Análisis Aplicado
Tarea I
Mínimos locales y direcciones de descenso
Dr. Zeferino Parada

1. Encuentre el único mínimo de la función
$$f(x,\ y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}.$$

2. Muestre que $x^* = (0,\ 0,\ 0)^T$ es un mínimo local estricto de la función
$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2.$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$. Considere la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx + c^Tx + d$. Pruebe que $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x + c$ y $\nabla^2 f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

4. Decimos que $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es positiva definida en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si $x^TAx > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Construya en forma general una matiz $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ que sea positiva definida en $\mathbb{R}^n$ y que no sea simétrica.

5. Sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(\hat{x}) \neq 0$. Construya una sucesión de direcciones $\{p_k\} \subset \mathbb{R}^n$ convergente a p^* tal que $\|p_k\|_2 = 1$ y $p_k \notin Gen(\nabla f(\hat{x}))$ para todo índice k y $\nabla f(\hat{x})^T p^* = 0$.

6. Sean $\hat{x},\ p,\ s \in \mathbb{R}^n$ tales que $\nabla f(\hat{x})^T p = \alpha < \beta = \nabla f(\hat{x})^T s < 0,\ \ \|p\|_2 = \|s\|_2 = 1$. Para $\gamma \in (\alpha,\ \beta)$ construya un vector p^* tal que $\nabla f(\hat{x})^T p^* = \gamma$ y $\|p^*\|_2 = 1$.

7. Supongamos que $n = 2$ y que
$$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Sea $\theta \in (0,\ \pi/2)$. Construya un vector $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $p^T\nabla f(x) < 0$ y el ángulo entre p y $-\nabla f(\hat{x})$ es θ.

¿ Cómo podría generalizar este resultado a cualquier dimensión de n ?

8. Demuestre que el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \nabla f(\hat{x})^T p \\ \text{Sujeto a} & \|p\|_1 = 1. \end{array}$$

   tiene como soluciones a los vectores canónico, $p^* = \pm e_i$, tales que $\nabla f(\hat{x})^T p^* = -\|\nabla f(\hat{x})\|_\infty$.

9. Demuestre que el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \nabla f(\hat{x})^T p \\ \text{Sujeto a} & \|p\|_\infty = 1. \end{array}$$

   tiene como soluciones a los vectores p^* tales que $\|p^*\|_\infty = 1$ y $\nabla f(\hat{x})^T p^* = -\|\nabla f(\hat{x})\|_1$.

10. Sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(\hat{x}) \neq 0$ y $\nabla^2 f(\hat{x})$ es positiva definida. Sea $p^N = -(\nabla^2 f(\hat{x}))^{-1} \nabla f(\hat{x})$ la dirección de Newton. Demuestre que

$$\lambda_1 \leq -\frac{\nabla f(\hat{x})^T p^N}{\|\nabla f(\hat{x})\|^2} \leq \lambda_n,$$

   donde λ_1, λ_n son, respectivamente, el mínimo y máximo valor propio de $\nabla^2 f(\hat{x})^{-1}$.