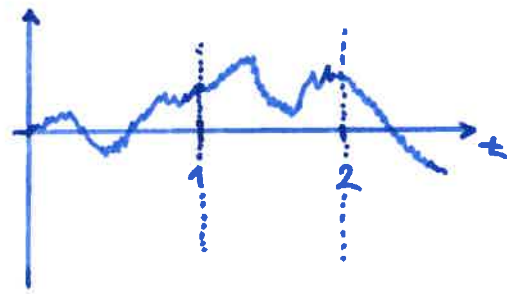
Satz (Wiener 1923): Es gibt eine standard Brownsche Bewegung.

Beweis: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem eine abzählbare unendliche Familie $N(0,1)$-ZV existiert.

<u>Schritt 1:</u> Es genügt, eine Brownsche Bewegung auf $[0,1]$ zu konstruieren:
Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folge unabhängiger standard-Brownscher Bewegungen auf $[0,1]$. Definiere $\{B(t): t\geq 0\}$ durch Zusammensetzung der B_n:

$$B(t) = B_{\lfloor t\rfloor}(t - \lfloor t\rfloor) + \sum_{i=0}^{\lfloor t\rfloor -1} B_i(1) \qquad \forall t\geq 0$$

wobei $\lfloor t\rfloor := \max\{n\in\mathbb{N}_0 : n\leq t\}$



$t\in[0,1): B(t) = B_0(t)$
$t\in[1,2): B(t) = B_1(t-1) + B_0(1)$
$\vdots$
$t\in[n,n+1): B(t) = B_n(t-n) + \sum_{i=0}^{n-1} B_i(1)$

- $B(0) = B_0(0) = 0$.
- $t\mapsto B(t)$ ist fast sicher stetig nach Konstruktion da B_n stetig $\forall n\in\mathbb{N}_0$.
- unabhängige Inkremente: folgt da Inkremente auf den B_n unabhängig und da die B_n untereinander unabhängig. Auf Rechnung wird verzichtet.
- $B(t+h) - B(t) \sim N(0,h)$: $0\leq t < t+h =: s$
Dann $t\in[m,m+1)$, $s\in[n,n+1)$ mit $m\leq n\in\mathbb{N}_0$

$$B(s) - B(t) = B_n(s-n) + \sum_{i=0}^{n-1} B_i(1) - B_m(t-m) - \sum_{i=0}^{m-1} B_i(1)$$
$$= \sum_{i=m+1}^{n-1} B_i(1) + B_n(s-n) - B_m(t-m) + B_m(1)$$
$$\sim N(0, n-m-1 + s-n - t + m + 1) = N(0,h)$$

Schritt 2: Konstruiere Schritt für Schritt für Dyadische Punkte die richtige gemeinsame Verteilung:

Dyadische Punkte: $D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^n \right\}$

0				1	D_0
0		$\frac{1}{2}$		1	D_1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	D_2
		$\vdots$			

Es ist $D_n \subset D_{n+1}$.

$D := \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$.

Sei $\{Z_d : t \in D\}$ Familie von unabhängigen $N(0,1)$ ZV.

Setze $B(0) = 0$, $B(1) = Z_1$.

Ziel: $\forall n \in \mathbb{N}$ definiere $B(d)$, $d \in D_n$ so dass:

(1) $\forall r < s < t$ in D_n: $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ und unabhängig von $B(s) - B(r)$.

(2) Die Vektoren $(B(d) : d \in D_n)$ und $(Z_t : t \in D \setminus D_n)$ sind unabhängig.

$n=0$: $B(1) - B(0) = Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, u.a. von $(Z_t : t \in D \setminus \{0,1\})$

$n-1 \longrightarrow n$: Definiere $B(d)$ für $d \in D_n \setminus D_{n-1}$:

$$B(d) = \frac{B(d-2^{-n}) + B(d+2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{\sqrt{2^{n+1}}}$$

(2) Ist erfüllt, da $\frac{B(d-2^{-n}) + B(d+2^{-n})}{2}$ nur Mittelwert von benachbarten Punkten in D_{n-1} $\rightarrow$ hängt nur von Z_d mit $d \in D_{n-1}$ ab. Dazu kommt nur noch Addition von skalierten Z_d mit $d \in D_n$.

(1) Hilfslemma in Präsentation:

$X, Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ und unabhängig

$\Rightarrow X+Y,\ X-Y \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$ und unabhängig.

Stelle fest: $\underbrace{\frac{1}{2}\left[B(d+2^{-n})-B(d-2^{-n})\right]}$ ist unabhängig von $\frac{Z_d}{\sqrt{2^{n+1}}}$

und $\quad Var[\,\cdot\,] = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2^n} = 2^{-(n+1)}$, $Var\left[\frac{Z_d}{\sqrt{2^{n+1}}}\right] = 2^{-(n+1)}$

$\Rightarrow$ SUMME $= B(d)-B(d-2^{-n}) \sim N(0,2^{-n})$

DIFFERENZ $= B(d+2^{-n})-B(d) \sim N(0,2^{-n})$ $\quad \forall d\in D_n / D_{n-1}$

und beide sind unabhängig.

Falls allgemeiner $d\in D_{n-1}$ müssen wir die Aussage ebenfalls zeigen.

Sei j minimal mit $d\in D_j$.

$$B(d)-B(d-2^{-n}) = B(d) - \frac{B(d-2^{-n+1})+B(d-2^{-n}+2^{-n})}{2} + \frac{Z_{d-2^{-n}}}{\sqrt{2^{n+1}}}$$

$$\vdots$$

$$= c_1\left(B(d)-B(d-2^{-j})\right) + \sum_{d\in M_1} c_2 Z_d$$

$$B(d+2^{-n})-B(d) = c_3\left(B(d+2^{-j})-B(d)\right) + \sum_{d\in M_2} c_4 Z_d$$

wobei $c_{1,2,3,4}$ Konstanten, $M_1\cap M_2=\emptyset$.

