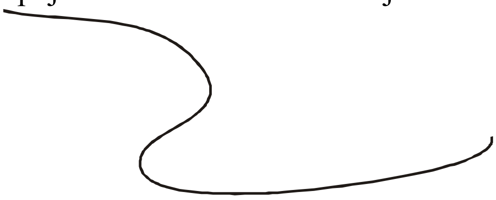
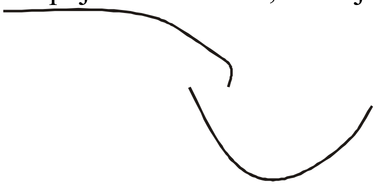
Spojitost

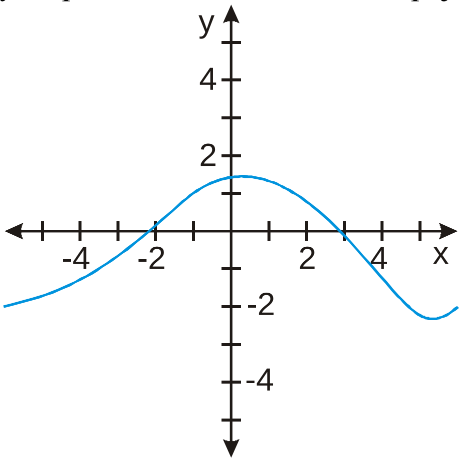
Spojitá čára - čára nakreslená jedním tahem:



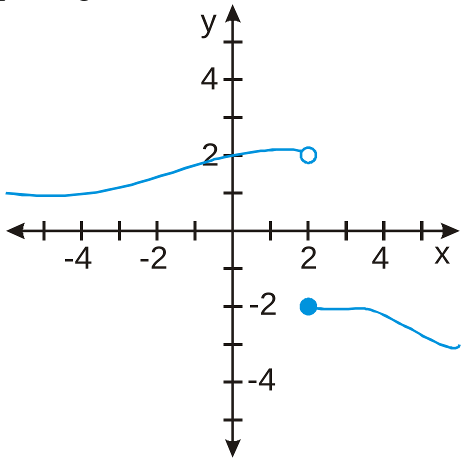
Nespojitá čára – čára, která je přerušená (napsaná dvěma nebo více tahy)



Stejným způsobem můžeme rozlišit spojitost funkce podle grafu



Funkce je spojitá (lépe řečeno spojitá v každém bodě definičního oboru), protože čára jejího grafu není nikde přerušená.

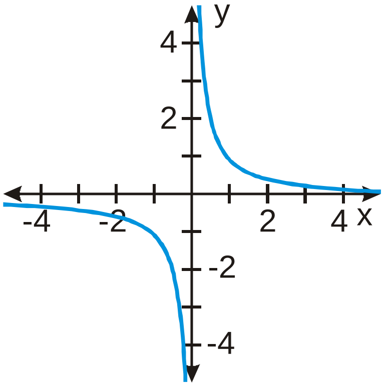


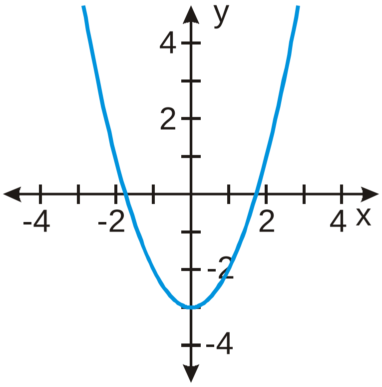
Čára grafu funkce je přerušená $\Rightarrow$ **funkce není spojitá**
přesněji: není spojitá v bodě $x = 2$ (v tomto bodě došlo k přerušení), v ostatních bodech spojitá je (tam čára přerušená není).

