Proyecto 2: Sensibilidad y Simplex Dual

Jorge Antonio Rotter Vallejo   Carlos Eduardo Gil Mezta   Emiliano Rojas Eng

Problema 1: Sensibilidad

Actividad 1

1. Suponiendo que los argumentos satisfacen las restricciones, ¿cuál resultado *ban* no puede ocurrir y por qué?

   El valor de *ban* que no puede ocurrir es $ban = -1$, que indica conjunto factible vacío. No puede ocurrir porque las restricciones $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ para $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ siempre son satisfechas por $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. Explicar cómo se determinaron los intervalos para β_i y γ_j.

   Cambios en la b

   Supongamos que nos interesa cambiar b_j por $\tilde{b}_j = b_j + \beta_j$. Para mantener la factibilidad de la solución, necesitamos que

   $$\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{B} = A_B^{-1}(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j}\beta_j) = \mathbf{x}_\mathbf{B} + A_B^{-1}\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j}\beta_j \geq 0$$

   Notemos que esto se da si y sólo si, para $i = 1, \cdots m$

   $$(\mathbf{x}_\mathbf{B})i + (A_B^{-1})ij\beta_j >= 0$$

   Por lo que podemos acotar

   $$\begin{cases} \beta_j \geq \frac{-(\mathbf{x}_\mathbf{B})i}{(A_B^{-1})ij}, & \text{si } \frac{-(\mathbf{x}_\mathbf{B})i}{(A_B^{-1})ij} > 0 \\ \beta_j \leq \frac{-(\mathbf{x}_\mathbf{B})i}{(A_B^{-1})ij}, & \text{si } \frac{-(\mathbf{x}_\mathbf{B})i}{(A_B^{-1})ij} < 0 \end{cases}$$

   Y si alguno de los dos conjuntos es vacío, no hay cota por ese lado. Como estas ecuaciones deben satisfacerse para todas las variables básicas, definimos las cotas para el cambio como

   $$\max_i \left\{ \frac{-(\mathbf{x}_\mathbf{B})i}{(A_B^{-1})ij} : (A_B^{-1})_{ij} > 0 \right\} \leq \beta_j \leq \min_i \left\{ \frac{-(\mathbf{x}_\mathbf{B})i}{(A_B^{-1})ij} : (A_B^{-1})_{ij} < 0 \right\}$$

   Finalmente, notemos que por la factibilidad de x_B, la cota de abajo es no-positiva (de ser finita) y la de arriba es no-negativa (de ser finita), por lo que podemos obtener el intervalo sobre el cuál puede variar b_j sin alterar la base sumando b_j de cada lado.

Cambios en la c

Variables no-básicas

Sea $j \in N$, y supongamos que en la función objetivo nos interesa cambiar c_j por $\tilde{c}_j = c_j + \gamma_j$. Notemos que en este caso, los nuevos costos reducidos son

$$\tilde{\mathbf{r}}_N = (\mathbf{c}_B^\top A_B^{-1} A_N - (\mathbf{c}_N + \gamma_j(\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j})_N) = \mathbf{r}_N - \gamma_j(\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{j})_N$$

La base no va a cambiar siempre que el costo reducido $\tilde{r}_j$ se mantenga no-positivo. Notemos que entonces queremos $\gamma_j \geq r_j$. Hacia arriba no tenemos cota.

Variables básicas

Sea $j \in B$, y supongamos que en la función objetivo nos interesa cambiar c_j por $\tilde{c}_j = c_j + \gamma_j$. Supongamos también que $c_j = (\mathbf{c}_B)_i$ y notemos que en este caso, los nuevos costos reducidos son

$$\tilde{\mathbf{r}}_N = (\mathbf{c}_B + \gamma_j(\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i})_B)^\top A_B^{-1} A_N - \mathbf{c}_N = \mathbf{r}_N + \gamma_j(\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i})_B^\top A_B^{-1} A_N = \mathbf{r}N + \gamma_j Hj*$$

Y para que la base no cambie, necesitamos que se mantengan no-positivos. Esto es, necesitamos que para $i = 1, \cdots m$

$$\begin{cases} \gamma_j \leq \frac{-(\mathbf{r}N)_i}{Hji} & \text{si } H_{ji} > 0 \\ \gamma_j \geq \frac{-(\mathbf{r}N)_i}{Hji} & \text{si } H_{ji} < 0 \end{cases}$$

y γ_j no está acotado si uno de los casos queda vacío. Igual que arriba, acotamos entonces por ambos lados con

$$\max_j \left\{ \frac{-r_i}{H_{ji}} : H_{ji} < 0 \right\} \leq \gamma_j \leq \min_j \left\{ \frac{-r_i}{H_{ji}} : H_{ji} > 0 \right\}$$

Y de nuevo, como la cota por abajo es no-positiva y la cota por arriba es no-negativa, podemos sumar c_j de cada lado para obtener el intervalo de valores que puede tomar c_j sin que la base cambie.

