Univerza v Ljubljani

Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančni praktikum

Največja konveksna množica znotraj konveksne množice

Avtorji:
Jure Sternad
Rok Rozman
Jaša Pozne

Mentorja:
prof. dr. Sergio Cabello
doc. dr. Janoš Vidali

Ljubljana, 10. januar 2022

Kazalo

1 Navodilo

Če imamo podana konveksna mnogokotnika P in Q v koordinatni ravnini, potem je problem odločanja ali se P lahko preslika v Q linearen program (izvedljivosti). Poleg tega je problem odločanja za koliko lahko P največ povečamo, da je lahko v Q , tudi linearen program. V primeru, da je P disk, je to tudi linearen program.

2 Opis problema

Naša naloga je, da naredimo eksperimente, v katerih bomo poiskali največje možne kvadrate, diske, enakostranične trikotnike ... , ki jih lahko preslikamo tako, da so znotraj danega konveksnega mnogokotnika. Eksperimente bomo reševali s pomočjo linearnega programiranja. Poleg tega bomo ločili primere, ko P lahko rotiramo; v tem primeru bomo ločili več različnih rotacij. Za reševanje problema bomo uporabljali programski jezik Sage.

Za lažje razumevanje so spodaj navedene še definicije.

Definicija 1. *Konveksen poligon P je tak poligon, za katerega velja, da pri poljubni izbiri dveh točk p in q iz poligona P, daljica pq, ki povezuje omenjeni točki v celoti leži v poligonu P.*

Definicija 2. *Translacije so preslikave oblike $\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$ za nek $a \in \mathbb{R}$.*

Definicija 3. *Rotacije so preslikave oblike $\tau(\vec{x}) = R_\phi\vec{x} + \vec{a}$ za nek $\phi \in (0, 2\pi)$ in $\vec{a} \in \mathbb{R}$. Takšna preslikava ustreza rotaciji za kot ϕ okoli točke v ravnini, ki je določena z enačbo $\tau(\vec{x}) = x$.*

3 Definiranje problema s pomočjo linearnega programiranja

Projekta smo se lotili tako, da smo najprej s pomočjo linearnega programiranja definirali konveksno množico Q s predpisom

$$a_i x + b_i y \leq c_i$$
$$i = 1, ..., n$$

n predstavlja število pogojev s katerimi definiramo množico Q.
Nato smo definirali še množico P

$$(x_j, y_j); j = 1, 2, ..., m$$

Če je bil P mnogokotnik se je linearni program nadaljeval na sledeč način
Cilj: Maksimizacija k
pri pogojih:

$$\begin{aligned} a_i(kx_j + x) + b_i(ky_i + y) &\leq c_i \\ i &= 1, ..., n \\ j &= 1, ..., m \end{aligned}$$

oglišča novega lika:

$$\begin{aligned} (x_j k + x, y_j k + y) \\ j = 1, ..., m \end{aligned}$$

Sicer pa
Cilj: Maksimizacija r
pri pogojih:

$$\begin{aligned} r\sqrt{a_i^2 + b_i^2} &\leq c_i - a_i x - b_i y \\ i &= 1, ..., n \\ r &> 0 \end{aligned}$$

kjer ima krog središče v (x, y) in radij r.

4 Eksperimenti

Kot navodilo zahteva, smo izvedeli eksperimente za tri like - krog, enakostraničen trikotnik in kvadrat. Pri slednjih smo upoštevali možnost rotacije likov.
Tako je bil cilj naših eksperimentov najti tak že v naprej natančno določen lik, da bo le-ta znotraj množice Q imel kar se da veliko ploščino.

