

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

POROVNANIE NIEKOLKÝCH TYPOV
REKURENTNÝCH SIETÍ Z HĽADISKA HĽBKY
PAMÄTE
DIPLOMOVÁ PRÁCA

2019

BC. JAROSLAV IŠTOK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

POROVNANIE NIEKOLKÝCH TYPOV
REKURENTNÝCH SIETÍ Z HĽADISKA HĽBKY
PAMÄTE
DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Aplikovaná informatika
Študijný odbor: 2511 Aplikovaná informatika
Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky
Školiteľ: doc. RNDr. Martin Takáč, PhD.

Bratislava, 2019
Bc. Jaroslav Ištók



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jaroslav Ištók
Študijný program: aplikovaná informatika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: aplikovaná informatika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Porovnanie niekoľkých typov rekurentných sietí z hľadiska hĺbky pamäte
Memory span in recurrent neural network types: a comparison

Anotácia: Cieľom práce je preskúmať a porovnať vlastnosti niektorých typov rekurentných samoorganizujúcich sa máp (MSOM, RecSOM a ich modifikácií) s Elmanovou jednoduchou rekurentnou sieťou (SRN), najmä z hľadiska hĺbky a kapacity pamäte. Práca zahŕňa implementáciu, výpočtové simulácie a analýzu vrátane preskúmania priestoru parametrov.

Literatúra: Elman, J. (1990). Finding structure in time. Cognitive Science, 14, 179-211.
Strickert, M. & Hammer, B. (2005). Merge SOM for temporal data. Neurocomputing, 64, 39-71.

Vedúci: doc. RNDr. Martin Takáč, PhD.
Katedra: FMFI.KAI - Katedra aplikovanej informatiky
Vedúci katedry: prof. Ing. Igor Farkaš, Dr.
Dátum zadania: 05.10.2017

Dátum schválenia: 12.10.2017
prof. RNDr. Roman Ďurikovič, PhD.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Čestné vyhlásenie: Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne len s použitím uvedenej literatúry a za pomoci môjho školiteľa diplomovej práce.

Podakovanie: Chcel by som poďakovať svojmu školiteľovi, doc. RNDr. Martin Takáčovi, PhD., za jeho pomoc, dlhé hodiny konzultácii, poskytnuté materiály a hlavne za usmernenie správnym smerom pri experimentoch.

Abstrakt

Použitie rekurentných neurónových sietí na spracovanie sekvenčných dát je čoraz viac dôležité v dnešnej dobe v oblasti neurónových sietí. V našej práci implementujeme niekoľko typov neurónových sietí a porovnávame ich z hľadiska hĺbky pamäte. Hľadáme optimálne parametre, pri ktorých dosahujú rôzne typy neurónových sietí najvyššie hodnoty pamäťových hĺbok. Získané výsledky následne porovnávame a analyzujeme súvislosti medzi hodnotami parametrov a pamäťovou hĺbkou sietí. Následne analyzujeme a porovnávame výsledky pre testované typy sietí.

Kľúčové slová: rekurentná neurónová sieť, hĺbka pamäte, samoorganizujúca sa mapa

Abstract

Usage of recurrent neural nets for processing sequential data is getting more important nowadays in the area of neural networks. In our work we implement several types of neural nets which we compare in terms of their memory span. We find optimal parameters for which different types of tested neural nets have the highest memory span values. We compare and analyze relationship between parameters values and memory span of nets. Then we analyze the results and compare them for tested neural nets.

Keywords: recurrent neural net, memory span, self organizing map

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Motivácia	1
1.2	Úvod do umelých neurónových sietí	2
1.2.1	Perceptrón	2
1.2.2	Viacvrstvová dopredná neurónová sieť	3
1.2.3	Trénovací algoritmus dopredných neurónových sietí	5
1.2.4	Rekurentné neurónové siete	6
1.2.5	Samoorganizujúce sa mapy	8
1.2.6	Trénovanie	8
1.2.7	Využitie SOM	11
1.2.8	Rekurentné modely	12
1.2.9	RecSOM	12
1.2.10	MSOM	13
2	Podobné práce	15
3	Návrh riešenia	17
3.1	Pamäťová hĺbka neurónovej siete	17
3.2	Určovanie hĺbky pamäte rekurentnej SOM	17
3.3	Metóda uchovávaní informácií v SOM	18
3.4	Pamäťová hĺbka SRN s Elmanovou architektúrou	19
3.5	Výber vhodných trénovacích dát	19
3.6	Návrh experimentu	19
4	Implementácia	21
4.1	Implementácia neurónových sietí	21
4.2	Voľba programovacieho jazyka	21
4.2.1	Python	21
4.3	Použité knižnice a softvér	22
4.3.1	Numpy	22
4.3.2	Matplotlib	22

4.3.3	Seaborn	22
4.3.4	MultiDendrograms	22
4.4	Algoritmus hľadania najdlhšej spoločnej postfixovej podpostupnosti viacerých reťazcov	22
4.5	Reberov automat	23
4.6	Zdrojové kódy	23
5	Experiment	24
5.1	Výber konkrétnych tréningových množín pre experiment	24
5.2	Hľadanie optimálnych parametrov sietí	25
5.2.1	Parametre pre RecSOM	27
5.2.2	Výsledky pre RecSOM	27
5.2.3	Analýza výsledkov RecSOM	29
5.2.4	Activity RecSOM	31
5.2.5	Activity RecSOM parametre	32
5.2.6	Výsledky pre Activity RecSOM	33
5.2.7	Analýza výsledkov Activity RecSOM	34
5.2.8	MSOM parametre	35
5.2.9	Výsledky pre MSOM	35
5.2.10	Decaying MSOM	38
5.2.11	Decaying MSOM parametre	38
5.2.12	Výsledky pre Decaying MSOM	39
5.3	Porovnanie výsledkov SOM	41
5.3.1	RecSOM	41
5.3.2	Activity RecSOM	42
5.3.3	MSOM	43
5.3.4	Decay MSOM	44
5.4	Vyhodnotenie experimentu so SOM	45
5.5	Experiment so SRN a Reberovým automatom	46
5.5.1	Stavový automat na skrytej vrstve	48
5.6	Limity a nedostatky riešenia	51
5.7	Možnosti ďalšej práce	51
	Bibliography	52

Zoznam obrázkov

1.1	Model perceptrónu	2
1.2	Architektúra viacvrstvovej doprednej neurónovej siete [3]	4
1.3	Logistická sigmoida a Hyperbolický tangens	5
1.4	Rectified Linear Unit	5
1.5	Architektúra Elmanovej siete [5]	6
1.6	Rozvinutá Elmanova sieť [5]	7
1.7	Neúplne rozvinutá sieť [6]	10
1.8	Motýlí efekt [6]	11
1.9	Pinch effect [6]	11
1.10	Architektúra RecSOM [13]	12
3.1	Ukážka hitmapy	18
4.1	Schéma reberovho automatu, Zdroj: http://www.replicatedtypo.com/cultural-inheritance-in-studies-of-artificial-grammar-learning/3352.html	23
5.1	RecSOM hodnoty pamäťových hĺbok	28
5.2	RecSOM hodnoty kvantizačných chýb	29
5.3	Grafy priebehu funkcií na výpočet aktivácií neurónov v Activity RecSOM	32
5.4	Activity RecSOM hodnoty pamäťových hĺbok	33
5.5	Activity RecSOM hodnoty kvantizačných chýb	34
5.6	MSOM hodnoty pamäťových hĺbok	36
5.7	MSOM hodnoty kvantizačných chýb	37
5.8	Decaying MSOM hodnoty pamäťových hĺbok	39
5.9	Decaying MSOM hodnoty kvantizačných chýb	40
5.10	Graf klesajúcej kvantizačnej chyby počas trénovania RecSOM	42
5.11	Graf klesajúcej kvantizačnej chyby počas trénovania Activity RecSOM .	43
5.12	Graf klesajúcej kvantizačnej chyby počas trénovania MSOM	44
5.13	Graf klesajúcej kvantizačnej chyby počas trénovania Decay MSOM . . .	45
5.14	Dendrogram pre Elmanovu sieť	48

Zoznam tabuliek

5.1	Trénovacie parametre RecSOM siete	27
5.2	Parametre Activity RecSOM siete	33
5.3	Parametre MSOM siete	35
5.4	Parametre Decaying MSOM siete	39
5.5	Parametre SRN s Elmanovou architektúrou	47
5.6	Parametre SRN s Elmanovou architektúrou - reberové reťazce	49

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivácia

V strojovom učení nastávajú situácie, kedy potrebujeme predikovať výsledok nie len na základe aktuálneho vstupu, ale aj na základe historického kontextu. Kontext je väčšinou reprezentovaný stavmi modelu strojového učenia z minulých krokov alebo kombináciou predchádzajúcich vstupov. Príkladom takejto úlohy môže byť spracovanie tzv. časových radov či generovanie postupností znakov. Predstavme si úlohu, v ktorej chceme model strojového učenia naučiť predikovať ďalšie písmeno v určitom slove. Ako príklad si môžeme zobrať slovo „Bratislava“. Trénovanie modelu strojového učenia bez využitia historického kontextu by mohlo prebiehať napríklad takto: Trénovaciou množinu by tvorili písmená daného slova, kde očakávanou hodnotou pre nejaké písmeno by bolo ďalšie písmeno, ktoré za ním v slove nasleduje. Čiže pre písmeno „B“ povieme, že očakávame „r“ a takto pokračujem ďalej cez všetky písmená v slove. Problém nastane pri druhom písmene „a“ v slove Bratislava. Pri prvom výskyte písmena „a“ sme modelu tvrdili, že očakávame písmeno „t“ a pri druhom výskyte písmena „a“ tvrdíme, že očakávame „v“. Tento prípad sa model, ktorý nevyužíva žiadny historický kontext, nevie naučiť, pretože sa učí len asociácie vstup-výstup (aktuálne písmeno - nasledujúce písmeno) a nevyužíva žiadnu ďalšiu pamäť (okno do minulosti). Historický kontext umožňuje modelom strojového učenia pracovať s určitou formou pamäte.

V našej práci sa budeme zaoberať jedným z modelov strojového učenia, ktorý pracuje s kontextom: rekurentnými neurónovými sieťami viacerých typov pričom budeme merať a porovnávať ich pamäťovú hĺbku. Neformálne: pamäťová hĺbka neurónovej siete vo všeobecnosti vyjadruje s akým dlhým kontextom do minulosti dokáže neurónová sieť pracovať. (formálnu definíciu pamätevej hĺbky uvedieme v kapitole Návrh riešenia)

Konkrétne pôjde o nasledujúce tri typy rekurentných neurónových sietí a ich modifikácie:

- RecSOM

- MSOM
- Rekurentná neurónová sieť s Elmanovou architektúrou

1.2 Úvod do umelých neurónových sietí

1.2.1 Perceptrón

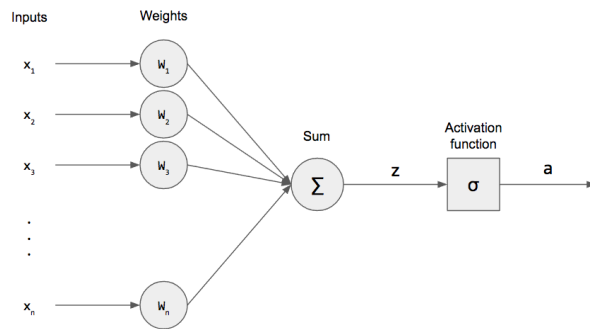
Je základným modelom neurónu, ktorý je používaný v neurónových sieťach.

Na vstupe každého perceptrónu je vektor vstupných hodnôt (vzor) \bar{x} pričom hodnoty sú reálne čísla alebo binárne hodnoty, v ktorých môže byť zakódované napríklad slovo alebo obrázok. Každý perceptrón má vektor synaptických váh \bar{w} .

Výstup perceptrón vyjadruje rovnica:

$$y = f\left(\sum_{j=1}^{n+1} w_j x_j\right) \quad x_{n+1} = -1 \quad (1.1)$$

Funkcia f sa nazýva aj aktivačná funkcia perceptrónu, ktorá môže byť spojitá alebo diskretná. Podľa toho, či je aktivačná funkcia spojitá alebo diskretná, rozlišujeme spojitý alebo diskretný perceptrón.



Obr. 1.1: Model perceptrónu

Aktivačná funkcia diskretného perceptrónu je jednoduchá bipolárna funkcia, ktorá vráti +1 alebo 1.

$$f(net) = sign(net) = \begin{cases} 1 & \text{ak } net \geq 0 \\ -1 & \text{ak } net < 0 \end{cases}$$

Aktivačná funkcia spojitého perceptrónu môže byť napríklad sigmoida.

$$f(net) = \frac{1}{1 + \exp^{-net}} \quad (1.2)$$

Vstupom do aktivačnej funkcie (net) je skalárny súčin vstupného vektora \bar{x} a váhového vektora perceptrónu \bar{w} .

$$net = \bar{x} \cdot \bar{w} \quad (1.3)$$

Trénovanie perceptrónu prebieha za pomoci učiteľa (angl. supervised learning). Pravidlo pre adaptáciu váh diskrétného perceptrónu:

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \alpha(d - y) \cdot x_j \quad (1.4)$$

Spojité perceptrón je trénovaný metódou najprudšieho spádu, pomocou ktorej minimalizujeme kvadratickú chybovú funkciu:

$$E(w) = \frac{1}{2} \sum_p (d^{(p)} - y^{(p)})^2 \quad (1.5)$$

Pričom p ide cez všetky vzory v trénovacej množine.

Pravidlo pre adaptáciu váh v spojitom perceptróne:

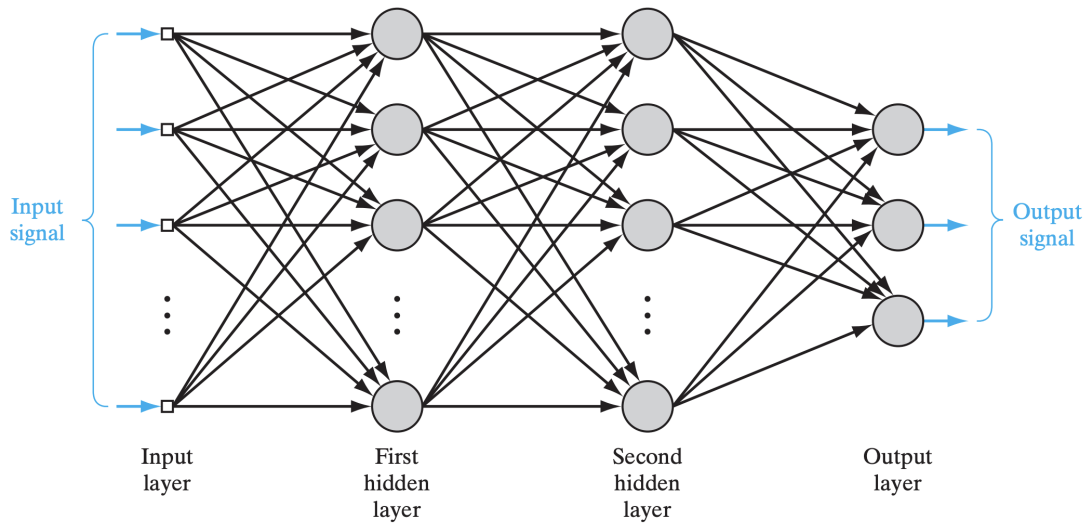
$$w_j(t+1) = w_j(t) + \alpha(d^{(p)} - y^{(p)})f'(net)x_j = w_j(t) + \alpha\delta^{(p)}x_j \quad (1.6)$$

Kde p je index vzoru v trénovacej množine, y je skutočný výstup a d je požadovaný výstup.

Diskrétny perceptrón je veľmi jednoduchým modelom. Nevieme ním vyriešiť celú škálu úloh. Napríklad dokáže klasifikovať iba lineárne separovateľné dáta. Je však dokázané, že ak dáta sú lineárne separovateľné, trénovací algoritmus konverguje a teda vie dáta separovať. Model perceptrónu sa v strojovom učení niekedy označuje aj ako logistická regresia.

1.2.2 Viacvrstvá dopredná neurónová sieť

V našej práci sa budeme zaoberať rekurentnou neurónovou sieťou s Elmanovou architektúrou [1]. Najskôr však popíšeme základný viacvrstvový model doprednej neurónovej siete. Viacvrstvá dopredná neurónová sieť má jednu vstupnú vrstvu, jednu výstupnú vrstvu a minimálne jednu skrytú vrstvu. Jednotlivé vrstvy sú tvorené perceptrónmi a sú pospájané väzbami, ktoré majú váhy, resp. váhové vektory. Medzi neurónmi v tej istej vrstve nie sú žiadne spojenia.



Obr. 1.2: Architektúra viacvrstvovej doprednej neurónovej siete [3]

Trénovací algoritmus pomocou ktorého sa trénujú dopredné neurónové sa nazýva „spätné šírenie chyby“ (angl. backpropagation).

Aktivácie na neurónoch výstupnej vrstvy (výstup) môžeme popísať vzťahom:

$$y_i = f\left(\sum_{k=1}^{q+1} w_{ik} h_k\right) \quad (1.7)$$

Aktivácie na neurónoch skrytej vrstve môžeme popísať vzťahom:

$$h_k = f\left(\sum_{j=1}^{n+1} v_{kj} x_j\right) \quad (1.8)$$

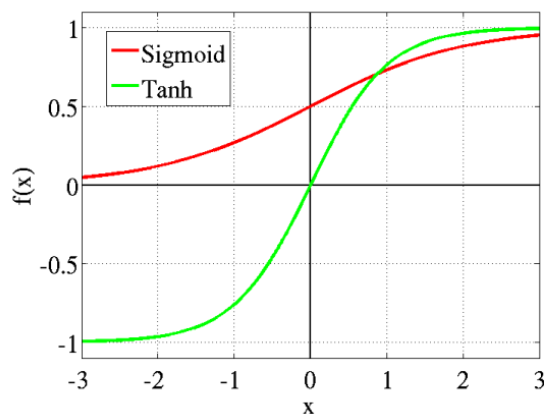
Prahové hodnoty:

$$x_{n+1} = h_{q+1} = -1 \quad (1.9)$$

Aby dopredná neurónová sieť vedela pracovať aj s nelineárnymi problémami, musí byť aktivačná funkcia neurónov nejaká nelineárna diferencovateľná funkcia.