3. Comparación entre las soluciones analítica y computacional del problema de los relojes. (Nota: En este documento la ennumeración a), b), c), d), e), f), g), j) corresponde con la ennumeración 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10 del ejercicio de los relojes en la tarea 6).

   a) Considerar los problemas primal y dual.

$$(P) \begin{cases} \text{maximizar} & 300x_1 + 200x_2 \\ \text{sujeto a} & 6x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & 8x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (D) \begin{cases} \text{minimizar} & 40\lambda_1 + 40\lambda_2 + 20\lambda_3 \\ \text{sujeto a} & 6\lambda_1 + 8\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 300 \\ & 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 200 \\ & \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

   b) Escribiendo los problemas en forma estándar.

$$(P_h) - \begin{cases} \text{minimizar} & -300x_1 - 200x_2 \\ \text{sujeto a} & 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 40 \\ & 8x_1 + 4x_2 + x_4 = 40 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_5 = 20 \\ & x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 \geq 0 \end{cases} \quad (D_h) \begin{cases} \text{minimizar} & 40\lambda_1 + 40\lambda_2 + 20\lambda_3 \\ \text{sujeto a} & -6\lambda_1 - 8\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 = -300 \\ & -4\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_5 = -200 \\ & \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4,\, \lambda_5 \geq 0 \end{cases}$$

A continuación se muestran los tableaus para resolver (P_h) usando el método Simplex con la regla de Bland.

Tabla 1: Primer tableau para P_h

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	lado derecho
x_3	6	4	1	0	0	40
x_4	$\underline{8}$	4	0	1	0	40
x_5	3	3	0	0	1	20
	300	200	0	0	0	0

Tabla 2: Segundo tableau para P_h

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	lado derecho
x_3	0	1	1	-3/4	0	10
x_1	1	1/2	0	1/8	0	5
x_5	0	$\underline{3/2}$	0	-3/8	1	5
	0	50	0	-75/2	0	-1500

Tabla 3: Tableau final para P_h

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	lado derecho
x_3	0	0	1	-1/2	-2/3	20/3
x_1	1	0	0	1/4	-1/3	10/3
x_2	0	1	0	-1/4	2/3	10/3
	0	0	0	-25	-100/3	-5000/3

Entonces, para el problema (P), la solución óptima es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 10/3 \end{bmatrix}$ y el valor óptimo es $z = 5000/3$.

Este resultado coincide con el obtenido por nuestra implementación del método Simplex.

A continuación se muestran los tableaus para resolver (D_h) usando el método Simplex Dual con la regla de Bland.

Tabla 4: Primer tableau para D_h

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_4	-6	$\underline{-8}$	-3	1	0	-300
λ_5	-4	-4	-3	0	1	-200
	-40	-40	-20	0	0	0

Tabla 5: Segundo tableau para D_h

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_2	3/4	1	3/8	-1/8	0	75/2
λ_5	-1	0	$\underline{-3/2}$	-1/2	1	-50
	-10	0	-5	-5	0	1500

Tabla 6: Tableau final para D_h

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_2	1/2	1	0	-1/4	1/4	25
λ_3	2/3	0	1	1/3	-2/3	100/3
	-20/3	0	0	-10/3	-10/3	5000/3

Entonces, para el problema (D), la solución óptima es $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 100/3 \end{bmatrix}$ y el valor óptimo es $z = 5000/3$.

Este resultado coincide con el obtenido por nuestra implementación del método Simplex Dual.

c) Para analizar el cambio en la solución óptima al reemplazar el vector de costos $\begin{bmatrix}300\\200\end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix}375\\200\end{bmatrix}$ y por $\begin{bmatrix}375\\175\end{bmatrix}$, considerar los problemas

$$(P_1)-\begin{cases}\text{minimizar} & -375x_1-200x_2\\ \text{sujeto a} & 6x_1+4x_2+x_3=40\\ & 8x_1+4x_2+x_4=40\\ & 3x_1+3x_2+x_5=20\\ & x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5\geq 0\end{cases} \quad \text{y} \quad (P_2)-\begin{cases}\text{minimizar} & -375x_1-175x_2\\ \text{sujeto a} & 6x_1+4x_2+x_3=40\\ & 8x_1+4x_2+x_4=40\\ & 3x_1+3x_2+x_5=20\\ & x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5\geq 0\end{cases}$$

A continuación se muestran los tableaus para resolver (P_1) usando el método Simplex con la regla de Bland.