Pri eksperimenitih na enakostraničnem trikotniku in kvadratu (brez rotacij), smo uporabili algoritem

```
# Nastavimo p za linearen program v katerem iscemo najvecjo skalo.
p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=True)
p.set_objective(p['k'])
# Z dvema for zankama se sprehodimo po tockah zrcaljenega lika
# in polravninah lika v katerega zrcalimo.
for xj, yj in tocke:
    for ai, bi, ci in zip(a, b, c):
        # Dodamo pogoj v p.
        p.add_constraint(ai * (p['k'] * xj + p['x']) +
          bi * (p['k'] * yj + p['y']) <= ci)
```

```
p.solve()

k, x, y = p.get_values(p['k']), p.get_values(p['x']),
p.get_values(p['y'])
k, x, y
```

ki za vhodne podatke prejme podatke v obliki $\vec{a} = [a_1, a_2, ..., a_n]$ za a,b,c in krajišča likov $tocke = [(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)]$ ter vrne skalar k, ki predstavlja količino za koliko se bo lik povečal/zmanjšal, in koordinati x in y, ki predstavljata preslikavo lika v množico Q.

V primeru, ko smo pri eksperimentih upoštevali še rotacije smo uporabili sledeč algoritem.

```
# Nastavimo p za linearen program v katerem iscemo najvecjo skalo.
p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=True)

# S kot in t belezimo najvecjo skalo in kot
# pri katerem se ta zgodi.
kot = None
t = 0
# Shranimo si stevilo tock in definiramo nov seznam tocke2.
dolzina = len(tocke)
tocke2=list(range(dolzina))

p.set_objective(p['k'])

# S for zanko se sprehodimo po kotih od 1 do 360 stopinj.
for j in range(1,360):
    # Pri vsakem kotu si shranimo nova oglisca zarotiranega
    # lika v tocke2.
    for k in range(len(tocke)):
        xii = (cos(j*pi/180)*tocke[k][0]-sin(j*pi/180)*tocke[k][1])
        yii = (sin(j*pi/180)*tocke[k][0]+cos(j*pi/180)*tocke[k][1])
        tocke2[k] =[xii,yii]
        # Za vsako tocko dodamo pogoje.
    for xj, yj in tocke2:
        for ai, bi, ci in zip(a, b, c):
            p.add_constraint(ai * (p['k'] * xj + p['x']) +
            bi * (p['k'] * yj + p['y']) <= ci)
    r = p.solve()
    # Ce naletimo na vecjo skalo, si jo shranimo skupaj s kotom
    # in oglisci prezrcaljenega lika.
    if r > t:
        t = r
        kot = j
        k, x, y = p.get_values(p['k']), p.get_values(p['x']),
        p.get_values(p['y'])
```

```
            nove_tocke=[]
            for tocka in tocke2:
                tocka[0] = (tocka[0]*k+x).numerical_approx()
                tocka[1] = (tocka[1]*k +y).numerical_approx()
                nove_tocke.append(tocka)
        p.remove_constraints(range(p.number_of_constraints()))
    print(t,kot,k,x,y,nove_tocke)
```

Ta poleg vseh že omenjenih lastnosti prvega algoritma hkrati upošteva še vse možne rotacije.

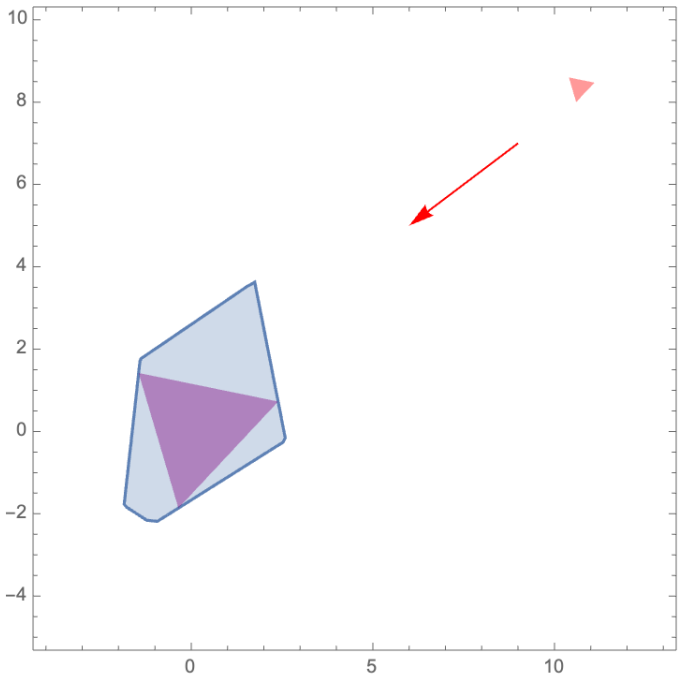
4.1 Enakostraničen trikotnik

4.1.1 Enakostraničen trikotnik - brez rotacij

Prvi eksperiment smo opravili za enakostranični trikotnik brez rotacij. Tako potrebne pogoje kot točke smo si izmislili.

