UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Porovnanie niekoľkých typov rekurentných sietí z hľadiska hĺbky pamäte

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2019

Bc. Jaroslav Ištok

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Porovnanie niekoľkých typov rekurentných sietí z hľadiska hĺbky pamäte

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program: Aplikovaná informatika

Študijný odbor: 2511 Aplikovaná informatika Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej informatiky Školiteľ: doc. RNDr. Martin Takáč, PhD.

Bratislava, 2019 Bc. Jaroslav Ištok





Univerzita Komenského v Bratislave Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jaroslav Ištok

Študijný program: aplikovaná informatika (Jednoodborové štúdium,

magisterský II. st., denná forma)

Študijný odbor: aplikovaná informatika

Typ záverečnej práce: diplomová Jazyk záverečnej práce: slovenský Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Porovnanie niekoľkých typov rekurentných sietí z hľadiska hĺbky pamäte

Memory span in recurrent neural network types: a comparison

Anotácia: Cieľ om práce je preskúmať a porovnať vlastnosti niektorých typov rekurentných

samoorganizujúcich sa máp (MSOM, RecSOM a ich modifikácií) s Elmanovou jednoduchou rekurentnou sieťou (SRN), najmä z hľadiska hĺbky a kapacity pamäte. Práca zahŕňa implementáciu, výpočtové simulácie a analýzu vrátane

preskúmania priestoru parametrov.

Literatúra: Elman, J. (1990). Finding structure in time. Cognitive Science, 14, 179-211.

Strickert, M. & Hammer, B. (2005). Merge SOM for temporal data.

Neurocomputing, 64, 39-71.

Vedúci: doc. RNDr. Martin Takáč, PhD.

Katedra: FMFI.KAI - Katedra aplikovanej informatiky

Vedúci katedry: prof. Ing. Igor Farkaš, Dr.

Dátum zadania: 05.10.2017

Dátum schválenia: 12.10.2017 prof. RNDr. Roman Ďurikovič, PhD.

garant študijného programu

študent	vedúci práce

Čestné vyhlásenie: Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne len s použitím uvedenej literatúry a za pomoci môjho školiteľa diplomovej práce.

Poďakovanie: Chcel by som poďakovať svojmu školiteľovi, doc. RNDr. Martin Takáčovi, PhD., za jeho pomoc, dlhé hodiny konzultácii, poskytné materiály a hlavne za usmernenie správnym smerom.

Abstrakt

Použitie rekurentných neurónových sietí na spracovanie sekvenčných dát je čoraz viac dôležité v oblasti neurónových sietí. V našej práci implementujeme niekoľko typov neurónových sietí a porovnávame ich z hľadiska hĺbky pamäte. Hľadáme optimálne parametre, pri ktorých majú rôzne typy neurónových sietí najvyššie hodnoty pamätových hĺbok. Získané výsledky následne porovnávame a analyzujeme súvislosti medzi hodnotami parametrov a pamätovou hĺbkou siete. Následne analyzujeme a porovnávame výsledky pre testované typy sietí.

Kľúčové slová: rekurentné neurónové siete, hĺbka pamäte, samorganizujúca sa mapa

Abstract

Usage of recurrent neural nets for processing sequential data is getting more important nowadays. In our work we are implementing a several types of neural nets which we are comparing in terms of their memory span. We are finding optimal parameters for which have different types of tested neural nets highest memory span values. Then, we analyze results and compare them results for tested neural nets.

Keywords: neural net, machine learning, memory span, self organizing map

Obsah

1	Úvo	\mathbf{d}	1
	1.1	Motivácia	1
	1.2	Úvod do umelých neurónových sietí	2
		1.2.1 Perceptrón	2
		1.2.2 Viacvrstvová dopredná neurónová sieť	3
		1.2.3 Trénovací algoritmus dopredných neurónových sietí	5
		1.2.4 Rekurentné neurónové siete	6
		1.2.5 Samoorganizujúce sa mapy	8
		1.2.6 Trénovanie	8
		1.2.7 Využitie SOM	.1
		1.2.8 Rekurentné modely	1
		1.2.9 RecSOM	2
		1.2.10 mSOM	.3
2	Imp	olementácia 1	5
	2.1	Implementácia neurónových sietí	.5
	2.2	Voľba programovacieho jazyka	.5
		2.2.1 Python	.5
	2.3	Použíté knižnice	6
		2.3.1 Numpy	6
		2.3.2 Matplotlib	6
		2.3.3 Seaborn	6
	2.4	Algoritmus hľadania najdlhšej spoločnej podpostupnosti viacerých re-	
		fazcov	6
	2.5	Reberov automat	6
3	Ana	dýza podobných prác 1	8
	3.1	Recursive Self-organizing Map as a Contractive Iterative Function System 1	8
	3.2	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	8
	3.3	Graded State Machines: The Representation of Temporal Contingencies	
			.8

OE	BSAH	I		viii
	3.4	Unsup	pervised Recursive Sequence Processing	18
4	Náv	rh rieš	senia	19
	4.1	Metód	a uchovávania informácii v SOM	19
	4.2	Určova	anie hĺbky pamäte rekurentnej SOM	20
	4.3	Pamät	ová hĺbka SRN s Elamnovou architektúrou	21
	4.4	Výber	vhodných trénovacích dát	21
	4.5	Návrh	experimentu	21
5	Exp	erimer	nt	23
	5.1	Výber	konkrétnych trénovacích množín pre experiment	23
	5.2	Hľadar	nie optimálnych parametrov sietí	24
		5.2.1	Parametre pre RecSOM	25
		5.2.2	Výsledky pre RecSOM	26
		5.2.3	Analýza výsledkov RecSOM	26
		5.2.4	Activity RecSOM	27
		5.2.5	Activity RecSOM parametre	28
		5.2.6	Výsledky pre Activity RecSOM	29
		5.2.7	Analýza výsledkov Activity RecSOM	29
		5.2.8	MSOM parametre	30
		5.2.9	Výsledky pre mSOM	30
		5.2.10	Decaying mSOM	32
		5.2.11	Decaying MSOM	32
		5.2.12	Výsledky pre Decaying msom	32
	5.3	Porovi	nanie výsledkov SOM	33
		5.3.1	RecSOM	34
		5.3.2	Activity RecSOM	34
		5.3.3	mSOM	34
		5.3.4	Decay mSOM	34
	5.4	Vyhoo	dnotenie experimentu	34
	5.5	Experi	iment so SRN a Reberovým automatom	34
Bi	bliog	graphy		36

Zoznam obrázkov

1.1	Percetrón	2
1.2	Viacvrstvová dopredná neurónová sieť	3
1.3	Logistická sigmoida a Hyperbolický tangens	4
1.4	Rectified Linear Unit	5
1.5	Architektúra elmanovej siete	6
1.6	Rozvinutá Elmanova sieť	7
1.7	Neúplne rozvinutá sieť	10
1.8	Motýlí efekt	10
1.9	Pinch effect	11
1.10	Architektúra RecSOM	12
2.1	Schéma reberovho automatu	17
4.1	Ukážka hitmapy	20
5.1	Heatmapy pre Recsom	26
5.2	Heatmapy pre Recsom	27
5.3		28
5.4	Leaky MSOM results	28
5.5	Heatmapy pre Activity RecSOM	29
5.6	Heatmapy pre mSOM	31
5.7	Heatmapy pre Decay mSOM	33

Zoznam tabuliek

5.1	Trénovacie parametre RecSOM siete	26
5.2	Parametre Activity RecSOM siete	29
5.3	Parametre mSOM siete	30
5.4	Parametre RecSOM siete	32
5.5	Parametre SRN	35

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivácia

V strojovom učení nastávajú situácie, kedy potrebujeme predikovať výsledok nie len na základe aktuálneho vstupu, ale aj na základe historického kontextu. Kontext je väčšinou reprezentovaný stavmi modelu strojového učenia z minulých krokov alebo kombináciou predchádzajúcich vstupov. Príkladom takejto úlohy môže byť spracovanie tzv. časových radov či generovanie postupností znakov. Predstavme si úlohu, v ktorej chceme model strojového učenia naučiť predikovať ďalšie písmeno v určitom slove. Ako príklad si môžeme zobrať slovo "Bratislava". Trénovanie modelu strojového učenia bez využitia historického kontextu by mohlo prebiehať napríklad takto: Trénovaciou množinu by tvorili písmená daného slova, kde očakávanou hodnotou pre nejaké písmeno by bolo ďalšie písmeno, ktoré za ním v slove nasleduje. Čiže pre písmeno "B" poviem, že očakávame "r" a takto pokračujem ďalej cez všetky písmená v slove.

Problém nastane pri druhom písmene "a" v slove Bratislava. Pri prvom výskyte písmena "a" sme modelu tvrdili, že očakávam písmeno "t" a pri druhom výskyte písmena "a" tvrdíme, že očakávame "v". Tento prípad sa model, ktorý nevyužíva žiadny historický kontext, nevie naučiť, pretože nemá žiadnu "pamäť" (okno do minulosti). Historický kontext umožňuje modelom strojového učenia pracovať s určitou formou pamäte.

V našej práci sa budeme zaoberať jedným z modelov strojového učenia, ktorý pracuje s kontextom: rekurentnými neurónovými sieťami viacerých typov pričom budem merať a porovnávať ich pamäťovú hĺbku. Pamäťová hĺbka neurónovej siete vo všeobecnosti vyjadruje s akým dlhým kontextom do minulosti dokáže pracovať.

Konkrétne pôjde o nasledujúce tri typy rekurentných neurónových sietí a ich modifikácie:

- RecSOM
- MergeSOM

• Elmanova siet

1.2 Úvod do umelých neurónových sietí

1.2.1 Perceptrón

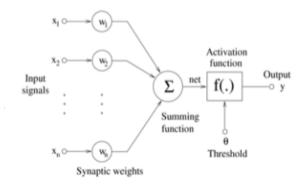
Je základným modelom neurónu, ktorý je používaný v neurónových sieťach.