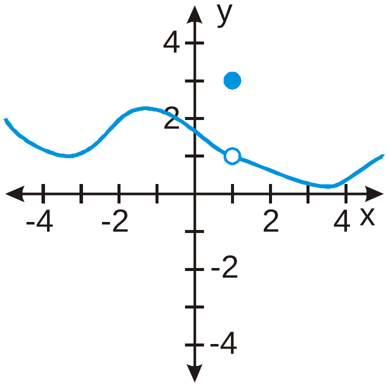
Situace na pravém grafu si zaslouží bližší prozkoumání:

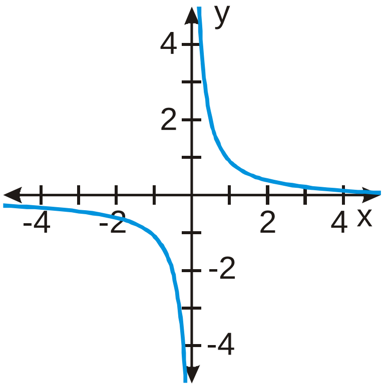
- pokud se budeme k bodu 2 blížit po čáře zprava, dostaneme se do bodu 2 aniž bychom museli přeskakovat přerušené místo $\Rightarrow$ **funkce je v bodě 2 spojitá zprava**
- pokud se budeme k bodu 2 blížit po čáře zleva, musíme přeskočit přerušené místo, abychom se do bodu 2 dostali $\Rightarrow$ **funkce není v bodě 2 spojitá zleva**

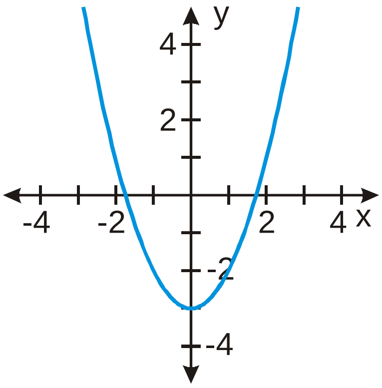
Př. 1: Rozhodni, zda jsou následující funkce spojité. Pokud jsou nespojité, najdi body nespojitosti a rozhodni, zda jsou v těchto bodech spojité alespoň zleva nebo zprava.

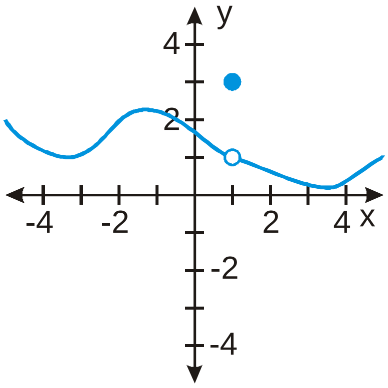










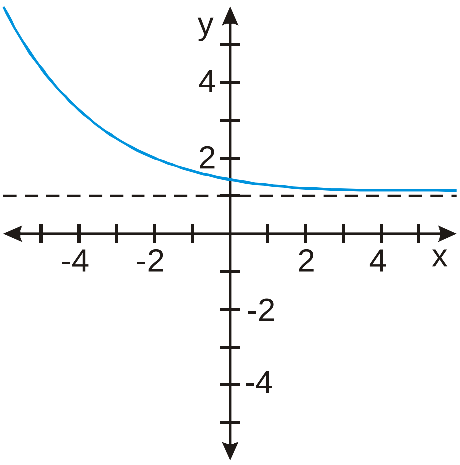


Není spojitá v bodě 0. V tomto bodě není spojitá ani zleva ani zprava (nemá v něm vůbec hodnotu)

Je spojitá.

Není spojitá v bodě 1. Hodnotu v tomto bodě má, ale není v něm spojitá ani zleva ani zprava.

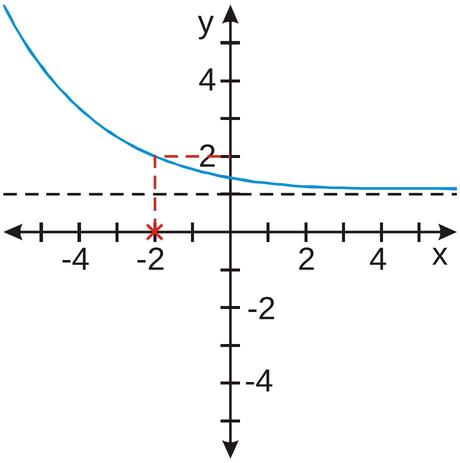
Limita



- Hodnoty funkce se pro x jdoucí k nekonečnu blíží k 1 $\Rightarrow$ funkce má v nekonečnu limitu 1. Píšeme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.
- Pro funkci se může x blížit také k $-\infty$: hodnoty funkce pro x jdoucí k nekonečnu rostou nade všechny meze (blíží se k ∞) $\Rightarrow$ funkce má v mínus nekonečnu limitu ∞.

