lab4

June 3, 2025

Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych
Łukasz Jarzęcki 331697

[111]:
```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt
```

0. **Metody pomocnicze**

[112]:
```
def rysuj_wykres(t, euler_base, euler_mod, heun, rk, rk45, rozw_analityczne, h):
    plt.figure(figsize=(10, 6))

    plt.plot(t, rozw_analityczne, label='Rozwiązanie analityczne',␣
↪color='black', linewidth=2)
    plt.plot(t, euler_base, label='Euler', color='red', linestyle='--')
    plt.plot(t, euler_mod, label='Zmodyfikowany Euler', color='blue',␣
↪linestyle='-.')
    plt.plot(t, heun, label='Heun', color='green', linestyle=':')
    plt.plot(t, rk, label='rk4', color='purple')
    plt.plot(t, rk45, label='ode45 (RK45)', color='orange')

    plt.title(f'Porównanie metod numerycznych z rozwiązaniem analitycznym dla␣
↪kroku {h}')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y(x)')
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

[113]:
```
def calc_max_error(x, y, g):
    max_error = -1

    for i in range(x.size):
        error = abs(g(x[i]) - y[i])
        #print(f"dla x = {x[i]}: erorr = {error}")
        if(error > max_error):
            max_error = error
```

```
    return error
```

1. **Implementacje metod**

1.1 Metoda Eulera

[114]:
```
def euler_base(x0, y0, h0, f_par, iters):
    x = x0
    y = y0
    h = h0
    f = f_par

    x_vec = np.zeros(iters)
    y_vec = np.zeros(iters)
    x_vec[0] = x
    y_vec[0] = y


    for i in range(1, iters):
        y = y+h*f(x,y)
        x = x+h
        x_vec[i] = x
        y_vec[i] = y
        #print(f"{i}: x: {x}\t y: {y}")

    return y_vec


y = euler_base(1,0.5,0.1, lambda x,y: 3*x*y**2, 5)
print(y)
```

```
[0.5        0.575      0.68410625 0.85258674 1.13607936]
```

1.2 Zmodyfikowana metoda Eulera

[115]:
```
def euler_mod(x0, y0, h0, f_par, iters):
    x = x0
    y = y0
    h = h0
    f = f_par

    x_vec = np.zeros(iters)
    y_vec = np.zeros(iters)
    x_vec[0] = x
    y_vec[0] = y

    for i in range(1, iters):
        y = y+h*f(x+0.5*h,y+0.5*h*f(x,y))
```

```
        x = x+h
        x_vec[i] = x
        y_vec[i] = y
        #print(f"{i}: x: {x}\t y: {y}")

    return y_vec

y = euler_mod(1,0.5,0.1, lambda x,y: 3*x*y**2, 5)
print(y)
```

```
[0.5        0.59100547 0.73615771 0.99680658 1.57087001]
```

1.3 Metoda Rungego-Kutty

[116]:
```
def runge_kutty(x0, y0, h0, f_par, iters):
    x = x0
    y = y0
    h = h0
    f = f_par

    x_vec = np.zeros(iters)
    y_vec = np.zeros(iters)
    x_vec[0] = x
    y_vec[0] = y

    K1 = lambda x,y: f(x,y)
    K2 = lambda x,y: f(x+0.5*h, y+0.5*h*K1(x,y))
    K3 = lambda x,y: f(x+0.5*h, y+0.5*h*K2(x,y))
    K4 = lambda x,y: f(x+h, y+h*K3(x,y))

    for i in range(1, iters):
        k1_val = K1(x,y)
        k2_val = K2(x,y)
        k3_val = K3(x,y)
        k4_val = K4(x,y)

        #print(f"x = {x}, k1 = {k1_val}, k2 = {k2_val}, k3 = {k3_val}, k4 =
 ↪{k4_val}")

        y = y + (h/6)*(k1_val + 2*k2_val+2*k3_val + k4_val)
        x = x+h
        x_vec[i] = x
        y_vec[i] = y
        #print(f"{i}: x: {x}\t y: {y}")

    return y_vec

y = runge_kutty(1,0.5,0.1, lambda x,y: 3*x*y**2, 5)
```

```python
print(y)
```

```
[0.5        0.59346905 0.74624633 1.0360624  1.78167795]
```

1.4 Metoda Heuna

[117]:
```python
def heun(x0, y0, h0, f_par, iters):
    x = x0
    y = y0
    h = h0
    f = f_par

    x_vec = np.zeros(iters)
    y_vec = np.zeros(iters)
    x_vec[0] = x
    y_vec[0] = y

    for i in range(1, iters):
        y = y + 0.5*h* (f(x,y) + f(x+h,y+h*f(x,y)))
        x = x+h