Na vstupe každého perceptrónu je vektor vstupných hodnôt (vzor) \overline{x} pričom hodnoty sú reálne čísla alebo binárne hodnoty, v ktorých môže byť zakódované napríklad slovo alebo obrázok. Každý perceptrón má vektor synaptických váh \overline{w} .

Výstup perceptrón vyjadruje rovnica:

$$y = f(\sum_{i=1}^{n+1} w_i x_j) \quad x_{n+1} = -1$$
(1.1)

Funkcia f sa nazýva aj aktivačná funkcia perceptrónu, ktorá môže byť spojitá alebo diskrétna. Podľa toho, či je aktivačná funkcia spojitá alebo diskrétna, rozlišujeme spojitý alebo diskrétny perceptrón.



Obr. 1.1: Percetrón

Aktivačná funkcia diskrétneho perceptrónu je jednoduchá bipolárna funkcia, ktorá vráti +1 alebo 1.

$$f(net) = sign(net) = \begin{cases} 1 & \text{ak } net \ge 0 \\ -1 & \text{ak } net < 0 \end{cases}$$

Aktivačná funkcia spojitého perceptrónu môže byť napríklad sigmoida.

$$f(net) = \frac{1}{1 + \exp^{-net}} \tag{1.2}$$

Vstupom do aktivačnej funkcie (net) je skalárny súčin vstupného vektora \overline{x} a váhového vektora perceptrónu \overline{w} .

$$net = \overline{x} \cdot \overline{w} \tag{1.3}$$

Trénovanie perceptrónu prebieha za pomoci učiteľa (angl. supervised learning). Pravidlo pre adaptáciu váh diskrétneho percetrónu:

$$w_j(t+1) = w_j(t) + \alpha(d-y) \cdot x_j \tag{1.4}$$

Spojitý perceptrón je trénovaný metódou najprudšieho spádu, pomocou ktorej minimalizujeme kvadratickú chybovú funkciu:

$$E(w) = \frac{1}{2} \sum_{p} \left(d^{(p)} - y^{(p)} \right)^2 \tag{1.5}$$

Pravidlo pre adaptáciu váh v spojitom perceptróne:

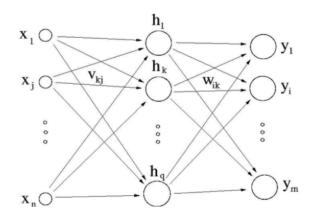
$$w_{i}(t+1) = w_{i}(t) + \alpha(d^{(p)} - y^{(p)})f'(net)x_{i} = w_{i}(t) + \alpha\delta^{(p)}x_{i}$$
(1.6)

Kde p je index vzoru v trénovacej množine, y je skutočný výstup a d je požadovaný výstup.

Perceptrón je veľmi jednoduchým modelom. Nevieme ním vyriešiť celú škálu úloh. Napríklad dokáže klasifikovať iba lineárne separovateľné dáta. Je však dokázané, že ak dáta sú lineárne separovateľné, trénovací algoritmus konverguje a teda vie dáta separovať. Perceptrón sa v strojovom učení niekedy označuje aj ako logistická regresia.

1.2.2 Viacvrstvová dopredná neurónová sieť

V našej práci sa budeme zaoberať Elmanovou rekurentnou neurónovou sieťou. [1] Najskôr však popíšeme základný viacvrstvový model neurónovej siete. Viacvrstvová dopredná neurónová sieť má jednu vstupnú vrstvu, jednu výstupnú vrstvu a minimálne jednu skrytú vrstvu. Jednotlivé vrstvy sú tvorené perceptrónmi a sú pospájané väzbami, ktoré majú váhy, resp. váhové vektory. Medzi neurónmi v tej istej vrstve nie sú žiadne spojenia.



Obr. 1.2: Viacvrstvová dopredná neurónová siet

Trénovací algoritmus pomocou ktorého sa trénujú dopredné neurónové sa nazýva "spätné šírenie chyby" (angl. backpropagation).

Aktivácie na neurónoch výstupnej vrstvy (výstup) môžeme popísať vzťahom:

$$y_i = f(\sum_{k=1}^{q+1} w_{ik} h_k) \tag{1.7}$$

Aktivácie na neurónoch skrytej vrstve môžeme popísať vzťahom:

$$h_k = f(\sum_{j=1}^{n+1} v_{kj} x_j)$$
 (1.8)

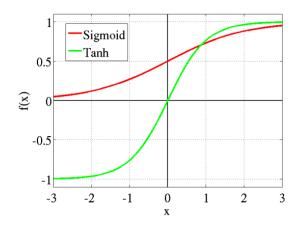
Prahové hodnoty:

$$x_{n+1} = h_{g+1} = -1 (1.9)$$

Aby dopredná neurónová sieť vedela pracovať aj s nelineárnymi problémami, musí byť aktivačná funkcia neurónov nejaká nelineárna diferencovateľná funkcia.

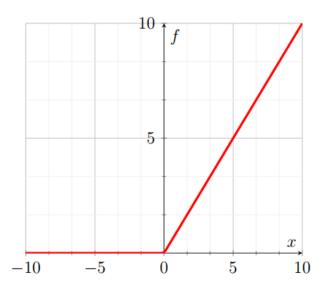
Najpoužívanejšie aktivačné funkcie sú:

- Logistická sigmoida
- Hyperbolický tangens



Obr. 1.3: Logistická sigmoida a Hyperbolický tangens

• ReLU



Obr. 1.4: Rectified Linear Unit

Vzťahy pre aktualizáciu váh sú nasledovné:

Váhy medzi vstupnou a skrytou vrstvou

$$w_{ik}(t+1) = w_{ik}(t) + \alpha \delta_i h_k \quad \delta_i = (d_i - y_i) f'(net_i)$$
(1.10)

Váhy medzi skrytou a výstupnou vrstvou:

$$v_{kj}(t+1) = v_{kj}(t) + \alpha \delta_k x_j \quad \delta_k = \left(\sum_i w_{ik} \delta_i\right) f'(net_k)$$
(1.11)

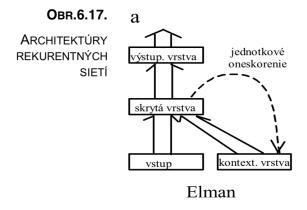
1.2.3 Trénovací algoritmus dopredných neurónových sietí

- 1. zoberie sa vstup $x^{(p)}$ a vypočíta sa výstup $y^{(p)}$ (dopredný krok)
- 2. vypočíta sa chyba pomocou zvolenej chybovej funkcie
- 3. vypočítame hodnoty δ_i a δ_k (spätný krok)
- 4. upravíme váhy Δw_{ik} a Δv_{kj}
- 5. ak už boli použité všetky trénovacie príklady z trénovacej množiny pokračuj bodom 6. inak pokračuj bodom 1.
- 6. ak bolo dosiahnuté nejaké zastavovacie kritérium, potom skonči, inak prepermutuj vstupy a pokračuj bodom 1.

1.2.4 Rekurentné neurónové siete

Rekurentná neurónová sieť je akákoľvek neurónová sieť, ktorá obsahuje množinu neurónov v ktorých je ochovávaná informácia o aktiváciách neurónov alebo predchádzajúcich vstupoch z predošlých krokov. Takéto neuróny nazývame aj rekurentné neuróny a tvoria vrstvu, ktorá sa nazýva kontextová vrstva. Týmto spôsobom je sieť rozšírená o vnútornú pamäť.

V našej práci budeme skúmať vlastnosti a skúšať zmerať pamäťovú hĺbku rekurentnej siete s Elmanovou architektúrou, ktorá je znázornená na nasledujúcom diagrame.



Obr. 1.5: Architektúra elmanovej siete

Dvojité šípky reprezentujú spojenia neurónov medzi vrstvami. Neuróny v tej istej vrstve nie sú, podobne ako v nerekurentnej, teda doprednej, sieti, medzi sebou prepojené. Spojenia znázornené dvojitou šípkou majú váhy, ktoré sú upravované počas trénovania. Jednoduché šípky reprezentujú rekurentné spojenia. Tieto majú nemennú váhu s hodnotou 1. Tieto spojenia slúžia na odpamätanie aktivácii rekurentných neurónov.

Využitie rekurentných neurónových sietí:

Klasifikácia s časovým kontextom

Príkladom úlohy môže byť napríklad určiť, či určitá postupnosť vstupov patrí do nejakej triedy. Praktickým problémom môže byť zistiť či postupnosť signálov z určitého zariadenia signalizuje poruchu zariadenia alebo nie.

• Predikcie

Príkladom môže byť napríklad predikcia nasledujúceho člena postupnosti.

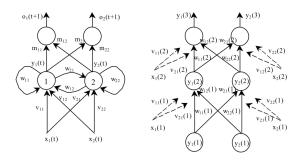
• Generovanie postupnosti

Podobne ako predikcie, ale nepredikujeme iba ďalšiu hodnotu postupnosti, ale celé pokračovanie. Je to komplexnejšia úloha. Napríklad 23123123123123123123... pokračovaním by bolo 123123123... Reálne úlohy sú komplexnejšie.

KAPITOLA 1. ÚVOD

7

Trénovací algoritmus, ktorým sa trénujú rekurentné neurónové siete je spätné šírenie chyby v čase (angl. backpropagation through time). Pri použití tohto algoritmu sa sieť rozvíja v čase, t.j. rozvinutá sieť má toľko skrytých vrstiev, koľko je vstupov T vo vstupnej postupnosti. Takáto sieť sa potom trénuje podobne ako klasická nerekurentná dopredná sieť s T skrytými vrstvami pomocou jednoduchého spätného šírenia chyby. Aktivity neurónov kontextovej vrstvy sú na začiatku kažého cyklu trénovania nastavené na hodnotu 0.5.