Píšeme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (protože jde o nekonečno, budeme ji stejně jako u posloupností říkat nevlastní).

Je možné mluvit u funkcí i o jiných limitách než v ∞ a $-\infty$? Podíváme se na graf v nějakém bodě:

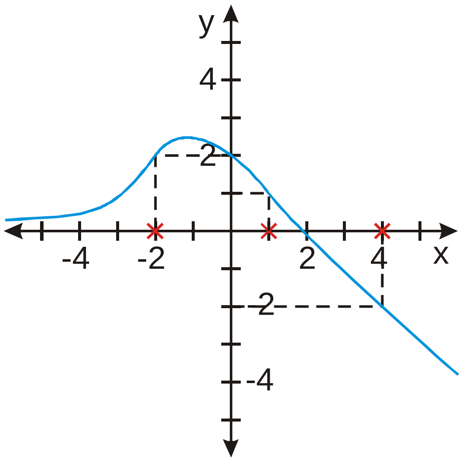


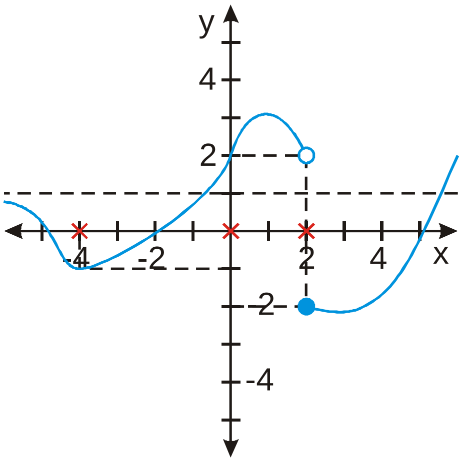
Když se hodnoty *x* blíží k –2, blíží se hodnoty *y* ke 2 (opět by se tam nenašly žádné mezery) $\Rightarrow$ funkce $f(x)$ má v bodě –2 limitu 2. Píšeme $\lim_{x\to-2} f(x) = 2$.

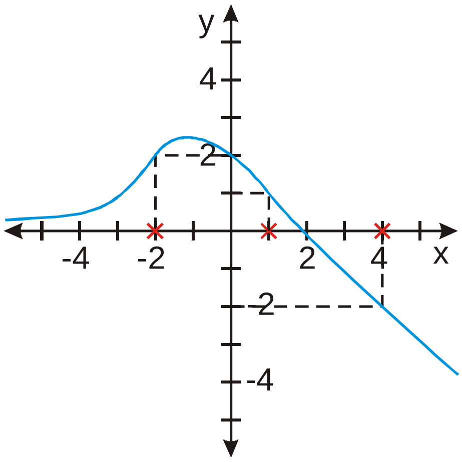
Abychom odlišili $\lim_{x\to-2} f(x) = 2$ od předchozích, říkáme jí **limita ve vlastním bodě** (do předpisu funkce opravdu můžeme dosadit číslo -2)

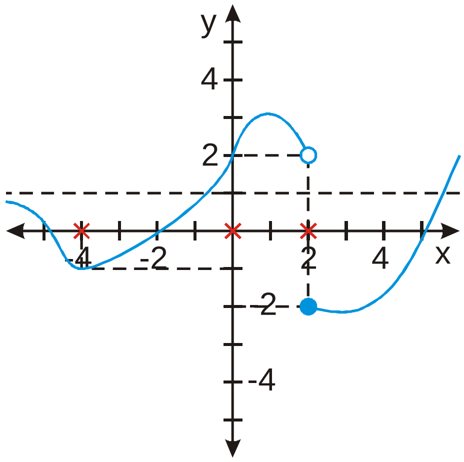
Limitám $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ říkáme **limity v nevlastním bodě** (nekonečna do předpisu dosadit nedokážeme).

Př. 2: U následujících funkcí urči limity v nevlastních bodech a limity ve vyznačených vlastních bodech.