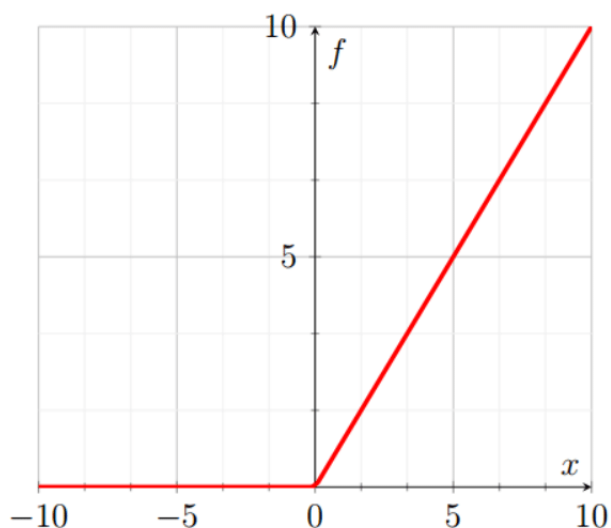
Najpoužívanejšie aktivačné funkcie sú:

- Logistická sigmoida
- Hyperbolický tangens



Obr. 1.3: Logistická sigmoida a Hyperbolický tangens

- ReLU



Obr. 1.4: Rectified Linear Unit

Vzťahy pre aktualizáciu váh sú nasledovné:

Váhy medzi vstupnou a skrytou vrstvou

$$w_{ik}(t+1) = w_{ik}(t) + \alpha \delta_i h_k \quad \delta_i = (d_i - y_i) f'(net_i) \quad (1.10)$$

Váhy medzi skrytou a výstupnou vrstvou:

$$v_{kj}(t+1) = v_{kj}(t) + \alpha \delta_k x_j \quad \delta_k = \left(\sum_i w_{ik} \delta_i \right) f'(net_k) \quad (1.11)$$

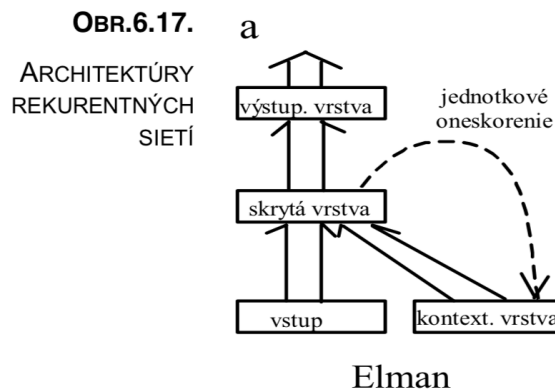
1.2.3 Trénovací algoritmus dopredných neurónových sietí

1. zoberie sa vstup $x^{(p)}$ a vypočíta sa výstup $y^{(p)}$ (dopredný krok)

2. vypočíta sa chyba pomocou zvolenej chybovej funkcie
3. vypočítame hodnoty δ_i a δ_k (spätný krok)
4. upravíme váhy Δw_{ik} a Δv_{kj}
5. ak už boli použité všetky trérovacie príklady z trérovacej množiny pokračuj bodom 6. inak pokračuj bodom 1.
6. ak bolo dosiahnuté nejaké zastavovacie kritérium, potom skonči, inak prepermutovej vstupy a pokračuj bodom 1.

1.2.4 Rekurentné neurónové siete

Rekurentná neurónová sieť je akákoľvek neurónová sieť, ktorá obsahuje množinu neurónov v ktorých je uchovávaná informácia o aktiváciách neurónov alebo predchádzajúcich vstupoch z predošlých krokov. Neuróny, ktoré dostávajú informáciu z predchádzajúcich časových krokov tvoria vrstvu, ktorá sa nazýva kontextová vrstva. Týmto spôsobom je sieť rozšírená o vnútornú pamäť. V našej práci budeme skúmať vlastnosti a skúšať zmerať pamäťovú hĺbku rekurentnej siete s Elmanovou architektúrou, ktorá je znázornená na nasledujúcom diagrame.



Obr. 1.5: Architektúra Elmanovej siete [5]

Dvojité šípky reprezentujú spojenia neurónov medzi vrstvami. Neuróny v tej istej vrstve nie sú, podobne ako v nerekurentnej, teda doprednej, sieti, medzi sebou prepojené. Spojenia znázornené dvojitou šípkou majú váhy, ktoré sú upravované počas trérovania. Jednoduché šípky reprezentujú rekurentné spojenia. Tieto majú nemennú váhu s hodnotou 1. Tieto spojenia slúžia na odpamätanie aktivácii rekurentných neurónov.

Využitie rekurentných neurónových sietí:

- Klasifikácia s časovým kontextom

Príkladom úlohy môže byť napríklad určiť, či určitá postupnosť vstupov patrí do nejakej triedy. Praktickým problémom môže byť zistiť či postupnosť signálov z určitého zariadenia signalizuje poruchu zariadenia alebo nie.

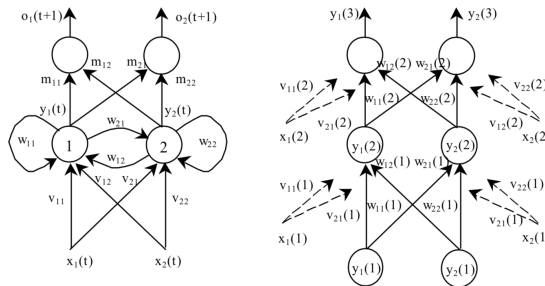
- Predikcie

Príkladom môže byť napríklad predikcia nasledujúceho člena postupnosti.

- Generovanie postupnosti

Podobne ako predikcie, ale nepredikujeme iba ďalšiu hodnotu postupnosti, ale celé pokračovanie. Je to komplexnejšia úloha. Napríklad 23123123123123123123 .. pokračovaním by bolo 123123123... Reálne úlohy sú komplexnejšie.

Jeden z algoritmov na tréning rekurentných neurónových sietí je spätné šírenie chyby v čase (angl. backpropagation through time). Pri použití tohto algoritmu sa sieť rozvíja v čase, t.j. rozvinutá sieť má toľko skrytých vrstiev, koľko časových krokov do minulosti má. Počet časových krokov je daný parametrom T , ktorého veľkosť nastavujeme pred tréningom siete. Takáto sieť sa potom trénuje podobne ako klasická nerekurentná dopredná sieť s T skrytými vrstvami pomocou jednoduchého spätného šírenia chyby. Aktivity neurónov kontextovej vrstvy sú na začiatku každého cyklu tréningu nastavené na hodnotu 0.5.



Obr. 1.6: Rozvinutá Elmanova sieť [5]

Výstup takejto siete počítame pomocou vzťahu:

$$o_k^{(T+1)} = f\left(\sum_{j=1}^J m_{kj}^{T+1} y_j^{T+1}\right) \quad (1.12)$$

$$y_j^{t+1} = f\left(\sum_{i=1}^J w_{ji}^t y_i^t + \sum_{i=1}^I v_{ji}^t x_i^t\right) \quad (1.13)$$

Chybová funkcia v čase $T + 1$

$$E(T + 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K (d_k^{(T+1)} - o_k^{(T+1)})^2 \quad (1.14)$$

Zmena váh medzi vstupnou a výstupnou vrstvou:

$$\Delta m_{kj}^{T+1} = -\alpha \frac{\partial E(T+1)}{\partial m_{kj}} = \alpha \delta_k^{T+1} y_j T + 1 \quad (1.15)$$

$$\delta_k^{T+1} = (d_k^{T+1} - o_k^{T+1}) f'(net_k^{T+1}) \quad (1.16)$$

Váhy medzi rozvinutými vrstvami a medzi vstupom a rozvinutými vrstvami sa upravujú pomocou vzťahov:

$$\Delta w_{hj}^{T+1} = \frac{\sum_{t=1}^T \Delta w_{hj}^t}{T} \quad (1.17)$$

$$\Delta w_{ji}^{T+1} = \frac{\sum_{t=1}^T \Delta w_{ji}^t}{T} \quad (1.18)$$

1.2.5 Samoorganizujúce sa mapy

Ďalším typom rekurentných neurónových sietí, ktorých pamäťovú hĺbku budeme skúmať v našej práci, sú rekurentné samoorganizujúce sa mapy, ktoré sú rozšírením základnej nerekurentnej verzie samoorganizujúcich sa máp (ďalej iba SOM). Preto najskôr popíšeme základný nerekurentný model SOM podľa [7].

SOM je typ neurónovej siete, v ktorej sú jednotlivé neuróny usporiadané do (väčšinou) dvojrozmernej štvorcovej mriežky. Samoorganizujúce sa mapy (ďalej iba SOM) sú trénované bez učiteľa, čiže váhy jednotlivých neurónov sú upravované iba na základe dát z trénovacej množiny. Čo je zaujímavé na spôsobe tréningu SOM je, že je veľmi podobný učeniu neurónov v mozgovej kôre živočíchov. Je to biologicky inšpirovaný model. Špeciálnou vlastnosťou SOM je, že po natrénovaní zobrazí trénovaciu množinu so zachovanou topológiou. To znamená, že blízke (podobné) vstupy aktivujú blízke neuróny v sieti. Vzdialenosť dvoch neurónov je ich euklidovská vzdialenosť v mriežke. Takéto topologické zobrazenie dát sa vyskytuje aj v biologických neurónových sieťach.

1.2.6 Trénovanie

Proces tréningu SOM je zložený z dvoch častí:

- hľadanie víťaza
- adaptácia váh neurónov

Na začiatku sa váhy medzi vstupom a neurónmi v mriežke inicializujú na náhodné hodnoty z určitého intervalu. V každom kroku tréningu nájdeme najskôr víťazný neurón pre daný vstup. Postupne počítame euklidovské vzdialenosti vstupu od váhového

vektora jednotlivých neurónov. Víťazom je neurón, ktorý je najbližšie k vstupu (má najkratšiu vzdialenosť).

$$i^* = \operatorname{argmin}_i ||x - w_i|| \quad (1.19)$$

Druhým krokom je adaptácia váh víťazného neurónu a jeho okolia. Pravidlo pre zmenu váh neurónov:

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \alpha(t)h(i^*, i)(||x(t) - w_i(t)||) \quad (1.20)$$

Váhové vektory víťazného neurónu a jeho topologických susedov sa posúvajú smerom k aktuálnemu vstupu. $\alpha(t)$ predstavuje rýchlosť učenia, ktorá môže klesať v čase alebo môže zostať konštantná. Na funkcii, ktorá je použitá pre α , v praxi veľmi nezáleží, mala by to byť nejaká monotónne klesajúca funkcia (napríklad exponenciálna funkcia). $h(i^*, i)$ je funkcia susedností (tzv. excitačná funkcia), ktorá definuje koľko neurónov v okolí víťaza bude tréňovaných a do akej miery. Inými slovami, excitačná funkcia definuje rozsah kooperácie medzi neurónmi. Používajú sa najčastejšie 2 typy okolia:

- pravouhlé(štvorcové) okolie

$$N(i^*, i) = \begin{cases} 1 & \text{ak } d_M(i^*, i) \leq \lambda(t) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

$d_M(i^*, i)$ je Manhattanovská vzdialenosť (L1 norma) medzi neurónmi v mriežke mapy. Kohonen zistil, že najlepšie výsledky sú dosiahnuté, keď sa veľkosť okolia s časom postupne znižuje.

- gaussovské okolie

$$N(i^*, i) = \exp^{-\frac{d_E^2(i^*, i)}{\lambda^2(t)}} \quad (1.21)$$

$d_E(i^*, i)$ je euklidovská vzdialenosť (L2 norma) neurónov v mriežke. Funkcia $\lambda^2(t)$ sa s časom postupne znižuje až k nule. Táto funkcia slúži na znižovanie okolia víťazného neurónu počas tréňovania, čím sa zabezpečí ukončenie učenia.

$||x(t) - w_i(t)||$ je euklidovská vzdialenosť medzi vstupným vektorom a váhovým vektorom.

Na vyhodnocovanie tréňovania SOM používame kvantizačnú chybu. Pri SOM je kvantizačná chyba euklidovská vzdialenosť vstupu od váh víťazného neurónu. Po každej epoche učenia vieme určiť celkovú kvantizačnú chybu siete pre danú tréňovaciu množinu. Pre každý príklad z tréňovacej množiny vypočítame kvantizačnú chybu a

nakoniec spravíme priemer kvantizačných chýb. Táto by mala po každej epoche učenia (po natrénovaní a adaptácii váh na celej tréningovej množine) postupne klesať k určitému minimu.

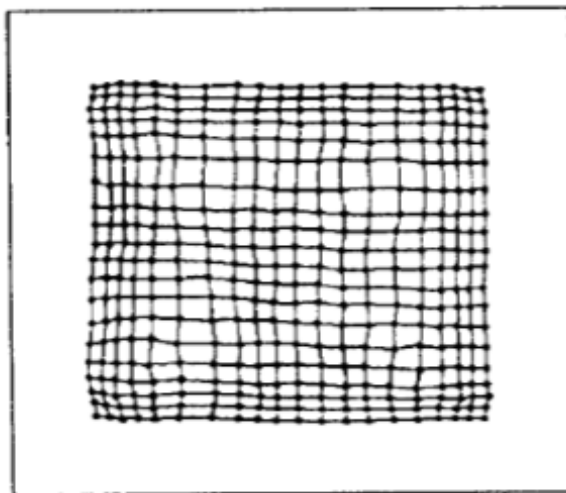
Pri učení rozlišujeme všeobecne dve fázy:

- fáza usporiadavania - s časom klesá veľkosť okolia víťazných neurónov
- fáza doladovania - veľkosť okolia sa zafixuje na nejakej malej hodnote až pokým učenie neukončí, alebo sa znižuje veľmi pomaly

Kohonen odhadol na základe pokusov, že počet iterácií tréningovania, by mal byť rádovo 500-násobok počtu neurónov v sieti. Rovnako sa pozorovaním zistilo, že na fázu doladenia je lepšie ponechať viac času ako na fázu usporiadavania.

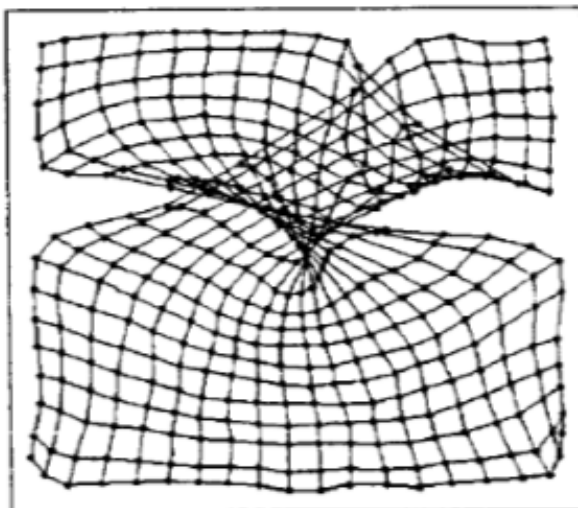
Počas tréningovania SOM môžu nastať špeciálne situácie:

- Sieť je neúplne rozvinutá - príliš rýchle znižovanie rýchlosti učenia α



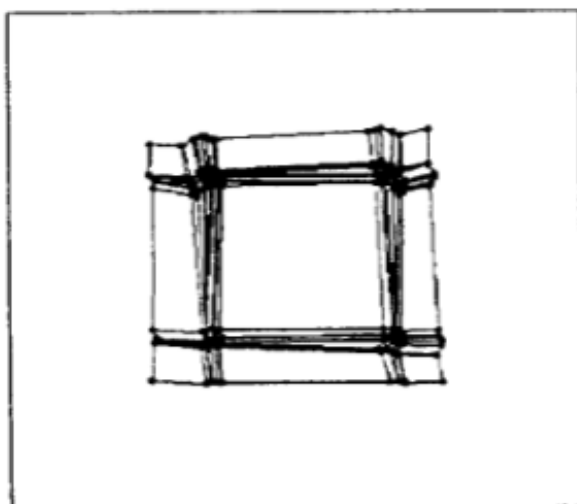
Obr. 1.7: Neúplne rozvinutá sieť [6]

- Motýlí efekt - príliš rýchle znižovanie okolia λ



Obr. 1.8: Motýlí efekt [6]

- Pinch efekt - príliš pomalé zmenšovanie okolia λ



Obr. 1.9: Pinch effect [6]

1.2.7 Využitie SOM

- SOM môžeme využiť na mapovanie viacrozmerných dát do 2D - môžeme ju použiť na redukciu dimenzie dát.
- SOM je aj vektorovým kvantizátorom. Pri vektorovej kvantizácii nahradzame množinu vektorov vstupných dát menšou množinou vektorov (nazývaných aj prototypy). V SOM sú prototypmi váhové vektory. Toto je možné využiť napríklad na kompresiu dát. Vďaka vektorovej kvantizácii stačí uchovať iba množinu prototypov a informáciu o tom, ktorý vstupný vektor patrí ku ktorému prototypu (centru). Ku každému centru sa potom priradí množina vstupných vektorov,

ktoré ku nemu majú bližšie ako ku akémukoľvek inému centru (používa sa euklidovská vzdialenosť). Vektorou kvantizáciou teda rozdelíme vstupný priestor na disjunktné oblasti, ktoré tvoria tzv. Voronoiho mozaiku.

1.2.8 Rekurentné modely

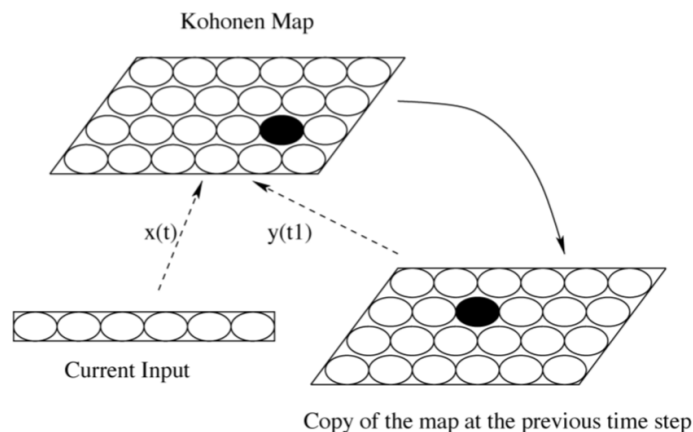
Rekurentné samoorganizujúce sa mapy sú modifikáciou nerekurentnej SOM. Rozdiel oproti nerekurentnej verzii je v tom, že vstupy sú porovnávané nielen s váhovým vektorom jednotlivých neurónov, ale aj s kontextom. Rôzne verzie rekurentných SOM sa líšia v type kontextu, ktorý je v nich použitý. V kontexte rekurentnej SOM sú spravidla uložené vlastnosti siete z minulého časového kroku alebo kombinácia minulých vstupov.

V mojej práci budem porovnávať 2 základné typy rekurentných SOM.

- Recursive SOM (RecSOM): Pri RecSOM je kontextom celá kópia aktivácií neurónov z minulého kroku.
- Merge SOM (MSOM): Pri MSOM sú kontextom vlastnosti víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku učenia.