Algoritem je poiskal največji možen trikotnik znotraj konveksne množice Q tako, da je vsa tri oglišča enakostraničnega trikotnika preslikal v Q za (x, y), pri tem pa celoten lik povečal/zmanjšal za skalar k.

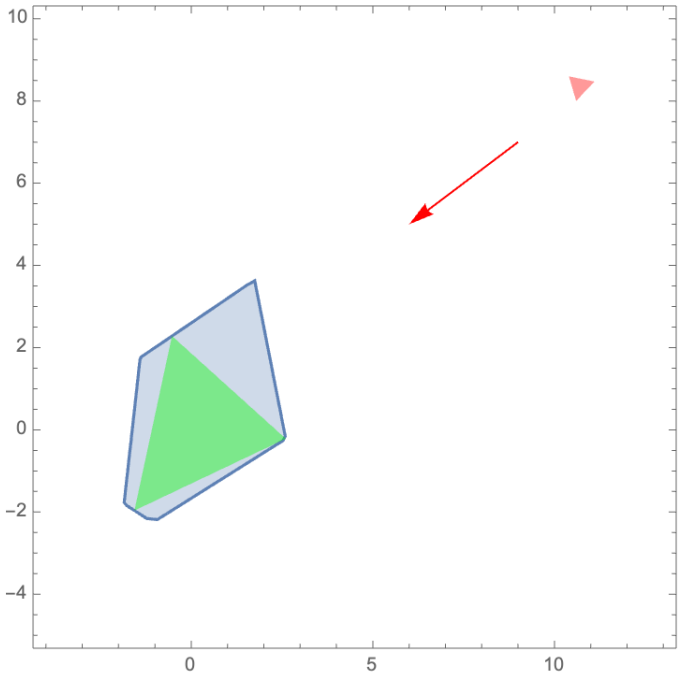
Vhodni podatki prvega eksperimenta so bili $\vec{a} = [-8, 9, -4, -3, 5]$, $\vec{b} = [1, 2, -7, 5, -9]$, $\vec{c} = [13, 23, 20, 13, 15]$ in $tocke = [(10.4, 8.6), (10.6, 8), (11.1019615, 8.4732052)]$.



4.1.2 Enakostraničen trikotnik - z rotacijami

Drugi eksperiment smo ponovno izvedli za enakostraničen trikotnik, le da tokrat z rotacijami. Začetne pogoje smo si ponovno izmislili ter z že prej opisanim algoritmom iskali optimalno rešitev.

Vhodni podatki drugega eksperimenta so bili $\vec{a} = [-8, 9, -4, -3, 5]$, $\vec{b} = [1, 2, -7, 5, -9]$, $\vec{c} = [13, 23, 20, 13, 15]$ in $tocke = [(10.4, 8.6), (10.6, 8), (11.1019615, 8.4732052)]$.

