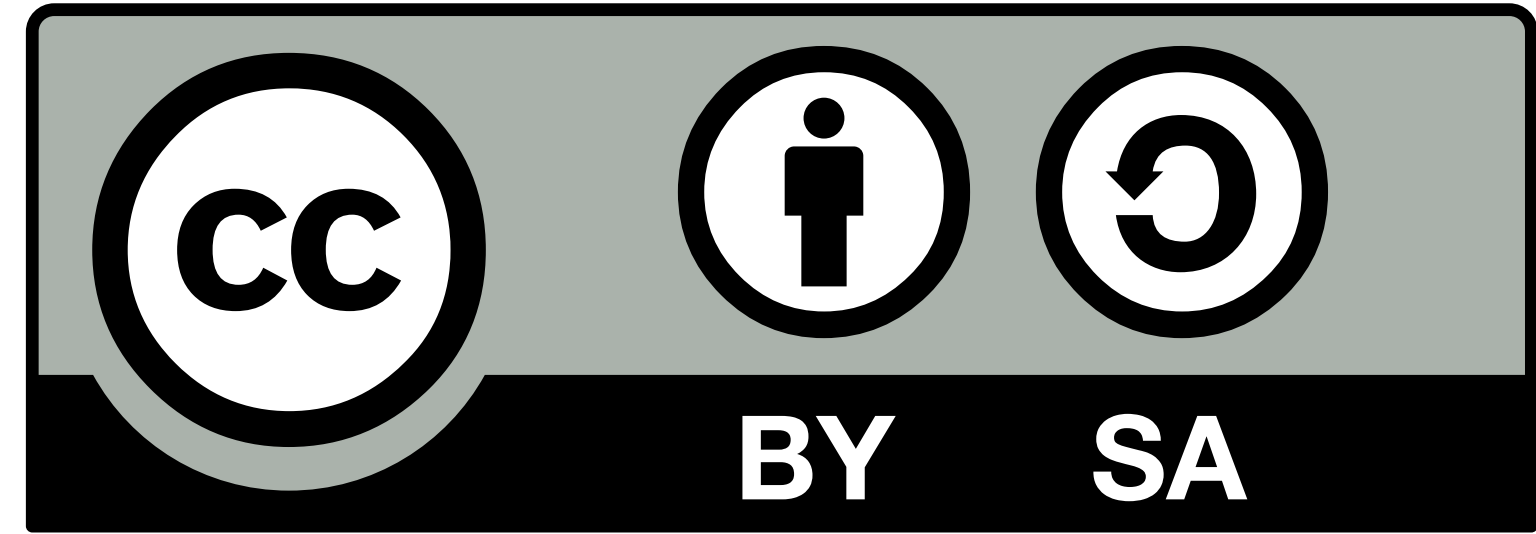


# MOVIMIENTO PARABÓLICO

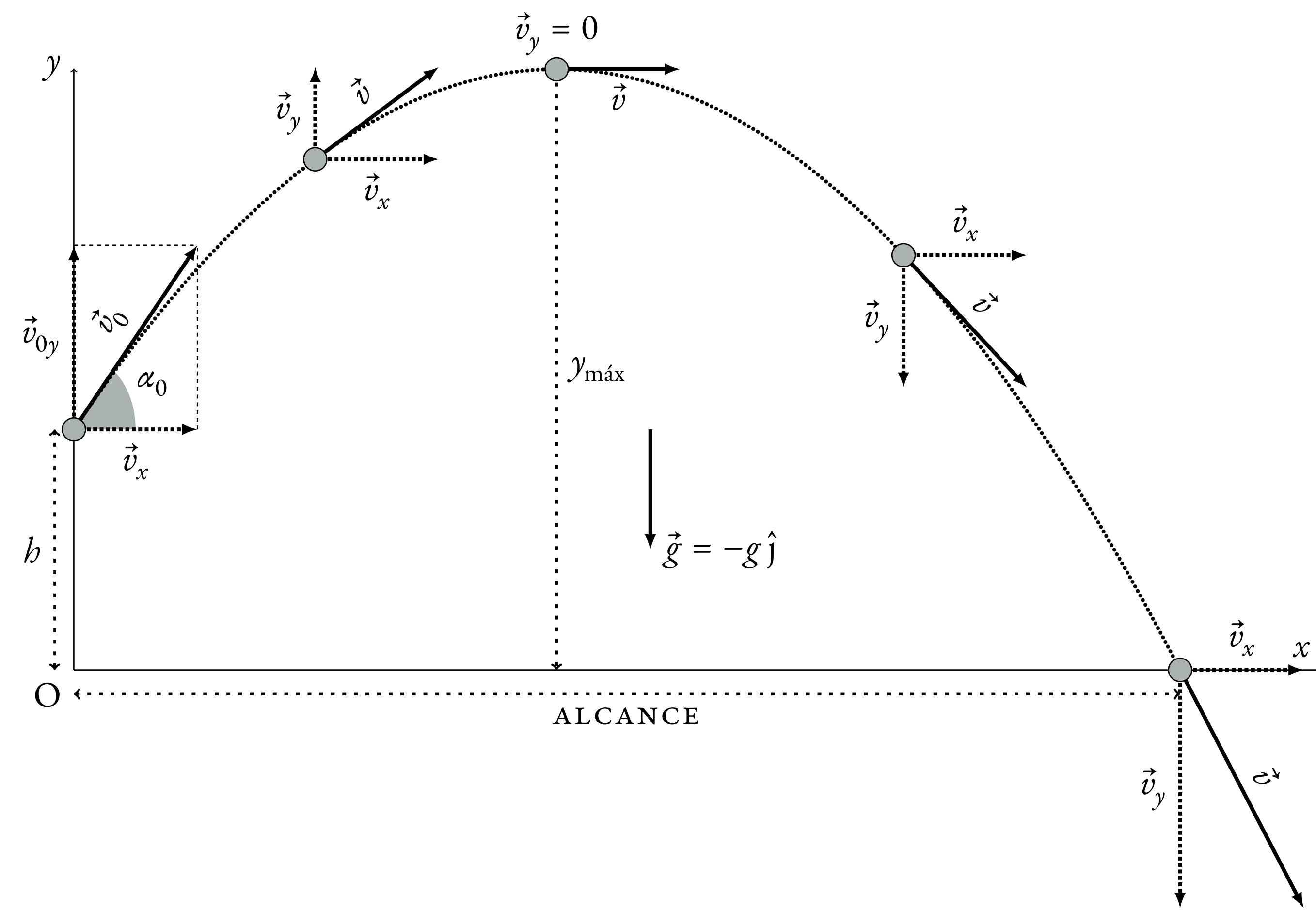
Rodrigo Alcaraz de la Osa



El **movimiento parabólico** surge de la **composición** de:

- Un **MRU horizontal** con velocidad  $\vec{v}_x = v_x \hat{i}$  constante.
- Un **MRUV vertical** con velocidad inicial  $\vec{v}_{0y} = v_{0y} \hat{j}$  hacia arriba. La