1.2.9 RecSOM

Pri RecSOM je SOM algoritmus použitý rekurzívne na vstupný vektor $x(t)$ a tiež reprezentáciu mapy z minulého kroku $y(t-1)$. [13]



Obr. 1.10: Architektúra RecSOM [13]

V RecSOM je každý vstup asociovaný k stavom z predchádzajúcich krokov a preto každý neurón reaguje na sekvenciu vstupov. Prerušované čiary predstavujú trénovateľné spojenia.

Každý neurón má 2 váhové vektory. Váhový vektor w_i , ktorý je porovnávaný so vstupným vektorom $x(t)$ a vektor kontextových váh c_i , ktorý je porovnávaný s kontextom z predchádzajúceho kroku $y(t-1)$. Keďže chceme aby boli dopredné a spätné spojenia v RecSOM homogénne, celkovú chybu určíme ako váhovaný súčet druhých mocnín kvantizačných chýb oboch prípadov. Chyba je vlastne váhovaný súčet euklidovských vzdialeností vstupu od váhového vektoru a kontextu z predchádzajúceho kroku od kontextových váh.

N je počet neurónov v sieti (pretože kontext je tvorený aktiváciami neurónov celej mapy)

$$d_i = (1 - \alpha) \cdot \|x(t) - w_i\|^2 + \alpha \cdot \|y(t-1) - c_i\|^2 \quad c_i \in R^N \quad (1.22)$$

d_i je kvantizačná chyba i -teho neurónu. α je parameter, ktorý určuje akú váhu pri trénoch bude mať kontext a akú váhu bude mať aktuálny krok.

Kontextom je kópia aktivácii všetkých neurónov z predchádzajúceho kroku.

$$y(t) = [y_1(t-1), \dots, y_N(t-1)] \quad c, r \in R^N \quad (1.23)$$

Hodnota aktivácie pre určitý neurón je vyjadrená vzťahom:

$$y_i = \exp(-d_i) \quad (1.24)$$

Pravidlo pre zmenu váh neurónov (podobné ako pri nerekurentnej SOM):

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \alpha(t)h(i^*, i)[x(t) - w_i(t)] \quad (1.25)$$

Pre zmenu kontextových váh, platí to isté pravidlo ako pre normálne váhy, iba je aplikované na kontextové vektory:

$$c_i(t+1) = c_i(t) + \alpha(t)h(i^*, i)[y(t-1) - c_i(t)] \quad (1.26)$$

Pri RecSom majú kontext aj kontextové váhy veľkú dimenziu (rovnú počtu neurónov v sieti, keďže kontextom je vektor aktivácii všetkých neurónov z predchádzajúceho kroku), čo spomaľuje výrazne proces trénoch takejto siete. Výhodou môže byť, že kontext RecSOM obsahuje veľa informácií a teda môže mať v niektorých prípadoch lepšie vlastnosti. Jedným z cieľov našej práce je zistiť či je skutočne tento rozšírený kontext potrebný a či má nejaký vplyv na pamäťovú hĺbku.

1.2.10 MSOM

MSOM je podobná RecSOM, líši sa v reprezentácii kontextu. [9]

Chybu (vzdialenosť vstupu od neurónu) vyjadríme vzťahom (podobne ako pri RecSOM), n je dimenzia trénoch príkladov:

$$d = (1 - \alpha) \cdot \|s(t) - w_i\|^2 + \alpha \cdot \|r(t) - c_i\|^2 \quad x, c \in R^n \quad (1.27)$$

Kontextom pri MSOM nie je kópia aktivácii neurónov z predchádzajúceho kroku, ako je tomu pri RecSom. Kontextom pri MSOM je zlučenie (lineárna kombinácia) vlastností víťaza z predchádzajúceho kroku. (Odtiaľ je odvodený názov - „zlučovacia samoorganizujúca sa mapa“ - Merge SOM). Kontext MSOM vyjadríme vzťahom:

$$y(t) = (1 - \beta) \cdot w_{i^*}(t - 1) + \beta \cdot c_{i^*}(t - 1) \quad (1.28)$$

β je zlučovací parameter, ktorý určuje váhu kombinovaných vlastností víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku. Typická hodnota tohto parametra počas tréningu je $\beta = 0.5$, čiže taká, aby obe zložky mali približne rovnakú váhu. Keďže vlastnosti víťazného neurónu sú reprezentované jeho váhovým vektorom, kontextom pri MSOM je lineárna kombinácia váhového vektora víťazného neurónu a kontextových váh víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku. Pravidlá pre adaptáciu váh váhového vektora a kontextových váh zostávajú rovnaké ako pri RecSom, resp. SOM. Líšia sa iba v kontexte.

$$w_i(t + 1) = w_i(t) + \alpha(t)h(i^*, i)[s(t) - w_i(t)] \quad (1.29)$$

Pravidlo pre zmenu kontextových váh:

$$c_i(t + 1) = c_i(t) + \alpha(t)h(i^*, i)[y(t) - c_i(t)] \quad (1.30)$$

Kontext pri štandardnej MSOM obsahuje odlišné informácie ako pri RecSom. Na rozdiel od RecSom, kde kontext tvorí vektor aktivít všetkých neurónov z predchádzajúceho kroku, pri MSOM je kontext tvorený iba lineárnou kombináciou vlastností víťazného neurónu z minulého kroku. Z toho vyplýva, že kontext v MSOM uchováva menšie množstvo informácií ako kontext v RecSOM. Dimenzia kontextu pri MSOM je rovnaká ako dimenzia vstupov. Ak majú vstupné vektory malú dimenziu, tak aj kontext má malú dimenziu. V tomto prípade je výhodou, ak je dimenzia kontextu rovná dimenzii vstupu, avšak ak by mali vstupné vektory veľkú dimenziu (napríklad bitmapy), tak by aj kontext mal veľkú dimenziu a v tomto prípade by bola výpočtová náročnosť vysoká a bolo by vhodnejšie použiť na tento typ úlohy SOM s iným druhom kontextu. Vo väčšine prípadov je však vďaka tejto vlastnosti tréning MSOM rýchlejší (výpočtovo menej náročný) a teda je možné experimentovať s väčším počtom neurónov, vyskúšať viac epoch tréningu, alebo použiť väčšie tréningové množiny. Cieľom našej práce je aj zistiť, či redukovaný kontext pri MSOM je postačujúci a či sme s ním schopní dosiahnuť podobné výsledky ako pri RecSOM, kde kontext tvorí aktivácia všetkých neurónov v sieti. Rozdielne typy kontextov a ich vplyv na pamäťovú hĺbku rekurentných neurónových sietí sú hlavným cieľom mojej diplomovej práce.

Kapitola 2

Práce zaoberajúce sa hĺbkou pamäti neurónových sietí

Do podobných prác sme vybrali vedecké články, ktoré sa zaoberajú rekurentnými neurónovými sieťami aj rekurentnými samoorganizujúcimi sa mapami. Nasledujúce dve práce sa zaoberajú vlastnosťami SRN sietí:

- **Graded State Machines: The Representation of Temporal Contingencies in Simple Recurrent Networks [8]**

Autori tejto práce analyzovali reprezentácie, ktoré sa vyvinuli v skrytom stavovom priestore SRN a zistili, že výstup siete v priebehu tréningu závisí od čoraz dlhších historických kontextov. Zistili tiež, že tento typ neurónovej siete si dokáže vo svojom stavovom priestore vytvoriť stavový automat alebo aj počítadlo.

- **Predicting the Future of Discrete Sequences from Fractal Representations of the Past [11]**

Autori tejto práce zistili, že SRN funguje podobne ako markovovský model s variabilnou dĺžkou (VLMM). To znamená, že sieť sa naučí kontexty dĺžky potrebnej pre správny výstup. Navrhli tiež tzv. fractal prediction machine, ktorou sa inšpirovali v práci Markovian architectural bias of recurrent neural networks [10], v ktorej autori vytvorili neural prediction machine z nanatrénovanej SRN. Neural prediction machines využívajú fraktálovú vlastnosť SRN, to znamená, že postupnosti so spoločným postfixom zobrazujú blízko seba vo svojom stavovom priestore. Zaujímavosťou je, že takúto vlastnosť má dokonca aj nenatrénovaná sieť, čo sa nazýva architectural bias.

Doteraz sme sa zaoberali prácami, ktoré sa zaoberali vlastnosťami SRN. Ako poslednú uvádzame prácu, ktorá sa zaoberá RecSOM a jej vlastnosťami:

- **Recursive Self-organizing Map as a Contractive Iterative Function System [12]** Autori tejto práce analyzovali RecSOM a zistili, že za určitých špecifických podmienok má, podobne ako SRN, takisto fraktálovú organizáciu. Odvodili vzorec pre maximálnu hodnotu α parametra (rovnica 1.22), pri ktorej je táto vlastnosť garantovaná.

Kapitola 3

Návrh riešenia

Na to aby sme boli schopní merať a porovnávať pamäťovú hĺbku sietí, museli sme si zvoliť vhodné tréningové dáta, zadať si spôsob merania pamätej hĺbky, sietí a tiež spôsob vyhodnocovania výsledkov.

3.1 Pamäťová hĺbka neurónovej siete

Hĺbka pamäte vyjadruje dĺžku historického kontextu, ktorý má ešte vplyv na aktuálny výstup siete. Ak je hĺbka pamäte N , vstupy v čase menšom ako $(T - N)$ nemajú vplyv na výstup siete v čase T .

3.2 Určovanie hĺbky pamäte rekurentnej SOM

Hĺbku pamäte pre konkrétny neurón v sieti určíme ako dĺžku najdlhšej spoločnej postfixovej podpostupnosti znakov v množine histórii posuvných okien neurónu, pre ktoré bol neurón víťazom. Dĺžku najdlhšej podpostupnosti budeme určovať od konca sekvencií v množine. Pamäťovú hĺbku celej siete následne určíme ako vážený priemer nameraných pamäťových hĺbok jednotlivých neurónov, kde váha pamätej hĺbky neurónu bude určená počtom podpostupností uložených v pamäťovom okne neurónu. (teda koľko krát bol neurón víťazom počas tréningovania). Neuróny, ktoré neboli víťazom pre žiadny vstup (majú prázdne pamäťové okno) sa do celkovej pamätej hĺbky nezapočítavajú, čiže nemajú žiadny vplyv na pamäťovú hĺbku siete. Neuróny, ktoré boli víťazom iba pre jeden vstup, majú pamäťovú hĺbku rovnú dĺžke uloženej sekvencie, čiže dĺžke pamäťového okna na tréningovej množine. Vo výslednej pamätej hĺbke majú mať však takéto neuróny, ktoré boli víťazom iba pre jeden vstup, nízku váhu oproti ostatným neurónom. Preto priemer pamäťových hĺbok jednotlivých neurónov musí byť vážený, aby neuróny, ktoré boli víťazmi pre väčší počet vstupov mali vyššiu váhu vo výslednej pamätej hĺbke siete, ako neuróny, ktoré boli víťazmi pre menší

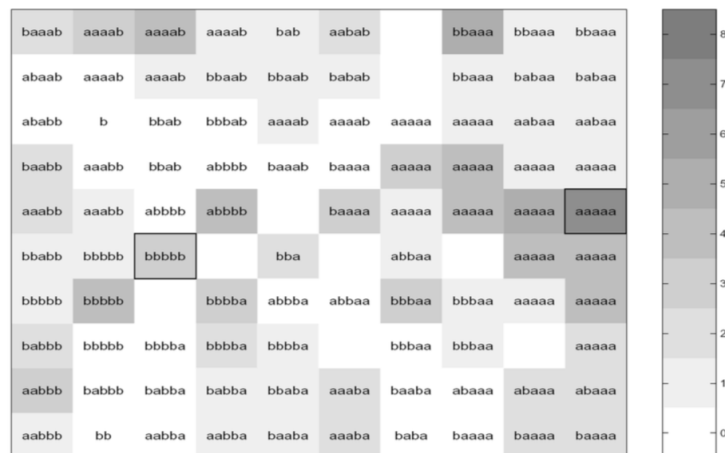
počet vstupov. Po každej tréningovej epoche (prechode tréningovou množinou) budeme vedieť určiť veľkosť pamäťovej hĺbky mapy.

Vďaka tomu, že neuróny rekurentných sietí majú okrem normálnych váh aj kontextové váhy a samotný kontext, ktoré uchovávajú informácie z predchádzajúcich krokov, môže sa stať, že rovnaké písmeno zo vstupnej sekvencie bude mať rôzne víťazné neuróny počas tréningovania. Táto vlastnosť rekurentných SOM spôsobuje to, že majú pamäťovú hĺbku, ktorú dokážeme merať.

Samotná pamäťová hĺbka je relatívna a závisí aj od veľkosti posuvného okna (sliding window) na tréningovej množine. Veľkosť posuvného okna musí byť dostatočne veľká, väčšia ako maximálna nájdená dĺžka spoločnej postfixovej podpostupnosti pre nejaký neurón, ale zároveň nie príliš veľká, aby sme zbytočne neskreslovali výsledky neurónmi, ktoré boli víťazmi iba pre jeden vstup. Hľadanie optimálnej veľkosti posuvného okna je súčasťou nášho experimentu.

3.3 Metóda uchovávaní informácií v SOM

Na to aby sme boli schopní odmerať pamäťovú hĺbku SOM, potrebujeme si pamätať v jednotlivých neurónoch informáciu o tom, pre ktoré vstupy bol daný neurón víťazom. Každý neurón bude mať množinu vstupov, v ktorej si pamätá pre aký vstup bol počas tréningovania víťazom. Nestačí však ukladať iba samotný vstup, pretože by sme prišli o historický kontext pre daný vstup, ktorý je nevyhnutný pri určovaní pamäťovej hĺbky. Preto si neukladáme iba aktuálny vstup (aktuálne písmeno), ale k posledných písmen z tréningovej sekvencie. Toto sa nazýva posuvné okno (ang. sliding window) na vstupnej množine. Všetky takéto množiny spolu tvoria dokopy tzv. receptívne pole SOM. Po natréningovaní siete viem z týchto okien vytvoriť hitmapu, ktorá nám vizualizuje, pre ktoré vstupy (resp. posuvné okná) boli neuróny víťazmi.



Obr. 3.1: Ukážka hitmapy

3.4 Pamäťová hĺbka SRN s Elmanovou architektúrou

SRN s Elmanovou architektúrou sme chceli porovnať s rekurentnými SOM najmä z toho dôvodu, že má niektoré vlastnosti spoločné so SOM. Ak by sme odstránili výstupnú vrstvu, tak dostaneme architektúru rekurentnej SOM. Prekážkou je, že odmerať a hlavne porovnať pamäťovú hĺbku takejto siete s inými sieťami nie je jednoduché, keďže má úplne odlišnú architektúru. Pokúšali sme sa nájsť spôsob ako odmerať pamäťovú hĺbku takejto siete. Navrhli sme riešenie, pomocou ktorého vieme vizualizovať vzdialenosti medzi stavmi na kontextovej vrstve siete, ale na základe týchto informácií sme nedokázali rozumne kvantifikovať pamäťovú hĺbku takejto siete a teda ani ju porovnať s rekurentnými SOM.

3.5 Výber vhodných trénovacích dát

Trénovacie sekvencie sú tvorené písmenami anglickej abecedy (26 písmen). Spoločnou vlastnosťou týchto trénovacích sekvencií je, že sú tvorené/generované určitým nenáhodným spôsobom (obsahujú napríklad opakujúce sa podsekvencie) a teda môžeme na nich trénovať rekurentné neurónové siete. Inými slovami dokážu v nich rekurentné neurónové siete zachytiť určité vzory a opakovania, ktoré si pamätajú vo svojom kontexte. Samotné vstupy (trénovacie príklady) pre sieť sú kódované jednotlivé písmená z trénovacej sekvencie. Keďže neurónové siete vedia najlepšie pracovať s vektormi číselných hodnôt, jednotlivé vstupné znaky zo vstupnej sekvencie kódujeme počas trénovania do 26 prvkového vektora metódou one-hot, a teda jeho prvky sú nuly a jednotka (pre každé písmeno je jednotka na unikátnej pozícii). Napríklad písmeno A bude reprezentované vektorom $[1, 0]$, písmeno B vektorom $[0, 1, 0]$ atď. ktorý bude na vstupe neurónovej siete. Tento spôsob reprezentácie vstupov pre sieť je jednoduchý a siete s ním vedú dobre pracovať.

3.6 Návrh experimentu

Experiment sme rozdelili na 2 hlavné časti. Prvá časť experimentu sa venuje meraniu pamätevej hĺbky rekurentných SOM a hľadanie optimálnych parametrov, pri ktorých dosahujú najvyššie hodnoty pamäťových hĺbok.

V tejto časti sa venujeme tiež analýze výsledkov a hľadaniu súvislostí medzi veľkosťou pamätevej hĺbky a hodnotami parametrov. Na záver sme spravili porovnanie pamäťových hĺbok všetkých testovaných typov rekurentných SOM s použitím optimálnych

váh a fixnou inicializáciou váh. V druhej časti experimentu sa venujeme pokusu s SRN a vizualizácii vnútorných stavov siete vo forme dendogramu a vyhodnoteniu výsledkov.

Experiment so rekurentnými SOM prebieha nasledujúcim spôsobom:

- Výber vhodnej trérovacej sekvencie, počtu epôch trénovania a vhodnú veľkosť pamäťového okna
- Trénovanie siete na všetkých kombináciach týchto dvoch parametrov
- Ukladanie hodnot pamäťovej hĺbky a kvantizačných chýb do súboru
- Vykreslenie heatmapy, ktorá znázorňuje aká bola pamäťová hĺbka pre rôzne kombinácie parametrov.
- Testovanie pamäťovej hĺbky sietí s optimálnymi parametrami na rôznych trérovacích dátach.
- Vyhodnotenie a analýza výsledkov

Kapitola 4

Implementácia

4.1 Implementácia neurónových sietí

Pre potreby merania pamätevej hĺbky sme potrebovali veľmi modifikované implementácie neurónových sietí, preto sme sa rozhodli pre ich vlastnú implementáciu. Vlastná implementácia nám umožnila experimentovať s rôznymi typmi kontextov a rôznymi spôsobmi trénovania sietí, čo s existujúcimi implementáciami bolo veľmi nepraktické a v istých prípadoch nemožné. Medzi špeciálne prípady patrí napríklad použitie modifikovaných kontextov, úprava excitačnej funkcie počas trénovania (zmenšovanie okolia), dynamické znižovanie rýchlosti učenia siete počas trénovania/po jednotlivých epochách trénovania, vytvorenie pamätevého okna v jednotlivých neurónoch a samotné meranie pamätevej hĺbky.

4.2 Voľba programovacieho jazyka

Ako implementačný jazyk sme zvolili Python pretože preň existuje veľké množstvo kvalitných knižníc pre prácu s maticami a vektormi, či vykresľovanie grafov. Python je veľmi populárny v oblasti strojového učenia. Ďalšou výhodou je jednoduché spustenie skriptov na linuxovom serveri, čo urýchľuje samotné trénovanie a hľadanie optimálnych parametrov a umožnilo nám otestovať veľké množstvo kombinácií rôznych parametrov.

