ a $19x+3$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x a y.

Úloha 6 (IMO 1959, úloha 1)**.** Dokážte, že pre každé celé číslo n, je zlomok

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

v základnom tvare.

Úloha 7. O celých číslach a, b vieme, že sú nesúdeliteľné. Rozhodnite, či potom musia byť nesúdeliteľné aj nasledujúce dvojice čísel

a) $a + b,\ ab$

b) $a^2 + b^2,\ ab$

c) $a + b,\ a - b$

d) $a^3,\ (a + 1)^5$

Úloha 8. Nech p a q sú prvočísla. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať najväčší spoločný deliteľ čísel $p + q$ a $p^2 + q^2$.

Úloha 9 (KMS 16/17-Z1-4). Je dané prvočíslo p. Nájdite všetky štvorice kladných celých čísel a, b, c, d, pre ktoré platí

$$ac - bd = p,$$
$$ad - bc = 0.$$

Úloha 10 (KMS 16/17-2Z-5). Nájdite všetky prvočísla p, q, r také, že platí

$$2^{p+1} + q^2 = r^2.$$

Úloha 11 (KMS 14/15-Z2-4). Vodkovi sa zunovalo hrat sa s hračkami, a tak sa začal hrat s číslami. Rozhodol sa nájst všetky také dvojice kladných celých čísel (a, b), že číslo $a^b + b$ delí číslo $a^{2b} + 2b$. Vedeli by ste ich nájst aj vy?

Úloha 12 (KMS 15/16-Z3-8). Jefo už našiel svoje stratené okuliare. Teraz však stratil prirodzené čísla a, b, c. Pamätá si, že každé bolo väčšie ako 1 a že pre ne platilo:

$$a \mid bc + 1, \qquad b \mid ac + 1, \qquad c \mid ab + 1.$$

Pomôžte mu a nájdite všetky trojice prirodzených čísel (a, b, c) väčších ako 1, ktoré splňajú uvedené podmienky.

Úloha 13 (MO55-A-III-5). Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r spĺňajúce nasledovné podmienky:

$$p \mid q + r, \qquad q \mid r + 2p, \qquad r \mid p + 3q.$$

Úloha 14 (MO65-A-III-1). Nech $p > 3$ je dané prvočíslo. Určte počet všetkých usporiadaných šestíc (a, b, c, d, e, f) kladných celých čísel, ktorých súčet je rovný $3p$, a pritom všetky zlomky

$$\frac{a+b}{c+d}, \quad \frac{b+c}{d+e}, \quad \frac{c+d}{e+f}, \quad \frac{d+e}{f+a}, \quad \frac{e+f}{a+b}$$

majú celočíselné hodnoty

Náznaky riešení

Hint 2. p ľubovoľné nepárne prvočíslo, $q = 2$ alebo $p = 5$, $q = 3$.

- Rozložte si pravé strany deliteľnosti na súčin $(a^2 - b^2)$. Keď prvočíslo delí súčin, musí deliť jeden z činiteľov.
- Rozoberte jednotlivé prípady, ktoré môžu nastať. Využite pritom, že ak $a \mid b$, tak $a \leq b$, kde a, b sú prirodzené čísla.

Hint 3. Zapíšte si $b = k \cdot a$, skúmajte, aké môže byť k. Môže vám pri tom prísť vhod odhad $a \mid b \Rightarrow a \leq b$.

Hint 4. Zapíšte si výrazy ako $60k$ a $60l$ a vyjadrite x, y ako zo sútavy dvoch rovníc.

Hint 5. Riešenie 1: Zapíšte si jeden výraz cez $50k$, vyjadrite si y a dosaďte do druhého výrazu. Riešenie 2: Hrajte sa s jednou deliteľnosťou a odvodzujte z nej ďalšie, aby ste sa dopracovali k druhej deliteľnosti.

Hint 6. Nech $d \mid 21n + 4$ a $d \mid 14n + 3$. Kombinujte tieto a ďalšie tvrdenia, ktoré dostane o d, kým sa nedopracujte k $d \mid 1$.

Hint 8. Uvažujte prvočíslo r, pre ktoré $r \mid p + q$ a $r \mid p^2 + q^2$. Odvozdujte, ďaľšie deliteľnosti, čo musia platiť. Skúšajte ich aj vhodne prenásobovať, aby ste sa zbavili p^2.
Výsledok: $2p$ v prípade, že $p = q$, 2 v prípade, ak sú obe nepárne; 1 v prípade, že jedno je párne a druhé nepárne.

Hint 9. Sčítajte a odčítajte rovnice, rozložte ľavé strany oboch rovníc, ktoré dostanete, na súčin.
Riešene: $a = c = (p + 1)/2$, $b = d = (p - 1)/2$

Hint 11. Upravte vzťah deliteľnosti na jednoduchší. Deliteľnosť ide upraviť na tvar $a^b + b \mid b^2 + 2b$, ten môže platiť len pre „malé“ hodnoty a, b. Postupne dosádzajte b, príp. a.
Riešenie: $a = 2$, $b = 1$