aceleración  $\vec{g} = -g \hat{j}$  apunta hacia abajo (despreciamos aquí el rozamiento con el aire).

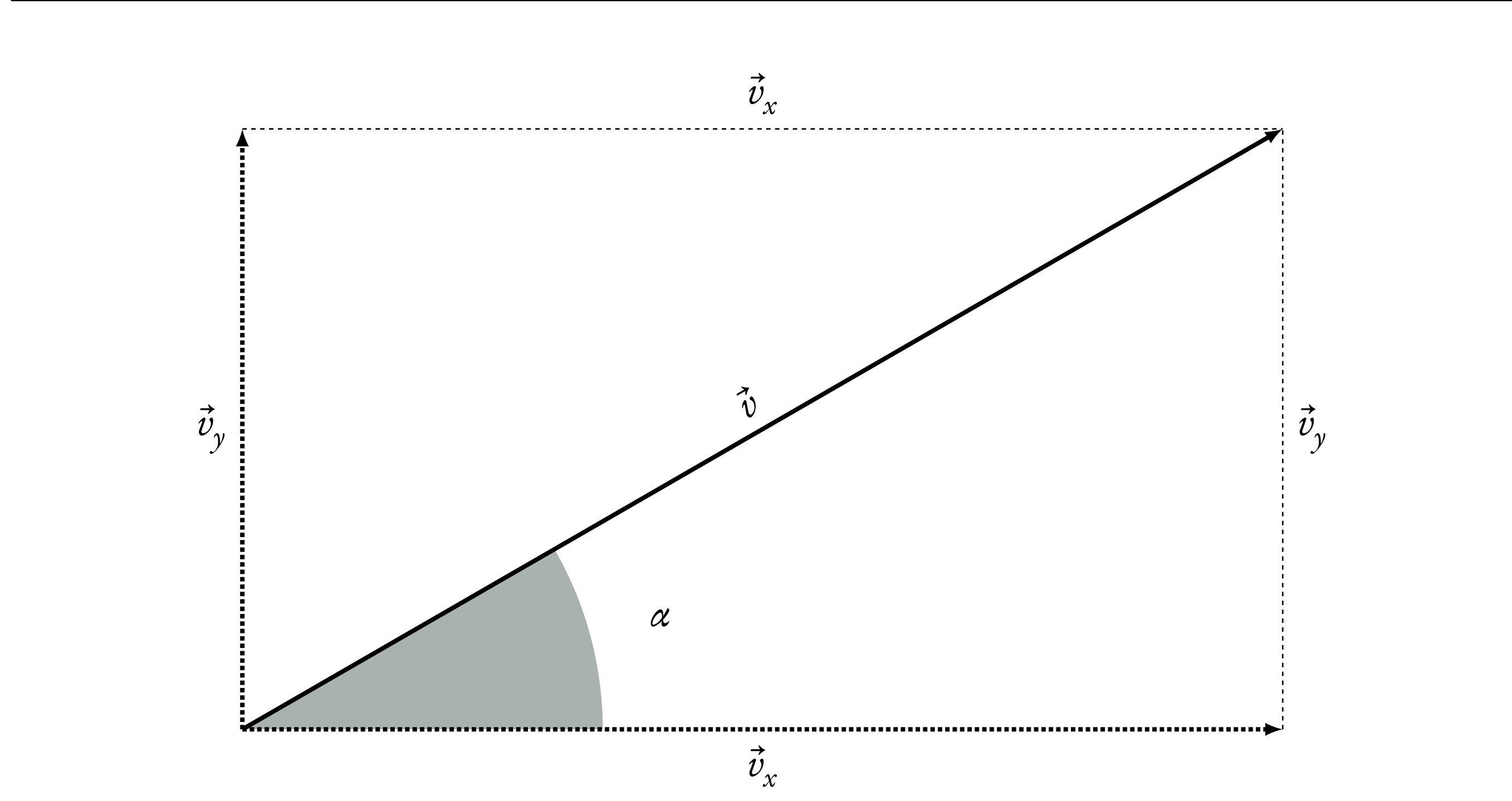
La figura muestra el esquema de un **tiro parabólico**, con un proyectil lanzado desde una altura  $h$  con una velocidad inicial  $\vec{v}_0 = v_x \hat{i} + v_{0y} \hat{j}$  que forma un ángulo  $\alpha_0$  con la horizontal.