Tabla 7: Primer tableau para P_1

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	lado derecho
x_3	6	4	1	0	0	40
x_4	$\underline{8}$	4	0	1	0	40
x_5	3	3	0	0	1	20
	375	200	0	0	0	0

Tabla 8: Segundo tableau para P_1

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	lado derecho
x_3	0	1	1	-3/4	0	10
x_1	1	1/2	0	1/8	0	5
x_5	0	$\underline{3/2}$	0	-3/8	1	5
	0	25/2	0	-375/8	0	-1875

Tabla 9: Tableau final para P_1

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	lado derecho
x_3	0	0	1	-1/2	-2/3	20/3
x_1	1	0	0	1/4	-1/3	10/3
x_2	0	1	0	-1/4	2/3	10/3
	0	0	0	-175/4	-25/3	-5750/3

Entonces, para el problema (P_1), la solución óptima es $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10/3\\10/3\end{bmatrix}$ y el valor óptimo es $z=5750/3$.

Este resultado coincide con el obtenido por nuestra implementación del método Simplex.

A continuación se muestran los tableaus para resolver (P_2) usando el método Simplex con la regla de Bland.

Tabla 10: Primer tableau para P_2

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	lado derecho
x_3	6	4	1	0	0	40
x_4	$\underline{8}$	4	0	1	0	40
x_5	3	3	0	0	1	20
	375	175	0	0	0	0

Tabla 11: Tableau final para P_2

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	lado derecho
x_3	0	1	1	-3/4	0	10
x_1	1	1/2	0	1/8	0	5
x_5	0	$\underline{3/2}$	0	-3/8	1	5
	0	-25/2	0	-375/8	0	-1875

Entonces, para el problema (P_2), la solución óptima es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el valor óptimo es $z = 1875$.

Este resultado coincide con el obtenido por nuestra implementación del método Simplex.

Por lo tanto, el problema (P_1) tiene la misma solución óptima que (P), pero el problema (P_2) tiene una solución óptima distinta a la de (P).

d) Si $c_1 = 300 + \gamma_1$, de acuerdo con nuestra implementación, si γ_1 satisface que

$$-100 \leq \gamma_1 \leq 100,$$

es decir, si c_1 satisface que

$$200 \leq c_1 \leq 400$$

el problema

$$\begin{cases} \text{maximizar} & 300x_1 + \gamma_1 x_1 + 200x_2 \\ \text{sujeto a} & 6x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & 8x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

tiene la misma solución óptima que el problema (P).

Si $c_2 = 200 + \gamma_2$, de acuerdo con nuestra implementación, si γ_2 satisface que

$$-50 \leq \gamma_2 \leq 50,$$

es decir, si c_2 satisface que

$$150 \leq c_2 \leq 300$$

el problema

$$\begin{cases} \text{maximizar} & 300x_1 + 200x_2 + \gamma_2 x_2 \\ \text{sujeto a} & 6x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & 8x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

tiene la misma solución óptima que el problema (P).

Volviendo a los problemas del inciso *c*), tiene sentido que (P_1) tenga la misma solución óptima que (P), pues, como $375 \in [200, 400]$, el valor de c_1 varió en el intervalo adecuado. En nuestra implementación se muestra que, dado el cambio en c_1 de 300 a 375, c_2 solo puede variar entre 187.5 y 375, lo cual justifica que (P_2) no tenga la misma solución que (P), pues $175 \notin [187.5, 375]$.

e) Para analizar el cambio en la solución óptima al reemplazar el vector de restricciones $\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} 45 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 40 \\ 45 \\ 20 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 25 \end{bmatrix}$, considerar los problemas duales

$$(D_3)\begin{cases} \text{minimizar} & 45\lambda_1 + 40\lambda_2 + 20\lambda_3 \\ \text{sujeto a} & -6\lambda_1 - 8\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 = -300 \\ & -4\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_5 = -200 \\ & \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4,\, \lambda_5 \geq 0 \end{cases} \qquad (D_4)\begin{cases} \text{minimizar} & 40\lambda_1 + 45\lambda_2 + 20\lambda_3 \\ \text{sujeto a} & -6\lambda_1 - 8\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 = -300 \\ & -4\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_5 = -200 \\ & \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4,\, \lambda_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D_5)\begin{cases} \text{minimizar} & 40\lambda_1 + 40\lambda_2 + 25\lambda_3 \\ \text{sujeto a} & -6\lambda_1 - 8\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 = -300 \\ & -4\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_5 = -200 \\ & \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3,\, \lambda_4,\, \lambda_5 \geq 0 \end{cases}$$

A continuación se muestran los tableaus para resolver (D_3) usando el método Simplex Dual con la regla de Bland.

