Francisco

Problema 2b)

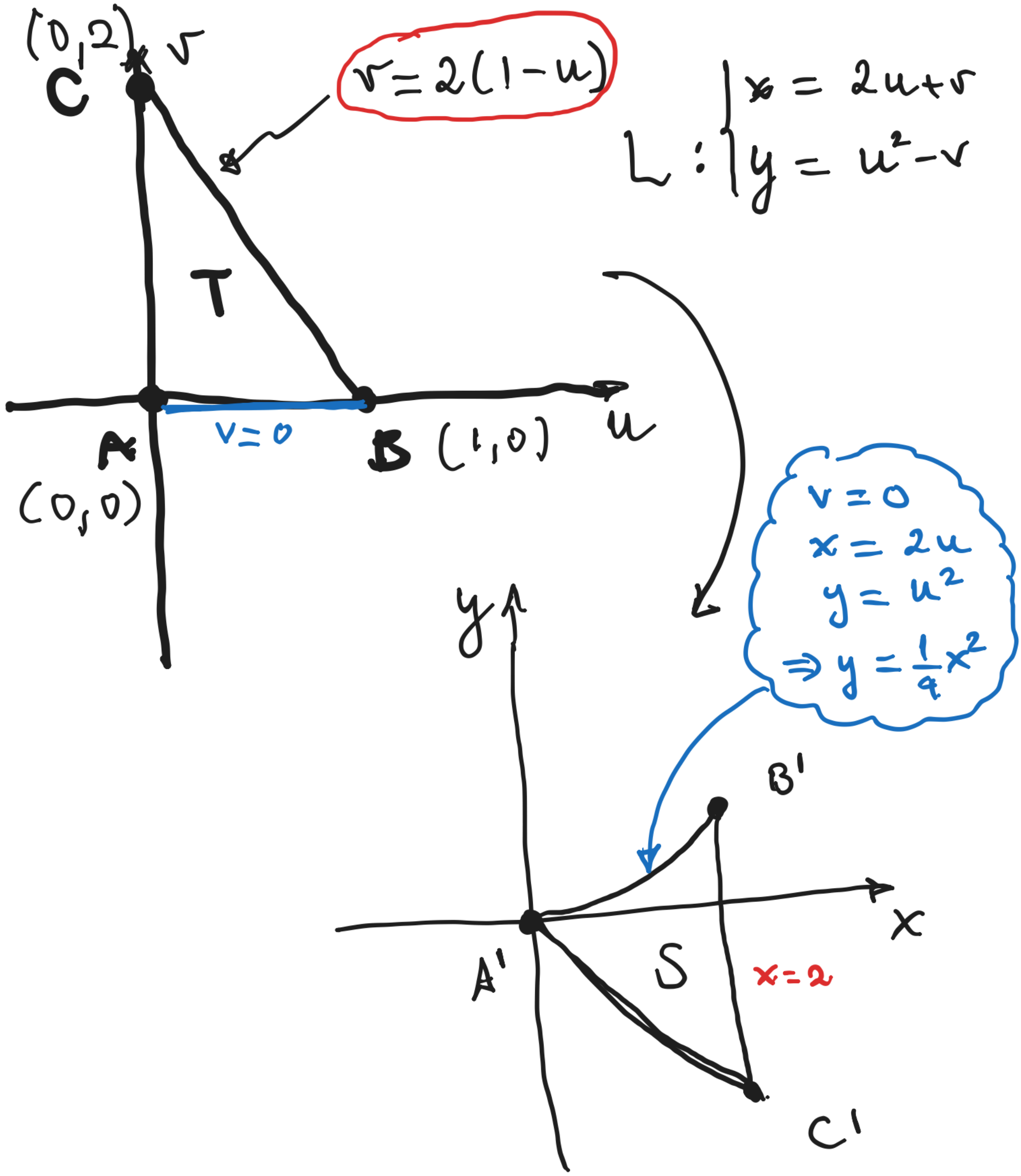
O nosso erro foi representar incorretamente a região. De facto, a região $\mathcal{D}$ nas perspectivas cartesiana e polar é dada por

cartesiana	polar
$x \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$	$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq r \leq \sqrt{2}$

$$\underbrace{\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy \right) dx}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+r^2} \, r \, dr \right) d\theta}_{\text{polares}} = \frac{\pi \ln 3}{8}.$$

Problema 3

a) Já tínhamos determinado as imagens dos vértices do triângulo T. Estes são, do vértice $A = (0,0)$, a imagem é $A' = (0,0)$, do vértice $B = (1,0)$, a imagem é $B' = (2,1)$, do vértice $C = (0,2)$, a imagem é $C' = (2,-2)$. Para ter uma ideia cabal da região S, imagem via a transformação $x = 2u + v$, $y = u^2 - v$, só precisamos saber como se transformam os segmentos que conformam a fronteira do triângulo T. Assim, por exemplo, o segmento AB ($0 \leq u \leq 1$, $v = 0$) do triângulo T, tem como imagem os pontos $x = 2u$, $y = u^2$. Portanto, $y = \frac{1}{4}x^2$. Procedemos similarmente com os outros segmentos fronteira do triângulo T. Temos assim que



b) Antes de avançar com a solução desta parte, recordemos que o valor absoluto do Jacobiano da transformação associada é

$$\boxed{|J(u,v)| = \left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right| = |x_u y_v - x_v y_u| = |-2-2u| = 2(1+u)}$$

Ora bem, comecemos

$$\int\int_S \frac{1}{\sqrt{x+y+1}}\,dxdy = \int\int_T \frac{1}{\sqrt{2u+v+u^2-v+1}}|J(u,v)|\,dudv$$

$$= \int\int_T \frac{1}{\sqrt{2u+u^2+1}}2(1+u)\,dudv$$

$$= \int\int_T \frac{1}{\sqrt{(u+1)^2}}2(1+u)\,dudv$$

$$= 2\int\int_T \frac{1}{(u+1)}(1+u)\,dudv$$

Como $0 \leq u \leq 1$, segue-se que $u+1 > 0$. Logo, podemos concluir, usando a geometria do problema, que

$$\int\int_S \frac{1}{\sqrt{x+y+1}}\,dxdy \;=\; 2\int\int_T 1\,dudv \;=\; 2\,\mathrm{Area}(T) \;=\; 2$$

A **pior estratégia** teria sido calcular o integral do lado direito acima, usando os correspondentes limites de integração

$$2\int\int_T \frac{1}{(u+1)}(1+u)\,du\,dv \;=\; 2\int_0^1\int_0^{2(1-u)} 1\,dv\,du\,.$$