        x_vec[i] = x
        y_vec[i] = y
        #print(f"{i}: x: {x}\t y: {y}")

    return y_vec

y = heun(1,0.5,0.1, lambda x,y: 3*x*y**2, 5)
print(y)
```

```
[0.5        0.59205312 0.74004802 1.00990937 1.6249196 ]
```

2. **Analiza i porównanie powyższych metod numerycznych w rozwiązywaniu zadanego równania różniczkowego**

Założenia

[118]:
```python
# wzór równania różniczkowego
f = lambda x,y: (4*x)/((1+x**2)**(1/3))
# funkcja wyrażająca rozwiązanie analityczne
g = lambda x: 3*(1+x**2)**(2/3) - 2.772
#przedział
span = (-2,2)
#warunki początkowe
x0 = -2
y0 = 6
```

Wykresy

2.1 krok = 0.5

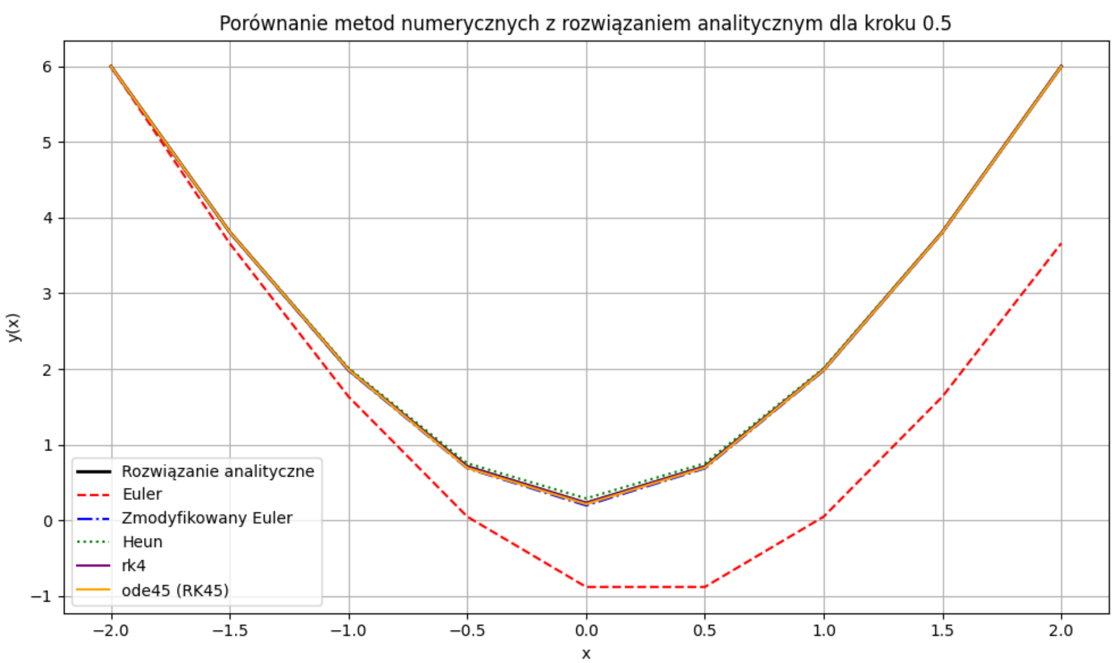
[119]:
```
# kroki integracji
h = 0.5
iters = int(abs(span[1]-span[0])/h) + 1
x_05 = np.linspace(span[0], span[1], int((span[1] - span[0]) / h) + 1)
```

[120]:
```
y_euler_base_05 = euler_base(x0, y0, h, f, iters)
y_euler_mod_05 = euler_mod(x0, y0, h, f, iters)
y_heun_05 = heun(x0, y0, h, f, iters)
y_runge_kutty_05 = runge_kutty(x0, y0, h, f, iters)

y_rk45_05 = solve_ivp(f, span, [x0, y0], t_eval=x_05).y[1]