Tabla 12: Primer tableau para D_3

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_4	-6	$\underline{-8}$	-3	1	0	-300
λ_5	-4	-4	-3	0	1	-200
	-45	-40	-20	0	0	0

Tabla 13: Segundo tableau para D_3

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_2	3/4	1	3/8	-1/8	0	75/2
λ_5	-1	0	$\underline{-3/2}$	-1/2	1	-50
	-15	0	-5	-5	0	1500

Tabla 14: Tableau final para D_3

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_2	1/2	1	0	-1/4	1/4	25
λ_3	2/3	0	1	1/3	-2/3	100/3
	-35/3	0	0	-10/3	-10/3	5000/3

Entonces, para el problema (D_3), la solución óptima es $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 100/3 \end{bmatrix}$ y el valor óptimo es $z = 5000/3$.

Este resultado coincide con el obtenido por nuestra implementación del método Simplex Dual.

A continuación se muestran los tableaus para resolver (D_4) usando el método Simplex Dual con la regla de Bland.

Tabla 15: Primer tableau para D_4

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_4	-6	$\underline{-8}$	-3	1	0	-300
λ_5	-4	-4	-3	0	1	-200
	-40	-45	-20	0	0	0

Tabla 16: Segundo tableau para D_4

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_2	3/4	1	3/8	-1/8	0	75/2
λ_5	-1	0	$\underline{-3/2}$	-1/2	1	-50
	-25/4	0	-25/8	-45/8	0	3375/2

Tabla 17: Tableau final para D_4

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_2	1/2	1	0	-1/4	1/4	25
λ_3	2/3	0	1	1/3	-2/3	100/3
	-25/6	0	0	-55/12	-25/12	5375/3

Entonces, para el problema (D_4), la solución óptima es $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 25\\ 100/3\end{bmatrix}$ y el valor óptimo es $z = 5375/3$.

Este resultado coincide con el obtenido por nuestra implementación del método Simplex Dual.

A continuación se muestran los tableaus para resolver (D_5) usando el método Simplex Dual con la regla de Bland.

Tabla 18: Primer tableau para D_5

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_4	-6	$\underline{-8}$	-3	1	0	-300
λ_5	-4	-4	-3	0	1	-200
	-40	-40	-25	0	0	0

Tabla 19: Segundo tableau para D_5

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_2	3/4	1	3/8	-1/8	0	75/2
λ_5	-1	0	$\underline{-3/2}$	-1/2	1	-50
	-10	0	-10	-5	0	1500

Tabla 20: Tableau final para D_5

base	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	lado derecho
λ_2	1/2	1	0	-1/4	1/4	25
λ_3	2/3	0	1	1/3	-2/3	100/3
	-10/3	0	0	-5/3	-20/3	5500/3

Entonces, para el problema (D_5), la solución óptima es $\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\25\\100/3\end{bmatrix}$ y el valor óptimo es $z = 5500/3$.

Este resultado coincide con el obtenido por nuestra implementación del método Simplex Dual.

Por lo tanto, las soluciones óptimas de los problemas (D_3), (D_4) y (D_5) es idéntica a la solución óptima de (D).

f) Si $b_1 = 40 + \beta_1$, de acuerdo con nuestra implementación, si β_1 satisface que

$$-20/3 \leq \beta_1 \leq \infty,$$

es decir, si b_1 satisface que

$$100/3 \leq b_1 \leq \infty$$

el problema

$$\begin{cases} \text{minimizar} & 40\lambda_1 + \beta_1\lambda_1 + 40\lambda_2 + 20\lambda_3 \\ \text{sujeto a} & 6\lambda_1 + 8\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 300 \\ & 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 200 \\ & \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

tiene la misma solución óptima que el problema (D).