Obr. 1.6: Rozvinutá Elmanova siet

Výstup takejto siete počítame pomocou vzťahu:

$$o_k^{(T+1)} = f(\sum_{j=1}^J m_{kj}^{T+1} y_j^{T+1})$$
(1.12)

$$y_j^{t+1} = f(\sum_{i=1}^{J} w_{ji}^t y_i^t + \sum_{i=1}^{I} v_{ji}^t x_i^t)$$
(1.13)

Chybová funkcia v čase T+1

$$E(T+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} (d_k^{(T+1)} - o_k^{(T+1)})^2$$
 (1.14)

Zmena váh medzi vstupnou a výstupnou vrstvou:

$$\Delta m_{kj}^{T+1} = -\alpha \frac{\partial E(T+1)}{\partial m_{kj}} = \alpha \delta_k^{T+1} y_j T + 1 \tag{1.15}$$

$$\delta_k^{T+1} = (d_k^{T+1} - o_k^{T+1})f'(net_k^{T+1})$$
(1.16)

Váhy medzi rozvinutými vrstvami a medzi vstupom a rozvinutými vrstvami sa upravujú pomocou vzťahov:

$$\Delta w_{hj}^{T+1} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \Delta w_{hj}^{t}}{T}$$
 (1.17)

$$\Delta w_{ji}^{T+1} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \Delta w_{ji}^{t}}{T}$$
 (1.18)

1.2.5 Samoorganizujúce sa mapy

Ďalším typom rekurentných neurónových sietí, ktorých pamäťovú hĺbku budeme skúmať v našej práci, sú rekurentné samoorganizujúce sa mapy, ktoré sú rozšírením základnej nerekurentnej verzie samoorganizujúcich sa máp (ďalej iba SOM). Preto najskôr popíšem základný model nerekurentný model SOM.

SOM je typ neurónovej siete, v ktorej sú jednotlivé neuróny usporiadané do (väčšinou) dvojrozmernej štvorcovej mriežky. Samoorganizujúce sa mapy (ďalej iba SOM) sú trénované bez učiteľa, čiže váhy jednotlivých neurónov sú upravované iba na základe dát z trénovacej množiny. Čo je zaujímavé na spôsobe trénovania SOM je, že je veľmi podobný učeniu neurónov v mozgovej kôre živočíchov. Je to biologicky inšpirovaný model. Špeciálnou vlastnosťou SOM je, že po natrénovaní zobrazí trénovaciu množinu so zachovanou topológiou. To znamená, že blízke (podobné) vstupy aktivujú blízke neuróny v sieti. Vzdialenosť dvoch neurónov je ich euklidovská vzdialenosť v mriežke. Takéto topologické zobrazenie dát sa vyskytuje aj v biologických neurónových sieťach.

1.2.6 Trénovanie

Proces trénovania SOM je zložený z dvoch častí:

- hľadanie víťaza
- adaptácia váh neurónov

Na začiatku su váhy medzi vstupom a neurónmi v mriežke inicializujú na náhodné hodnoty z určitého intervalu. V každom kroku trénovania nájdeme najskôr víťazný neurón pre daný vstup. Postupne počítame euklidovské vzdialenosti vstupu od váhového vektora jednotlivých neurónov. Víťazom je neurón, ktorý je najbližšie k vstupu (má najkratšiu vzdialenosť).

$$i^* = argmin_i ||x - w_i|| \tag{1.19}$$

Druhým krokom je adaptácia váh víťazného neurónu a jeho okolia. Pravidlo pre zmenu váh neurónov:

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \alpha(t)h(i^*, i)([x(t) - w_i(t)])$$
(1.20)

Váhové vektory víťazného neurónu a jeho topologických susedov sa posúvajú smerom k aktuálnemu vstupu. $\alpha(t)$ predstavuje rýchlosť učenia, ktorá môže klesať v čase alebo môže zostať konštantná. Na funkcii, ktorá je použitá pre α , v praxi veľmi nezáleží, mala by to byť nejaká monotónne klesajúca funkcia (napríklad exponenciálna funkcia). $h(i^*, i)$ je funkcia okolia (tzv. excitačná funkcia), ktorá definuje koľko neurónov v okolí

vítaza bude trénovaných a do akej miery. Inými slovami, excitačná funkcia definuje rozsah kooperácie medzi neurónmi. Používajú sa najčastejšie 2 typy okolia:

• pravouhlé(štvorcové) okolie

$$N(i^*, i) = \begin{cases} 1 & \text{ak } d_M(i^*, i) \le \lambda(t) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

 $d_M(i^*,i)$ je Manhattanovská vzdialenosť (L1 norma) medzi neurónmi v mriežke mapy. Kohonen zistil, že najlepšie výsledky sú dosiahnuté, keď sa veľkosť okolia s časom postupne zmenšuje.

gaussovské okolie

$$N(i^*, i) = \exp^{-\frac{d_E^2(i^*, i)}{\lambda^2(t)}}$$
(1.21)

 $d_E(i^*,i)$ je euklidovská vzdialenosť (L2 norma) neurónov v mriežke. Funkcia $\lambda^2(t)$ sa s časom postupne zmenšuje až k nule. Táto funkcia slúži na zmenšovanie okolia víťazného neurónu počas trénovania, čím sa zabezpečí ukončenie učenia.

 $[x(t) - w_i(t)]$ je euklidovská vzdialenosť medzi vstupným vektorom a váhovým vektorom.

Na vyhodnocovanie trénovania SOM používame kvantizačnú chybu. Pri SOM je kvantizačná chyba euklidovská vzdialenosť vstupu od váh víťazného neurónu. Po každej epoche učenia vieme určiť celkovú kvantizačnú chybu siete pre danú trénovaciu množinu. Pre každý príklad z trénovacej množiny vypočítame kvantizačnú chybu a nakoniec spravíme priemer kvantizačných chýb. Táto by mala po každej epoche učenia (po natrénovaní a adaptácii váh na celej trénovacej množine) postupne klesať k určitému minimu.

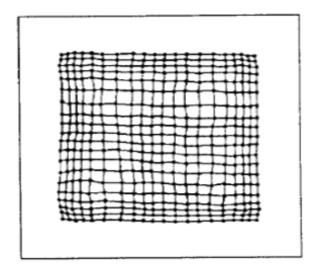
Pri učení rozlišujeme všeobecne dve fázy:

- fáza usporiadavania s časom klesá veľkosť okolia víťazných neurónov
- fáza dolaďovania veľkosť okolia sa zafixuje na nejakej malej hodnote až pokým učenie neukončí

Kohonen odhadol na základe pokusov, že počet iterácií trénovania, by mal byť rádovo 500-násobok počtu neurónov v sieti. Rovnako sa pozorovaním zistilo, že na fázu doladenia je lepšie ponechať viac času ako na fázu usporiadavania.

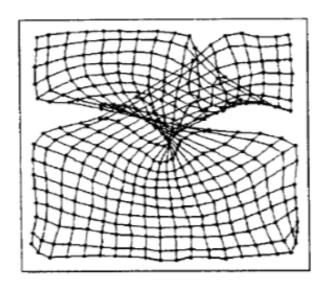
Počas trénovania SOM môžu nastať špeciálne situácie:

• Sieť je neúplne rozvinutá - príliš rýchle zmenšovanie rýchlosti učenia α



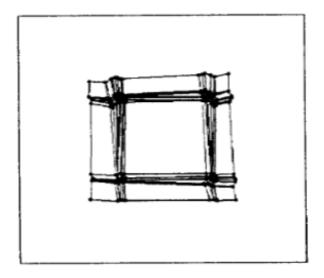
Obr. 1.7: Neúplne rozvinutá sieť

 $\bullet\,$ Motýlí efekt - príliš rýchle zmenšovanie okolia $\lambda\,$



Obr. 1.8: Motýlí efekt

 $\bullet\,$ Pinch efekt - príliš pomalé zmenšovanie okolia $\lambda\,$



Obr. 1.9: Pinch effect

1.2.7 Využitie SOM

- SOM môžeme využiť na mapovanie viacrozmerných dát do 2D môžeme ju použiť na redukciu dimenzie dát.
- SOM je aj vektorovým kvantizátorom. Pri vektorovej kvantizácii nahrádzame množinu vektorov vstupných dát menšou množinou vektorov (nazývaných aj prototypy). V SOM sú prototypmi váhové vektory. Toto je možné využiť napríklad na kompresiu dát. Vďaka vektorovej kvantizácii stačí uchovať iba množinu prototypov a informáciu o tom, ktorý vstupný vektor patrí ku ktorému prototypu (centru). Ku každému centru sa potom priradí množina vstupných vektorov, ktoré ku nemu majú bližšie ako ku akémukoľvek inému centru (používa sa euklidovská vzdialenosť). Vektorou kvantizáciou teda rozdelíme vstupný priestor an disjunktné oblasti, ktoré tvoria tzv. Voronoiho mozaiku.

1.2.8 Rekurentné modely

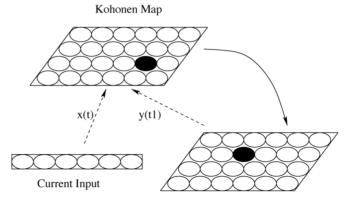
Rekurentné samoorganizujúce sa mapy sú modifikáciou nerekurentnej SOM. Rozdiel oproti nerekurentnej verzii je v tom, že vstupy sú porovnávané nielen s váhovým vektorom jednotlivých neurónov, ale aj s kontextom. Rôzne verzie rekurentných SOM sa líšia v type kontextu, ktorý je v nich použítý. V kontexte rekurentnej SOM je spravidla uložené vlastnosti siete z minulého časového kroku alebo kombinácia minulých vstupov.

V mojej práci budem porovnávať 2 základné typy rekuretných SOM.

• Recursive SOM (RecSOM): Pri RecSOM je kontextom celá kópia aktívacií neurónov z minulého kroku. Merge SOM (mSOM): Pri mSOM sú kontextom vlastnosti víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku učenia.

1.2.9 RecSOM

Pri RecSom je SOM algoritmus použítý rekurzívne na vstupný vektor x(t) a tiež reprezentáciu mapy z minulého kroku y(t-1). [9]



Copy of the map at the previous time step

Obr. 1.10: Architektúra RecSOM

V RecSOM je každý vstup asociovaný k stavom z predchádzajúcich krokov a preto každý neurón reaguje na sekvenciu vstupov. Prerušované čiary predstavujú trénovateľné spojenia.