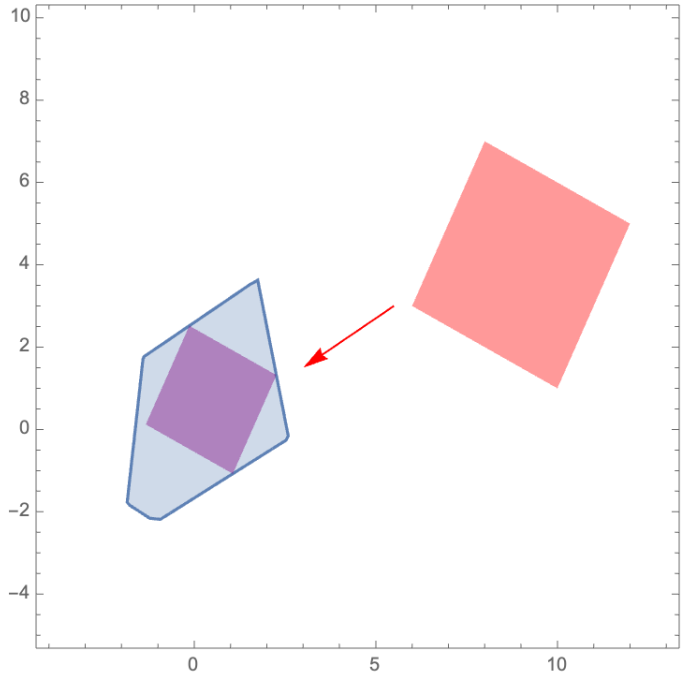


4.2 Kvadrat

Tudi pri eksperimentih s kvadratom smo izvedli dva preizkusa - brez in z rotacijami. Ker je linearni program enak tako za enakostraničen trikotnik kot kvadrat, smo tudi tukaj uporabili že opisana algoritma.

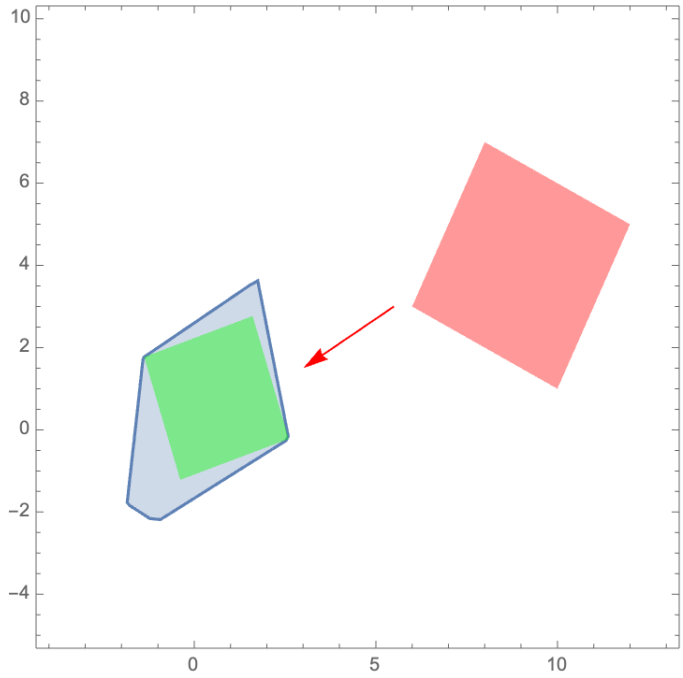
4.2.1 Kvadrat - brez rotacij

Vhodni podatki tako že tretjega eksperimenta so bili $\vec{a} = [-8, 9, -4, -3, 5]$, $\vec{b} = [1, 2, -7, 5, -9]$, $\vec{c} = [13, 23, 20, 13, 15]$ in $tocke = [(10, 1), (6, 3), (8, 7), (12, 5)]$.



4.2.2 Kvadrat - z rotacijami

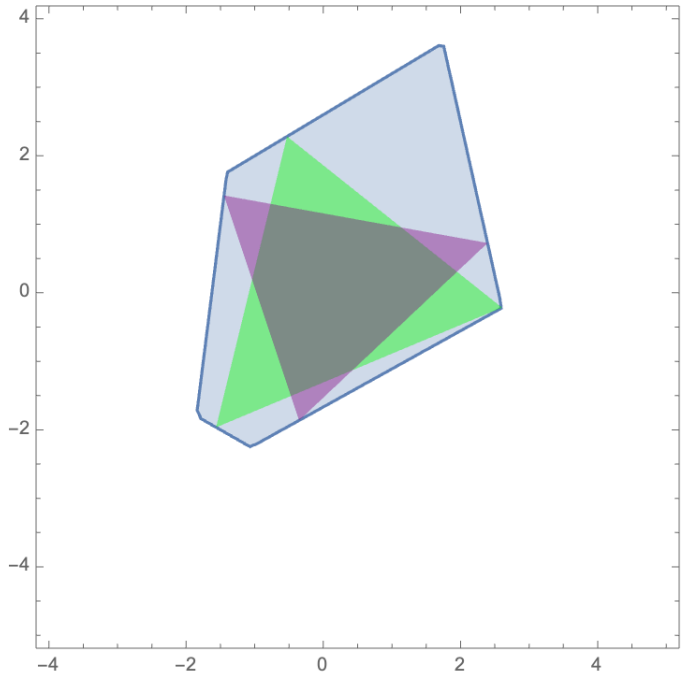
Vhodni podatki četrtega eksperimenta pa $\vec{a} = [-8, 9, -4, -3, 5]$, $\vec{b} = [1, 2, -7, 5, -9]$, $\vec{c} = [13, 23, 20, 13, 15]$ in $tocke = [(10, 1), (6, 3), (8, 7), (12, 5)]$.