Si $b_2 = 40 + \beta_2$, de acuerdo con nuestra implementación, si β_2 satisface que

$$-40/3 \leq \beta_2 \leq 40/3,$$

es decir, si b_2 satisface que

$$80/3 \leq b_2 \leq 160/3$$

el problema

$$\begin{cases} \text{minimizar} & 40\lambda_1 + 40\lambda_2 + \beta_2\lambda_2 + 20\lambda_3 \\ \text{sujeto a} & 6\lambda_1 + 8\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 300 \\ & 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 200 \\ & \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

tiene la misma solución óptima que el problema (D).

Si $b_3 = 20 + \beta_3$, de acuerdo con nuestra implementación, si β_3 satisface que

$$-5 \leq \beta_3 \leq 10,$$

es decir, si b_3 satisface que

$$15 \leq b_3 \leq 30$$

el problema

$$\begin{cases} \text{minimizar} & 40\lambda_1 + 40\lambda_2 + 20\lambda_3 + \beta_3\lambda_3 \\ \text{sujeto a} & 6\lambda_1 + 8\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 300 \\ & 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 \geq 200 \\ & \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3 \geq 0 \end{cases}$$

tiene la misma solución óptima que el problema (D).

Volviendo a los problemas del inciso *e*), tiene sentido que (D_3) tenga la misma solución óptima que (D), pues, como $45 \in [100/3, \infty)$, el valor de b_1 varió en el intervalo adecuado. Además tiene sentido que (D_4) tenga la misma solución óptima que (D), pues, como $45 \in [80/3, 160/3]$, el valor de b_2 varió en el intervalo adecuado. FInalmente, tiene sentido que (D_5) tenga la misma solución óptima que (D), pues, como $25 \in [15, 30]$, el valor de b_3 varió en el intervalo adecuado.

Los tableaus en el inciso *b*) indican que la variable de holgura x_3 forma parte de la base en todas las iteraciones del método Simplex para resolver el problema (P). Sin embargo, la variable x_3 no está en la función objetivo, lo cual sugiere que variar b_1 en el rango indicado anteriormente, es decir $100/3 \leq b_1 \leq \infty$, no afecta ni a la solución óptima ni al valor óptimo.

g) La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos para distintos valores de b_1.

Tabla 21: Cambios en b_1

b_1	35	37	39	41	43	45
x_1	3.3333	3.3333	3.3333	3.3333	3.3333	3.3333
x_2	3.3333	3.3333	3.3333	3.3333	3.3333	3.3333
λ_1	0	0	0	0	0	0
λ_2	25	25	25	25	25	25
λ_3	33.3333	33.3333	33.3333	33.3333	33.3333	33.3333
z	1666.6666	1666.6666	1666.6666	1666.6666	1666.6666	1666.6666

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos para distintos valores de b_2.

Tabla 22: Cambios en b_2

b_2	35	37	39	41	43	45
x_1	2.0833	2.5833	3.0833	3.5833	4.0833	4.5833
x_2	4.5833	4.0833	3.5833	3.0833	2.5833	2.0833
λ_1	0	0	0	0	0	0
λ_2	25	25	25	25	25	25
λ_3	33.3333	33.3333	33.3333	33.3333	33.3333	33.3333
z	1541.6666	1591.6666	1641.6666	1691.6666	1741.6666	1791.6666

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos para distintos valores de b_3.

Tabla 23: Cambios en b_3

b_3	15	17	19	21	23	25
x_1	5	4.3333	3.6666	3	2.3333	1.6666
x_2	0	1.3333	2.6666	4	5.3333	6.6666
λ_1	0	0	0	0	0	0
λ_2	25	25	25	25	25	25
λ_3	33.3333	33.3333	33.3333	33.3333	33.3333	33.3333
z	1499.9999	1566.6666	1633.3333	1699.9999	1766.6666	1833.3333

Podemos observar cómo todos los problemas con los cambios independientes en b_1, b_2 y b_3 tienen la misma solución óptima que el problema dual (D). Esto se debe a que todos los cambios ocurren en los intervalos adecuados, a saber,

$$35,\ 37,\ 39,\ 41,\ 43,\ 45 \in [100/3, \infty)$$

$$35,\ 37,\ 39,\ 41,\ 43,\ 45 \in [80/3, 160/3]$$

$$15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25 \in [15, 30]$$

j) Es válido usar los precios sombra para determinar el efecto de cambiar b_3 de 20 a 25 porque este nuevo valor de b_3 está en el intervalo de valores que no alteran la solución óptima del problema (D). El precio sombra para b_3 está dado por la diferencia entre el valor óptimo del problema (D) con b_3 en su valor original más una unidad y el valor óptimo del problema (D) con b_3 en su valor original. En este caso, el precio sombra está dado por $\frac{5100}{3} - \frac{5000}{3} = \frac{100}{3}$. Entonces, podemos calcular el valor óptimo resultante de cambiar b_3 de 20 a 25 por medio de $\frac{5000}{3} + 5 \cdot \frac{100}{3} = \frac{5500}{3}$. Este resultado coincide con el del inciso *e*).