Každý neurón má 2 váhové vektory. Váhový vektor w_i , ktorý je porovnávaný so vstupným vektorom x(t) a vektor kontextových váh c_i , ktorý je porovnávaný s kontextom z predchádzajúceho kroku y(t-1). Kedže chceme aby boli dopredné a spätné spojenia v RecSOM homogénne, celkovú chybu určíme ako váhovaný súčet druhých mocnín kvantizačných chýb oboch prípadov. Chyba je vlastne váhovaný súčet euklidovských vzdialeností vstupu od váhového vektoru a kontextu z predchádzajúceho kroku od kontextových váh.

N je počet neurónov v sieti (pretože kontextom je kópia celej mapy)

$$d_i = (1 - \alpha) \cdot ||x(t) - w_i||^2 + \alpha \cdot ||y(t - 1) - c_i||^2 \quad c \in \mathbb{R}^N$$
 (1.22)

 α a β sú parametre, ktoré určujú akú váhu pri trénovaní bude mať kontext a akú váhu bude mať aktuálny krok.

Kontextom je kópia aktivácii všetkých neurónov z predchádzajúceho kroku.

$$y(t) = [y_1(t-1), ..., y_N(t-1)] \quad c, r \in \mathbb{R}^N$$
 (1.23)

Hodnota aktivácie pre určitý neurón je vyjadrená vzťahom:

$$y_i = \exp(-d_i) \tag{1.24}$$

Pravidlo pre zmenu váh neurónov (podobné ako pri nerekurentnej SOM):

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \alpha(t)h(i^*, i)[x(t) - w_i(t)]$$
(1.25)

Pre pre zmenu kontextových váh, platí to isté pravidlo ako pre normálne váhy, iba je aplikované na kontextové vektory:

$$c_i(t+1) = c_i(t) + \alpha(t)h(i^*, i)[y(t-1) - c_i(t)]$$
(1.26)

Pri RecSom majú kontext aj kontextové váhy veľkú dimenziu (rovnú počtu neurónov v sieti, keďže kontextom je vektor aktivácii všetkých neurónov z predchádzajúceho kroku), čo spomaľuje výrazne proces trénovania takejto siete. Výhodou môže byť, že kontext RecSOM obsahuje veľa informácií a teda môže mať v niektorých prípadoch lepšie vlastnosti. Jedným z cieľov našej práce je zistiť či je skutočne tento rozšírený kontext potrebný a či má nejaký vplyv na pamäťovú hĺbku.

$1.2.10 \quad mSOM$

mSOM je podobná recSOM, líši sa v reprezentácii kontextu. [6]

Chybu (vzdialenosť vstupu od neurónu) vyjadríme vzťahom (podobne ako pri rec-SOM), d je dimenzia vstupov:

$$d = \alpha \cdot ||s(t) - w_i||^2 + \beta \cdot ||r(t) - c_i||^2 \quad x, c \in \mathbb{R}^d$$
 (1.27)

Kontextom pri mSOM nie je kópia aktivácii neurónov z predchádzajúceho kroku, ako je tomu pri RecSom. Kontextom pri mSOM je zlúčenie (lineárna kombinácia) vlastností víťaza z predchádzajúceho kroku. (Odtiaľ je odvodený názov - "zlučovacia samoorganizujúca sa mapa" - Merge SOM). Kontext mSOM vyjadríme vzťahom:

$$y(t) = \beta \cdot w_{i^*}(t-1) + (1-\beta) \cdot y_{i^*}(t-1)$$
(1.28)

 β je zlučovací parameter, ktorý určuje váhu kombinovaných vlastností víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku. Typická hodnota tohto parametra počas trénovania je $\beta=0.5$, čiže taká, aby obe zložky mali približne rovnakú váhu. Kedže vlastnosti víťazného neurónu sú reprezentované jeho váhovým vektorom, kontextom pri mSOM je lineárna kombinácia váhového vektora víťazného neurónu a kontextového vektora víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku. Pravidlá pre adaptáciu váh váhového vektora a kontextových váh zostávajú rovnaké ako pri RecSom, resp. SOM. Líšia sa iba v kontexte.

$$w_i(t+1) = w_i(t) + \alpha(t)h(i^*, i)[s(t) - w_i(t)]$$
(1.29)

Pravidlo pre zmenu kontextových váh:

$$c_i(t+1) = c_i(t) + \alpha(t)h(i^*, i)[y(t-1) - c_i(t)]$$
(1.30)

Kontext pri štandartnej mSOM obsahuje odlišné informácie ako pri RecSom. Na rozdiel od RecSom, kde kontext tvorí vektor aktivít všetkých neurónov z predchádzajúceho kroku, pri mSOM je kontext tvorený iba lineárnou kombináciou vlastností vítazného neurónu z minulého kroku. Z toho vyplýva, že kontext v mSOM uchováva menšie množstvo informácii ako kontext v RecSOM. Má však značne menšiu dimenziu (dimenzia kontextu pri mSOM je rovnaká ako dimenzia vstupov), vďaka čomu je trénovanie mSOM rýchlejšie (výpočtovo menej náročné) a teda je možné experimentovať s viacrozmernými mapami, vyskúšať viac epoch trénovania, alebo použiť väčšie trénovacie množiny.

Cieľom našej práce je aj zistiť, či redukovaný kontext pri mSOM je postačujúci a či sme s ním schopní dosiahnuť podobné výsledky ako pri recSOM, kde kontext tvorí aktivácia všetkých neurónov v sieti.

Rozdielne typy kontextov a ich vplyv na pamäťovú hĺbku rekurentných neurónových sietí je hlavným cieľom mojej diplomovej práce.

Kapitola 2

Implementácia

2.1 Implementácia neurónových sietí

Pre potreby merania pamäťovej hĺbky sme potrebovali veľmi modifikované implementácie neurónových sietí, preto sme sa rozhodli pre ich vlastnú implementáciu. Vlastná implementácia nám umožnila experimentovať s rôznymi typmi kontextov a rôznymi spôsobmi trénovania sietí, čo s existujúcimi implementáciami bolo veľmi nepraktické a v istých prípadoch nemožné. Medzi špeciálne prípady patrí napríklad použitie modifikovaných kontextov, úprava excitačnej funkcie počas trénovania (zmenšovanie okolia), dynamické znižovanie rýchlosti učenia siete počas trénovania/po jednotlivých epochách trénovania, vytvorenie pamäťového okna v jednotlivých neurónoch a samotné meranie pamäťovej hĺbky.

2.2 Voľba programovacieho jazyka

Ako implementačný jazyk sme zvolili Python pretože preň existuje veľké množstvo kvalitných knižníc pre prácu s maticami a vektormi, či vykresľovanie grafov. Python je veľmi populárny v oblasti strojového učenia. Ďaľšou výhodou je jednoduché spustenie skriptov na linuxovom serveri, čo urýchľuje samotné trénovanie a hľadanie najoptimálnejších parametrov a umožnilo nám otestovať veľké množstvo kombinácii rôznych parametrov.

2.2.1 Python

Python je interpretovaný vysokoúrovňový programovací jazyk. Python kladie dôraz na jednoduchosť a čitateľnosť programov, ktoré sú v ňom naprogramované. Je to jazyk, ktorý využíva dynamické typovanie a automatizovanú správu pamäte. Je to tiež multiplatformový jazyk a beží na všetkých bežne používaných platformách (Windows, Mac, Linux)

2.3 Použíté knižnice

Používame štandartný set knižníc pre implementáciu neurónových sietí: numpy, scipy. Na vykresľovanie a vizualizáciu dát používame knižnice matplotlib a seaborn.

2.3.1 Numpy

Je knižnica, ktorá uľahčuje prácu s maticami, používaná je takmer všetkými existujúcimi knižnicami, ktoré implementujú modely strojového učenia v Pythone. Má vysokú úroveň optimalizácie a požíva veľmi optimalizované funkcie na prácu s maticami, ktoré sú naprogramované v jazyku C.

2.3.2 Matplotlib

Je knižnica na vykresľovanie grafov a vizualizáciu dát.

2.3.3 Seaborn

Je nadstavbou Matplotlib knižnice a zjednodušuje vykresľovanie rôznych grafov.

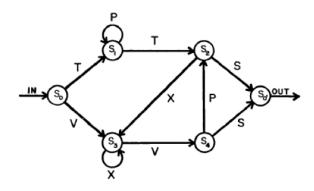
2.4 Algoritmus hľadania najdlhšej spoločnej podpostupnosti viacerých reťazcov

Na hľadanie najdlhšej spoločnej podpostupnosti viacerých refazcov som použil relatívne jednoduchý naivný prístup. Z každej sekvencie sme si vytvorili všetky možné n-gramy (podpostupnosti), ktoré si ukladáme do množiny. Pre každú sekvenciu v množine vytvoríme takúto množinu n-gramov. Potom spravíme prienik týchto množín a dĺžka najdlhšieho refazca z tohto prieniku je dĺžka najdlhšej spoločnej podpostupnosti. Ide o naivný algoritmus, ktorý by bol pri dlhých refazcoch pamäťovo aj výpočtovo neoptimálny, avšak pre potreby merania pamäťovej hĺbky neurónových sietí je postačujúci a dostatočne efektívny, keďže sekvencie v pamäťových oknách jednotlivých neurónov nie sú dlhé (do 30 znakov maximálne) Použitie tohto algoritmu malo veľmi malý vplyv na rýchlosť trénovania.

2.5 Reberov automat

Na vytvorenie trénovacej množiny, ktorá pozotáva z reberových retazcov sme si vytvorili vlastnú implementáciu pravdepodobnostného nedeterministického konečného

reberového automatu, pomocou ktorého generujeme reberové reťazce. Každý stav okrem počiatočného a konečného stavu má práve dva prechody do ďaľšieho stavu, pričom v každom stave je 50% šanca na prechod do jedného z možných stavov.



