7. Exponenciální a logaritmická funkce

7.1 Exponenciální funkce

Definice. Funkce tvaru

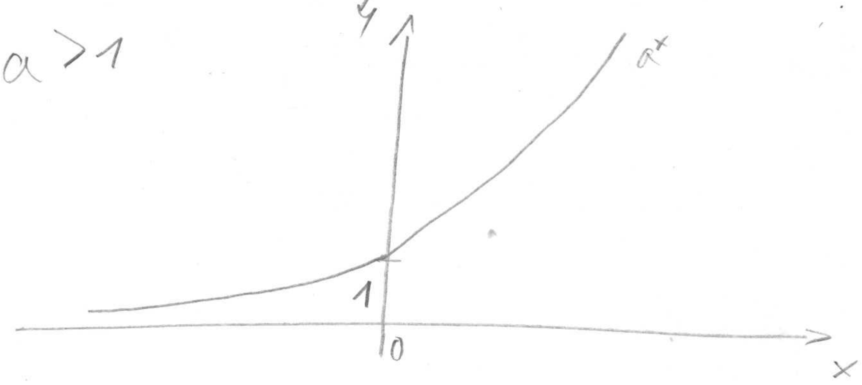
$$f: y=a^x, \qquad a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$$

se nazývá exponenciální funkce (Protože proměnná se nachází v exponentu). Číslo a se nazývá základ.

Průběh funkce a její vlastnosti

- průběh se liší podle hodnoty základu

$a>1$



$0<a<1$

- $D_f=\mathbb{R}$
- $H_f=(0,\infty)$
- zdola omezená
- rostoucí na D_f $a>1$; klesající na D_f $0<a<1$ } prostá
- ani sudá ani lichá
- neperiodická
- nemá maximum ani minimum

Poznámky

- pro $a=1$ funkce přechází v konstantní funkci
- pro $a<0$ nelze funkci rozumně definovat
  (zkuste se podívat na průběh např. -2^n, $n\in\mathbb{Z}$)
- pro $x=0$ je $a^x=1$ nezávisle na základu,
- nepleťte si exponenciální funkci s mocninnou

  x^a ... mocninná

  a^x ... exponenciální
- počítání s exponenciální funkcí se řídí stejnými pravidly jako počítání s mocninami

  $a^{2x+3}=(a^x)^2\cdot a^3$ apod.

7.2 Inversní funkce

připomeňme: prostá funkce přiřazuje každému $x\in D_f$ <u>právě</u> jedno $y\in H_f$.

· funkce klesající nebo rostoucí $\Rightarrow$ f prostá.

· jinými slovy, je-li funkce prostá, můžu každému $y\in H_f$ jednoznačně přiřadit $x\in D_f$: $y=f(x)$

tj $f^{-1}: y\longrightarrow x$

Takové funkci f^{-1} se říká inversní funkce

Příklady (promíchané s poznámkami)

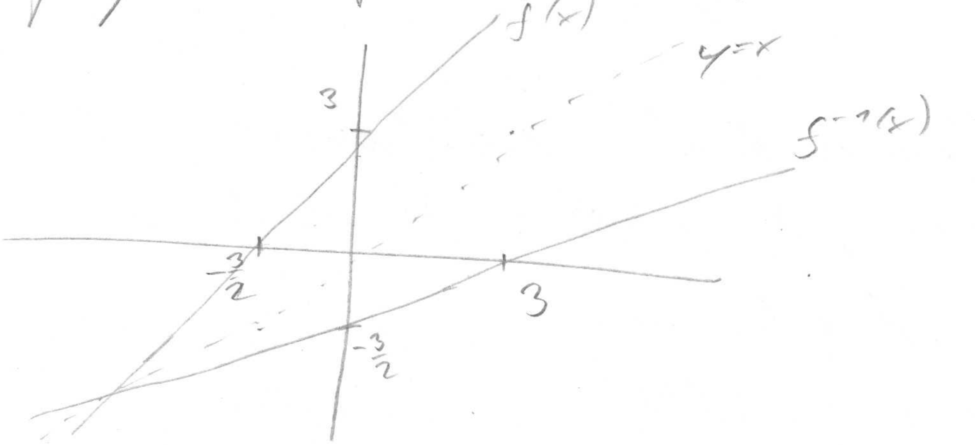
- $f: y = 2x+3$ $\qquad f(2) = 2\cdot 2+3 = 7$

  $y-3 = 2x$ $\qquad f^{-1}(7) = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

  $f^{-1}: x = \frac{y-3}{2}$

  $f^{-1}: y \to x$ je inverzní funkcí k f.

