Deliteľnosť čísel, NSD, prvočísla

a delí b

Def.: Hovoríme, že a delí b (a|b) ⬄ existuje c : a\*c = b

Ku každému číslu n môžme vytvoriť množinu deliteľov {di}  
Lema: Množina deliteľov je pre každé číslo>1 konečná s počtom prvkov >1

Súdeliteľné – def  
čísla n,m nazveme súdeliteľné ⬄ existuje d>1, že d|n a d|m

Prvočíslo  
Číslo p nazveme prvočíslom ak má práve dvoch deliteľov

Zložené číslo  
Číslo a nazveme zloženým číslom ⬄ má viac ako dvoch deliteľov

NSD(a,b) - Def  
Nech množina {di} je množina spoločných deliteľov čísel a,b. Číslo d = max di nazveme   
maximálnym spoločným deliteľom čísel a,b a zapisujeme d=NSD(a,b)

Lema:  
NSD(a,b) = NSD(-a,b) =NSD(a,-b)  
NSD(a,b) = NSD(b,a)  
NSD(a,1) = 1  
NSD(a,0) = a  
NSD(a,a) = a  
NSD(a,b) = NSD(a-b,b) dôkaz: ukážeme, že a,b má rovnakých deliteľov ako a-b,b  
NSD(a,b) = NSD(a%b,b) dôkaz: dôsledok predošlého

Úloha:  
Nájdi NSD(845,247)

Príklady na NSN,NSD

1. Nech číslo N má k rôznych deliteľov. Pomocou čísel N,k vypočítajte súčin všetkých deliteľov čísla N
2. Ak N nie je štvorec tak má párny počet deliteľov
3. Nech a, b, c sú celé a a^2 + b^2 = c^2  
   Dokážte, že a, b nemôžu byť súčasne nepárne
4. Dokážte, že a\*nsd(a,b) +b\*nsn(a;b)>=2ab:
5. Určte, pre ktoré prirodzené čísla a,b platí: (a+b) delí 3\*nsn(a,b).
6. Určte všetky dvojice **a,b** celých kladných čísel, pre ktoré platí:   
   a\*nsn(a, b) = 4\*nsd(a, b)
7. Zisti koľko riešení v NxN má rovnica: NSD(a,b)+NSN(a,b) = 63
8. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a,b, pre ktoré platí rovnosť množín  
   {a·nsd(a, b), b·nsn(a, b)}={45,180}
9. Určte, pre ktoré prirodzené čísla a,b platí: nsd(a,b) + nsn(a,b) = a+b
10. Určte všetky dvojice celých kladných čísel m,n, pre ktoré platí:   
    37 + 27^m=n^3
11. Riešte sústavu rovníc  
    a^2 + b^2 = 468  
    NSD(a,b) + NSN(a,b) = 42
12. V obore prirodzených čísel riešte rovnicu: x^2+y^2= 13nsd(x,y)

Príklady na deliteľnosť

1. Ak 5 nedelí a potom 5 delí a^4+4
2. Dokáž, že 12 | n^5-n^3
3. Dokáž, že a\*(a^12 -1) je deliteľné 5
4. Nech p je prvočíslo, potom platí: p^4 + 24 je číslo zložené
5. Dokážte, že čísla 2\*2^2^n + 1, 3\*2^2^(2n) + 1 sú čísla zložené
6. Dokáž, že súčet tretích mocnín troch po sebe idúcich čísel je deliteľný 9.
7. Na tabuli sú čísla od 1 po n. Postupne budeme mazať dvojice [a,b] a>b,   
   a na tabuľu dopíšeme a-b  
   Dá sa určiť či posledné číslo na tabuli bude párne alebo nepárne?
8. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré  
   a) 7 | 2^n - 1  
   b) 7 | 2^n + 1
9. Dokážte, že platí:  
   42 | n^7 - n, pre každé celé n