Obr. 2.1: Schéma reberovho automatu

Kapitola 3

Analýza podobných prác

3.1 Recursive Self-organizing Map as a Contractive Iterative Function System

Táto práca sa zaoberá reprezentáciou receptívneho poľa v RecSOM natrénovanej na korpuse anglického textu. Autori zistili, že RecSOM trénovaná na Ukazuje, že RecSOM môže vstupy organizovať vo svojom receptívnom poli ako Markovovskú príponovú charakteristiku. [8]

3.2 Markovnian Architextural Bias of Reccurent Neural Networks

[7]

3.3 Graded State Machines: The Representation of Temporal Contingencies in Simple Recurrent Networks

[5] Táto práca sa zaoberá analýzou vlastností Elamnovej rekurentnej siete. Ukazuje, ako si sieť počas trénovania na určitej sekvencii dát vytvára vnútornú reprezentáciu, ktorá ukkazuje podobnosti a zároveň rozdiely medzi jednotlivými vzstupmi.

3.4 Unsupervised Recursive Sequence Processing

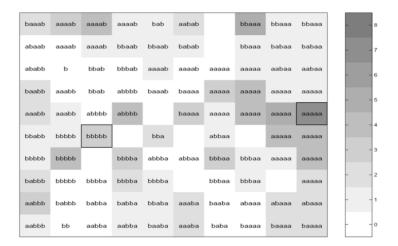
Kapitola 4

Návrh riešenia

Na to aby sme boli schopní merať a porovnávať pamäťovú hĺbku sietí, museli sme si zvoliť vhodné trénovacie dáta, zadefinovať si spôsob merania pamäťovej hĺbky, sietí a tiež spôsob vyhodnocovania výsledkov.

4.1 Metóda uchovávania informácii v SOM

Na to aby sme boli schopní odmerať pamäťovú hĺbku SOM, potrebujeme si pamätať v jednotlivých neurónoch informáciu o tom, pre ktoré vstupy bol daný neurón víťazom. Každý neurón bude mať množinu vstupov, v ktorej si pamätá pre aký vstup bol počas trénovania víťazom. Nestačí však ukladať iba samotný vstup, pretože by sme prišli o historický kontext pre daný vstup, ktorý je nevyhnutný pri určovaní pamäťovej hĺbky. Preto si neukladáme iba aktuálny vstup (aktuálne písmeno), ale k posledných písmen z trénovacej sekvencie. Toto sa nazýva posuvné okno (ang. sliding window) na vstupnej množine. Všetky takéto množiny spolu tvoria dokopy tzv. receptívne pole SOM. Po natrénovaní siete viem z týchto okien vytvoriť hitmapu, ktorá nám vizualizuje, pre ktoré vstupy (resp. posuvné okná) boli neuróny víťazmi.



Obr. 4.1: Ukážka hitmapy

4.2 Určovanie hĺbky pamäte rekurentnej SOM

Hĺbku pamäte pre konkrétny neurón v siete určíme ako dĺžku najdlhšej spoločnej podpostupností písmen v množine posuvných okien neurónu, pre ktoré bol neurón vítazom. Dĺžku najdlhšej podpostupnosti budeme určovať od konca sekvencií v množine. Pamätovú hlbku celej siete následne určíme ako vážený priemer nameraných pamätových hĺbok jednotlivých neurónov, kde váhami bude celkový počet podpostupností v jednotlivých množinách (teda koľko krát bol nejaký neurón víťazom pre nejaký vstup). Neuróny, ktoré neboli víťazom pre žiadny vstup sa vo výpočte nezapočítavajú (majú nulovú váhu), čiže ako keby neexistovali a nemajú žiadny vplyv na pamäťovú hĺbku siete. Neuróny, ktoré boli vítazom iba pre jeden vstup, ich pamäťová hlbka je rovná dĺžke uloženej sekvencie, čiže dĺžka pamäťového okna neurónu. Vo výslednej pamäťovej hĺbke majú však takéto neuróny, ktoré boli víťazom iba pre jeden vstup, nízku váhu vzhľadom na iné neuróny. Preto priemer pamäťových hĺbok jednotlivých neurónov musí byť vážený, aby neuróny, ktoré boli víťazmi pre väčší počet vstupov mali vyššiu váhu vo výslednej pamäťovej hĺbke siete, ako neuróny, ktoré boli víťazmi pre menší počet vstupov. Po každej trénovacej epoche (prechode trénovacou množinou) budeme vedieť určit veľkosť pamätovej hĺbky mapy.

Vďaka tomu, že neuróny rekurentných sietí majú okrem normálnych váh aj kontextové váhy a samotný kontext, ktoré uchovávajú informácie z predchádzajúcich krokov, môže sa stať, že rovnaké písmeno zo vstupnej sekvencie bude mať rôzne víťazné neuróny počas trénovania. Táto vlastnosť rekurentných SOM umožňuje to, že majú pamäťovú hĺbku.

Samotná pamäťová hlbka je relatívna a závisí aj od veľkosti posuvného okna (sliding window). Veľkosť posuvného okna musí byť dostatočne veľká. Hľadanie optimálnej veľkosti posuvného okna je súčasťou nášho experimentu.

4.3 Pamäťová hĺbka SRN s Elamnovou architektúrou

SRN s Elmanovou architektúrou sme chceli porovnať s rekurentnými SOM najmä z toho dôvodu, že má niektoré vlastnosti spoločné so SOM. Napríklad skrytú v SRN si môžeme predstaviť ako viacrozmernú SOM, na ktorú sa zobrazujú vstupy do vysokorozmerného priestoru. Prekážkou je, že odmerať a hlavne porovnať pamäťovú hĺbku takejto siete s inými sieťami nie je jednoduché, keďže má úplne odlišnú architektúru. Pokúšali sme sa nájsť spôsob ako odmerať pamäťovú hĺbku takejto siete. Navrhli sme riešenie pomocou, ktorého vieme vizualizovať vzdialenosti medzi stavmi na kontextovej vrstve siete, ale na základe týchto informácii sme nedokázali rozumne kvantifikovať pamäťovú hĺbku takejto siete a teda ani ju porovnať s rekurentnými SOM.

4.4 Výber vhodných trénovacích dát

4.5 Návrh experimentu

Experiment sme rozdelili na 2 hlavné časti. Prvá časť experimentu sa venuje meraniu pamäťovej hĺbky rekurentných SOM a hľadanie optimálnych parametrov, pri ktorých dosahujú najvyššie hodnoty pamäťových hĺbok. V tejto časti sa venujeme tiež analýze výsledkov a hľadaniu súvislostí medzi veľkosťou pamäťovej hĺbky a hodnotami parametrov. Na záver sme spravili porovnanie pamäťových hĺbok všetkých testovaných typov rekurentných SOM s použitím optimálnych váh a fixnou inicializáciou váh. V

druhej časti experimentu sa venujeme pokusu s SRN a vizualizácii vnútorných stavov siete vo forme dendogramu a vyhodnoteniu výsledkov.

Experiment prebieha nasledujúcim spôsobom:

- Výber vhodnej trénovacej sekvencie, počtu epôch trénovania a vhodnú veľkosť pamätového okna
- Trénovanie siete na všetkých kombináciach týchto dvoch parametrov
- Ukladanie hodnot pamäťovej hĺbky do súboru
- Vykreslenie heatmapy, ktorá znázorňuje aká bola pamäťová hĺbka pre rôzne kombinácie parametrov.
- Vyhodnotenie a analýza výsledkov

Kapitola 5

Experiment

Experimentom v našej práci je meranie hĺbky pamäte a vyhodnotenie vplyvu rôznych hyper parametrov a typov kontextov na hĺbku pamäte rekurentných SOM. Cieľom nášho experimentu je aj nájdenie optimálnej kombinácie parametrov pre všetky typy porovnávaných sietí a ich vzájomné porovnanie.

5.1 Výber konkrétnych trénovacích množín pre experiment

Trénovacie množiny sme sa snažili zvoliť takým spôsobom aby sme na nich vedeli otestovať rôzne vlastnosti rekurentných sietí.

Pre náš experiment sme vybrali 3 trénovacie množiny. Hlavnou trénovaciou množinou, ktorú používame v našom experimente je náhodne generovaná sekvencia dlhá 1000 znakov, ktorá pozostáva z písmen *abcd*. Táto sekvencia obsahuje dostatočné množstvo regularít a malé množstvo unikátnych znakov a teda aj siete s relatívne malým počtom neurónov sa na nej vedia dobre natrénovať. Používame ju pri hľadaní optimálných parametrov pre jednotlivé typy sietí.

Ako druhú trénovaciu množinu sme zvolili sekvenciu dlhú 1000 znakov, pričom znaky sú generované špeciálnym pravdepodobnostným stavovým automatom (Reberov automat). Automat generuje znaky z množiny znakov *ptvxse*. Táto sekvencia je pre SOMky ťažšia na naučenie a používame ju na overenie toho, či sú siete schopné natrénovať sa aj na zložitejších nenáhodných sekvenciách. Pri SRN je použitie tejto trénovacej množiny zaujímavejšie, vďaka vlastnostiam, ktoré SRN má.

Tretí dataset je úryvok z korpusu anglického textu. Keďže ide o reálny zmysluplný text, nie je to úplne náhodná postupnosť znakov, ale obsahuje určité vzory a opakovania, ktoré by siete mohli vedieť zachytiť vo svojej vnútorenej reprezentácii. Tento dataset používame čisto iba na overenie, či sú SOMky schopné zachytiť vzory aj v prirodzenom jazyku a teda či sú použiteľné aj pre reálne dáta.

5.2 Hľadanie optimálnych parametrov sietí

Na to aby sme mohli porovnať hĺbku pamäte rôznych typov sietí museli sme najskôr nájsť kombináciu parametrov pri ktorých daný typ siete dosahuje najnižšiu kvantizačnú chybu a najvyššie hodnoty pamäťových hĺbok.

Pri trénovaní samoorganizujúcich sa máp môžeme meniť a optimalizovať veľké množstvo parametrov.