- Graf inversní funkce získáme zrcadlením grafu původní funkce podle osy $y=x$



- protože bývá zvykem označovat závislou proměnnou y a nezávislou proměnnou x, činíme tak i u inversních funkcí. tedy:

  $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$, případně $f^{-1}: y = \frac{x-3}{2}$

- u inversní funkce je oproti funkci původní prohozený obor hodnot a definiční obor:

  $D_{f^{-1}} = H_f \qquad H_{f^{-1}} = D_f$

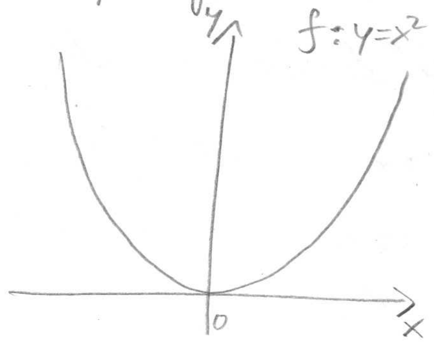
- mohu se omezit na část definičního oboru, kde funkce prostá je, a tam sestrojit inversi

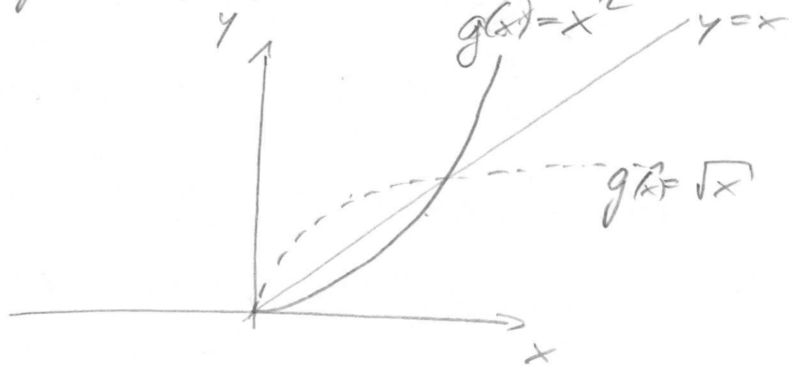
~~např~~

např. $f: y = x^2$ $D_f = \mathbb{R}$ není prostá, nemá inversi

ale: $g: y = x^2$ $D_g = \mathbb{R}_0^+$ již je prostá a její inversí
$H_g = \mathbb{R}_0^+$

je $g^{-1}: y = \sqrt{x}$, $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$, $H_{g^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$





- skládáním funkce s její inversí dostáváme identitu, tj. nestane se vlastně nic

$$\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = 2\cdot\left(\frac{x-3}{2}\right) + 3 = x-3+3 = x$$

7.3 Logaritmická funkce

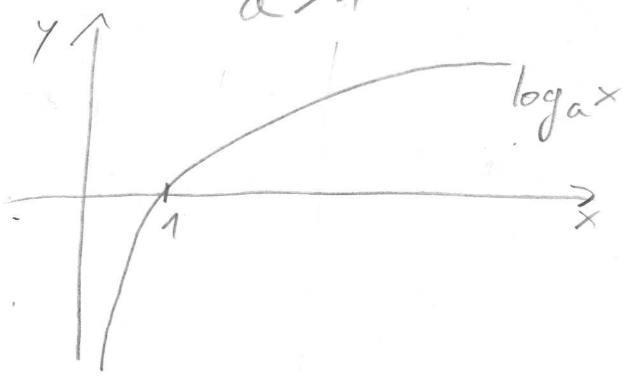
Jelikož exponenciální funkce je prostá na celém D_f, můžeme k ní zavést inversní funkci

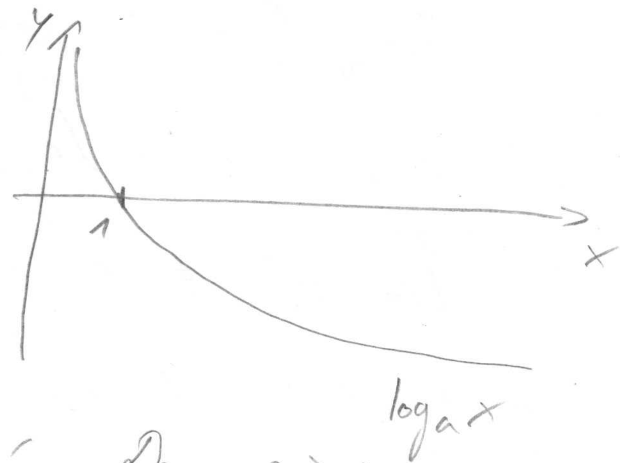
Definice: inversní funkce k exponenciální funkci a^x se nazývá logaritmus o základu a.

$$f: y = \log_a x$$

Poznámky: stejně jako exponenciála, má i logaritmus dva možné průběhy

$a > 1$ $0 < a < 1$





- $D_f = \mathbb{R}^+$
- $H_f = \mathbb{R}$
- neomezená
- nemá minimum ani maximum
- rostoucí na D_f $a > 1$
  klesající na D_f $0 < a < 1$
- ani sudá ani lichá
- neperiodická

- Interpretace logaritmu: logaritmus o základu a z čísla x je takové číslo y, na které musíme umocnit základ, abychom dostali číslo x, tj.