4.2.1 Python

Python je interpretovaný vysokoúrovňový programovací jazyk. Python kladie dôraz na jednoduchosť a čitateľnosť programov, ktoré sú v ňom naprogramované. Je to jazyk, ktorý využíva dynamické typovanie a automatizovanú správu pamäte. Je to tiež multiplatformový jazyk a beží na všetkých bežne používaných platformách (Windows, Mac, Linux)

4.3 Použité knižnice a softvér

Používame štandardný set knižníc pre implementáciu neurónových sietí: `numpy`, `scipy`. Na vykresľovanie a vizualizáciu dát používame knižnice `matplotlib` a `seaborn`.

4.3.1 Numpy

Je knižnica, ktorá uľahčuje prácu s maticami, používaná je takmer všetkými existujúcimi knižnicami, ktoré implementujú modely strojového učenia v Pythone. Má vysokú úroveň optimalizácie a požíva veľmi optimalizované funkcie na prácu s maticami, ktoré sú naprogramované v jazyku C.

4.3.2 Matplotlib

Je knižnica na vykresľovanie grafov a vizualizáciu dát.

4.3.3 Seaborn

Je nadstavbou Matplotlib knižnice a zjednodušuje vykresľovanie rôznych grafov. V našej práci používame na vizualizáciu výsledkov našich experimentov.

4.3.4 MultiDendrograms

Jednoduchý program naprogramovaný v Jave, ktorý slúži na vykresľovanie dendrogramov z podobnostných matíc. Autorom je Sergio Gómez. V našej práci ho používame pri experimente s SRN sieťou na vizualizáciu súvislostí medzi vstupmi. <http://deim.urv.cat/~sergio.gomez/multidendrograms.php>

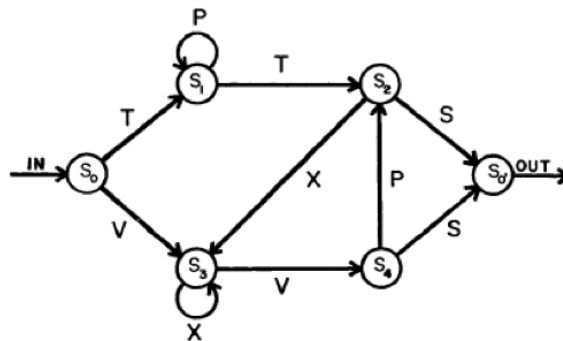
4.4 Algoritmus hľadania najdlhšej spoločnej postfixovej podpostupnosti viacerých reťazcov

Na hľadanie najdlhšej spoločnej podpostupnosti viacerých reťazcov som použil relatívne jednoduchý algoritmus. Na začiatku si inicializujeme veľkosť najdlhšej spoločnej podpostupnosti na nulu. V cykle prechádzame postupne všetky posuvné okná uložené v pamäťovom okne neurónu a kontrolujeme či sú znaky na i -tej pozícii od konca rovnaké. Ak áno inkrementujeme veľkosť najdlhšej spoločnej podpostupnosti. Ak nie, tak skončíme a vrátime veľkosť najdlhšej spoločnej podpostupnosti. V prípade, že pamäťové okno neurónu obsahuje iba jednu podpostupnosť, potom dĺžka najdlhšej podpostupnosti je rovná dĺžke uloženého posuvného okna. V prípade ak je pamäťové okno neurónu

prázdné, dĺžka najdlhšej spoločnej podpostupnosti je nulová. Tento algoritmus je jednoduchý a dostatočne efektívny pre meranie pamäťovej hĺbky testovaných sietí. Na rýchlosť tréovania má výpočet pamäťovej hĺbky iba minimálny vplyv.

4.5 Reberov automat

Na vytvorenie tréovacej množiny, ktorá pozostáva z reberových reťazcov sme si vytvorili vlastnú implementáciu pravdepodobnostného nedeterministického konečného reberového automatu, pomocou ktorého generujeme reberové reťazce. Každý stav okrem počiatočného a konečného stavu má práve dva prechody do ďalšieho stavu, pričom v každom stave je 50% šanca na prechod do jedného z možných stavov.



Obr. 4.1: Schéma reberovho automatu, Zdroj:<http://www.replicatedtypo.com/cultural-inheritance-in-studies-of-artifical-grammar-learning/3352.html>

4.6 Zdrojové kódy

Kompletné zdrojové kódy implementovaných neurónových sietí a výsledky je možno nájsť v repozitári: <https://github.com/jaroslavistok/NeuralNetsMemorySpan>.

Kapitola 5

Experiment

Experimentom v našej práci je meranie hĺbky pamäte a vyhodnotenie vplyvu rôznych hyperparametrov a typov kontextov na hĺbku pamäte rekurentných SOM. Cieľom nášho experimentu je aj nájdenie optimálnej kombinácie parametrov pre všetky typy porovnávaných sietí a ich vzájomné porovnanie.

5.1 Výber konkrétnych trénovacích množín pre experiment

Trénovacie množiny sme sa snažili zvoliť takým spôsobom aby sme na nich vedeli otestovať rôzne vlastnosti rekurentných sietí.

Pre náš experiment sme zvolili 3 trénovacie množiny:

- **abcd**

Hlavnou trénovaciou množinou, ktorú používame v našom experimente, je náhodne generovaná sekvencia dlhá 1000 znakov, ktorá pozostáva z písmen *abcd*. Táto sekvencia obsahuje dostatočné množstvo regularít a malé množstvo unikátnych znakov a teda aj siete s relatívne malým počtom neurónov sa na nej vedia dobre natrénovať. Používame ju pri hľadaní optimálnych parametrov pre jednotlivé typy sietí.

- **reber**

Ako druhú trénovaciu množinu sme zvolili sekvenciu dlhú 1000 znakov, pričom znaky sú generované špeciálnym pravdepodobnostným stavovým automatom (Reberov automat). Automat generuje znaky z množiny znakov *ptvxse*. Táto sekvencia je pre SOMky ťažšia na naučenie a používame ju na overenie toho, či sú siete schopné natrénovať sa aj na zložitejších nenáhodných sekvenciách. Pri SRN je použitie tejto trénovacej množiny zaujímavejšie, vďaka vlastnostiam, ktoré SRN má.

- **corpus**

Tretí dataset je úryvok z korpusu anglického textu dlhý 1000 znakov, z ktorého sú odstránené špeciálne znaky a medzery. Keďže ide o reálny zmysluplný text, nie je to úplne náhodná postupnosť znakov, ale obsahuje určité vzory a opakovania, ktoré by siete mohli vedieť zachytiť vo svojej vnútornej reprezentácii. Tento dataset používame čisto iba na overenie, či sú SOMky schopné zachytiť vzory aj v prirodzenom jazyku a teda či sú použiteľné aj pre reálne dáta.

5.2 Hľadanie optimálnych parametrov sietí

Na to aby sme mohli porovnať hĺbku pamäte rôznych typov sietí museli sme najskôr nájsť kombináciu parametrov pri ktorých daný typ siete dosahuje najnižšiu kvantizačnú chybu a najvyššie hodnoty pamäťových hĺbok.

Počas tréovania samoorganizujúcich sa máp môžeme meniť a optimalizovať veľké množstvo parametrov.

Ako prvé sme museli správne nastaviť veľkosť okolia víťazného neurónu. Veľkosť okolia by nemala byť počas tréovania konštantná, ale mala by sa po každej epoche zmenšovať. Vo fáze doľadovania by mala byť čo najmenšia. Excitáciu neurónu v určitom kroku tréovania určuje excitačná funkcia. Zvolili sme spojitú excitačnú funkciu so spojitým gausovským okolím.

$$N(i^*, i) = \exp -\frac{d_E^2(i^*, i)}{\lambda^2(t)} \quad (5.1)$$

Najvyššiu hodnotu má excitačná funkcia pre víťazný neurón, hodnota excitačnej funkcie pre ostatné neuróny v sieti závisí od ich euklidovskej vzdialenosti v mriežke neurónov od ich víťaza. Veľmi vzdialené neuróny majú takmer nulovú excitáciu a updatujú svoje váhy minimálne. Dôležitý je parameter λ , ktorým znižujem veľkosť okolia postupne v jednotlivých epochách. Najlepšie výsledky (najnižšie hodnoty kvantizačnej chyby) sme dosiahli pri použití nasledujúceho vzťahu pre výpočet hodnoty tohto parametra v jednotlivých epochách:

$$\lambda(t) = \lambda_i \cdot (\lambda_f / \lambda_i)^{t / t_{max}} \quad (5.2)$$

Kde λ_f je konštanta, ktorá určuje rýchlosť klesania. λ_i je polovica maximálnej vzdialenosti dvoch neurónov v mape, resp. vzdialenosť dvoch neurónov na koncoch diagonály mriežky neurónov. t je číslo aktuálnej epochy tréovania. Parametrer t_{max} je celkový počet epôch tréovania.

Ďalšie parametre:

- **Rýchlosť učenia**

Rovnako ako okolie aj rýchlosť učenia siete by mala počas procesu tréovania postupne klesať. Na začiatku chceme aby sa váhy menili čo najviac a ku koncu učenia chceme aby sa doladovali iba detaily. Máme na výber 2 možnosti. Postupné znižovanie rýchlosti učenia po každom vstupe, alebo postupné znižovanie rýchlosti učenia po jednotlivých epochách, pričom počas každej epochy je rýchlosť učenia konštantná. V našich experimentoch sme dosiahli o niečo lepšie výsledky postupným znižovaním rýchlosti učenia po jednotlivých epochách. Na začiatku tréovania je veľkosť okolia nastavená na polovicu dĺžky diagonály a počas tréovania sa postupne znižuje. Hodnoty rýchlosti učenia máme z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

- **Veľkosť posuvného okna**

Vhodnú veľkosť posuvného okna sme určili postupným zvyšovaním jeho veľkosti pokiaľ pamäťová hĺbka stúpala. Zaujímavosť, ktorú sme zistili počas experimentovania s veľkosťou pamäťového okna, bolo že ak zvolíme príliš veľké posuvné okno, výsledná pamäťová hĺbka môže byť mierne skreslená. Pri veľkom pamäťovom okne nám môžu neuróny, ktoré majú vo svojom pamäťovom okne uloženú iba jednu sekvenciu skreslovať výslednú pamäťovú hĺbku, pretože pamäťová hĺbka takýchto neurónov je rovná veľkosti posuvného okna. Z tohto dôvodu nie je dobré nastaviť veľkosť pamäťového okna na príliš veľkú hodnotu, ale treba zvoliť optimálnu hodnotu.

- **Počet neurónov a počet epôch tréovania**

Rozmery mapy a počet tréovacích epôch sme zvolili na základe vlastností zvolenej tréovacej množiny. Tiež sme museli brať do úvahy aj časovú náročnosť tréovania sietí (najmä pri RecSOM). Potrebovali sme aby sa sieť dokázala správne natréovať na danej tréovacej množine a zároveň, aby nám experimenty dobehli v rozumnom čase. Keďže SOMky sa dokážu natréovať relatívne rýchlo, zvolili sme väčšie rozmery mapy (30x30) a o niečo nižší počet tréovacích epôch (10). S touto kombináciou sme dosiahli nízke hodnoty kvantizačných chýb a dobré hodnoty pamäťových hĺbok.

Pri určovaní vhodnej veľkosti siete je to vždy kompromis medzi rozlišovaciu schopnosťou jednotlivých vstupov, schopnosťou zachovať podobné vstupy topologicky čo najbližšie pri sebe a výpočtovou náročnosťou. SOMky sa tréujú relatívne rýchlo, preto sme nemuseli použiť veľký počet epôch. Pre naše experimenty sme použili tréovanie s 10-timi epochami.

- **Inicializácia váh**

Váhy aj kontextové váhy sietí sú počas experimentov inicializované náhodnými hodnotami z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s normálnym rozdelením.

5.2.1 Parametre pre RecSOM

Pri RecSOM kontext tvorí vektor aktivít neurónov z predchádzajúceho kroku. Aktivita neurónu y je určená vzťahom:

$$y_i = \exp(-d_i) \quad (5.3)$$

Neobsahuje žiadny meniteľný parameter. Hodnota d_i je súčet vzdialenosti vstupného vektora od váhového vektora a kontextového vektora od kontextového vektora. So znižujúcou sa vzdialenosťou excitácia neurónu rastie exponenciálne, čo znamená, že víťaz a susedné neuróny budú mať najvyššiu excitáciu a vzdialené neuróny budú mať malú excitáciu. Výpočet kontextu pri RecSOM nevieme ovplyvňovať žiadnym parametrom.

Môžeme však meniť parameter α , ktorý sa používa pri samotnom výpočte vzdialenosti vstupu od váhového vektora a kontextu od kontextového vektora. Tento parameter určuje váhu aktuálneho vstupu a váhu kontextu vo výslednej vzdialenosti. Nepotrebuje extra parameter β namiesto $(1 - \alpha)$, pretože matematicky sú týmto spôsobom zahrnuté všetky kombinácie týchto dvoch parametrov.

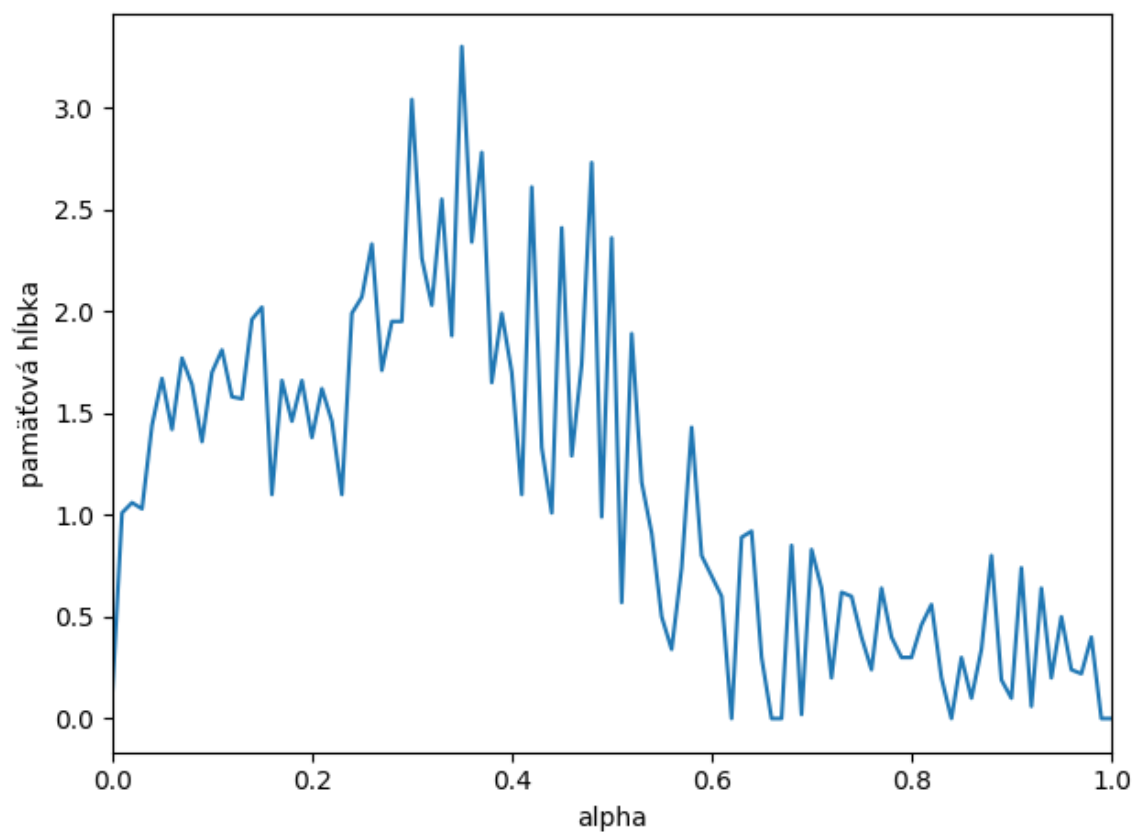
$$d_i = (1 - \alpha) \cdot \|x(t) - w_i\|^2 + \alpha \cdot \|y(t - 1) - c_i\|^2 \quad c_i \in R^N \quad (5.4)$$

V našich experimentoch sme testovali všetky hodnoty parametra α z uzavretého intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokom 0.01 (dokopy 100 experimentov). Veľkosť pamäťového okna sme nastavili na hodnotu 10.

