Paul Lévy's Konstruktion der Brownschen Bewegung

Tim Jaschek

13.11.2015

Kurzer historischer Überblick

1827 Botaniker Robert Brown beobachtet unter dem Mikroskop, wie sich Pflanzenpollen in einem Wassertropfen unregelmäßig hin und herbewegen.

1880 Statistiker und Astronom Thorvald Nicolai Thiele beschreibt erstmals einen solchen Prozess.

1900 Mathematiker Louis Bachelier (Schüler von Henri Poincarés) versucht mit Thieles Idee die Kursbewegungen an der Pariser Börse zu analysieren.

1905 Albert Einstein definiert die Brownsche Bewegung in der heutigen Form.

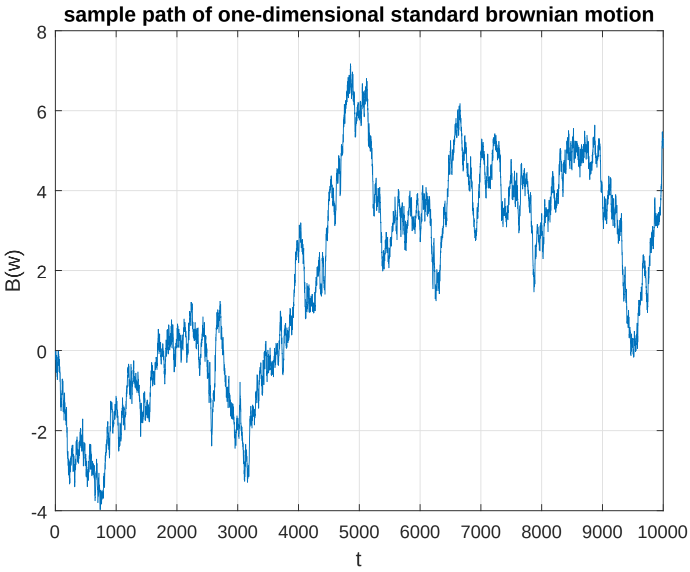
1923 Norbert Wiener beweist die Existenz der Brownschen Bewegung. *(Daher ebenfalls Bezeichnung als Wiener- Prozess)*