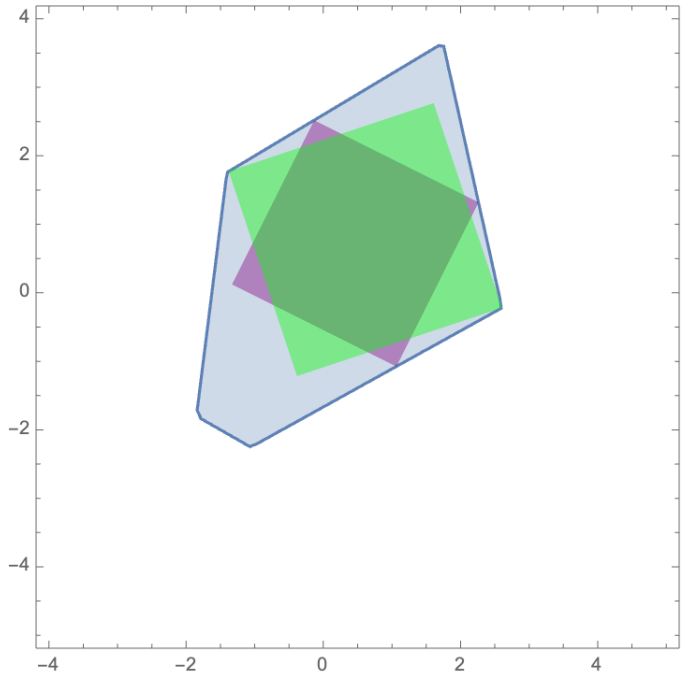


4.2.3 Primerjava eksperimentov brez in z rotacijami

Ob ponovitvi eksperimenta z istimi vhodnimi podatki smo hitro opazili pričakovano vidno razliko med ploščinama likov. Lik, ki ga je bilo možno rotirati, je namreč

imel večjo ploščino. Tako smo lahko logično sklepali, da je metoda z rotacijami učinkovitejša.





4.3 Krog

Za eksperiment s krogom smo potrebovali nov algoritem, saj ima krog neskončno število točk, ki jih je potrebno preverit, posledično pa algoritem, ki je deloval v primeru enakostraničnega trikotnika in kvadrata v tem primeru ne deluje.

 # Nastavimo p za linearni program in definiramo spremenljivko k.

```
p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=True)
k = p.new_variable(real=True)
# Z r, x, y oznacimo polmer ter koordinati sredisca.
r, x, y = (k[i] for i in "rxy")
# Maksimiziramo r
p.set_objective(r)
# Dodamo pogoj, da je polmer nenegativen.
p.add_constraint(r >= 0)
# S for zanko se sprehodimo po polravninah
# lika ter za vsako dodamo pogoj.
for ai, bi, ci in zip(a, b, c):
    p.add_constraint(r * sqrt(ai^2 + bi^2) <= ci -ai*x-bi*y)
p.solve()

res = p.get_values(k)
res
```

Vhodni podatki petega in tako zadnjega eksperimenta so bili $\vec{a} = [-8, 9, -4, -3, 5]$, $\vec{b} = [1, 2, -7, 5, -9]$, $\vec{c} = [13, 23, 20, 13, 15]$ in $krog = [(7, 7), 3]$.