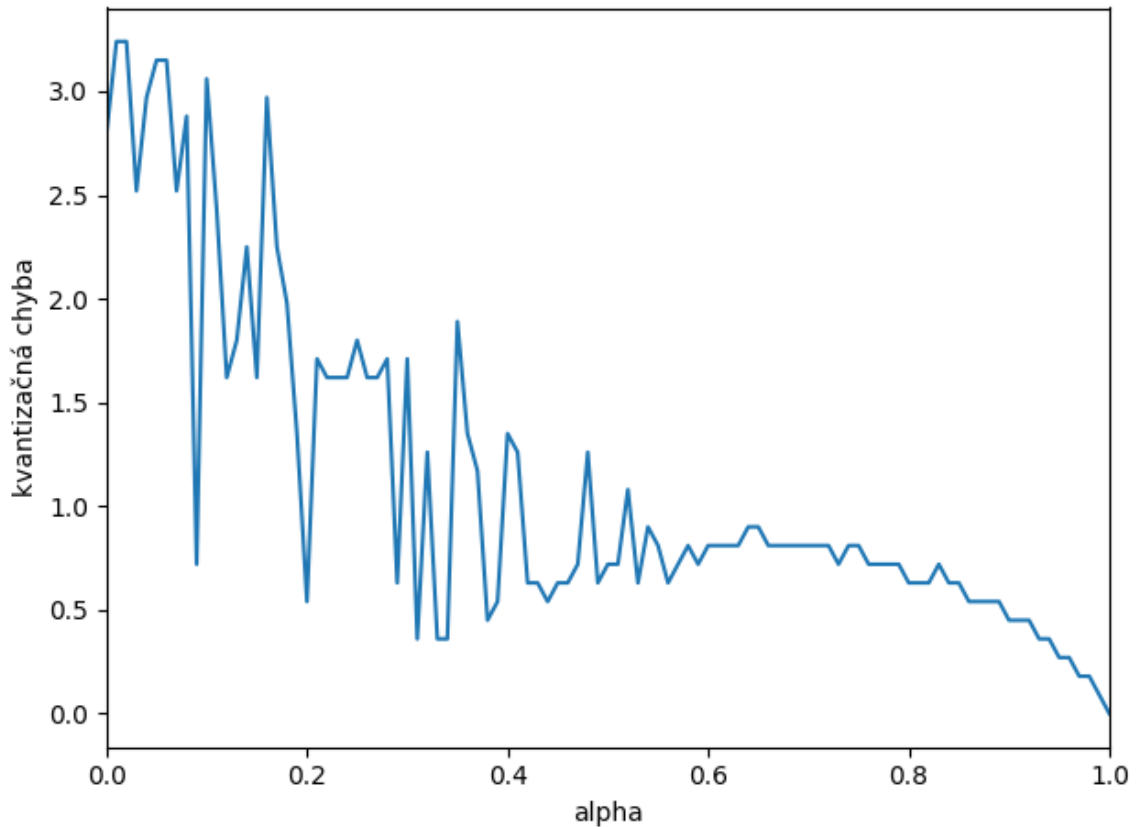
5.2.2 Výsledky pre RecSOM

Parameter	Hodnota
Hodnoty alpha	0 - 1 (krok: 0.01)
Rozmer	30x30
Počet epôch tréovania	20
Veľkosť posuvného okna	10

Tabuľka 5.1: Trénovacie parametre RecSOM siete



Obr. 5.1: RecSOM hodnoty pamětových hloubek



Obr. 5.2: RecSOM hodnoty kvantizačných chýb

5.2.3 Analýza výsledkov RecSOM

Na x-ovej osi sú hodnoty parametra β a na y-ovej osi sú hodnoty parametra α . Keďže pri RecSOM máme iba jeden parameter, na vizualizáciu pamäťových hĺbok sme použili jednoduchý graf 5.1 hodnôt pamäťovej hĺbky pre rôzne hodnoty parametra α . Krivka zobrazuje hodnoty pamäťových hĺbok na konci poslednej epochy pre určitú hodnotu parametra α . RecSOM dosiahla najvyššiu hodnotu pamäťovej hĺbky 3.3 pri hodnote parametra $\alpha = 0.35$. Na grafe 5.1 je možno vidieť, že vysoké hodnoty pamäťovej hĺbky sieť dosahuje pri hodnotách $\alpha \in \langle 0.3, 0.4 \rangle$. Nízku pamäťovú hĺbku sieť dosahuje pri hodnotách parametra $\alpha > 0.6$. Nulovú hodnotu pamäťovej hĺbky RecSOM dosiahla keď je $\alpha = 0$, resp. $\alpha = 1$, čiže keď nepracuje s kontextom, alebo s aktuálnymi vstupmi. Toto sú extrémne prípady, kedy je sieť deformovaná. Graf kvantizačných chýb (5.2) nám ukazuje, že sieť sa najlepšie učí pri vysokých hodnotách parametra α , čiže v prípadoch, keď má kontextová zložka vzdialenosti vysokú váhu vo výpočte vzdialenosti. So zväčšovaním parametra α , teda váhy kontextu, klesá aj kvantizačná chyba. Kvantizačné chyby sú v priemere nízke, čo značí, že sieť sa trénovala správne. Pri najmenších hodnotách kvantizačnej chyby má sieť nízku pamäťovú hĺbku. RecSOM dosiahla v našom experimente iba priemerné až podpriemerné výsledky. Sieť dosahuje v priemere nízke

hodnoty pamäťových hĺbok, navyše jej tréňovanie je pomalé v porovnaní s MSOM pri nízkodimenzionálnych vstupoch, kvôli veľkosti kontextu. Keď vezmeme do úvahy, že najvyššie hodnoty pamäťovej hĺbky sieť dosiahla pri hodnotách $\alpha \in (0.3, 0.4)$ a naopak najnižšie hodnoty pamäťovej hĺbky dosiahla pri vysokých hodnotách $\alpha > 0.6$ pričom hodnota α ovplyvňuje váhu kontextu vo výpočte vzdialenosti, môžeme usudzovať, že priveľká váha kontextu znižuje pamäťovú hĺbku RecSOM a zároveň znižuje kvantizačnú chybu, teda sieť sa lepšie učí ale stráca schopnosť pracovať s minulými vstupmi. Ako uvidíme v ďalších experimentoch, čím má sieť vyššiu hĺbku pamäti, tým má aj vyššiu kvantizačnú chybu. Príčinou môže byť rozdiel v dimenziách váhových vektorov a kontextových vektorov. Kontextové vektory majú v našom prípade omnoho vyššiu dimenziu (600) ako váhové vektory (26) a teda kontextová zložka vzdialenosti má prirodzene vyššie hodnoty, čo negatívne ovplyvňuje pamäťovú hĺbku siete pri vysokých hodnotách parametra α . Tento rozdiel môže byť aj príčinou toho, že kvantizačná chyba klesá s väčšou váhou kontextu. Ako keby sa učili iba kontextové váhy.

Ukážka receptívneho poľa RecSOM siete poli siete pre parametre s hodnotami $\alpha = 0.35$ po poslednej tréningovej epoche na tréningovej množine „abcd“:

```
[ '20 '3 ' 'bbbcccbbaa1 '..... ]
[ 'cbdadcceaa1 ' 'bdadcceaaa1 '..... 'cccbbbaaba1 '..... ]
[ 'bccbbabaca1 '..... ]
[ ..... ]
[ ..... 'accdacaddd1 '..... 'acabdcdadd1 '.. ]
[ ..... '4 ' 'baccdacadd1 '..... ]
[ ..... 'bbccccbbaaa1 '..... 'dcdaaacbaa1 '..... ]
[ ..... 'aaa3 ' 'dcddadbdba1 '..... 'aa2 '..... ]
[ ..... 'adddbbaabd1 ' . 'cbaadcddbb1 '..... 'cadddbbaab1 ' 'bb2 '.... ]
[ ..... 'abcdcdadbd1 ' 'dd2 '..... ]
[ ..... ]
[ ..... ]
[ ..... 'ddbbaabdbb1 '..... ]
[ ..... ]
[ ..... ]
[ ..... ]
[ ..... ]
[ ..... ]
[ ..... ]
[ 'bdbabaabcc1 ' 'dbabaabccb1 '..... 'aadabdcecc1 '.... ]
[ ... 'bb2 ' 'baabdbbcac1 '..... 'cc2 ' 'bbcacbbbcc1 '.. ]
[ ..... '4 ' . ]
```

```
[ ..... ' acaadabdcc1 ' ' badcbdacdc1 ' '5 '.]
[ '4 ' .....]
[ ..... '7 '... ]
[ ..... 'aaa3 '.. ' bdcbaccdac1 ' ]
[ ..... ' ccaaaacaca1 ' .]
[ .....]
[ ..... 'aa2 ' ]
[ ..... 'ccc3 '..... ]
[ ..... 'bb2 '.. ' acbaadcddb1 ' 'aacbaadcdd1 '.. '3 '..... ]
```

Políčka s číslami označujú neuróny, ktorých pamäťové okno obsahuje uložené sekvencie (ktoré boli víťazmi pre nejaký vstup), ale nemajú žiadnu spoločnú podpostupnosť. Zvyšné políčka zobrazujú najdlhšiu spoločnú podpostupnosť spoločne s celkovým počtom podpostupností v danom pamäťovom okne neurónu. Na receptívnom poli môžeme dobre vidieť ako sieť rozmiestňuje posuvné okná medzi jednotlivé pamäťové okná neurónov. Konkrétne v tomto prípade bola výsledná hodnota pamäťovej hĺbky siete 3.67.

5.2.4 Activity RecSOM

Pri obyčajnej verzii RecSOM nevieme ovplyvniť žiadnym parametrom výpočet a vlastnosti kontextu. Preto sme sa rozhodli vytvoriť si modifikovanú verziu RecSOM. Rozdiel oproti pôvodnej verzii je v spôsobe počítania aktivácie neurónov v kontexte. Upravili sme pôvodný vzorec

$$y_i = \exp(-d_i) \quad (5.5)$$

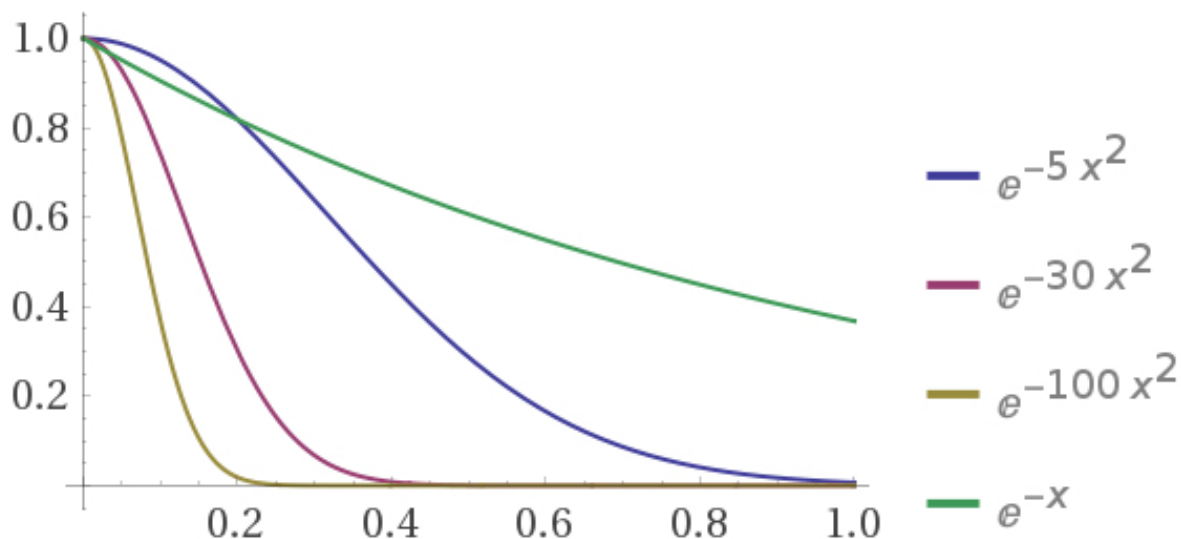
tak aby obsahoval parameter β .

$$y_i = \exp(-\beta \cdot d^2) \quad (5.6)$$

Hodnota d^2 je umocnená euklidovská vzdialenosť neurónu v mriežke od víťazného neurónu. Na výpočet aktivity neurónu teda používame gaussovskú funkciu, ktorej „strmosť“ ovplyvňujeme pomocou β parametra. To znamená, že ovplyvňujeme rozdiely medzi hodnotami aktivácie víťazného neurónu a susedných neurónov. Táto funkcia je podobná funkcii susednosti, ktorá sa používa počas tréovania.

Pre malé hodnoty parametra β hodnoty aktivácie neurónov so stúpajúcou vzdialenosťou od víťaza klesajú pomaly.

Čím je β parameter väčší tým je táto funkcia strmšia (väčší skok), čo znamená, že víťaz bude mať výrazne vyššiu hodnotu aktivácie ako neuróny, ktorých vzdialenosť d od vstupu a kontextu je vyššia.



Obr. 5.3: Grafy priebehu funkcií na výpočet aktivácií neurónov v Activity RecSOM

Na grafe je možno vidno rozdiely v priebehoch tejto funkcie s rôznymi hodnotami parametra β . Zelenou je vyznačený priebeh funkcie aktivácie, ktorý je používaný v pôvodnej RecSOM.

Samotnú hodnotu aktivácie sme chceli ešte normalizovať sumou všetkých aktivácií:

$$y_i = \frac{\exp(-\beta \cdot d_i^2)}{\sum_j \exp(-\beta \cdot d_j^2)} \quad (5.7)$$

Pri použití normalizácie sme dostávali signifikantne horšie výsledky ako bez použitia normalizácie. Dôvodom bolo pravdepodobne to, že vychádzali veľmi malé hodnoty aktivácií a rozdiely medzi jednotlivými hodnotami boli veľmi malé. Z tohto dôvodu sme zostali pri pôvodnej nenormalizovanej verzii.

V prípade ak je hodnota aktivácie normovaná, potom môžeme túto hodnotu interpretovať aj ako bayesovskú pravdepodobnosť: Aktivita neurónu vyjadruje bayesovskú pravdepodobnosť, že vstup zodpovedá reprezentácii vo váhach daného neurónu.

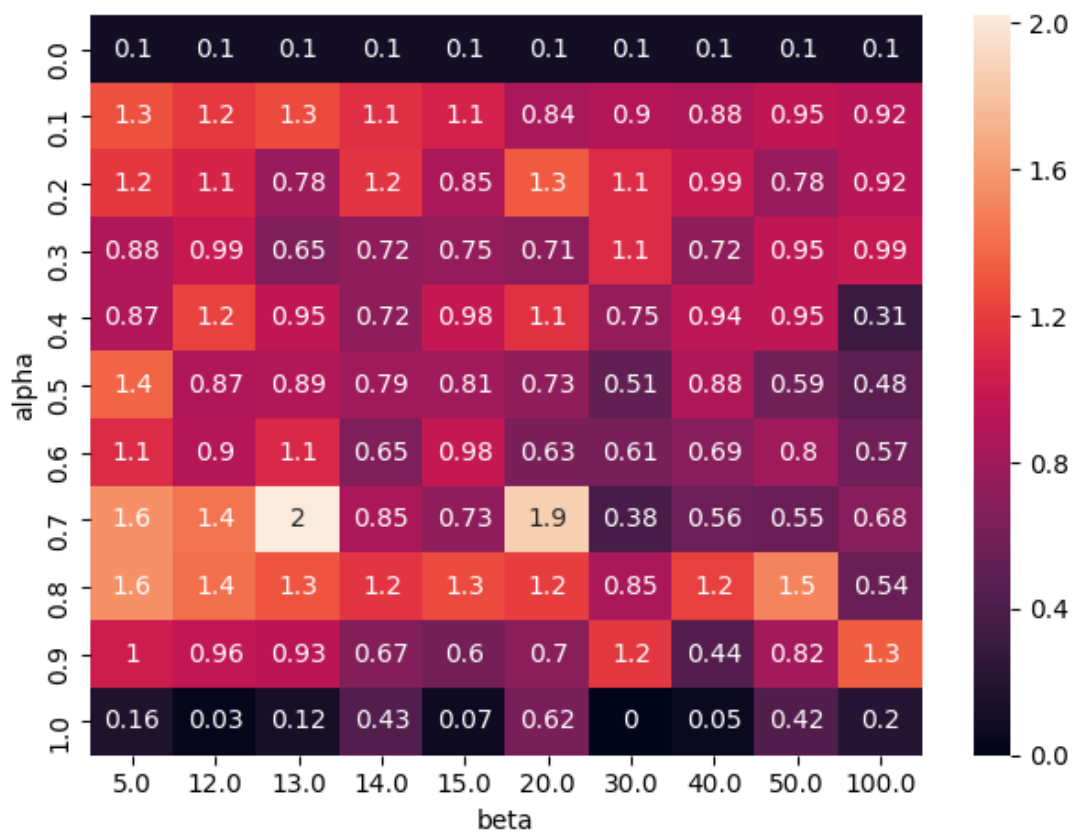
5.2.5 Activity RecSOM parametre

V našom experimente sme vyskúšali kombinácie parametrov α a β . Hodnoty parametra α sme zvolili z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokom 0.1. Hodnoty parametra β sme zvolili tak aby sme otestovali rôzne strmosti aktivačnej funkcie. Konkrétne sme použili tieto hodnoty: [5.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 20.0, 30.0, 40.0, 50.0, 100.0]. Pustili sme tréning na všetkých kombináciach parametrov α a β .

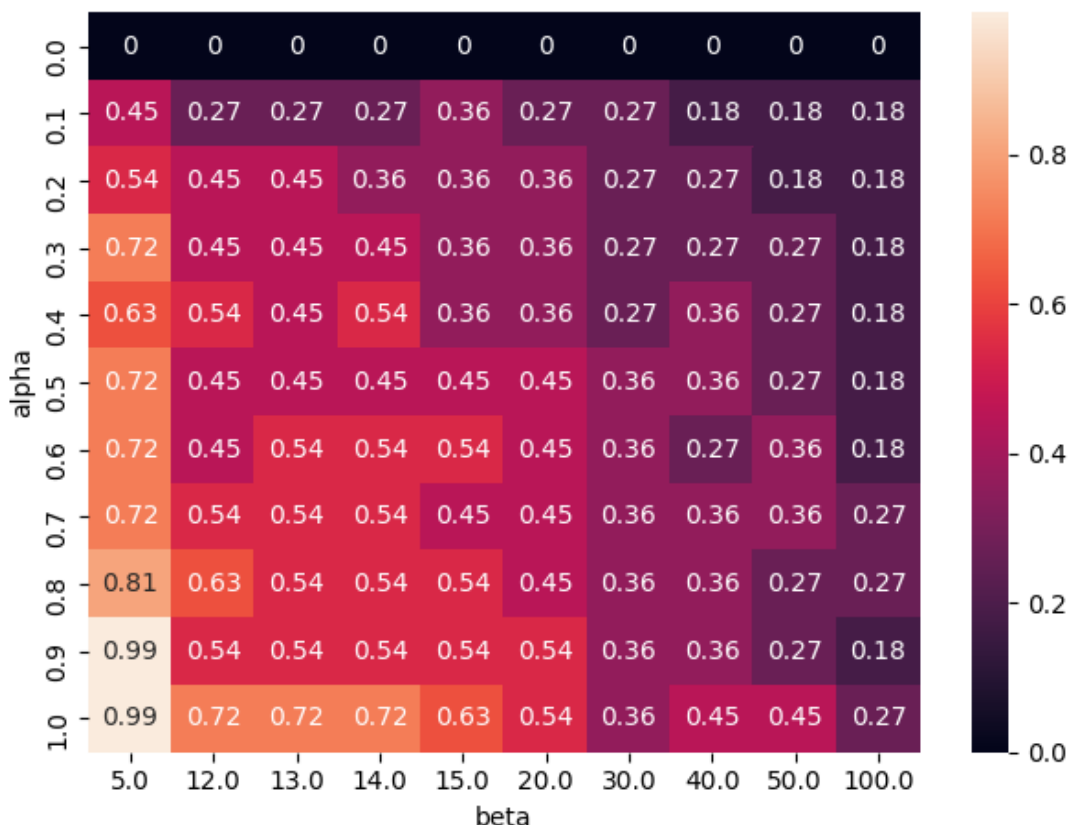
Parameter	Hodnota
Hodnoty alpha	0 - 1 (krok 0.1)
Hodnoty beta	[5.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 20.0, 30.0, 40.0, 50.0, 100.0]
Veľkosť	30x30
počet epôch tréovania	20
veľkosť posuvného okna	10

Tabuľka 5.2: Parametre Activity RecSOM siete

5.2.6 Výsledky pre Activity RecSOM



Obr. 5.4: Activity RecSOM hodnoty pamäťových hĺbok



Obr. 5.5: Activity RecSOM hodnoty kvantizačných chýb

5.2.7 Analýza výsledkov Activity RecSOM

Na x-ovej osi sú hodnoty parametra β a na y-ovej osi sú hodnoty parametra α . Na grafe pamäťových hĺbok 5.4 pre Activity RecSOM môžeme vidieť, že sieť dosahuje maximálnu pamäťovú hĺbku pri hodnotách parametrov $\alpha = 0.7a\beta = 13.0$. Najnižšiu pamäťovú hĺbku sieť dosiahla pri hodnote parametrov $\alpha = 1.0a\beta = 30.0$, čo je špeciálny prípad kedy sieť nepracuje s aktuálnym vstupom a teda sa nevie správne natrénovať. Activity RecSOM dosahuje v priemere o niečo nižšie hodnoty pamätevej hĺbky ako RecSOM. Na grafe kvantizačných chýb 5.5 môžeme vidieť, že sieť sa najlepšie trénuje, keď je hodnota parametra α nízka a hodnota parametra β vysoká. Čiže keď je vplyv kontextu nízky, tak sa sieť lepšie trénuje. Keď porovnáme kvantizačnú chybu s obvyčajnou RecSOM tak Activity RecSOM má nižšie hodnoty kvantizačnej chyby. Našou modifikáciou RecSOM sme síce nedosiahli vyššie hodnoty pamätevej hĺbky, ale znížili sme kvantizačnú chybu siete. Zvyšovanie hodnoty β parametra teda znižuje kvantizačnú chybu siete, čiže schopnosť siete správne sa natrénovať. Pri vyšších hodnotách parametra β majú neuróny blízke víťazovi výrazne vyššiu hodnotu aktivácie vďaka strmšiemu priebehu funkcie na výpočet aktivácie. Inými slovami, informácie uložené v kontexte sú viac sústredené na aktivitu víťazného neurónu. Podobne ako pri RecSOM

rozdiel medzi dimenziami váhových vektorov (26) a kontextových vektorov (400) je veľký a vzdialenosť medzi kontextom a kontextovým vektorom je vo výpočte vzdialenosti je kvôli tomu vyššia. Vyššie hodnoty parametra β spôsobujú, že aktivita väčšiny neurónov v sieti je blízka nule (aktivita je sústredená na víťazný neurón a zvýšené majú aktivity blízke nule), čo znižuje aj hodnotu vzdialenosti medzi kontextovými váhami a kontextom a teda klesá aj kvantizačná chyba. Inými slovami nepomer medzi dimenziou kontextu siete a dimenziou vstupu sa znižuje.