Ako prvé sme museli správne nastaviť veľkosť okolia víťazného neurónu. Veľkosť okolia by nemala byť počas trénovania konštantná, ale mala by sa postupne zmenšovať. Vo fáze doľaďovania by mala byť čo najmenšia. Excitáciu neurónu v určitom kroku trénovania určuje excitačná funkcia. Zvolili sme spojitú excitačnú funkciu so spojitým gausovským okolím.

$$N(i^*, i) = \exp^{-\frac{d_E^2(i^*, i)}{\lambda^2(t)}}$$
(5.1)

Najvyššiu hodnotu má excitačná funkcia pre víťazný neurón, hodnota excitačnej funkcie pre ostatné neuróny v sieti závisí od ich euklidovskej vzdialenosti v mriežke neurónov od ich víťaza. Veľmi vzdialené neuróny majú takmer nulovú excitáciu a updatujú svoje váhy minimálne. Dôležitý je parameter λ , ktorým znižujem veľkosť okolia postupne v jednotlivých epochách. Najlepšie výsledky (najnižšie hodnoty kvantizačnej chyby) sme dosiahli pri použití nasledujúceho vzťahu pre výpočet hodnoty tohto parametra v jednotlivých epochách:

$$\lambda(t) = \lambda_i \cdot (\lambda_f / \lambda_i)^{t/t_{max}} \tag{5.2}$$

Kde λ_f je konštanta, ktorá určuje rýchlosť klesania. λ_i je polovica maximálnej vzdialenosti dvoch neurónov v mape, resp. vzdialenosť dvoch neurónov na koncoch diagonály mriežky neurónov. t je číslo aktuálnej epochy trénovania. Parametrer t_{max} je celkový počet epôch trénovania.

Rovnako ako okolie aj rýchlosť učenia siete by mala počas procesu trénovania postupne klesať. Na začiatku chceme aby sa váhy menili čo najviac a ku koncu učenia chceme aby sa doľadovali iba detaily. Máme na výber 2 možnosti. Postupné znižovanie rýchlosti učenia v rámci jednej epochy, alebo postupné znižovanie rýchlosti učenia v jednotlivých epochách, pričom počas každej epochy je rýchlosť učenia konštantná. V naších experimentoch sme dosiahli lepšie výsledky postupním znižovaním rýchlosti učenia v rámci jednej epochy. Hodnoty rýchlosti učenia máme z intervalu < 0, 1 >.

Vhodnú veľkost posuvného okna sme určili postupním zvyšovaním jeho veľkosti pokiaľ pamäťová hĺbka stúpala. Zaujímavosť, ktorú sme zistili počas experimentovania s veľkosťou pamäťového okna, bolo že ak zvolíme príliš veľké posuvné okno, výsledná pamäťová hĺbka môže byť skreslená. Pri veľkom pamäťovom okne nám môžu neuróny, ktoré majú vo svojom pamäťovom okne uloženú iba jednu sekvenciu skreslovať výslednú pamäťovú hĺbku, pretože pamäťová hĺbka takýchto neurónov je rovná veľkosti

posuvného okna. Z tohto dôvodu nie je dobré nastaviť veľkosť pamäťového okna na príliš veľkú hodnotu, ale treba určiť optimálnu hodnotu.

Rozmery mapy a počet trénovacích epôch sme zvolili na základe vlastností zvolenej trénovacej množiny. Tiež sme museli brať do úvahy aj časovú náročnosť trénovania sietí (najmä pri RecSOM). Potrebovali sme aby sa sieť dokázala správne natrénovať na danej trénovacej množine a zároveň, aby nám experimenty dobehli v rozumnom čase. Keďže SOMky sa dokážu natrénovať relatívne rýchlo, zvolili sme väčšie rozmery mapy (30x30) a o niečo nižší počet trénovacích epôch (10). S touto kombináciou sme dosiahli nízke hodnoty kvantizačných chýb a dobré hodnoty pamäťových hĺbok.

Pri určovaní vhodnej veľkosti siete je to vždy kompromis medzi rozlišovaciou schopnosťou jednotlivých vstupov, schopnosťou zachovať podobné vstupy topologicky čo najbližšie pri sebe a výpočtovou náročnosťou.

5.2.1 Parametre pre RecSOM

Pri RecSOM kontext tvorí vektor aktivít neurónov z predchádzajúceho kroku. Aktivita neurónu y je určená vzťahom:

$$y_i = \exp\left(-d_i\right) \tag{5.3}$$

Neobsahuje žiadny meniteľný parameter. Hodnota d_i je súčet vzdialenosti vstupného vektora od váhového vektora a kontextového vektora od kontextového vektora. So zmenšujúcou sa vzdialenosťou excitácia neurónu rastie exponenciálne, čo znamená, že víťaz a susedné neuróny budú mať najvyššiu excitáciu a vzdialené neuróny budú mať malú excitáciu. Výpočet kontextu pri RecSOM nevieme ovplyvnovať žiadnym parametrom.

Môžeme však meniť parameter α , ktorý sa používa pri samotnom výpočte vzdialenosti vstupu od váhového vektora a kontextu od vkontextového vektora. Tento parameter určuje váhu aktuálneho vstupu a váhu kontextu vo výslednej vzdialenosti.

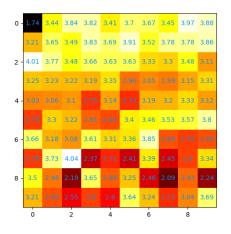
$$d_i = (1 - \alpha) \cdot ||x(t) - w_i||^2 + \alpha \cdot ||y(t - 1) - c_i||^2 \quad c \in \mathbb{R}^N$$
 (5.4)

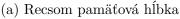
V našich experimentoch sme testovali všetky hodnoty parametra α z uzavretého intervalu < 0, 1 > s krokom 0.01 (dokopy 100 experimentov).

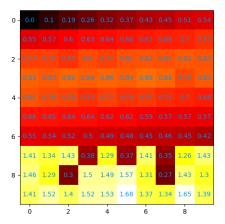
Parameter	Hodnota
alpha	0 - 1 (krok: 0.01)
size	30x30
počet epôch	10
veľkosť posuvného okna	15

Tabuľka 5.1: Trénovacie parametre RecSOM siete

5.2.2 Výsledky pre RecSOM







(b) Recsom kvantizačné chyby

Obr. 5.1: Heatmapy pre Recsom

5.2.3 Analýza výsledkov RecSOM

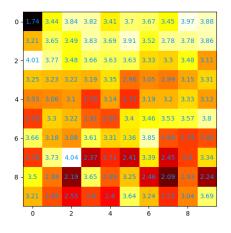
Hodnoty na x-ovej osy sú hodnoty α a na y-ovej osy sú hodnoty $(\alpha - 1)$. Čísla v jednotlivých políčkach sú pamäťové hĺbky pre danú kombináciu parametrov. Čím je farba políčka svetlejšia, tým je pamäťová hĺbka vyššia. Čím je farba tmavšia, tým je hodnota nižšia.

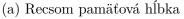
Ak sú hodnoty oboch parametrov nulové, vtedy sieť dosahuje nízku hodnotu pamätovej hĺbky pretože sa nedokáže správne natrénovať.

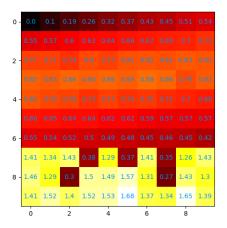
RecSOM dosiahla najvyššiu hodnotu pamäťovej hĺbky pri hodnote parametra $\alpha = 0.28$, resp. $(1 - \alpha) = 0.72$. To znamená, že vo výpočte vzdialenosti má vzdialenosť od vstupu od váhového vektora váhu 0.72 a vzdialenosť kontextového vektora od kontextových váh má váhu 0.28. Hodnota pamäťovej hĺbky, ktorú recSOM dosiahla je priemerná pričom samotné trénovanie bolo relatívne pomalé. Všeobecne vo výsledkoch vidíme, že pamäťová hĺbka RecSOM nie je veľmi ovplyvňovaná hodnotou parametra α a rozdiely nie sú veľké. Je to pravdepodobne dané tým, že RecSOM má veľmi bohatý kontext, v ktorom sa uchováva veľké množstvo informácii (aktivita celej mapy). Skutočnosť že

pamäťová hĺbka RecSOM nie je signifikantne ovplyvnená váhou kontextu nám napovedá aj to, že informácie uchovávané v RecSOM kontexte nie sú relevantné pre hodnotu pamäťovej hĺbky a môžu mať skôr negatívny vplyb.

Pamäťovú hĺbku RecSOM ovplyvňuje váha aktuálneho vstupu (hodnota $(\alpha - 1)$), čím je vyššia tým je väčšia pravdepodobnosť, že sieť dosiahne horšiu hodnotu pamäťovej hĺbky. Rovnako váha aktuálneho vstupu ovplyvňuje aj samotné učenie siete, ako je možno vidieť na heatmape kvantizačných chýb. Pri hodnotách > 0.6 sa už sieť v mnohých prípadoch nedokázala natrénovať správne.







(b) Recsom kvantizačné chyby

Obr. 5.2: Heatmapy pre Recsom

5.2.4 Activity RecSOM

Keďže pri obyčajnej verzii RecSOM nevieme ovplyvniť žiadnym parametrom výpočet kontextu. Preto sme sa rozhodli vytvoriť si modifikovanú verziu RecSOM. Rozdiel oproti pôvodnej verzii je v spôsobe počítania aktivácie neurónov v kontexte. Upravili sme pôvodný vzorec

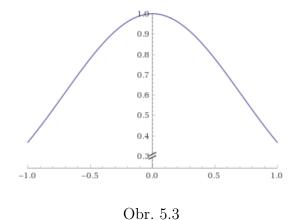
$$y_i = \exp\left(-d_i\right) \tag{5.5}$$

tak aby obsahoval parameter β .

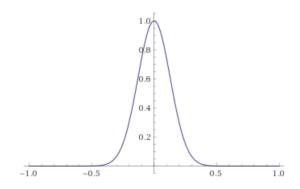
$$y_i = \exp^{(-\beta \cdot d^2)} \tag{5.6}$$

Hodnota d^2 je umocnená euklidovská vzdialenosť neurónu v mriežke od víťazného neurónu. Na výpočet aktivity neurónu teda používame gaussovskú funkciu, ktorej "strmosťövplyvňujeme pomocou β parametra. To znamená, že ovplyvňujeme rozdiely medzi hodnotami aktivácie víťazného neurónu a susedných neurónov. Je to v podstate excitačná funkcia pre výpočet kontextu.