y_true_05 = []
for val in x_05:
    y_true_05.append(g(val))
```

[121]:
```
rysuj_wykres(x_05, y_euler_base_05, y_euler_mod_05, y_heun_05,␣
 ↪y_runge_kutty_05, y_rk45_05, y_true_05, h)
```



2.2 Krok = 0.1

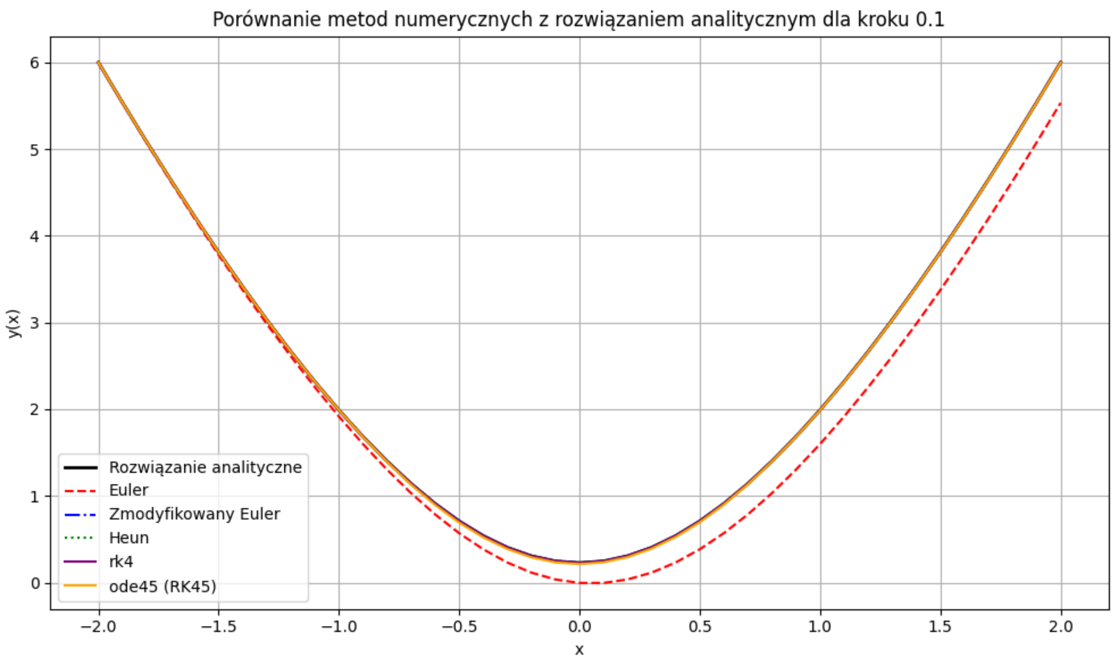
[122]:
```
# kroki integracji
h = 0.1
iters = int(abs(span[1]-span[0])/h) + 1
x_01 = np.linspace(span[0], span[1], int((span[1] - span[0]) / h) + 1)
```

[123]:
```
y_euler_base_01 = euler_base(x0, y0, h, f, iters)
y_euler_mod_01 = euler_mod(x0, y0, h, f, iters)
y_heun_01 = heun(x0, y0, h, f, iters)
y_runge_kutty_01 = runge_kutty(x0, y0, h, f, iters)

y_rk45_01 = solve_ivp(f,t_span=span ,y0=[x0, y0], t_eval=x_01).y[1]

y_true_01 = []
for val in x_01:
    y_true_01.append(g(val))
```

[124]:
```
rysuj_wykres(x_01, y_euler_base_01, y_euler_mod_01, y_heun_01,␣
↪y_runge_kutty_01, y_rk45_01, y_true_01, h)
```



2.3 Krok = 0.01

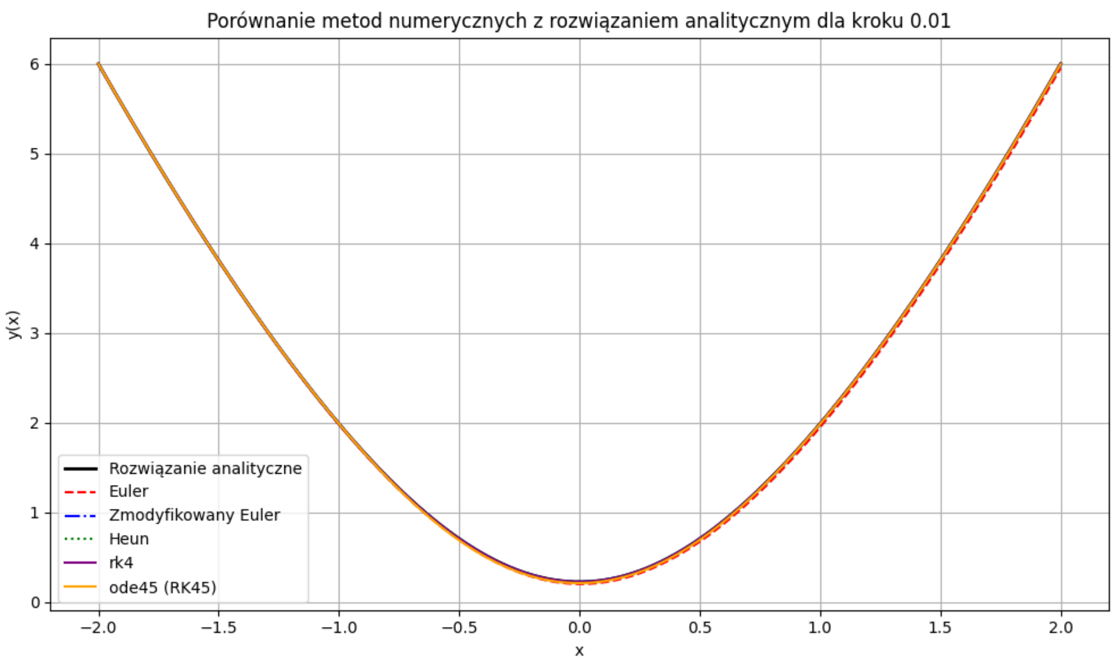
[125]:
```
# kroki integracji
h = 0.01
iters = int(abs(span[1]-span[0])/h) + 1
x_001 = np.linspace(span[0], span[1], int((span[1] - span[0]) / h) + 1)
```

[126]:
```
y_euler_base_001 = euler_base(x0, y0, h, f, iters)
y_euler_mod_001 = euler_mod(x0, y0, h, f, iters)
y_heun_001 = heun(x0, y0, h, f, iters)
y_runge_kutty_001 = runge_kutty(x0, y0, h, f, iters)
```