Dimenzionálny rozdiel medzi vstupom a kontextom je pravdepodobne jednou z príčin toho, že RecSOM a Activity RecSOM dosahujú nižšie hodnoty pamäťovej hĺbky ako MSOM a Decay MSOM, ako uvidíme v ďalších experimentoch.

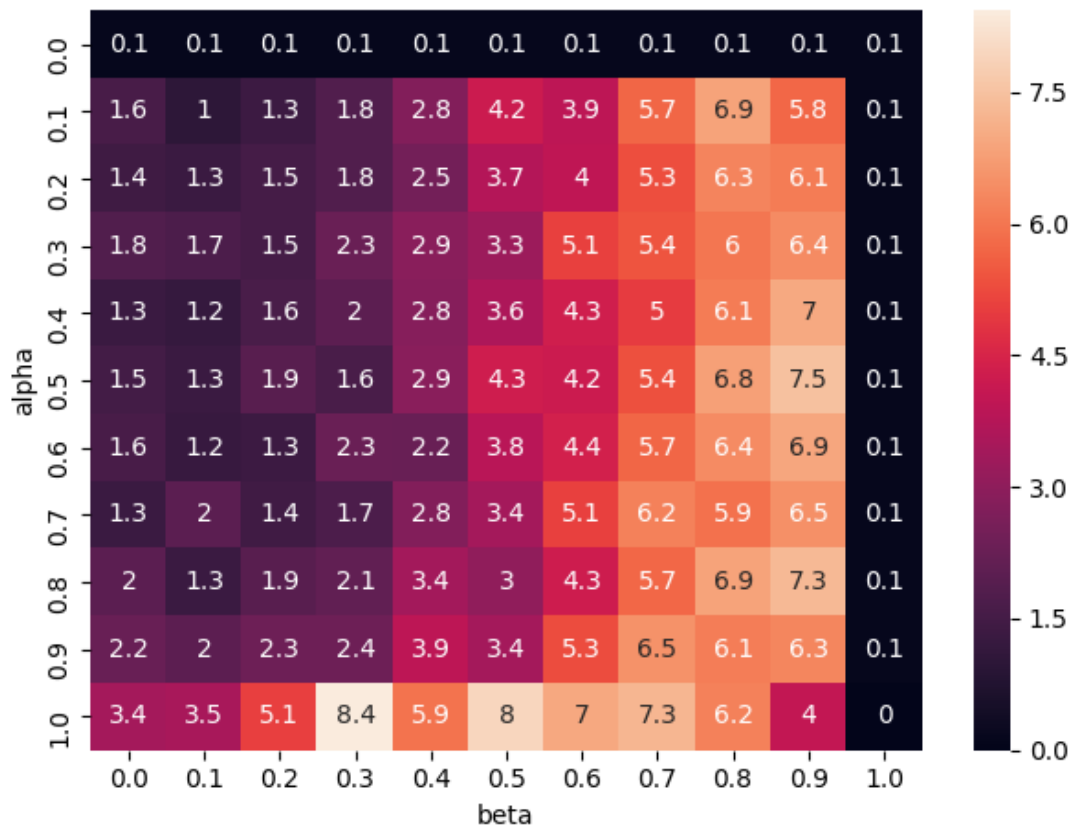
5.2.8 MSOM parametre

Pri MSOM máme okrem α parametra, používaného pri výpočte vzdialenosti, opäť aj β parameter, ktorý určuje váhu váhového vektora víťaza z predchádzajúceho kroku w_{i^*} a váhu kontextu z predchádzajúceho kroku y_{i^*} pri výpočte kontextu. Je nazývaný aj ako "zmiešavací" parameter a určuje váhu jednotlivých zložiek vlastností víťazného neurónu v kontexte. V našom experimente skúsime všetky kombinácie α a β parametrov. Hodnoty pre oba parametre sú z uzavretého intervalu $< 0, 1 >$ s krokom 0.1 (100 experimentov). Pri experimentovaní s MSOM sa snažíme zistiť aký vplyv má odlišný kontext, ktorý obsahuje iba informáciu o víťazovi z predchádzajúceho kroku, na pamäťovú hĺbku siete. MSOM má veľkú výhodu v signifikantne vyššej rýchlosti učenia, vďaka zredukovanej dimenzii kontextu.

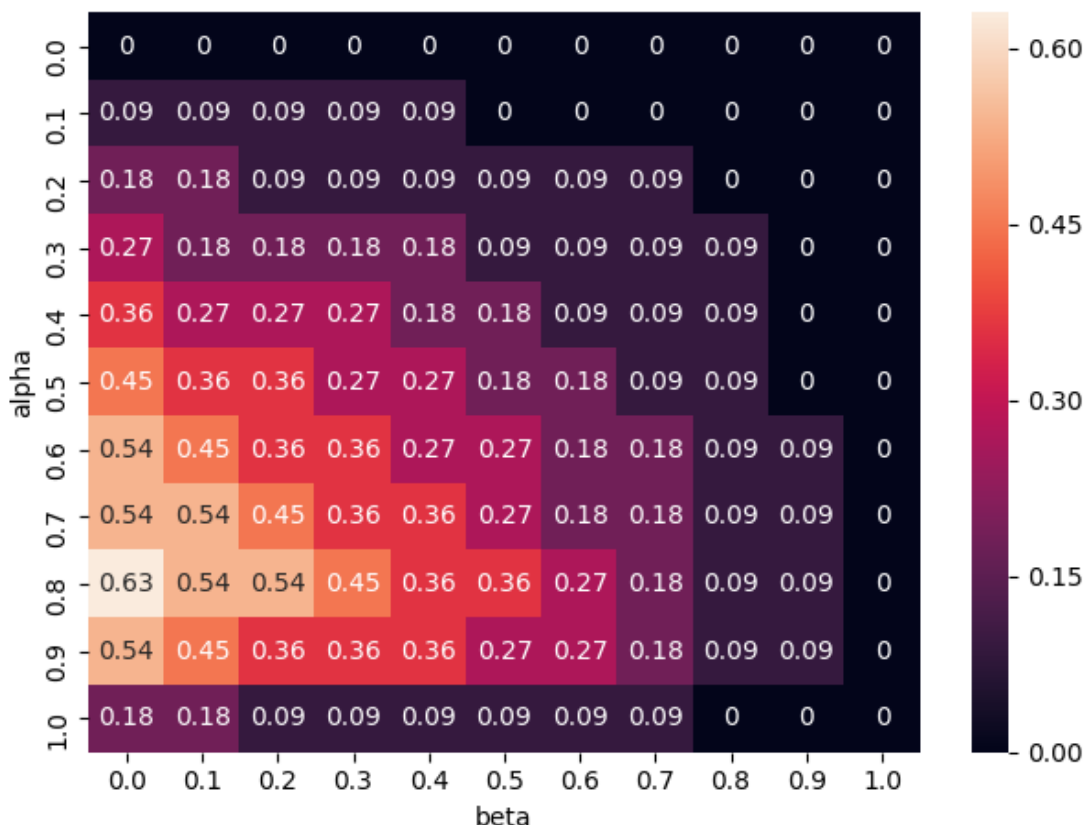
5.2.9 Výsledky pre MSOM

Parameter	Hodnota
Hodnoty alpha	0 - 1 (krok 0.1)
Hodnoty beta	0 - 1 (krok 0.1)
Veľkosť	30x30
Počet epôch	20
Veľkosť posuvného okna	10

Tabuľka 5.3: Parametre MSOM siete



Obr. 5.6: MSOM hodnoty pamětových hlíbk



Obr. 5.7: MSOM hodnoty kvantizačných chýb

Na x-ovej osi sú hodnoty parametra β a na y-ovej osi sú hodnoty parametra α . Na grafe 5.6 môžeme vidieť, že, pamäťová hĺbka pri MSOM dosahuje maximálnu hodnotu pamäťovej hĺbky 8.4 pri hodnote parametra $\alpha = 1$ a $\beta = 0.3$. Minimálne hodnoty pamäťovej hĺbky dosahuje ak je sú hodnoty parametrov $\alpha = 0$ alebo $\beta = 1$. Ak je $\alpha = 0$, tak sa zanedbáva kontextová zložka pri výpočte vzdialenosti a teda sieť nepoužíva žiadny kontext do minulosti. Ide o deformovaný prípad. Keď je $\beta = 1$ tak máme prakticky neobmedzený kontext do minulosti, ale nevieme medzi sebou rozlíšiť jednotlivé vstupy, preto je pamäťová hĺbka v tomto prípade nulová. Môžeme tvrdiť, že čím je parameter β väčší, tým väčší kontext do minulosti máme.

Zaujímavý je prípad, keď je $\alpha = 1$, vtedy sieť pracuje iba s kontextom bez aktuálnych vstupov. Pri tejto hodnote parametra α dosahuje sieť najnižšie hodnoty pamäťových hĺbok. Na grafe 5.7 môžeme vidieť, že pri tejto hodnote parametra má sieť nízku kvantizačnú chybu, čiže sa aj správne učí.

MSOM dosahuje v našom experimente priemere vysoké hodnoty pamäťovej hĺbky, pričom je to zároveň výpočtovo najefektívnejšia verzia rekurentnej SOM pri nízko dimenzionálnych vstupoch. Ukazuje sa, že kontext redukovaný na vlastnosti víťaza z predchádzajúceho kroku neovplyvňuje negatívne pamäťvú hĺbku siete na jednoduchšej trénovacej množine.

5.2.10 Decaying MSOM

Pre potreby nášho experimentu sme si vytvorili ďalšiu modifikovanú verziu rekurentnej SOM. Pri RecSOM kontext tvorí vektor aktivácií všetkých neurónov z predchádzajúceho kroku, pri MSOM je to kombinácia vlastností víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku. Preto sme sa rozhodli použiť odlišný typ kontextu, ktorý bude tvorený kombináciou predchádzajúcich vstupov siete a nie stavmi siete z minulých krokov. To znamená, že kontext nie je ovplyvnený samotným procesom tréovania ani tým, čo sa sieť naučila v predchádzajúcich krokoch, ale iba samotnými vstupnými dátami. Zvyšné vlastnosti siete zostávajú rovnaké ako v iných rekurentných SOM.

Kontext počítame pomocou nasledujúceho rekurzívneho vzťahu:

$$c_t = x_t + \beta * c_{t-1} \quad (5.8)$$

ktorý v rozvinutej forme môžeme zapísať ako:

$$c = \beta^0 \cdot x_t + \beta^1 \cdot x_{t-1} + \beta^2 \cdot x_{t-2} \cdot \dots \cdot \beta^n \cdot x_{t-n} \quad (5.9)$$

β parameter je číslo z intervalu $\beta < 1 \wedge \beta > 0$ a $x_t, x_{t-1}, x_{t-2} \dots$ sú vstupné vektory z predchádzajúcich krokov. t je číslo aktuálneho kroku a n je veľkosť tréovacej množiny.

Z rekurzívneho vzťahu vyplýva, že kontext je tvorený kombináciou predchádzajúcich vstupov, pričom čím dávnejší je vstup, tým menšiu váhu má vo výslednom kontexte, čo je zabezpečené umocňovaním β parametra. Toto sa nazýva leaky integration. V našom prípade to znamená, že dávne vstupy postupne strácajú na dôležitosti, pričom sa stále sa podieľajú na vytváraní výsledného kontextu.

Čím je hodnota parametra β vyššia, tým viac informácií z predchádzajúcich vstupov v sebe kontext obsahuje. Dôležitosť dávnejších vstupov exponenciálne klesá.

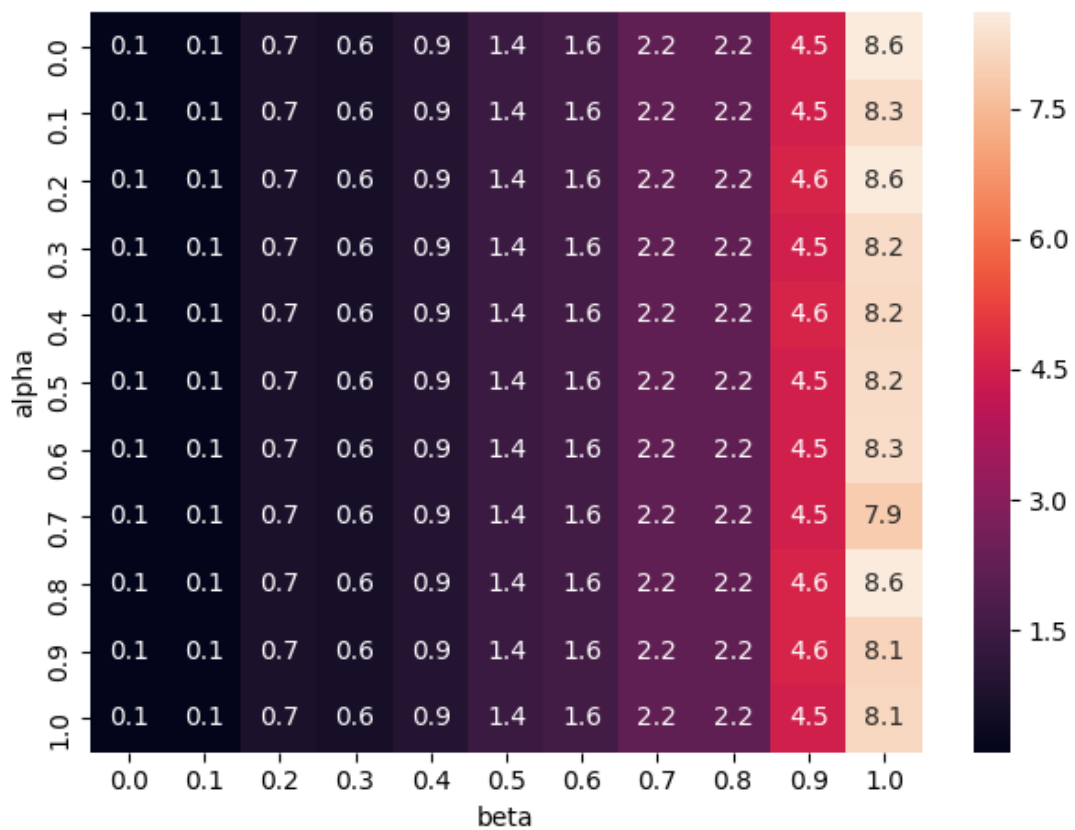
5.2.11 Decaying MSOM parametre

V experimente opäť skúšame všetky kombinácie α a β parametrov. Hodnoty pre oba parametre sú z uzavretého intervalu $< 0, 1 >$ s krokom 0.1.

