PROGRAMACIÓN LINEAL
PROYECTO III

Condiciones para entregar el proyecto

Cada grupo de 2 o 3 miembros debe

1. implementar el método de Newton (como descrito abajo)

2. revolver los problemas `adlittle`, `afiro`, `blend`, `share2b` usando su implementación.
   Pueden bajar esos problemas formato MatLab (Octave) de la página:
   `http://users.clas.ufl.edu/hager/coap/Pages/matlabpage.html`

3. Para cada problema hay que entregar un *script* que lo resuelve usando el algoritmo y que presenta el valor óptimo junto con el número de iteraciones y el valor $\|\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}\|_\infty$.
   Sugerencia: El valor óptimo de cada problema se puede encontrar en la página (arriba).

4. Resolver con Newton el problema de Klee-Minty (ver práctica 1).
   - Apliquen su implementación del Newton a ese problema (para eso hay que poner el problema en la forma requerido por el algoritmo) con $m \in \{10, 12, 14, 16\}$.
   - Con su método encuentren las soluciones óptimas del primal y dual (solo en los variables originales). ¿Coinciden con la teoría?
   - Documenten el número de las iteraciones y los valores óptimos.

Otros condiciones:

- Fecha: Viernes 18 de Mayo a las 23:55 en comunidad itam.
- Entregar todo (*scripts* y el programa) en un archivo `zip` e incluir un archivo `readme` con nombres y claves únicas de los integrantes de equipo.

1. El proyecto

1.1. Introducción. Tenemos el problema primal

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{sujeto a} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad , \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\,, \end{array}$$

y su dual (con variables de holgura):

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\lambda} \\ \text{sujeto a} & A^\top \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \quad , \quad \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\,. \end{array}$$

Las condiciones necesarias y suficientes para soluciones óptimas del primal y dual son:

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \\ A^\top \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{c} \\ XZ\boldsymbol{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \quad , \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) > \boldsymbol{0}\,,$$

donde $X = \operatorname{diag}(\boldsymbol{x})$, $Z = \operatorname{diag}(\boldsymbol{z})$ y $\boldsymbol{e} = (1, 1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$.

No conocemos una solución óptima aún.

Pero, si F' es regular en (una) solución óptima $(\boldsymbol{x}^\star, \boldsymbol{\lambda}^\star, \boldsymbol{z}^\star)$, entonces (usando el Teorema de la función implícita) existe un intervalo $I = (\alpha, \beta)$ y un abierto $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^{n+m+n}$ que contiene a $(\boldsymbol{x}^\star, \boldsymbol{\lambda}^\star, \boldsymbol{z}^\star)$ tales que para $\tau \in I$ existe un único $(\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau, \boldsymbol{z}_\tau)$ con

$$F(\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau, \boldsymbol{z}_\tau) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \tau\boldsymbol{e} \end{pmatrix}\,.$$

La trayectoria central es el conjunto

$$\mathcal{T}_c = \left\{ (\boldsymbol{x}_\tau, \boldsymbol{\lambda}_\tau, \boldsymbol{z}_\tau) \colon F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \tau\boldsymbol{e} \end{pmatrix}\,,\ \tau \in (0, \beta) \right\}.$$

1.2. Acercándose y siguiendo la trayectoria.

Dado $0 < tol \ll 1$ y $\boldsymbol{w}_0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{z}^0)$ con $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{z}^0) > \boldsymbol{0}$ definimos $k := 0$ y $\sigma = 0.1$.

MIENTRAS $\|F(\boldsymbol{w}_k)\|_\infty > tol \quad \& \quad k < 200$

1. Calcule $\mu_k := \frac{1}{n}(\boldsymbol{x}^k)^\top \boldsymbol{z}^k$ y resuelve

$$\begin{pmatrix} A & . & . \\ . & A^\top & I_n \\ Z_k & . & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta}_x \\ \boldsymbol{\delta}_\lambda \\ \boldsymbol{\delta}_z \end{pmatrix} = -F(w_k) + \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \sigma\mu_k \boldsymbol{e} \end{pmatrix}$$

2. Determine los valores máximos $\alpha_x, \alpha_z \in (0,1]$ tales que

$$\boldsymbol{x}^k + \alpha_x \boldsymbol{\delta}_x \geq 0 \quad , \quad \boldsymbol{z}^k + \alpha_z \boldsymbol{\delta}_z \geq 0\,.$$

   Tarea: Implementa una función que encuentre esos valores.

3. Actualicé

$$\boldsymbol{w}_{k+1} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} \\ \boldsymbol{z}^{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \\ \boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} + \frac{999}{1000} \begin{pmatrix} \alpha_x \boldsymbol{\delta}_x \\ \alpha_z \boldsymbol{\delta}_\lambda \\ \alpha_z \boldsymbol{\delta}_z \end{pmatrix}$$

4. Si $\alpha_x \alpha_z > 0.8$, entonces la dirección de Newton coincide aproximadamente con la dirección de la trayectoria central. La constante $\sigma = 0.1$ limita la convergencia del método.
   Por lo tanto, en este caso reduce el valor de σ al máximo entre $\{10^{-4}, \sigma/10\}$.

5. $k := k + 1$

FIN

1.3. Funciones en MatLab.

Escriba la función

```
function [alpha] = recorte( v, dv )
% In : v   ... vector > 0
%      dv ... vector
%
% Out: alpha ... máximo valor  0 < alpha <= 1  tal que  v + alpha*dv >= 0
```

Usando la función `recorte` implementa el algoritmo arriba:

```
function [xo, lamo, zo, iter] = mPI_Newton(c, A, b)
% Resuelve el problema primal y dual por el metodo descrito arriba.
% Haz a lo mas 200 iteraciones.
% En cada iteración muestre el número de iteración y la norma de F(wk)
%
% In : A ... mxn matrix
%      b ... column vector with as many rows as A
%      c ... column vector with as many columns as A
%
% Out: xo        ... solución óptima del problema primal
%      lamo, zo ... solución óptima del problema dual
%      iter      ... el numeró de iteraciones que hizo el método
%
% Parametros:
%   tol = 1e-9;  x0 = ones(n,1);  lam0 = zeros(m,1);  z0 = ones(n,1);
%
```