Análisis Aplicado
Región de Confianza
Tarea II

1 Introducción

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{C}^2\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ satisface que $g = \nabla f(\hat{x}) \neq 0$ y $B = \nabla^2 f(\hat{x})$ es simétrica y positiva definida.

El subproblema cuadrático asociado a $f(x)$ en $\hat{x}$ con radio de confianza $\Delta > 0$ es ,

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & (1/2)p^T Bp + g^T p + f(\hat{x})(\equiv m(p)) \\ \text{Sujeto a} & \|p\|_2 \leq \Delta. \end{array} \tag{1}$$

La curva de gancho asociada a (1) cuando el radio $\Delta > 0$ cambia está definida como:

$$p(\mu) = -(B + \mu I_n)^{-1} g, \tag{2}$$

y satisface la condición de complementaridad

$$\mu(\|p(\mu)\|_2 - \Delta) = 0.$$

El parámetro $\mu \geq 0$ depende de Δ, es decir, $\mu(\Delta)$, ya que la dependencia es implícita, quitamos el radio Δ de la dependencia.

La técnica del doblez para aproximar la solución de (1) involucra la dirección de Newton, p^N y el punto de Cauchy, p^C, es decir:

$$p^N = -B^{-1}g, \quad p^C = -\left(\frac{g^T g}{g^T Bg}\right) g.$$

2 Problemas

1. Resuelva el problema,

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & g^T p + f(\hat{x}) \\ \text{Sujeto a} & \|p\|_2^2 \leq \Delta^2, \end{array}$$

usando únicamente geometría.

2. Supongamos que $B \in \mathbb{R}^n,\ g \in \mathbb{R}^n$ satisfacen que B es simétrica positiva definda y $g \neq 0$. Usando la Fatorización de Cholesky y la desigualdad de Cauchy Schwartz pruebe que

$$\sigma = \frac{(g^T g)^2}{(g^T B g)(g^T B^{-1} g)} \leq 1,$$

con igualdad si y sólo si $-g$ y $-B^{-1}g$ son paralelos.

3. Sea $\hat{p} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Pruebe que la única solución del problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & m_c(\alpha\hat{p}) \\ \alpha \in \mathbb{R}, & \end{array}$$

es

$$\alpha^* = -\frac{g^T \hat{p}}{\hat{p}^T B \hat{p}}.$$

Es decir el vector solución es

$$p^* = -\left(\frac{g^T \hat{p}}{\hat{p}^T B \hat{p}}\right)\hat{p}.$$

4. Del problema anterior se puede definir la función $F : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ donde

$$F(p) = -\left(\frac{g^T p}{p^T B p}\right)$$

Pruebe que

(a) $F(-B^{-1}g) = 1$

(b) El problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & (-g)^T p \\ & \\ \text{Sujeto a} & p^T B p = 1 \end{array}$$

tiene como única solución al vector

$$p^* = \frac{B^{-1} g}{g^T B g}.$$

Ayuda: Use la factorización de Cholesky $B = LL^T$.

5. Sea p^* el vector solución de (1) tal que $g^T p^* \neq 0$. Demuestre que $\nabla f(\hat{x})^T p^* < 0$. Es decir, p^* es una dirección de descenso para $f(x)$ en $\hat{x}$.

6. Pruebe que la curva de gancho es, $p(\Delta) = \Delta \left(\frac{p^N}{\|p^N\|_2} \right)$, para $\Delta \in [0, \; \|p^N\|_2]$ si y sólo si $Bg = \lambda^* g$, y determine el valor propio λ^*.

7. Pruebe que:

   (a) Sea $p^{(k)}(\mu)$ la derivada k-ésima de, $p(\mu) = -(B+\mu I_n)^{-1}g$, entonces

   $$p^{(k)}(\mu) = (-1)^{k+1} \; (k!)(B + \mu I_n)^{-(k+1)} g.$$

   (b)

   $$\frac{d}{d\mu}\|p(\mu)\|_2 = -\frac{p(\mu)^T (B + \mu I)^{-1} p(\mu)}{\| \; p(\mu) \; \|_2}.$$

   Es decir, la función, $\|p(\mu)\|_2$, es strictamente decreciente para $\mu \geq 0$.

8. Pruebe que la función

   $$\phi(\mu) = \frac{1}{\| \; p(\mu) \; \|_2},$$

   está bien definida para todo μ y que

   $$\phi(\mu) = 0 \; \text{ si y sólo si } \; \mu = -\lambda_i \; \text{ para alguna } \; i = 1, ..., n.$$

   Observación: En tal caso se puede usar el método de Newton a la ecuación no-lineal $\phi(\mu) - (1/\Delta) = 0$, para la solución de (PRC)

9. Sea $p(\mu)$ la curva de gancho con

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Pruebe que $p(0), \; p(1), \; p(2)$ pertenecen al plano $(1/10)x + (-4/5)y + z = (1/30)$ y que $p(3)$ no pertenece a este plano.
   Moraleja: No necesariamente la curva de gancho es plana.

10. Sean $f(x) = (1/2){x_1}^2 + {x_2}^2,\ \hat{x} = (1,1)^T$ Encuentre:

    (a) El punto de Cauchy.

    (b) El punto de Newton.

    (c) La solución del problema de región de confianza con $\Delta_0 = 2$.

11. Demuestre que $\|p^C\|_2 \leq \|p^N\|_2$.

12. Supongamos que $\|p^N\|_2 > \Delta$ y $\|p^C\|_2 < \Delta$.

    (a) Demuestre que

    $$g^T(p^N - p^C) = -(g^T B^{-1} g)(1 - \sigma).$$

    (b) Para la ecuación de segundo grado

    $$(p^N - p^C)^T(p^N - p^C)t^2 + 2(p^N - p^C)^T(p^C)t + ((p^C)^T p^C - \Delta^2) = 0$$

    pruebe que su discrimante es positivo y calcule ambas raíces.

    (c) Muestre que $g^T p^N \leq g^T p^C$.

    (d) Consideremos la curva $\phi(\alpha) = p^C + \alpha(p^N - p^C)$ con $\alpha \in [0,1]$. Demuestre que la función $g : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(\alpha) = \phi(\alpha)^T \phi(\alpha)$ es monótona creciente. *Ayuda: Muestre que* $g'(\alpha) \geq 0$.

    (e) Demuestre que la función $m(\phi(\alpha))$ es monótona decreciente. *Ayuda: Muestre que* $m(\phi(\alpha))' \leq 0$.