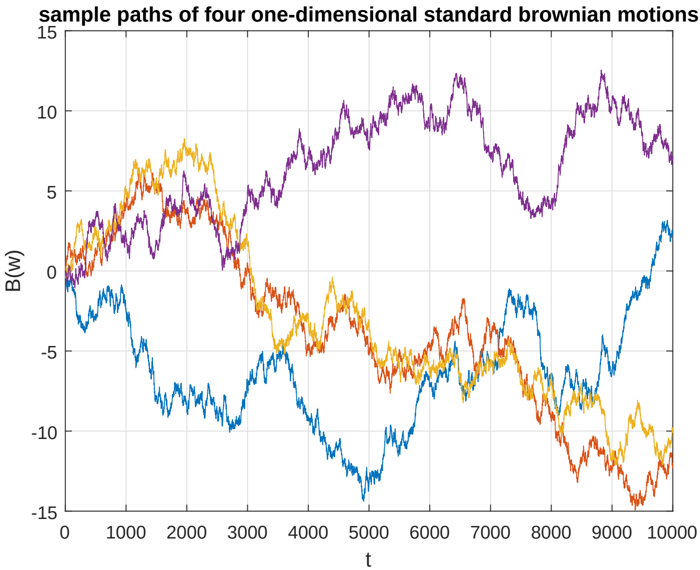
Definition

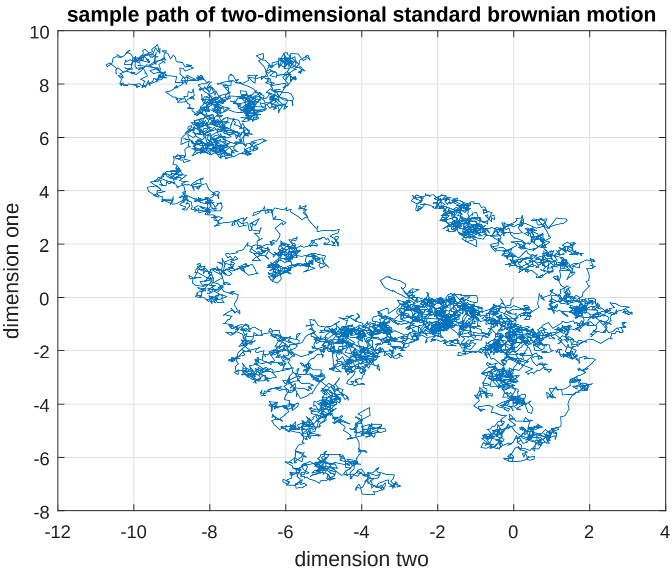
Ein reell-wertiger stochastischer Prozess $\{B(t) : t \geq 0\}$ *wird eine* **(lineare) Brownsche Bewegung mit Start in** $x \in \mathbb{R}$ *genannt, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

i) $B(0) = x$
ii) *Der Prozess hat unabhängige Inkremente. Das bedeutet, dass für alle Zeitpunkte* $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ *die Zufallsvariablen* $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \ldots, B(t_1) - B(t_0)$ *unabhängig sind.*
iii) *Für alle* $t \geq 0$ *and* $h > 0$ *sind die Inkremente* $B(t+h) - B(t)$ *normal verteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz h.*
iv) *Die Abbildung* $t \longmapsto B(t)$ *ist fast sicher stetig.*

Falls x=0, so heißt $\{B(t) : t \geq 0\}$ *eine* **Standard- Brownsche Bewegung**.


sample path of one-dimensional standard brownian motion
B(w)
t
8
6
4
2
0
-2
-4
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000


sample paths of four one-dimensional standard brownian motions
B(w)
t
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000


sample path of two-dimensional standard brownian motion
dimension one
dimension two
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4

Satz (Wiener 1923)

Es existiert eine Standard- Brownsche Bewegung.

Beweisstrategie:

i) Es genügt die Existenz einer Standard- Brownsche Bewegung auf $[0, 1]$ zu zeigen.
ii) Konstruiere induktiv für Dyadische Punkte diskrete Brownsche Bewegung mit den richtigen endlichen Verteilungen.
iii) Interpoliere zwischen den definierten Werten linear.
iv) Zeige gleichmäßige Konvergenz.
v) Weise Eigenschaften der Standard- Brownschen Bewegung für den stetigen Grenzwert nach.

Hilfslemma 1

Sei A eine orthogonale $d \times d$- Matrix und X ein d-dimensionaler standard Gaußscher Vektor. Dann ist AX ebenfalls ein d-dimensionaler Standard- Gaußscher Vektor.

Beweis:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^d}} e^{\frac{-\|x\|^2}{2}} \\ f_{AX}(x) &= f(A^{-1}x) \mid det(A^{-1}) \mid = f_X(x) \end{aligned}$$

$\square$

Hilfslemma 2

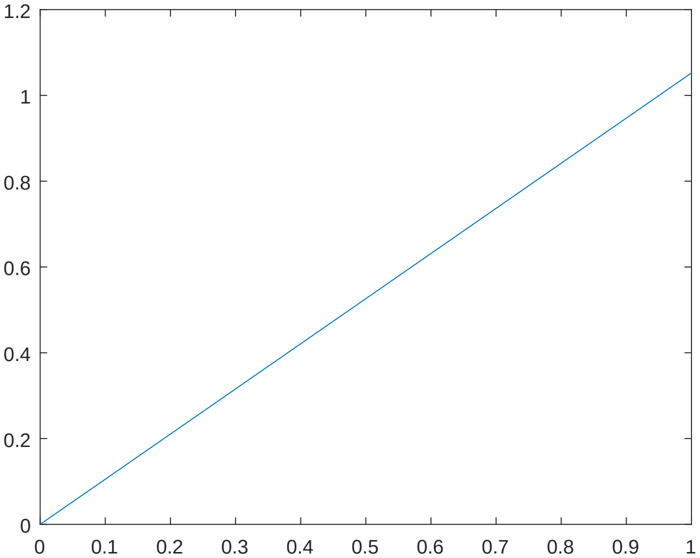
Seien X und Y $\sim N(0, \sigma^2)$ und unabhängig. Dann sind X+Y und X-Y $\sim N(0, 2\sigma^2)$ und unabhängig.