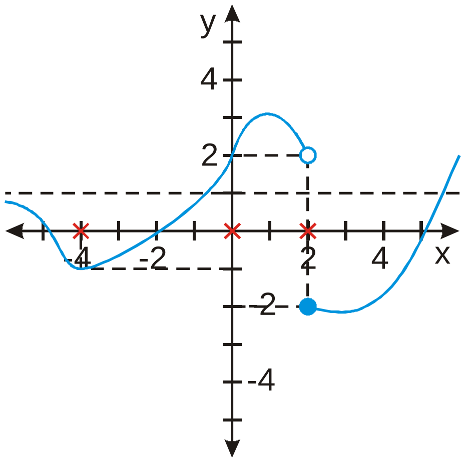






$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

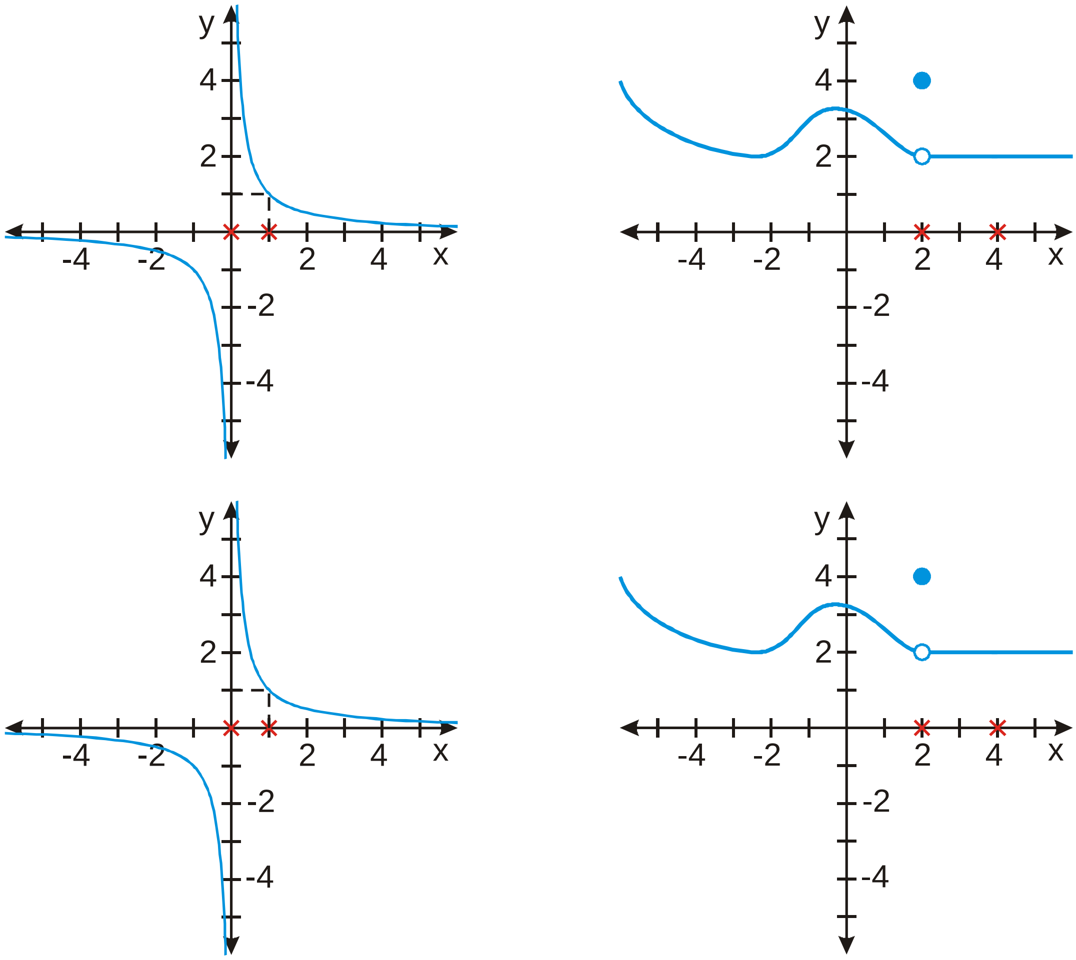
$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to4} f(x) = -2$ $\lim\limits_{x\to-4} f(x) = -1$ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to2} f(x) = ?$