Nach Aufbau der Induktion sind $B(d)-B(d-2^{-j})$ und $B(d+2^{-j})-B(d)$ unabhängig. Da $M_1\cap M_2=\emptyset$ ändern auch die Summen nichts an der Unabhängigkeit.

Für die richtige Verteilung: $B(d)-B(d-2^{-n}) = B(\tilde{d}+2^{-n})-B(\tilde{d})$ mit $\tilde{d}\in D_n/D_{n-1}$.

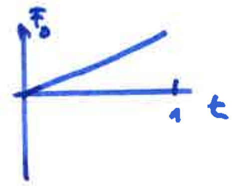
Da die Inkremente normalverteilt sind, folgt aus der eben gezeigten paarweisen Unabhängigkeit Unabhängigkeit.

Induktion beendet, $(\hat{2})$ gezeigt.

Wir haben für alle $n\in\mathbb{N}$ eine diskrete Version der Brownschen Bewegung auf D_n konstruiert.

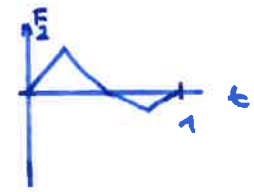
Schritt 3: Interpoliere zwischen den definierten Werten an den Dyadische Punkten linear mit Funktionenreihe:

$$F_0(t) = \begin{cases} Z_1 & t=1 \\ 0 & t=0 \\ \text{linear dazwischen} \end{cases}$$



Und für alle $n \geq 1$:

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-(n+1)/2} Z_t & t \in D_n \setminus D_{n-1} \\ 0 & t \in D_{n-1} \\ \text{linear zwischen den Punkten von } D_n \end{cases}$$



Diese Funktionen sind stetig auf $[0,1]$ und $\forall n \in \mathbb{N}, d \in D_n$:

$$B(d) = \sum_{i=0}^{n} F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d).$$

Siehe Animation in Präsentation.

Schritt 4: Zeige gleichmäßige Konvergenz der Reihe:

Es gilt $\int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$. (Partielle Integration)

$$\left[\int_x^\infty \frac{1}{u^2} e^{-\frac{u^2}{2}} du = -\frac{1}{u} e^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_x^\infty - \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \right.$$

$$\left. \Rightarrow \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \int_x^\infty \left(1+\frac{1}{u^2}\right) e^{-\frac{u^2}{2}} du \geq \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \right]$$

Damit: $$P(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) = 2P(Z_d \geq c\sqrt{n}) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp\left(-\frac{c^2 n}{2}\right)}{c\sqrt{n}} \leq \exp\left(-\frac{c^2 n}{2}\right).$$

Sei $A_n := \{\omega \in \Omega \mid \exists d \in D_n : |Z_d| \geq c\sqrt{n}\}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d \in D_n} P(|Z_d| \geq c\sqrt{n}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2^n+1) \exp\left(-\frac{c^2 n}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e^{\frac{c^2}{2}}}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{\frac{c^2}{2}}}\right)^n$$

konvergiert $\Leftrightarrow e^{\frac{c^2}{2}} > 2 \Leftrightarrow \frac{c^2}{2} > \log 2 \Leftrightarrow c > \sqrt{2 \log 2}$.

Fixiere solch ein c. Dann gilt nach Borell Cantelli:

$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. $\quad$ ($\limsup \triangleq$ unendlich oft)

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, \forall d \in D_n: |Z_d| < c\sqrt{n}$ $\quad$ a.s.

$\Rightarrow \|F_n\|_\infty < c\sqrt{n} \cdot 2^{\frac{-n-1}{2}} < c\sqrt{n}\, 2^{-\frac{n}{2}}$

$$\sum_{n=N}^{\infty} c\sqrt{n}\, 2^{-\frac{n}{2}} = c \sum_{n=N}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2^n}} < \infty$$

Dann gilt nach Majorantenkriterium von Weierstraß $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ konvergiert gleichmäßig auf $[0,1]$.

Bezeichne den stetigen Grenzwert als $\{B(t): t \geq 0\}$.

Schritt 5: Überprüfe, dass B die richtigen endlich-dimensionalen Verteilungen besitzt.

Dies folgt wegen den Eigenschaften von B, da D dicht in $[0,1]$ ist und da B stetige Pfade hat.

Seien $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ in $[0,1]$. Da D dicht in B finden wir $t_{1,k} \leq t_{2,k} \leq \ldots \leq t_{n,k}$ in D mit $\lim_{k\to\infty} t_{i,k} = t_i$. Dann gilt wegen Stetigkeit von B für $1 \leq i \leq n-1$:

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) = \lim_{k\to\infty} B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k})$$

Da $\lim_{k\to\infty} E[B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k})] = 0$

und $\lim_{k\to\infty} \mathrm{Cov}[B(t_{i+1,k}) - B(t_{i,k}), B(t_{j+1,k}) - B(t_{j,k})]$

$$= \lim_{k\to\infty} \mathbb{1}_{\{i=j\}}(t_{i+1,k} - t_{i,k}) = \mathbb{1}_{\{i=j\}}(t_{i+1} - t_i)$$

gilt

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) \sim N(0, t_{i+1} - t_i) \text{ und unabhängig.}$$

Damit gilt: $\{B(t): t \geq 0\}$ ist standard Brownsche Bewegung. $\square$