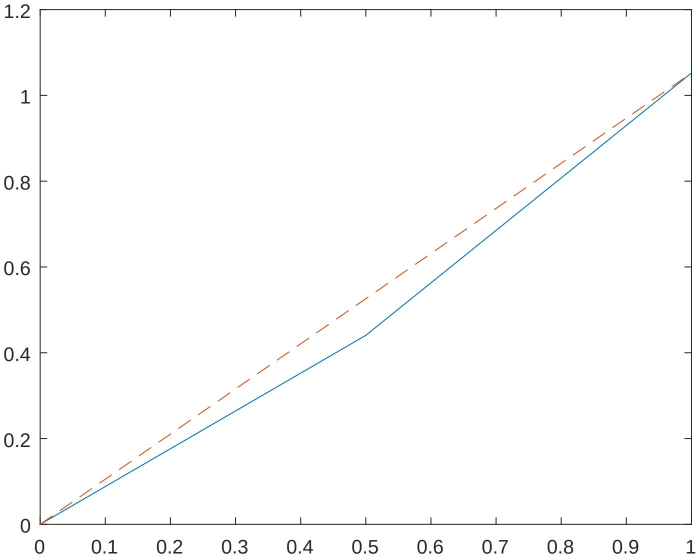
Beweis:

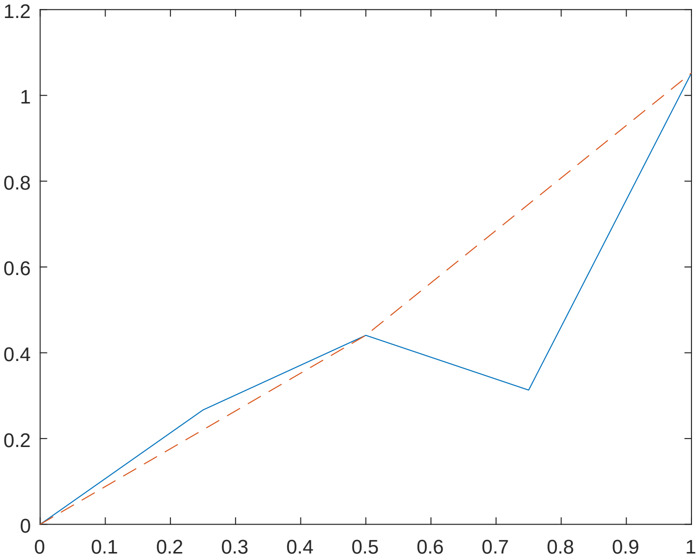
Es ist $(X/\sigma, Y/\sigma)^T \sim N(0, I_2)$ und $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ orthogonal

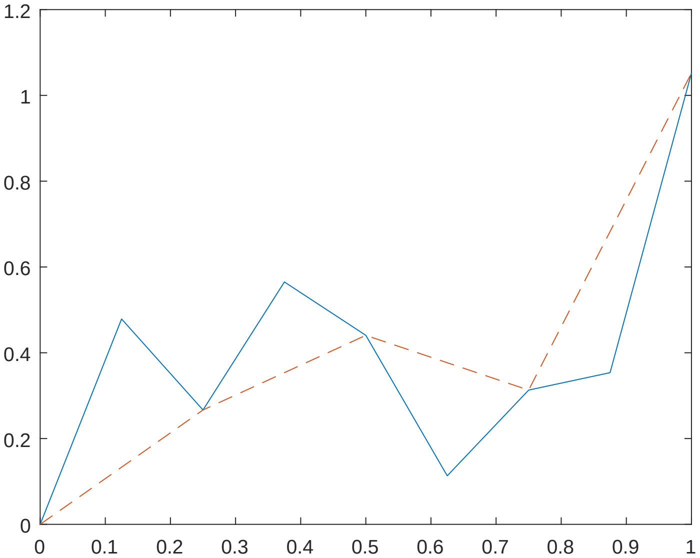
$\Rightarrow A(X/\sigma, Y/\sigma)^T = ((X+Y)/\sqrt{2\sigma^2}, (X-Y)/\sqrt{2\sigma^2}) \sim N(0, I_2)$