Situaci kolem bodu 2 si rozebereme podrobněji:

- pokud se k bodu $x = 2$ blížíme zprava (od větších hodnot), zdá se nám, že hodnoty *y* se blíží číslu –2 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -2$ (limita zprava v bodě 2 se rovná –2)
- pokud se k bodu $x = 2$ blížíme zleva (od menších hodnot), zdá se nám, že hodnoty *y* se blíží číslu 2 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 2$ (limita zleva v bodě 2 se rovná 2)
- protože při blížení k $x = 2$ z obou stran se v *y* blížíme k různým číslům, nemůže říct, že by se hodnota funkce $f(x)$ pro $x = 2$ blížila k nějakému číslu $\Rightarrow \lim\limits_{x\to2} f(x)$ neexistuje

Př. 3: U následujících funkcí urči limity v nevlastních bodech a limity ve vyznačených vlastních bodech. Pokud v nějakém z vyznačených bodů limita neexistuje, urči (pokud existují) jednostranné limity.



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=2$ $\quad\lim\limits_{x\to4} f(x)=2$

Funkce je v bodě *a* spojitá, právě když je v bodě *a* spojitá zleva i zprava.

Funkce má v bodě *a* limitu, právě když platí $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Funkce je v bodě *a* spojitá, právě když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$**.**

Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna reálná *x* platí: je-li $|x-a| < \delta$, pak $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Funkce *f* má v bodě *a* limitu *L*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna reálná *x* platí: je-li $0 < |x-a| < \delta$, pak $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Pro limity funkce v bodě platí následující dvě věty:

- **Funkce má v bodě *a* nejvýše jednu limitu.**
- **Funkce *f* je spojitá v bodě *a*, právě když** $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$**.**

Funkce *f* má v nevlastním bodě $+\infty$ **limitu *L*, jestliže k libovolně zvolenému** $\varepsilon > 0$**, existuje takové reálné číslo** x_0**, že pro všechna reálná** $x > x_0$ **patří funkční hodnoty** $f(x)$ **do zvoleného** ε**-okolí bodu *L*.**

Funkce *f* má v nevlastním bodě $-\infty$ **limitu *L*, jestliže k libovolně zvolenému** $\varepsilon > 0$**, existuje takové reálné číslo** x_0**, že pro všechna reálná** $x < x_0$ **patří funkční hodnoty** $f(x)$ **do zvoleného** ε**-okolí bodu *L*.**

Věta o třech limitách / Věta o dvou policajtech

Jestliže pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu *a* platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a současně $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, potom existuje také limita funkce *g* v bodě *a* a platí $\lim_{x\to a} g(x) = L$

Věta o počítání s limitami:

Jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$, potom platí:

- $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A + B$
- $\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = A - B$
- $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$
- $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$ za předpokladu, že platí $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Př. 1: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x \to -2} 2^x - 2$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-1}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+2}$ d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Př. 2: Urči limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2+x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$

Př. 3: Urči limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ c) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$

Př. 4: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin 3x}{3x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x} \right)$

Př. 5: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1+\cos 2x}$

Př. 1: Urči limity:

a) $\lim_{x\to -2} 2^x - 2$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+1}$ c) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+2}$ d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \sin x$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

a) $\lim_{x\to -2} 2^x - 2$

funkce $y = 2^x - 2$ je spojitá v $R \Rightarrow \lim_{x\to -2} 2^x - 2 = 2^{-2} - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+1}$

funkce $y = \frac{x-1}{x+1}$ je spojitá v $R - \{-1\}$ (v –1 limitu naštěstí počítat nemusíme) $\Rightarrow$

$\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+2}$

funkce $y = \frac{x^2-1}{x+2}$ je spojitá v $R - \{-2\}$ (v –2 limitu naštěstí počítat nemusíme) $\Rightarrow$