Pre malé hodnoty parametra β hodnoty aktivácie neurónov so stúpajúcou vzdialenosťou od víťaza klesajú pomaly. Graf pre $\beta=1$:



Čím je β parameter väčší tým je táto funkcia strmšia, čo znamená, že víťaz bude mať veľkú hodnotu aktivácie ale vzdialenejšie neuróny ju budú mať takmer nulovú. Pre $\beta = 30$ graf vyzerá nasledovne:



Obr. 5.4: Leaky MSOM results

Samotnú hodnotu aktivácie sme chceli ešte normalizovať sumou všetkých aktivácii:

$$y_i = \frac{\exp^{(-\beta \cdot d_i^2)}}{\sum_j \exp^{(-\beta \cdot d_j^2)}}$$

$$(5.7)$$

Pri použití normalizácie sme dostávali signifikantne horšie výsledky ako bez použitia normalizácie. Dôvodom bolo pravdepodobne to, že vychádzali veľmi malé hodnoty aktivácií a rozdiely boli takmer veľmi malé. Z tohto dôvodu sme zostali pri pôvodnej nenormalizovanej verzii.

Hodnotu aktivácie určitého neurónu pri Activity RecSOM môžeme interpretovať aj nasledovne: Aktivita neurónu vyjadruje bayesovskú pravdepdobnosť, že neurón bude víťazným neurónom.

5.2.5 Activity RecSOM parametre

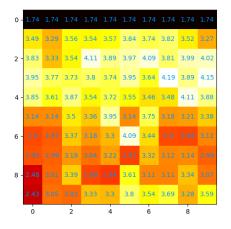
V našom experimente sme vyskúšali kombinácie parametrov α a β . Hodnoty parametra α sme zvolili z intervalu <0,1>s krokom 0.1 Hodnoty parametra β sme zvolili

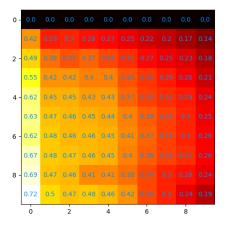
tak aby sme otestovali rôzne strmosti aktivačnej funkcie. Konkrétne sme použili tieto hodnoty: [5.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 20.0, 30.0, 40.0, 50.0, 100.0] Pustili sme trénovanie na všetkých kombináciach parametrov α a β .

5.2.6 Výsledky pre Activity RecSOM

Parameter	Hodnota
alpha	0 - 1 (krok 0.1)
beta	[5.0, 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, 20.0, 30.0, 40.0, 50.0, 100.0]
size	30x30
počet epôch	10
veľkosť posuvného okna	15

Tabuľka 5.2: Parametre Activity RecSOM siete





- (a) Activity Recsom pamäťová hĺbka
- (b) Activity Recsom kvantizačná chyba

Obr. 5.5: Heatmapy pre Activity RecSOM

5.2.7 Analýza výsledkov Activity RecSOM

Na x-ovej osy sú hodnoty parametra β a na y-ovej osy sú hodnoty parametra α . Výsledky Activity RecSOM z hľadiska maximálnej hĺbky pamäte sú podobné výsledkom klasickej RecSOM a nie sú príliš zaujímavé. Keď je parameter $\alpha=0$ je pamätová hĺbka na minime, keďže kontext vtedy prakticky neexistuje. Čo je však zaujimavé, je vplyv β parametra na hodnoty pamäťovej hĺbky. Najvyššie hodnoty pamäťovej hĺbky sieť dosahuje pri vysokých hodnotách β parametra $\beta>20.0$. Čím vyššia je hodnota tohto parametra tým je aktivita víťazného neurónu v kontexte viac odlíšená od aktivity ostatných neurónov (gausovská funkcia je strmšia), čo potvrdzuje naše predpoklady z

experimentu s RecSOM sietou. Príliš veľké množstvo nerelevantných informácii v kontexte má negatívny vplyv na pamäťovú hĺbku siete. Čím viac sú vlastnosti kontextu sústredené na víťazný neurón, tým lepšie vyššie hodnoty pamäťovej hĺbky sieť dosahuje a naopak.

Na výsledkoch je vidno aj to, že čím má kontext vo výpočte vzdialenosti vyššiu váhu, tým sieť dosahuje horšie výsledky a tiež rastie aj kvantizačná chyba (sieť sa ťažšie učí), čo opäť potvrdzuje to, že príliš informačne bohatý kontext má negatívny vplyv na pamäťovú hĺbku siete.

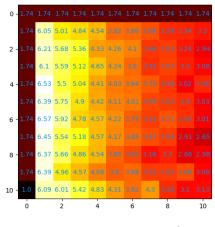
5.2.8 MSOM parametre

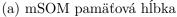
Pri mSOM máme okrem α parametra, používaného pri výpočte vzdialenosti, opäť aj β parameter, ktorý určuje váhu váhového vektora víťaza z predchádzajúceho kroku w_{i^*} a váhu kontextu z predchádzajúceho kroku y_{i^*} pri výpočte kontextu. Je nazývaný aj ako "zmiešavací" parameter a určuje váhu jednotlivých zložiek vlastností víťazného neurónu v kontexte. V našom experimente skúšame všetky kombinácie α a β parametrov. Hodnoty pre oba parametre sú z uzavretého intervalu < 0, 1 > s krokom 0.1 (100 experimentov). Pri experimentovaní s mSOM sa snažíme zistiť aký vplyv má odlišný kontext, ktorý obsahuje iba informáciu o víťazovi z predchádzajúceho kroku, na pamäťovú hĺbku siete. mSOM má veľkú výhodu v signifikantne vyššej rýchlosti učenia, vďaka zredukovanej dimenzie kontextu.

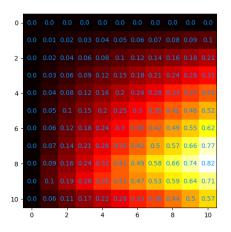
5.2.9 Výsledky pre mSOM

Parameter	Hodnota
alpha	0 - 1 (krok 0.1)
beta	0 - 1 (krok 0.1)
size	30x30
počet epôch	10
veľkosť posuvného okna	15

Tabuľka 5.3: Parametre mSOM siete







(b) mSOM kvantizačná chyba

Obr. 5.6: Heatmapy pre mSOM

Na x-ovej osy sú hodnoty parametra α a na y-ovej osy sú hodnoty parametra β . Pamäťová hĺbka pri mSOM dosahuje minimá v ak je jeden z parametrov α alebo β nulový a teda sieť nemá žiadny alebo len minimálny kontext. Ak je $\alpha=0$, tak sa zanedbáva kontextová zložka pri výpočte vzdialenosti a teda aj pri samotnom trénovaní siete a keď je $\beta=0$ tak sa zanedbávajú váhy víťaza z predchádzajúceho kroku pri výpočte kontextu. Minimum pamäťovej hĺbky mSOM dosahuje ak sú α aj β nulové.

mSOM dosahuje najvyššie hodnoty pamäťovej hĺbky celkovo zo všetkých testovaných sietí, pričom je to zároveň výpočtovo najefektívnejšia verzia rekurentnej SOM. Maximálne hodnoty pamäťovej hĺbky dosahuje pri nízkych hodnotách $\alpha=0.2$, čo znamená že pri výpočte vzdialenosti má vyššiu váhu vzdialenosť vstupu od váhového vektora ako vzdialenosť kontextu od kontextového vektora. Pri maximách sú hodnoty parametra β sú okolo hodnoty 0.5, čo znamená, že obe zložky kontextu (vlastnosti víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku a samotný kontext z predchádzajceho kroku) sú rovnako dôležité. Pri maximách má sieť aj nízku kvantizačnú chybu a teda učí sa správne. Najvyššie hodnoty kvantizačnej chyby sieť dosahuje ak sú oba parametre vysoké. Toto opäť potvrdzuje, že ak majú rekurentné siete príliš veľa informácii o kontexte a príliš málo informácii z aktuálneho vstupu, tak sa horšie trénujú.

Čo je pri mSOM najzaujímavejšie je to, že nám tieto výsledky opäť potvrdili predpoklady, ktoré sme zistili pre recSOM a Activity recSOM a to že kontext nemusí obsahovať príliš veľa informácii. Pri mSOM kontext obsahuje iba kombináciu vlastností víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku a teda tento experiment s mSOM nám potvrdil, že pre pamäťovú hĺbku siete sú najdôležitejšie vlastnosti víťazného neurónu.

mSOm dosiahla najlepšie výsledky spomedzi všetkých testovaných sietí.

5.2.10 Decaying mSOM

Pre potreby nášho experimentu sme si vytvorili ďaľšiu modifikovanú verziu rekurentnej SOM. Pri RecSOM kontext tvorí vektor aktivácii všetkých neurónov z predchádzajúceho kroku, pri mSOM je to kombinácia vlastností víťazného neurónu z predchádzajúceho kroku. Preto sme sa rozhodli použiť odlišný typ kontextu, ktorý bude tvorený kombináciou predchádzajúcih vstupov siete a nie stavmi siete z minulých krokov. To znamená, že kontext nie je ovplyvnený od samotného procesu trénovania ani od toho čo sa sieť naučila v predchádzajúcich krokoch, ale iba od samotných vstupných dát. Zvyšné vlastnosti siete zostávajú rovnaké ako v iných rekurentných SOM.

Kontext počítame pomocou nasledujúceho rekurzívneho vzťahu:

$$c = \beta^{0} \cdot x_{t} + \beta^{1} \cdot x_{t-1} + \beta^{2} \cdot x_{t-2} \cdot \beta^{n} \cdot x_{t-n}$$
 (5.8)

 β parameter je číslo z intervalu $\beta < 1 \land \beta > 0$ a $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}...$ sú vstupné vektory z predchádzajúcich krokov. t je číslo aktuálneho kroku a n je veľkosť trénovacej množiny.