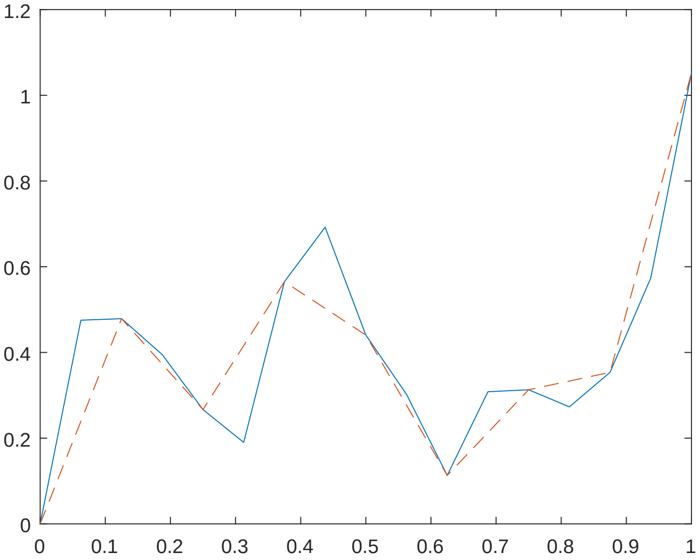
$\square$

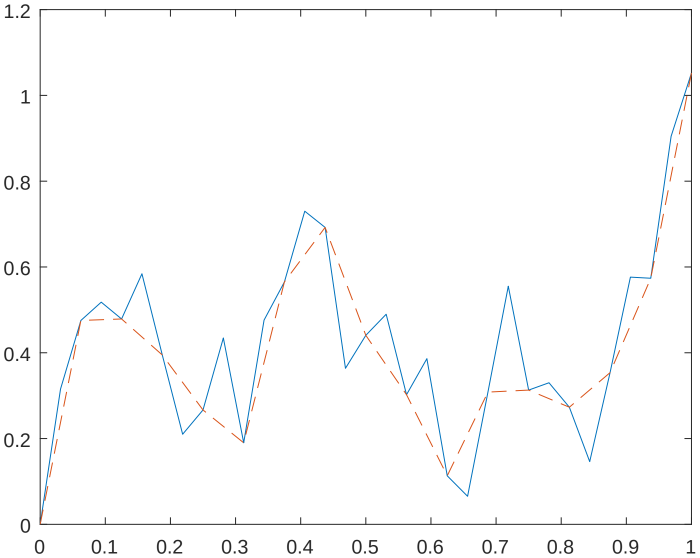

1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

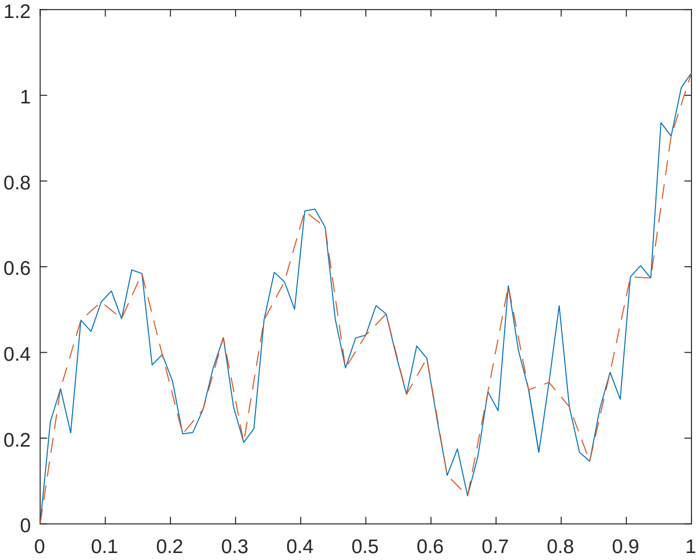

1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

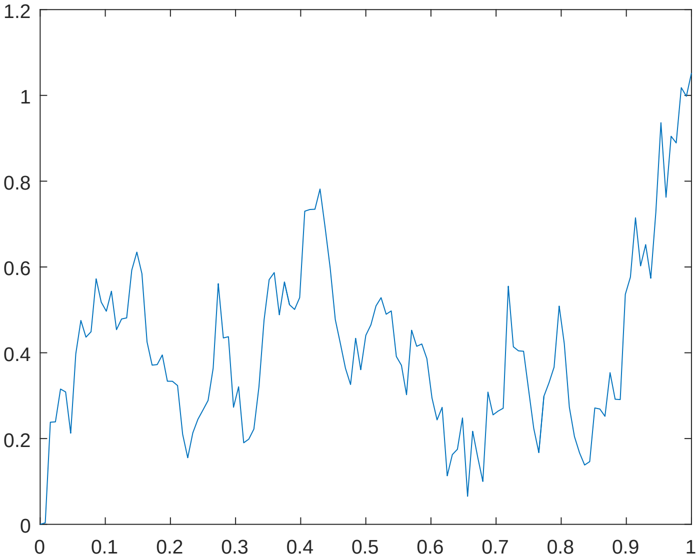

1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

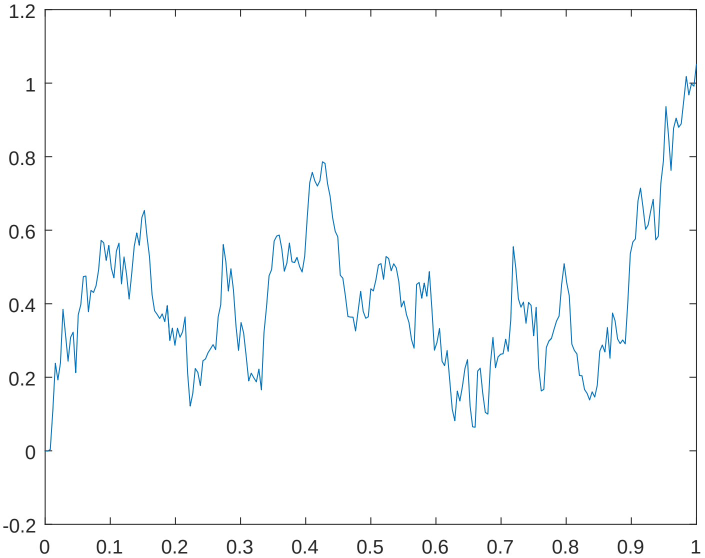

1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

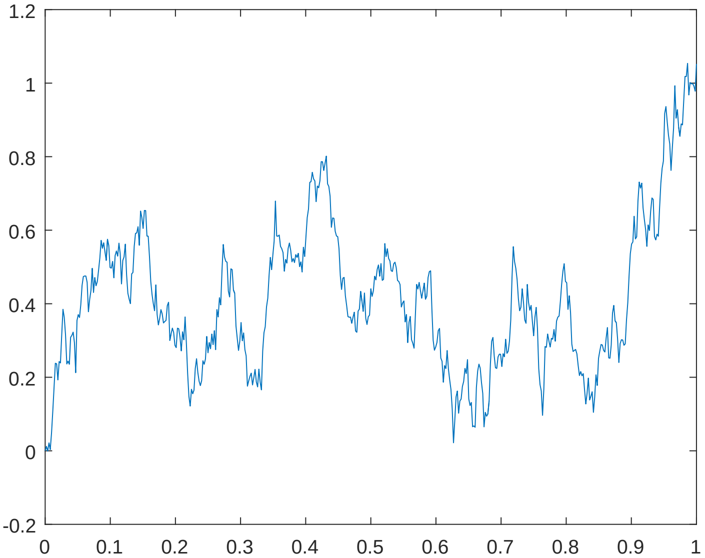

1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