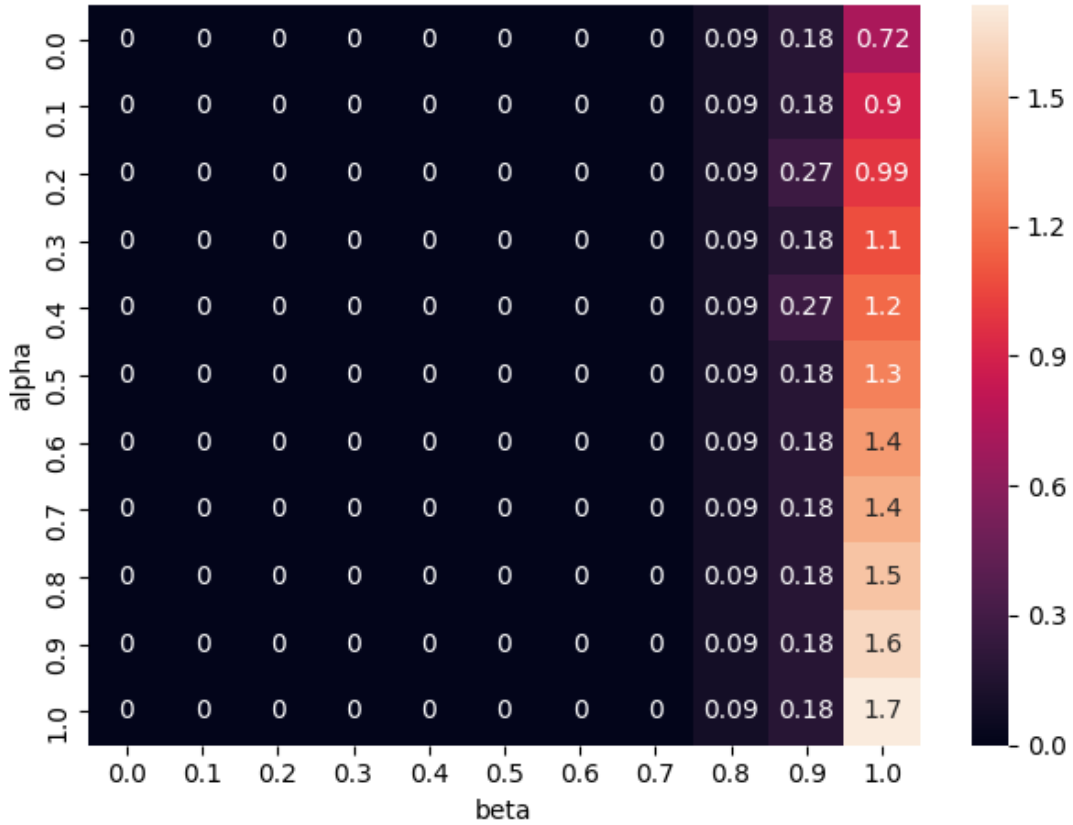
Parameter	Hodnota
Hodnoty alpha	0 - 1 (krok 0.1)
Hodnoty beta	0 - 1 (krok 0.1)
Veľkosť	20x20
Počet epôch tréovania	10
Veľkosť posuvného okna	15

Tabuľka 5.4: Parametre Decaying MSOM siete

5.2.12 Výsledky pre Decaying MSOM



Obr. 5.8: Decaying MSOM hodnoty pamäťových hĺbok



Obr. 5.9: Decaying MSOM hodnoty kvantizačných chýb

Na x-ovej osi sú hodnoty parametra β a na y-ovej osi sú hodnoty parametra α . Ako môžeme vidieť na grafe 5.8 Decaying MSOM dosahuje veľmi vysoké hodnoty pamäťových hĺbok pri hodnote parametra $\beta = 1$. V tomto prípade máme v kontexte uloženú kompletne celú históriu vstupov. Čo je dôležité si všimnúť na grafe pamäťových hĺbok je, že hodnota parametra α ovplyvňuje pamäťovú hĺbku siete a výsledky sú konzistentné. Na grafe 5.9 môžeme vidieť, že kvantizačná chyba pri hodnote parametra $\beta = 1$ je najvyššia, ale nemá to negatívny vplyv na pamäťovú hĺbku Decay MSOM a je to z toho dôvodu, že kontext je nezávislý od stavu (natrénovanosti) kontextových váh a závisí čisto iba od zloženia kontextu. Na to aby Decay MSOM dosiahla vysoké hodnoty pamäťových hĺbok, musí mať natrénované váhové vektory na danej trénovacej množine, pamäťová hĺbka začína stúpať až po niekoľkých epochách. Môžeme tvrdiť, že kontext je pri Decay MSOM stále rovnako kvalitný. Čím viac informácií v kontexte máme, tým sú hodnoty pamätevej hĺbky vyššie. Hodnota parametra α má iba veľmi minimálny vplyv na hodnotu pamätevej hĺbky, ktorá je ovplyvňovaná iba hodnotou parametra β .

Pri predchádzajúcich rekurentných sieťach kontext obsahuje reprezentáciu vplyvov jednotlivých minulých vstupov na sieť a tu je to kombinácia samotných minulých vstupov siete. Týmto experimentom sme vyskúšali aký vplyv na pamäťovú hĺbku siete má úplne odlišný druh kontextu a či sme s ním schopný sieť natrénovať. Naším experi-

mentom sme zistili, že takáto sieť je pri nízkodimenzionálnych vstupoch výpočtovo veľmi efektívna (podobne ako MSOM) a zároveň dosahuje najvyššie hodnoty pamäťových hĺbok a spomedzi všetkých testovaných verzií rekuretných SOM. Kontext tvorený kombináciou minulých vstupov je teda veľmi dobrý.

5.3 Porovnanie výsledkov SOM

Po nájdení optimálnych parametrov pre všetky 4 typy sietí, sme spustili 5 behov pre tieto kombinácie parametrov a všetky 3 trénovacie množiny, pričom sme použili rovnakú počiatočnú inicializáciu váh a spravili priemer týchto hodnôt. Zvyšné hodnoty parametrov sme ponechali rovnaké ako pri hľadaní optimálnych parametrov.

Výsledky pre hodnoty parametra $\alpha = 0.35$

5.3.1 RecSOM

- **abcd**

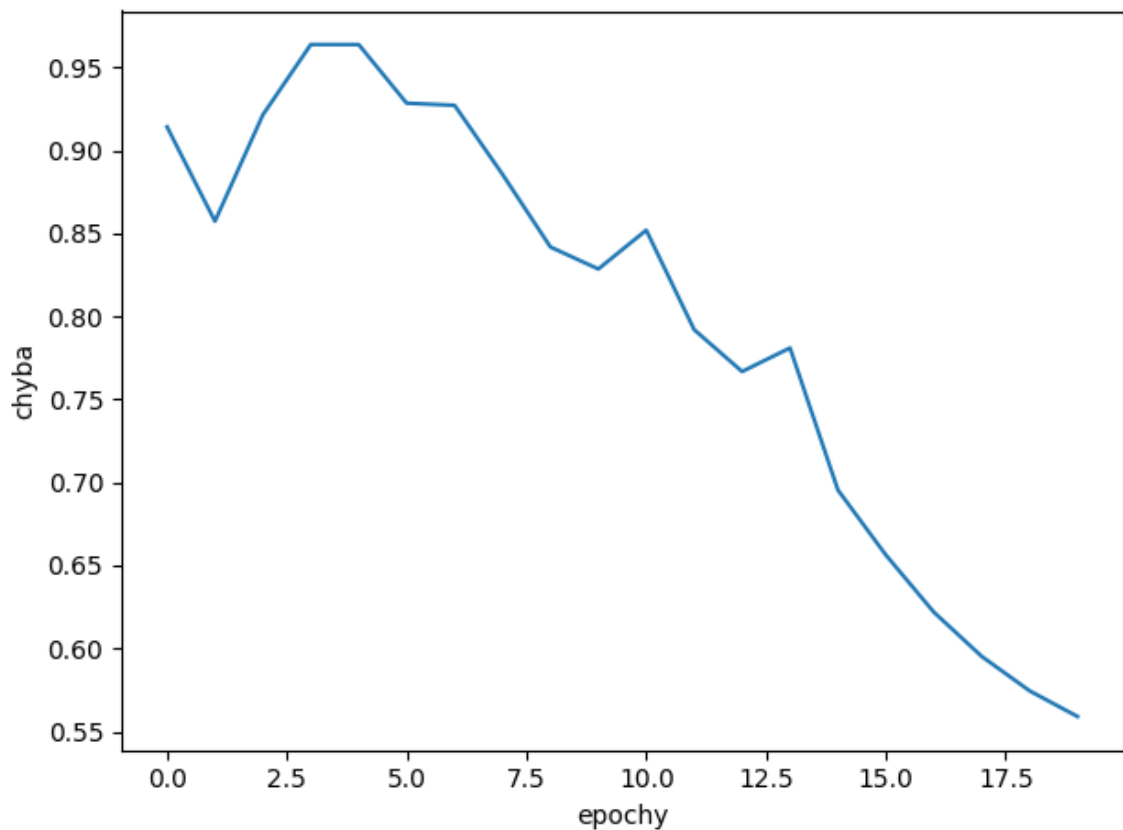
- Priemerná pamäťová hĺbka: **3.12**
- Priemerná kvantizačná chyba: **0.80**

- **reber**

- – Priemerná pamäťová hĺbka: **2.476**
- Priemerná kvantizačná chyba: **0.83**

- **corpus**

- Priemerná pamäťová hĺbka: **0.784**
- Priemerná kvantizačná chyba: **0.54**



Obr. 5.10: Graf klesajúcej kvantizačnej chyby počas trénovania RecSOM

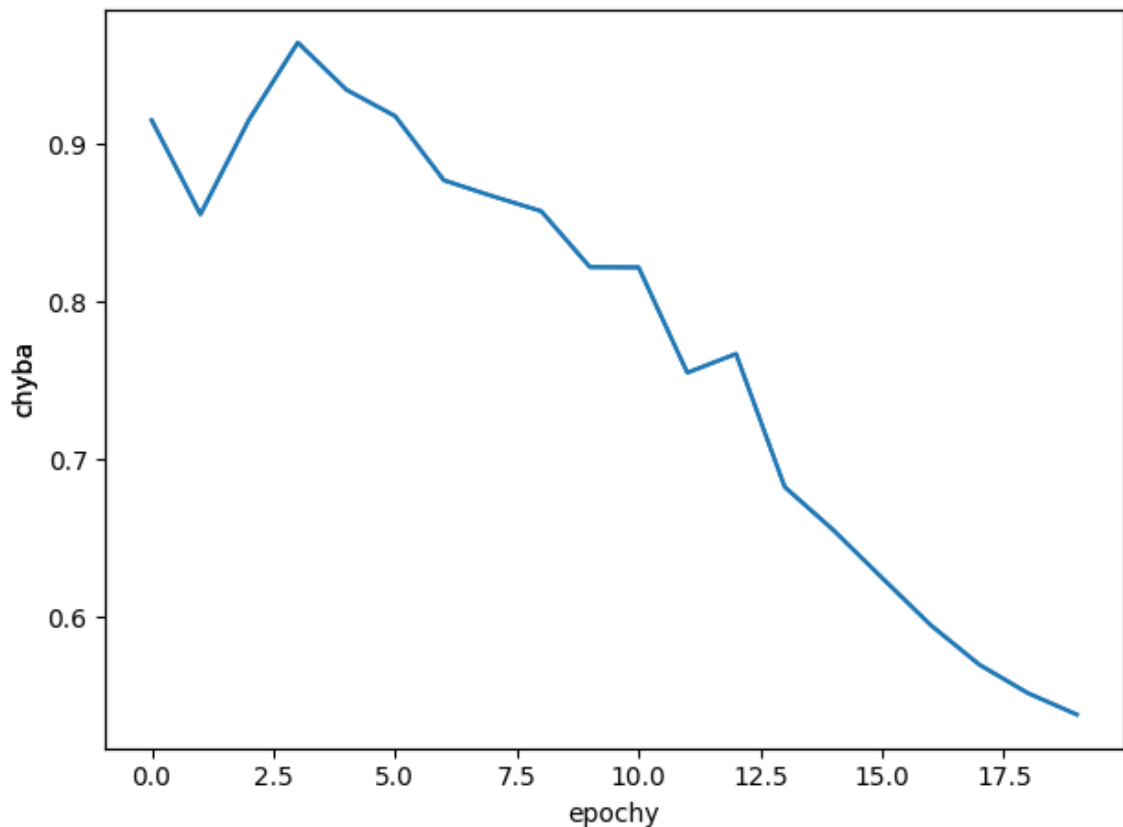
5.10 Graf zobrazuje vývoj kvantizačnej chyby počas trénovania RecSOM na trénovacej množine abcd s hodnotou parametra $\alpha = 0.35$. Z výsledkov vidíme, že so stúpajúcou komplexitou trénovacích množín, klesá pamäťová hĺbka siete. Na reálnom texte dosiahla sieť len minimálnu hodnotu pamätevej hĺbky.

5.3.2 Activity RecSOM

Výsledky pre hodnoty parametra $\alpha = 0.7$ a $\beta = 13.0$

- **abcd**
 - Priemerná pamäťová hĺbka: **1.312**
 - Priemerná kvantizačná chyba: **0.49**
- **reber**
- - Priemerná pamäťová hĺbka: **1,4**
 - Priemerná kvantizačná chyba: **0.51**
- **corpus**

- Priemerná pamäťová hĺbka: **2,49**
- Priemerná kvantizačná chyba: **0.48**



Obr. 5.11: Graf klesajúcej kvantizačnej chyby počas trénovania Activity RecSOM

Pri Activity RecSOM je to opačne. So stúpajúcou komplexitou trénovacích množín, stúpa jej pamäťová hĺbka. Ako sme zistili v experimente s Activity RecSOM, úprava funkcie na výpočet aktivity nerónov zlepšila trénovanie siete a preto dokáže dosiahnuť vyššie hodnoty pamäťových hĺbok.

5.3.3 MSOM

Výsledky pre hodnoty parametra $\alpha = 1.0$ a $\beta = 0.3$

- **abcd**

- Priemerná pamäťová hĺbka: **5.52**
- Priemerná kvantizačná chyba: **0.87**

- **reber**

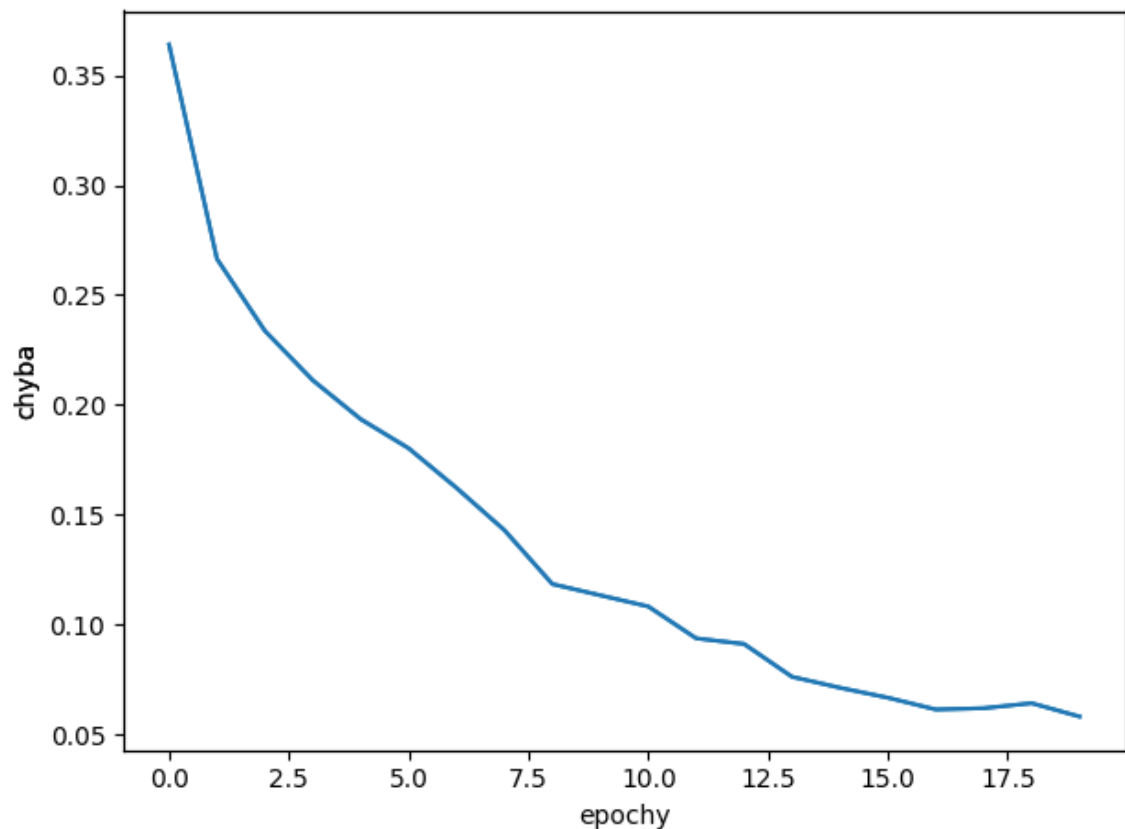
- Priemerná pamäťová hĺbka: **5.898**

– Priemerná kvantizačná chyba: **0.06**

- **corpus**

– Priemerná pamäťová hĺbka: **0.232**

– Priemerná kvantizačná chyba: **0.87**



Obr. 5.12: Graf klesajúcej kvantizačnej chyby počas trénovania MSOM

MSOM sa dokáže natrénovať veľmi dobre na jednoduchých trénovacích množinách. Na reálnom texte však dosahuje veľmi nízke hodnoty pamätevej hĺbky.

5.3.4 Decay MSOM

Výsledky pre hodnoty parametra $\alpha =$ a $\beta =$

- **abcd**

– Priemerná pamäťová hĺbka: **8.22**

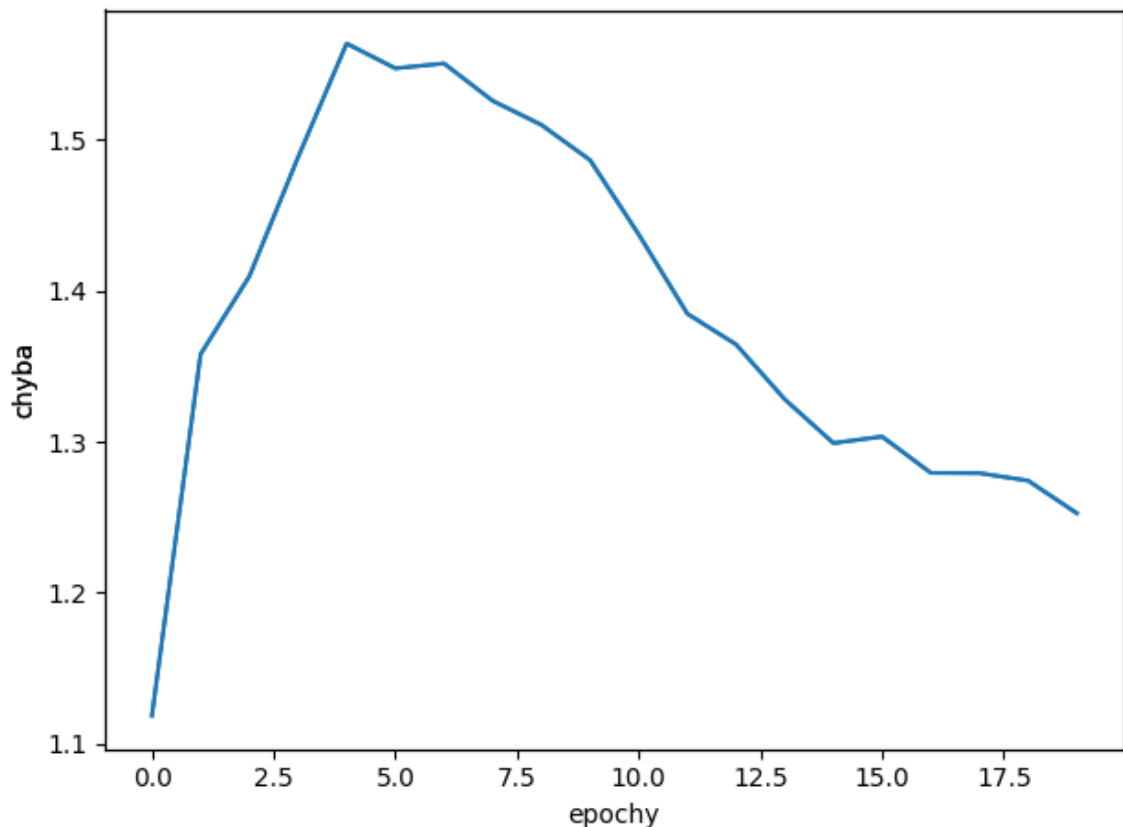
– Priemerná kvantizačná chyba: **1.25**

- **reber**

- Priemerná pamäťová hĺbka: **8.77**
- Priemerná kvantizačná chyba: **1.21**

- **corpus**

- Priemerná pamäťová hĺbka: **5,794**
- Priemerná kvantizačná chyba: **1.15**



Obr. 5.13: Graf klesajúcej kvantizačnej chyby počas trénovania Decay MSOM

Decay MSOM dosahuje stabilne veľmi dobré priemerné hodnoty pamäťových hĺbok na jednoduchých množinách a tiež dosahuje najvyššie priemerné hodnoty pamäťových hĺbok na reálnom texte. V našich experimentoch je Decay MSOM jasný víťaz.