```
y_rk45_001 = solve_ivp(f,t_span=span ,y0=[x0, y0], t_eval=x_001).y[1]

y_true_001 = []
for val in x_001:
    y_true_001.append(g(val))
```

[127]:
```
rysuj_wykres(x_001, y_euler_base_001, y_euler_mod_001, y_heun_001,␣
 ↪y_runge_kutty_001, y_rk45_001, y_true_001, h)
```



2.4 Tabela błędów

[128]:
```
print("Tabela z maksymalnym błędem każdej metody dla zadanego kroku")
print(f"h       euler                      mod euler                  runge-kutty    ␣
 ↪          heun                          rk45")
print(f"0.5     {calc_max_error(x_05, y_euler_base_05, g)}      ␣
 ↪{calc_max_error(x_05, y_euler_mod_05, g)}   {calc_max_error(x_05,␣
 ↪y_runge_kutty_05, g)}     {calc_max_error(x_05, y_heun_05, g)}    ␣
 ↪{calc_max_error(x_05, y_rk45_05, g)}")

print(f"0.1     {calc_max_error(x_01, y_euler_base_01, g)}      ␣
 ↪{calc_max_error(x_01, y_euler_mod_01, g)}   {calc_max_error(x_01,␣
 ↪y_runge_kutty_01, g)}     {calc_max_error(x_01, y_heun_01, g)}    ␣
 ↪{calc_max_error(x_01, y_rk45_01, g)}")
```

```
print(f"0.01     {calc_max_error(x_001, y_euler_base_001, g)}     ␣
 ↪{calc_max_error(x_001, y_euler_mod_001, g)}   {calc_max_error(x_001,␣
 ↪y_runge_kutty_001, g)}     {calc_max_error(x_001, y_heun_001, g)}   ␣
 ↪{calc_max_error(x_001, y_rk45_001, g)}")
```

```
Tabela z maksymalnym błędem każdej metody dla zadanego kroku
h       euler                 mod euler                 runge-kutty
heun                     rk45
0.5     2.339267405208891      5.3214638597864905e-05   5.3214638597864905e-05
5.3214638597864905e-05    0.003434008693046664
0.1     0.4678960527526499      5.3214638591647656e-05   5.3214638591647656e-05
5.321463859075948e-05    0.003434008693046664
0.01     0.046837498449989745      5.3214638580989515e-05
5.321463858543041e-05     5.321463858454223e-05    0.003434008693046664
```

3. **Wnioski**

- Możemy zauważyć, że metoda Eulera posiada największy błąd, który zmniejsza się wraz ze zmniejszeniem kroku. Widać to i na wykresie i w tabeli. Jednak nawet dla najmniejszego kroku jest ona całe rzędy wielkości mniej dokładna. Powodem jest używanie przez nią przybliżenia liniowego.
- Pozostałe posiadają bardzo małe błędy i są blisko bycia zbieżnymi z rozwiązaniem analitycznym. Są metodami drugiego rzędu.
- Metoda solve_ivp sama dobiera kroki, więc dla każdego zadanego kroku błąd jest taki sam. Błąd większy niż przy metodach drugiego rzędu.
- Jak widać dla mało skomplikowanych równań najlepsze są metody drugiego rzędu. Nie są one mocno skomplikowane, a są dużo bardziej dokładne niż metoda Eulera.