

Francisco

Problema 2b)

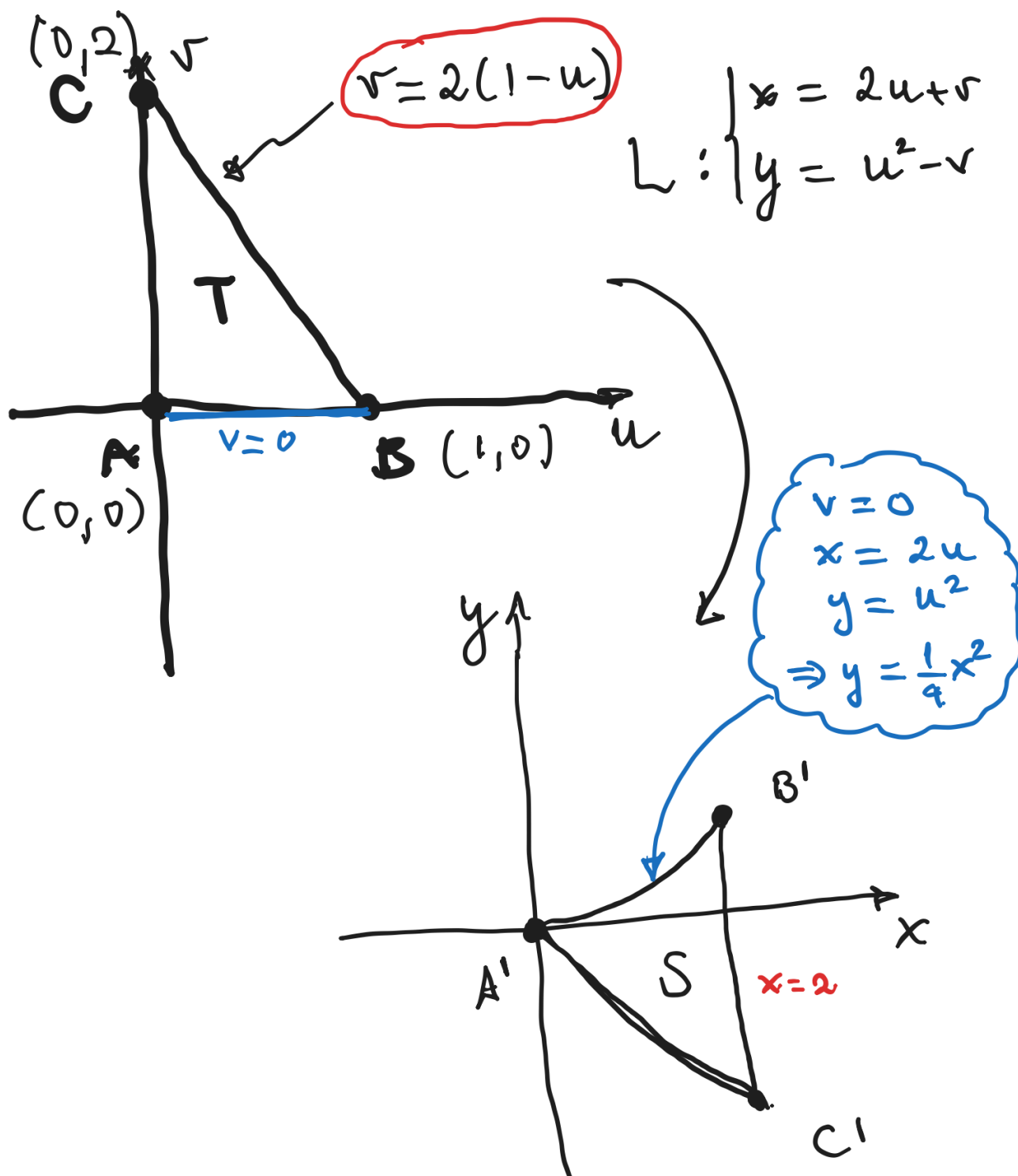
O nosso erro foi representar incorretamente a região. De facto, a região \mathcal{D} nas perspectivas cartesiana e polar é dada por

<u>cartesiana</u>	<u>polar</u>
$x \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$	$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq r \leq \sqrt{2}$

$$\underbrace{\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy \right) dx}_{\text{cartesianas}} = \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+r^2} \color{red}{r} dr \right) d\theta}_{\text{polares}} = \frac{\pi \ln 3}{8}.$$

Problema 3

a) Já tínhamos determinado as imagens dos vértices do triângulo T . Estes são, do vértice $A = (0, 0)$, a imagem é $A' = (0, 0)$, do vértice $B = (1, 0)$, a imagem é $B' = (2, 1)$, do vértice $C = (0, 2)$, a imagem é $C' = (2, -2)$. Para ter uma ideia cabal da região S , imagem via a transformação $x = 2u + v$, $y = u^2 - v$, só precisamos saber como se transformam os segmentos que conformam a fronteira do triângulo T . Assim, por exemplo, o segmento AB ($0 \leq u \leq 1$, $v = 0$) do triângulo T , tem como imagem os pontos $x = 2u$, $y = u^2$. Portanto, $y = \frac{1}{4}x^2$. Procedemos similarmente com os outros segmentos fronteira do triângulo T . Temos assim que



b) Antes de avançar com a solução desta parte, recordemos que o valor absoluto do Jacobiano da transformação associada é

$$|J(u, v)| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right| = |x_u y_v - x_v y_u| = |-2 - 2u| = 2(1 + u)$$

Ora bem, comecemos

$$\begin{aligned}
\int \int_S \frac{1}{\sqrt{x+y+1}} dx dy &= \int \int_T \frac{1}{\sqrt{2u+v+u^2-v+1}} |J(u,v)| du dv \\
&= \int \int_T \frac{1}{\sqrt{2u+u^2+1}} 2(1+u) du dv \\
&= \int \int_T \frac{1}{\sqrt{(u+1)^2}} 2(1+u) du dv \\
&= 2 \int \int_T \frac{1}{(u+1)} (1+u) du dv
\end{aligned}$$

Como $0 \leq u \leq 1$, segue-se que $u+1 > 0$. Logo, podemos concluir, usando a geometria do problema, que

$$\int \int_S \frac{1}{\sqrt{x+y+1}} dx dy = 2 \int \int_T 1 du dv = 2 \text{Area}(T) = 2$$

A **pior estratégia** teria sido calcular o integral do lado direito acima, usando os correspondente limites de integração

$$2 \int \int_T \frac{1}{(u+1)} (1+u) du dv = 2 \int_0^1 \int_0^{2(1-u)} 1 dv du .$$