Problema 2: Simplex Dual

Actividad 2

Considerar los siguientes programas lineales para

- $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
- $\mathbf{c}$, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

$$(P)\begin{cases} \text{minimizar} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{sujeto a} & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (P_h)\begin{cases} \text{minimizar} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbf{0}^\top \mathbf{y} \\ \text{sujeto a} & A\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Demostrar que

1. Si $\mathbf{x} \in C_F(P)$, entonces existe $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ tal que $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in C_F(P_h)$.
   Si $\mathbf{x} \in C_F(P)$, entonces $\mathbf{x}$ satisfacen $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
   Sea $\mathbf{y} = A\mathbf{x} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Notar que
   $$A\mathbf{x} - \mathbf{y} = A\mathbf{x} - A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$$
   De modo que, como $A\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in C_F(P_h)$.

2. Si $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in C_F(P_h)$, entontonces $\mathbf{x} \in C_F(P)$.
   Si $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in C_F(P_h)$, entonces se satisfacen $A\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.
   Como $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \leq \mathbf{b} + \mathbf{y}$. Por lo tanto
   $$A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{y} \geq \mathbf{b}$$
   De modo que, como $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in C_F(P)$.

3. El dual de (P) coincide con el dual de (P_h).
   El dual de (P) está dado por

   - $A^\top \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$
   - $\mathbf{b}, \lambda \in \mathbb{R}^m$
   - $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$

   $$(D)\begin{cases} \text{maximizar} & \mathbf{b}^\top \lambda \\ \text{sujeto a} & A^\top \lambda \leq \mathbf{c} \\ & \lambda \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Para obtener el dual de P_h, notar que el problema P_h es equivalente a

$$\begin{cases} \text{minimizar} & \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \\ \text{sujeto a} & \begin{bmatrix} A & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Cuyo dual es

$$\begin{cases} \text{maximizar} & \mathbf{b}^\top \lambda \\ \text{sujeto a} & \begin{bmatrix} A^\top \\ -I_n \end{bmatrix} \lambda \leq \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ & \lambda \in \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Tomando la intersección de las restricciones, el dual de P_h está dado por

$$(D_h) \begin{cases} \text{maximizar} & \mathbf{b}^\top \lambda \\ \text{sujeto a} & A^\top \lambda \leq \mathbf{c} \\ & \lambda \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{c} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Por lo tanto, el dual de (P) es idéntico al dual de (P_h), por lo que $C_F(D) = C_F(D_h)$.

Actividad 3

1. Suponiendo que los argumentos satisfacen las restricciones, ¿cuál resultado *ban* no puede ocurrir y por qué?

   El valor de *ban* que no puede ocurrir es $ban = -1$, que indica función objetivo no-acotada. No puede ocurrir porque, en el problema dual (D), las restricciones $A^\top \lambda \leq \mathbf{c}$ y $\lambda \geq \mathbf{0}$ para $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ siempre son satisfechas por $\lambda = \mathbf{0}$. En el problema dual esto indica que el conjunto factible nunca es vacío, mientras que en el problema primal indica que la función objetivo nunca es no-acotada

2. Comparación entre las soluciones analítica y computacional del problema de los relojes.

   Verifiquemos el teorema de complementariedad para el problema de los relojes.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10/3 \\ 10/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100/3 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad \lambda^\top A = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 100/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & 200 \end{bmatrix} =$$

   Notar que $A\mathbf{x} \neq \mathbf{b}$ porque la primera entrada de $A\mathbf{x}$ no coincide con la primera entrada de $\mathbf{b}$. Esto implica que la primera entrada de λ es cero, hecho que ha sido comprobado a lo largo de este documento.

   Aplicar el método simplex dual a un problema primal cualquiera busca una solución que siga siendo óptima y además sea factible. Nosotros se lo aplicamos al problema dual (D) del que nos interesaba originalmente (P); y como el dual del dual es el primal, estamos buscando (D) factibilidad mientras mantenemos optimalidad. Al terminar el algoritmo, tendríamos una solución (D) factible, y entonces sabemos que es (P) óptima.