5.4 Vyhodnotenie experimentu so SOM

Experimentami sme zistili, že na hĺbka pamäte je najviac ovplyvnená zložením a dimenziou samotného kontextu rekurentnej SOM. Parametre, ktoré sme testovali a ktoré vplývajú na hĺbku pamäte rekurentných SOM sú α a β . α vystupuje vo vzťahu pre výpočet vzdialenosti vstupu od určitého neurónu v sieti. β zase ovplyvňuje výpočet

samotného kontextu. Pre nízko-dimenzionálne vstupy je najvhodnejšie použiť MSOM, ktorá je výpočtovo najefektívnejšia a dosahuje veľmi dobré výsledky. Pre vysokodimenzionálne vstupy (napríklad bitmapa) je z hľadiska veľkosti kontextu a výpočtovej náročnosti vhodnejšie použiť Activity RecSOM, ktoré vďaka bohatšiemu kontextu a upravenej funkcii na výpočet aktivácie neurónu vie pracovať aj so zložitejšími tréningovými množinami.

5.5 Experiment so SRN a Reberovým automatom

SRN má niektoré vlastnosti podobné s RecSOM. V RecSOM máme vrstvu neurónov, ktorá je prepojená s kontextovou vrstvou, podobne aj v SRN s Elmanovou architektúrou máme skrytú vrstvu, ktorá je prepojená s kontextovou vrstvou. Túto analógiu je dobre vidieť ak by sme z Elmanovej siete odstránili výstupnú vrstvu a ponechali iba vstupnú, skrytú a kontextovú vrstvu, potom nám zostane architektúra RecSOM siete. Spôsob tréningovania a rozmiestňovania vstupov v priestore je úplne odlišný v prípade Elmanovej siete.

Naším hlavným cieľom pri tomto experimente s SRN bolo preskúmať vlastnosti siete a pokúsiť sa nájsť spôsob merania a vyhodnotenia jej pamäťovej hĺbky. Tiež sme chceli preskúmať niekoľko zaujímavých vlastností SRN.

Prvá časť experimentu s SRN prebiehala v nasledujúcich krokoch:

- Podobne ako pri experimentoch so samoorganizujúcimi sa mapami, ako prvé sme si potrebovali vytvoriť vhodnú tréningovú množinu. Rozhodli sme sa, že použijeme podobné zloženie tréningovej množiny ako pri samoorganizujúcich sa mapách. Vstupom je vždy jedno písmeno z náhodne generovanej sekvencie písmen *abcd* a ako očakávaný výstup je vždy nasledujúce písmeno v sekvencii. Takýmto spôsobom sme vytvorili množinu tréningových príkladov.

- Zvolili sme si vhodné aktivačné funkcie:

Ako aktivačnú funkciu na skrytej vrstve sme použili hyperbolický tangens.

$$\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (5.10)$$

Aktivačnú funkciu na výstupnej vrstve sme použili softmax.

- Následne sme museli overiť funkčnosť našej implementácie siete. Ako chybovú funkciu sme použili log loss. Počas testovania nám chyba klesala a sieť po natréningovaní predikovala korektné výsledky na testovacích sekvenciách.
- Keď sme mali funkčnú implementáciu SRN Elmanovej siete, natrénovali sme ju na našej tréningovej množine. Parametre, ktoré sme použili počas tréningovania:

Parameter	Hodnota
veľkosť skrytej vrstvy	30
počet epôch	100
veľkosť posuvného okna na tréningovej množine	3
počet krokov do minulosti (T)	5

Tabuľka 5.5: Parametre SRN s Elmanovou architektúrou

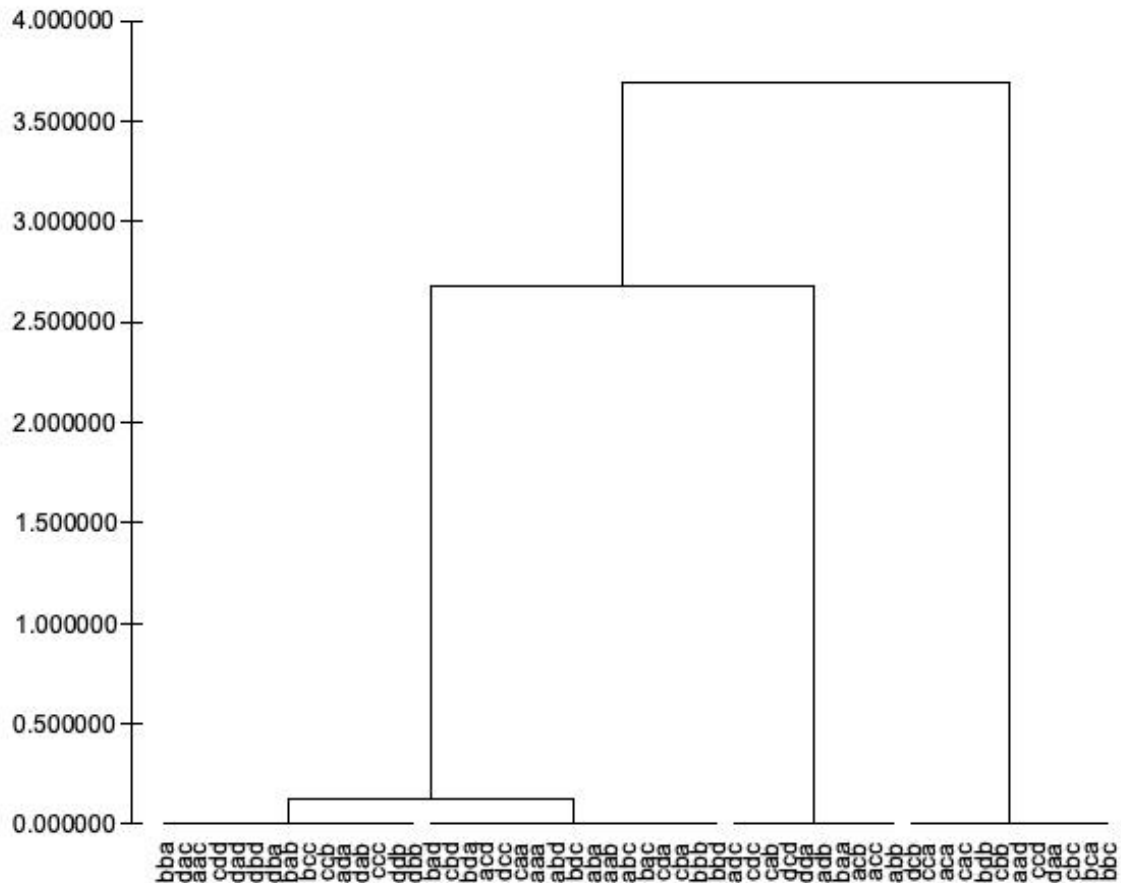
SRN si na skrytej vrstve vytvára určitú reprezentáciu vstupov. Preto sme sa rozhodli, že správne natrénovanej SRN budeme postupne predkladať písmená z tréningovej množiny, pričom si po každej predikcii, ktorú sieť spraví, uložíme aktivácie neurónov (vektor) na skrytej vrstve siete do nejakej množiny. Ku každému takémuto vektoru priradíme posuvné okno daného znaku z tréningovej množiny (podobne ako pri experimentoch so SOMkami). Po predložení všetkých znakov z tréningovej množiny siete sme dostali dvojicu posuvných okien s prislúchajúcimi aktiváciami neurónov na skrytej vrstve siete.

Tieto dáta sme potrebovali nejakým spôsobom vizualizovať, aby sme v nich vedeli identifikovať prípadné súvislosti medzi reprezentáciou vstupov na skrytej vrstve a podobnosťou samotných vstupov. Rozhodli sme sa, že použijeme vizualizáciu pomocou dendrogramu. Vizualizácie vo forme dendrogramu sa často používajú ak potrebujeme vizualizovať hierarchické klastrovanie dát.

Na vytvorenie dendrogramu potrebujeme vytvoriť tzv. podobnostnú maticu (ang. similarity matrix), kde riadky aj stĺpce reprezentujú jednotlivé kontextové vektory a hodnoty v samotnej matici sú euklidovské vzdialenosti medzi týmito vektormi. Z toho vyplýva, že na diagonále sú samé nulové hodnoty (rovnaké vektory majú medzi sebou nulovú vzdialenosť).

Z takejto matice potom vieme vytvoriť stromový graf, dendrogram, ktorý vizualizuje súvislosti medzi euklidovskou vzdialenosťou jednotlivých vektorov a samotnými posuvnými oknami z tréningovej množiny. Z toho vieme potom povedať, ktoré postupnosti vstupov sú vo vnútornej reprezentácii SRN blízke.

Takáto reprezentácia nám hovorí o tom, ako sieť interne reprezentuje dáta z tréningovej množiny.



Obr. 5.14: Dendrogram pre Elmanovu sieť

Na x-ovej osi sú posuvné okná a na y-ovej osi sú vzdialenosti medzi jednotlivými vektormi. Na dendrograme 5.14 vidíme, že pre vstupy, ktoré sieť vyhodnocuje ako podobné, majú rovnakú euklidovskú vzdialenosť vektorov. V našom experimente sa v sieti sa vytvorili 4 klustre podobnej veľkosti. Nehovorí nám to bohužiaľ nič o pamäťovej hĺbke Elmanovej siete. Nevieme ju z takejto vizualizácie nijakým spôsobom kvantifikovať.

5.5.1 Stavový automat na skrytej vrstve

Zaujímavou vlastnosťou SRN je aj to, že si na skrytej vrstve dokáže vytvoriť vlastnú reprezentáciu stavového automatu, ak je trébovaná na trébovacej množine, ktorá je tvorená reťazcom generovaným napríklad reberovým automatom [8]. Vďaka tejto vlastnosti by sa mala SRN natrébovať na takejto trébovacej množine s nulovou chybou. Túto vlastnosť sme sa rozhodli overiť. Vytvorili sme si podobnú trébovaciu množinu ako pri prvom experimente. Parametre, ktoré sme použili na natrébovanie siete na takejto množine dát: Výsledkom tohto trébovania je potvrdenie skutočnosti, že sieť sa dokázala natrébovať po 100 epochách s nulovou trébovacou chybou na reťazcoch ge-

Parameter	Hodnota
veľkosť skrytej vrstvy	30
počet epôch	100
počet krokov do minulosti (T)	5

Tabuľka 5.6: Parametre SRN s Elmanovou architektúrou - reberové reťazce

nerovaných reberovým automatom, čiže si na svojej skrytej vrstve dokázala vytvoriť reprezentáciu stavového automatu.

Záver

V našej práci sme porovnali pamäťovú hĺbku niekoľkých typov neurónových sietí. Hlavným cieľom bolo zistiť, či sa dajú rekurentné samoorganizujúce sa mapy použiť na vizualizáciu sekvenčných vstupov, teda s akým dlhým kontextom do minulosti dokážu pracovať. Chceli sme tiež navrhnúť spôsob ako merať a hlavne porovnať pamäťovú hĺbku Elmanovej siete so rekurentnými SOM-kami, prípadne nájsť súvislosti medzi týmito dvomi sieťami.

V našich experimentoch sme porovnávali pamäťovú hĺbku dvoch základných typov rekurentných SOM — RecSOM a MSOM. Okrem toho sme si vytvorili z oboch modelov modifikované verzie — Activity RecSOM a Decaying MSOM. Activity RecSOM umožňuje experimentovať s hodnotami aktivít neurónov, ktoré tvoria kontext siete. Upravili sme v nej vzorec na výpočet aktivity, tak aby obsahoval meniteľný parameter, ktorý môžeme nastavovať na rôzne hodnoty. To nám umožnilo preskúmať ďalšie vlastnosti RecSOM a vplyv zloženia kontextu na hĺbku pamäte RecSOM. Pri modifikácii MSOM sme sa rozhodli, že použijeme úplne odlišný kontext ako používa MSOM. Pri klasickej MSOM je kontext tvorený lineárnou kombináciou vlastností víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku, v našej modifikovanej verzii je kontext tvorený iba kombináciou minulých vstupov a teda nie je závislý od minulých stavov samotnej siete.

Našími experimentami sme zistili rôzne zaujímavé súvislosti medzi hodnotami pamäťovej hĺbky a kvantizačnými chybami. Pri Activity RecSOM sme zistili, že zmenou priebehu funkcie na výpočet aktivácie neurónu vieme znížiť veľkosť kvantizačnej chyby, čiže zlepšiť tréning siete. Decay MSOM nám ukázala, že s použitím kontextu nezávislého od stavov siete vieme dosiahnuť **najvyššie hodnoty pamäťových hĺbok**, pričom nezávisí od natrénovanosti kontextových váh. Z vlastností kontextov jednotlivých typov sietí vyplýva, že pre nízko-dimenzionálne vstupy nemá zmysel používať RecSOM alebo Activity RecSOM, pretože MSOM a Decay MSOM sú výpočtovo ďaleko efektívnejšie (vďaka nízkej dimenzii kontextu) a tiež dosahujú vyššie hodnoty pamäťovej hĺbky pri použití optimálnych parametrov.

5.6 Limity a nedostatky riešenia

V experimente s Elmanovou sieťou sa nám podarilo nájsť spôsob ako vizualizovať súvislosti medzi aktiváciami neurónov na skrytej vrstve a posuvnými oknami na trénovacej množine, avšak nepodarilo sa nám nájsť spôsob ako zmerať a porovnať pamäťovú hĺbku Elmanovej siete s rekurentnými SOM. Otázne je, či tento typ siete má kvantifikovateľnú pamäťovú hĺbku a či ju vieme odmerať a kvantifikovať.

Niektoré výsledky (hodnoty pamäťových hĺbok) pre SOM sú čiastočne skreslené pamäťovými oknami, ktoré obsahujú iba jednu podpostupnosť.

5.7 Možnosti ďalšej práce

- Medzi ďalšie možnosti patrí vyskúšanie ďalších modifikácií rekurentných SOM. Napríklad pri Aktivite RecSOM by sme mohli použiť euklidovskú vzdialenosť neurónu od víťazného neurónu a pozrieť sa na to aký vplyv by to malo na pamäťovú hĺbku siete s rôznymi hodnotami parametra β .
- V našich experimentoch sme skúšali kombinácie parametrov α a β . Túto množinu parametrov by bolo vhodné rozšíriť o ďalšie parametre, napríklad lepšie preskúmať vplyv veľkosti okolia, či rýchlosti učenia siete.
- Keďže niektoré výsledky boli skreslené, vhodné by bolo lepšie kvantifikovať pamäťovú hĺbku v prípade, že neuróny rekurentných SOM majú vo svojom receptívnom poli uloženú iba jednu sekvenciu. Tiež by bolo vhodné analyzovať lepšie súvislosti medzi kvantizačnou chybou a hodnotami pamätevej hĺbky.
- V našej práci sa nevenujeme príliš matematickej analýze pri jednotlivých experimentoch. Preto by bolo vhodné spraviť podrobnú matematickú analýzu jednotlivých experimentov.
- Keďže sme nedokázali nájsť spôsob, ako zmerať pamäťovú hĺbku Elmanovej siete, určite by bolo v budúcnosti vhodné navrhnúť a vyskúšať viac alternatívnych spôsobov ako zmerať pamäťovú hĺbku Elmanovej siete. Napríklad podrobnejšou analýzou dendrogramov, či hľadaním ďalších súvislostí v stavovom priestore siete.
- Vyskúšať a overiť výsledky našich experimentov v nejakom konkrétnom modeli strojového učenia, ktorý dokáže využiť rekurentné neurónové siete na generovanie textu, či reprezentáciu sekvenčných dát.
- Keďže naše implementácie nepatria medzi tie najoptimálnejšie, medzi ďalšie možnosti práce určite patrí aj optimalizácia rýchlosti implementácii rekurentných

SOM. Napríklad upraviť algoritmy tak, aby využívali paralelizmus a teda aby sme mohli vyskúšať väčšie množstvo kombinácií rôznych parametrov.

Bibliografia

- [1] Jeffrey L. Elman. “Finding structure in time”. In: *Cognitive Science* 14.2 (1990), s. 179–211.
- [2] Jiang Guo. “Backpropagation through time”. In: *Unpubl. ms., Harbin Institute of Technology* (2013).
- [3] S. Haykin. *Neural Networks and Learning Machines*. Prentice Hall, 2009. ISBN: 9780131471399.
- [4] Teuvo Kohonen. “Essentials of the Self-organizing Map”. In: *Neural Netw.* 37 (jan. 2013), s. 52–65.
- [5] Pavol Návrát a kol. *Umelá inteligencia*. 2007, s. 393. ISBN: 9788022726290.
- [6] V. Kvasnička et al. *Úvod do teórie neurónových sietí*. Iris, 1997. ISBN: 9788088778301.
- [7] H. Ritter a T. Kohonen. “Self-organizing Semantic Maps”. In: *Biol. Cybern.* 61.4 (aug. 1989), s. 241–254.
- [8] David Servan-Schreiber, Axel Cleeremans a James L. McClelland. “Graded state machines: The representation of temporal contingencies in simple recurrent networks”. In: *Machine Learning* (1991).
- [9] Marc Strickert a Barbara Hammer. “Merge SOM for temporal data”. In: *Neurocomputing* 64 (2005), s. 39–71.
- [10] P. Tino, M. Cernansky a L. Benuskova. “Markovian architectural bias of recurrent neural networks”. In: *IEEE Transactions on Neural Networks* (2004), s. 6–15.
- [11] Peter Tino a Georg Dorffner. “Predicting the Future of Discrete Sequences from Fractal Representations of the Past”. In: *Machine Learning* 45.2 (2001), s. 187–217.
- [12] Peter Tiño, Igor Farkaš a Jort van Mourik. “Recursive Self-organizing Map as a Contractive Iterative Function System”. In: (2005). Ed. Marcus Gallagher, James P. Hogan a Frederic Maire, s. 327–334.
- [13] Thomas Voegtlin. “Recursive Self-organizing Maps”. In: *Neural Netw.* 15.8-9 (okt. 2002), s. 979–991.