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Příklady $\log_{10} 10 = 1$ $\log_{10} 1000 = 3$

$\log_2 8 = 3$ $\log_2 0{,}5 = -1$

Logaritmus nám říká, "jakého řádu" je číslo x v dané soustavě.

$(8)_{10} = (1000)_2$ $\log_2 8 = 3$

$(9)_{10} = (100)_3$ $\log_3 9 = 2$

- Počítání s logaritmy:

Je nutné znát následující vzorce:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$\forall r \in \mathbb{R}$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a a^r = r$$

Je dobré znát tento vzorec:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

- Protože $\log_a x$ a a^x jsou inversní funkce, jejich skládáním dostáváme opět identitu

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

- Význačné body

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0$$

7.4 Eulerovo číslo

- Mezi všemi exponenciálami vyniká $a = e$

e se nazývá Eulerovo číslo. Inverzní funkci pak je tzv. přirozený logaritmus: $\ln x = \log_e x$

- e je iracionální, lze to ale aproximovat řadou způsobů např.

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 \dots}}}}}}$$

$$e \doteq 2{,}718281828459045 \dots$$

- funkce e^x a $\ln x$ mají řadu unikátních vlastností a v matematice mají velký význam.

např. složené úroky $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

populační, epidemiologické modely $N(t) = e^{R \cdot t}$

statistika $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

fyzika $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \psi(x)$

7.5 Exponenciální a logaritmické rovnice

V exponenciálních rovnicích se neznámá nachází v exponentu, v logaritmických v logaritmu.

7.5.1 Exponenciální rovnice

Budeme se setkávat se třemi typy exponenciálních rovnic

I) $$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad \text{(I)}$$

Tedy řešíme rovnici, která má na levé i pravé straně mocninu stejného základu, nebo ji do takového tvaru lze převést. Rovnost zřejmě může nastat jen tehdy, když $f(x) = g(x)$

Např. a) $5^{3x-1} = 1$

$5^{3x-1} = 5^0$

$3x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ ✓

b) $5^x \cdot 2^x = 100^{x-1}$

$10^x = 10^{2x-2}$

$x = 2x - 2$

$x = 2$ ✓

II) Může se stát, že rovnici do tvaru (I) převést nelze.

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \qquad a \neq b$$

Potom je nutno rovnici tzv. zlogaritmovat, tedy složit levou i pravou stranu s logaritmem o stejném základu.

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad / \log_c$$

$$\log_c\left(a^{f(x)}\right) = \log_c\left(b^{g(x)}\right)$$

vlastnost logaritmu

$$f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b$$

$$f(x) = g(x) \underbrace{\frac{\log_c b}{\log_c a}}_{\log_a b}$$

Např.
$$2^x \cdot 5^{2x} = 3^{x-2} \quad / \log$$

$$\log\left(2^x \cdot 5^{2x}\right) = \log 3^{x-2}$$

$$\log 2^x + \log 5^{2x} = \log 3^{x-2}$$

$$x \cdot \log 2 + 2x \log 5 = (x-2)\log 3$$

$$x(\log 2 + 2\log 5 - \log 3) = -2\log 3$$

$$x \cdot \log\left(\frac{2 \cdot 25}{3}\right) = \log 3^{-2}$$

$$x = \frac{\log 3^{-2}}{\log\left(\frac{50}{3}\right)}$$

III). Některé rovnice lze řešit jen převedením na jiný typ rovnic – např. substitucí:

$$7^{2x} + 7^x - 6 = 0$$

$$y = 7^x$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y+3)(y-2) = 0$$

$$y_2 = -3$$

$$y_1 = 2$$

$$7^{x_1} = 2 \quad / \log$$

$$x_1 \cdot \log 7 = \log 2$$

$$x_1 = \frac{\log 2}{\log 7}$$

$7^{x_2} = -3$ NŘ protože $a^x > 0 \ \forall x \in D_f$

7.5.2 Logaritmické rovnice

Logaritmické rovnice jsou podobné exponenciálním: Opět se snažíme (tentokrát pomocí vlastností logaritmů) převést rovnici do tvaru

I) $$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

→ pak opět stačí řešit rovnici

$$f(x) = g(x).$$

Pokud se v rovnici vyskytují logaritmy různých základů, převedeme je pomocí

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$ na stejný základ

II) Některé rovnice je opět třeba převést (např. substitucí) na rovnici jinou.

Příklady:

a) $\log_4(2x+3) = 2$

$\log_4(2x+3) = \log_4 4^2$

$(2x+3) = 16$

$x = \frac{13}{2}$

b) $\log_2 x - \log_4 64 = 0$

$\log_2 x = \log_4 64$

$\log_2 x = \frac{\log_2 64}{\log_2 4}$

$\log_2 x = \frac{1}{2}\log_2 64$

$x = 8$ ✓

Nesmíme však zapomenout, že $D_{\log} = R^+$, a určit podmínky řešitelnosti, tj. argument každého logaritmu musí být nezáporný

Např. ~~Ř~~ $\log_2(x-4) = \log_2 8$: Podmínky: $x > 4$ ⇒ rce nemá řešení