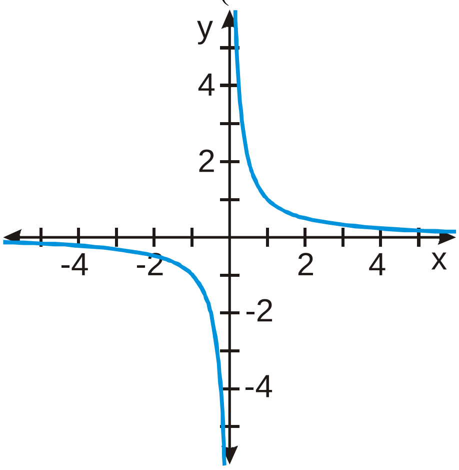
$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+2} = \frac{(-1)^2-1}{-1+2} = \frac{0}{1} = 0$

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \sin x$

funkce $y = \sin x$ je spojitá v $R \Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

funkce $y = \frac{1}{x}$ je spojitá v $R - \{0\}$, bohužel právě v 0 máme limitu určit $\Rightarrow$ nemůžeme použít funkční hodnotu (ta dokonce ani neexistuje) $\Rightarrow$ graf funkce

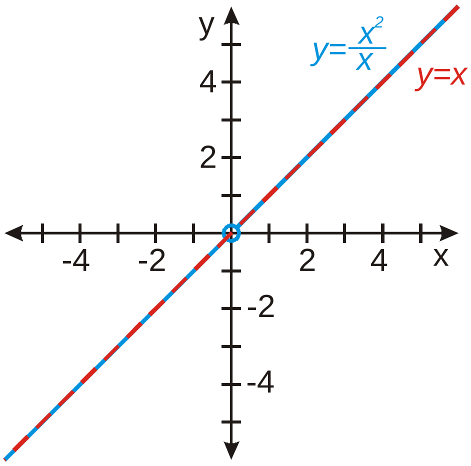


$\Rightarrow$ když se x blíží k nule, směřují hodnoty z každé strany jinam $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje

Jak je to s $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}$?

Na první pohled stejně jako s $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$: funkce $y=\frac{x^2}{x}$ není pro $x=0$ definována (dělení 0).

Rozdíl: předpis $y=\frac{x^2}{x}$ můžeme upravit: $y=\frac{x^2}{x}=x$ $\Rightarrow$ funkce $y=\frac{x^2}{x}$ se pro všechna $x\neq 0$ chová jako funkce $y=x$. Jak vypadá obrázek?



Hodnoty funkce $y=\frac{x^2}{x}$ jsou pro všechna $x\neq 0$ stejné jako pro funkci $y=x$. Na chování funkce přímo v bodě, kde limitu určujeme, ale vůbec nezáleží $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$

Př. 2: Urči limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(2x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2x+1=2\cdot 0+1=1$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{x-3}=\frac{-1-1}{-1-3}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2}{x-2}=\frac{3+2}{3-2}=5$

U všech předchozích příkladů nejde o nic jiného než o rozklad na součiny. Situaci navíc zjednodušuje číslo a, ke kterému se blíží x – víme, že se objeví v rozkladech.

Někdy si závorku na zkrácení musíme „vyrobit“.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\sqrt{x}+2=\sqrt{4}+2=4$$

Př. 3: Urči limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$

a)
$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+2}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{(x+2)-1}=$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\sqrt{x+2}+1=\sqrt{-1+2}+1=2$$

b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{(x+4)-4}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\sqrt{x+4}+2=\sqrt{0+4}+2=4$$

c)
$$\lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}\cdot\frac{1+\sqrt{x-3}}{1+\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to 4}\frac{1-(x-3)}{\left(x^2-16\right)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{(x+4)(x-4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{-1}{(x+4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-1}{(4+4)\left(1+\sqrt{4-3}\right)}=-\frac{1}{16}$$

Př. 4: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}\right)$

a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{3x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\cdot 1=2$$

b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sin^2 x\right)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-1\cdot 1=-1$$

c)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1+\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1+\frac{1}{1}=2$$

Netriviální limity můžeme počítat i v jiných bodech než nula.

Př. 5: Urči limity:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\cdot\cos x}{1+\cos 2x}$

a)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\cdot\cos x}{1+\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x+\left(1-\sin^2 x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x+\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cdot\cos^2 x}{2\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x=1$$