Z rekurzívneho vzťahu vyplýva, že kontext je tvorený kombináciou predchádzajúcich vstupov pričom čím dávnejší je vstup, tým menšiu váhu má vo výslednom kontexte, čo je zabezpečené umocňovaním β parametra. Toto sa nazýva leaky integration. V našom prípade to znamená, že dávne vstupy postupne strácajú na dôležitosti pričom sa stále sa podieľajú na vytváraní výsledného kontextu.

Čím je hodnota parametra β vyššia, tým viac informácii z predchádzajúcich vstupov v sebe kontext obsahuje. Dôležitosť dávnejších vstupov exponenciálne klesá.

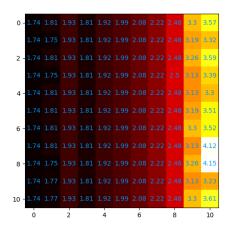
5.2.11 Decaying MSOM

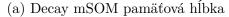
V experimente opäť skúšame všetky kombinácie α a β parametrov. Hodnoty pre oba parametre sú z uzavretého intervalu <0,1> s krokom 0.1.

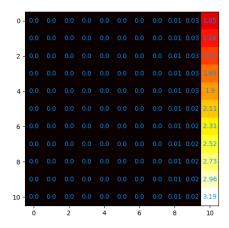
5.2.12 Výsledky pre Decaying msom

Parameter	Hodnota
alpha	0 - 1 (krok 0.1)
beta	0 - 1 (krok 0.1)
size	30x30
počet epôch	10
veľkosť posuvného okna	15

Tabulka 5.4: Parametre RecSOM siete







(b) Decay mSOM kvantizačná chyba

Obr. 5.7: Heatmapy pre Decay mSOM

Na x-ovej osy sú hodnoty parametra β a na y-ovej osy sú hodnoty parametra α . Najvyššie dosiahnuté hodnoty pamäťovej hĺbky pri decay SOM sú porovnateľné s rec-SOM, resp. Activity recSOM. Na grafe pamäťovej hĺbky je vidno, že hodnoty pamäťovej hĺbky závisia iba od hodnoty parametra β v rekurzívnom vzťahu pre výpočet kontextu. Maximálne hodnoty pamäťovej hĺbky sieť dosahuje parameter $\beta=1$. To znamená, že všetky predchádzajúce vstupy v kontexte majú rovnakú váhu, avšak sieť sa pri takto bohatom kontexte minulých vstupov nedokáže dobre natrénovať, čo je vidno na grafe kvantizačných chýb. Týmto experimentom sme vyskúšali aký vplyv na pamäťovú hĺbku siete má úplne odlišný druh kontextu a či sme s ním schopný sieť natrénovať. Ukázalo sa, že s takýmto kontextom dokážeme dosiahnuť podobné výsledky ako s RecSOM. Pri RecSOM kontext obsahuje reprezentáciu vplyvov jednotlivých minulých vstupov na sieť a tu je to kombinácia samotných vstupov.

5.3 Porovnanie výsledkov SOM

Po nájdení ideálnych parametrov pre všetky 3 typy sietí, sme spustili 5 behov s rovnakými parametrami a rovnakou počiatočnou inicializáciou váh a spravili priemer týchto hodnôt.

- 5.3.1 RecSOM
- 5.3.2 Activity RecSOM
- 5.3.3 mSOM
- 5.3.4 Decay mSOM

5.4 Vyhodnotenie experimentu

Experimentami sme zistili, že na hĺbku pamäte je najviac ovplyvnená zložením samotného kontextu. Najdôležitejšie parametre, ktoré vplývajú na hĺbku pamäte rekurentných SOM parametre α a β α vystupuje vo vzťahu pre výpočet vzdialenosti vstupu od určitého neurónu v sieti. β zase ovplyvňuje výpočet samotného kontextu.

5.5 Experiment so SRN a Reberovým automatom

SRN má niektoré vlastnosti podobné so samoorganizujúcimi sa mapami. Na svojej skrytej vrstve si vytvára akokeby vysoko rozmernú somku do ktorej zobrazuje jednotlivé vstupy.

Naším hlavným cieľom pri tomto experimente s SRN bolo preskúmať vlastnosti siete a pokúsiť sa nájsť spôsob merania a vyhodnotenia pamäťovej hĺbky. SRN má tiež niekoľko zaujímavých vlastností, ktoré sme chceli preskúmať.

Experiment s SRN prebiehal nasledujúcim spôsobom: Podobne ako pri experimentoch so samoorganizujúcimi sa mapami, ako prvé sme si potrebovali vytvorič vhodnú trénovaciu množinu. Rozhodli sme sa, že použijeme podobné zloženie trénovacej množiny ako pri samoorganizujúcich sa mapách.

Vstupom je vždy jedno písmeno z náhodne generovanej sekvencie písmen *abcd* a ako očakávaný výstup je vždy nasledujúce písmeno v sekvencii. Takýmto spôsobom sme vytvorili trénovacie príklady. Ako prvé bolo sme museli overiť, či naša použitá implementácia SRN siete funguje správne.

Ako chybovú funkciu sme použili log loss. Ako aktivačnú funkciu na skrytej vrstve sme použili hyperbolický tangens.

$$tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \tag{5.9}$$

Aktivačnú funkciu na výstupnej vrstve sme použili softmax.

Pri testovaní nám chyba klesala a sieť po natrénovaní predikovala korektné výsledky na testovacích sekvenciách.

Keď sme mali funkčnú implementáciu SRN Elmanovej siete, natrénovali sme ju na zvolenej trénovacej množine.

Parametre, ktoré sme použili počas trénovania:

Parameter	Hodnota
veľkosť skrytej vrstvy	30
počet epôch	100
veľkosť posuvného okna	3

Tabuľka 5.5: Parametre SRN

SRN si na skrytej vrstve vytvára určitú reprezentáciu vstupov. Preto sme sa rozhodli, že správne natrénovanej SRN budeme postupne predkladať písmená z trénovacej množiny, pričom si po každej predikcii, ktorú sieť spraví uložíme aktivácie skrytých neurónov siete do nejakej množiny. Ku každému takémuto vektoru priradíme posuvné okno daného znaku z trénovacej množiny (podobne ako pri experimentoch so SOMkami). Po predložení všetkých znakov z trénovacej množiny sieti sme dostali slovník posuvných okien a prislúchajúcimi kontextovými vektormi zo siete. Tieto dáta sme potrebovali nejakým spôsobom vizualizovať, aby sme videli nejaké súvislosti medzi reprezentáciou vstupov na kontextovej vrstve a podobnosťou samotných vstupov, na čo je vhodné použiť reprezentáciu vo forme dendogramu. Na vykreslenie dendogramu je potrebné vytvoriť tzv. podobnostnú maticu (ang. similarity matrix), kde riadky aj stĺpce reprezentujú jednotlivé kontextové vektory a hodnoty v samotnej matici sú euklidovské vzdialenosti medzi týmito vektormi. Z toho vyplýva, že na diagonále máme samé nulové hodnoty (rovnaké vektory majú nulovú vzdialenosť od seba).

Z takejto matice potom vieme vytvoriť dendogram, ktorý znázorňuje súvislosti medzi euklidovskou vzdialenosťou jednotlivýh vektorov a samotnými posuvnými oknami z trénovacej množiny. Z toho vieme potom povedať, ktoré vstupy sú vo vnútornej reprezentácii SRN blízke. Takáto reprezentácia nám hovorí o tom, ako dobre dokáže sieť reprezentovať dáta z trénovacej množiny.

Zaujímavou vlastnosťou SRN je aj to, že si na skrytej vrstve dokáže vytvoriť vlastnú reprezentáciu stavového automatu, ak je trénovaná na trénovacej množine, ktorá je tvorená stringom generovaným reberovým automatom. Vďaka tejto vlastnosti by sa mala SRN natrénovať na takejto trénovacej množine s nulovou chybou.

Pri SRN sme opäť použili vlastnú modifikovanú implementáciu siete, aby sme boli schopní ukladať si kontext siete pri predikovaní.

Záver

Bibliografia

- [1] Jeffrey L. Elman. "Finding structure in time". In: COGNITIVE SCIENCE 14.2 (1990), s. 179–211.
- [2] Jiang Guo. "Backpropagation through time". In: *Unpubl. ms.*, *Harbin Institute of Technology* (2013).
- [3] Teuvo Kohonen. "Essentials of the Self-organizing Map". In: Neural Netw. 37 (jan. 2013), s. 52-65. ISSN: 0893-6080. DOI: 10.1016/j.neunet.2012.09.018. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.neunet.2012.09.018.
- [4] H. Ritter a T. Kohonen. "Self-organizing Semantic Maps". In: *Biol. Cybern.* 61.4 (aug. 1989), s. 241–254. ISSN: 0340-1200. DOI: 10.1007/BF00203171. URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF00203171.
- [5] David Servan-Schreiber, Axel Cleeremans a James L. Mcclelland. "Graded state machines: The representation of temporal contingencies in simple recurrent networks". In: *Machine Learning* 7.2 (1991), s. 161–193. ISSN: 1573-0565. DOI: 10.1007/BF00114843. URL: https://doi.org/10.1007/BF00114843.
- [6] Marc Strickert a Barbara Hammer. "Merge SOM for temporal data". In: Neurocomputing 64 (2005), s. 39–71.
- [7] P. Tino, M. Cernansky a L. Benuskova. "Markovian architectural bias of recurrent neural networks". In: *IEEE Transactions on Neural Networks* 15.1 (2004), s. 6–15. ISSN: 1045-9227. DOI: 10.1109/TNN.2003.820839.
- [8] Peter Tiňo, Igor Farkaš a Jort van Mourik. "Recursive Self-organizing Map as a Contractive Iterative Function System". In: (2005). Ed. Marcus Gallagher, James P. Hogan a Frederic Maire, s. 327–334.
- [9] Thomas Voegtlin. "Recursive Self-organizing Maps". In: Neural Netw. 15.8-9 (okt. 2002), s. 979–991. ISSN: 0893-6080. DOI: 10.1016/S0893-6080(02)00072-2. URL: http://dx.doi.org/10.1016/S0893-6080(02)00072-2.