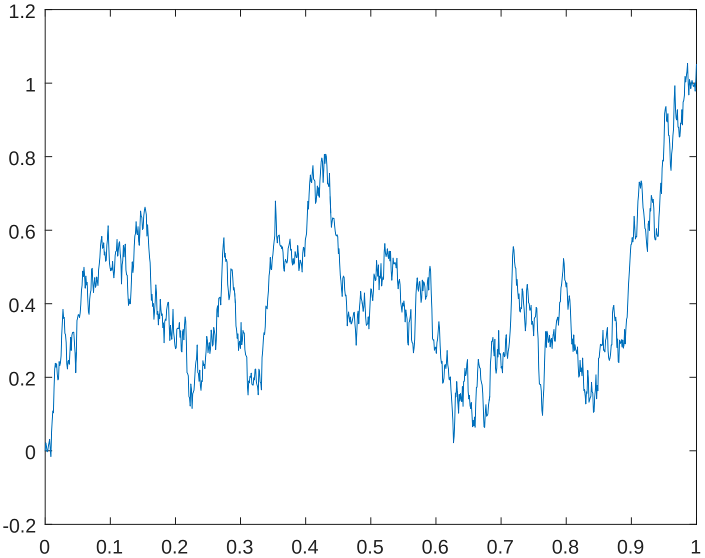

1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

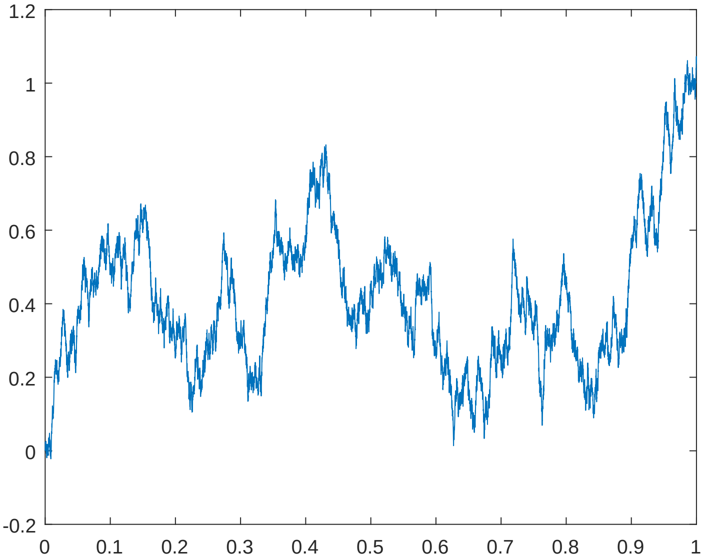

0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Lemma

Es sei $\{B(t) : t \geq 0\}$ eine standard Brownsche Bewegung. Dann ist $\{X(t) : t \geq 0\}$ mit $X(t) := x + B(t)$ wobei $x \in \mathbb{R}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in x.

Beweis:

i) $X(0) = x$

ii)+iii) $X(t+h) - X(t) = B(t+h) + x - B(t) - x = B(t+h) - B(t)$
$\Rightarrow$ Unabhängigkeit und korrekte Verteilungen

iv) klar.

$\square$

Lemma

Es sei $\{B(t) : t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt für $t \neq s$:

$$Cov\left[B(t), B(s)\right] = min\left(t, s\right)$$

Beweis: O.B.d.A. $t < s$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
Cov\left[B(t), B(s)\right] &= Cov\left[B(t), B(t) + (B(s) - B(t))\right] \\
&= Cov\left[B(t), B(t)\right] + \\
&\quad\; Cov\left[B(t) - B(0), B(s) - B(t)\right] \\
&= Var\left[B(t)\right] + 0 \\
&= Var\left[B(t) - B(0)\right] \\
&= t
\end{aligned}$$

$\square$