Como el proyectil se lanza desde una altura  $h$ , su **posición inicial** viene dada por:

$$\vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} = 0 + h \hat{j} = h \hat{j}$$

## Componentes de la velocidad



En cualquier momento, las **componentes** de la **velocidad**  $\vec{v}$  son:

$$\begin{aligned}\vec{v}_x &= (v \cos \alpha) \hat{i} \\ \vec{v}_y &= (v \sin \alpha) \hat{j}\end{aligned}$$

Según el **teorema de Pitágoras**:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

## Ecuaciones vectoriales del movimiento

Magnitud	Ecuación vectorial
Posición	$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} = \underbrace{(v_0 \cos \alpha_0 \cdot t)}_{x(t)} \hat{i} + \underbrace{\left(h + v_0 \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2\right)}_{y(t)} \hat{j}$
Velocidad	$\vec{v}(t) = v_x \hat{i} + v_y(t) \hat{j} = \underbrace{(v_0 \cos \alpha_0)}_{v_x} \hat{i} + \underbrace{(v_0 \sin \alpha_0 - g t)}_{v_y(t)} \hat{j}$
Aceleración	$\vec{a}(t) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = 0 - g \hat{j} = -g \hat{j}$

## Ecuación de la trayectoria

Eliminando el tiempo  $t$  se obtiene la ecuación de una **parábola**, tal y como se observa en la figura:

$$y = h + x \tan \alpha_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0}$$

## Tiempo de vuelo

El **tiempo de vuelo**  $t_{\text{vuelo}}$  es el tiempo total que el móvil permanece en el aire. Se obtiene imponiendo  $y(t_{\text{vuelo}}) = 0$  y despejando el tiempo:

$$0 = h + v_0 \sin \alpha_0 \cdot t_{\text{vuelo}} - \frac{1}{2} g t_{\text{vuelo}}^2$$

Despejando  $t_{\text{vuelo}}$ :

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{v_0 \sin \alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2 g h}}{g},$$

donde nos quedamos únicamente con la opción positiva (+).

## Alcance

El **alcance** es la distancia horizontal que recorre el móvil, siendo máximo para un ángulo  $\alpha_0 = 45^\circ$ , y teniendo el mismo valor para  $\alpha_0 = 45^\circ + a$  que para  $\alpha_0 = 45^\circ - a$ . Se obtiene sustituyendo en la ecuación de la coordenada  $x$  la expresión del tiempo de vuelo, es decir **alcance**  $= x(t_{\text{vuelo}})$ .

## Altura máxima

La **altura máxima**  $y_{\text{máx}}$  se alcanza cuando:

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha_0 - g t = 0$$

Despejando el tiempo  $t = v_0 \sin \alpha_0 / g$  y sustituyendo en  $y(t)$ :

$$y_{\text{máx}} = h + v_0 \sin \alpha_0 \cdot \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \right)^2 = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g},$$

obteniéndose su valor máximo para  $\alpha_0 = 90^\circ$  (lanzamiento vertical).

## Ángulo de la trayectoria

El **ángulo de la trayectoria** en un determinado punto coincide con el ángulo que el vector velocidad  $\vec{v}$  forma con la horizontal en ese punto. Para su cálculo obtenemos las componentes  $\vec{v}_x$  y  $\vec{v}_y$ , y gracias a la definición trigonométrica de tangente de un ángulo:

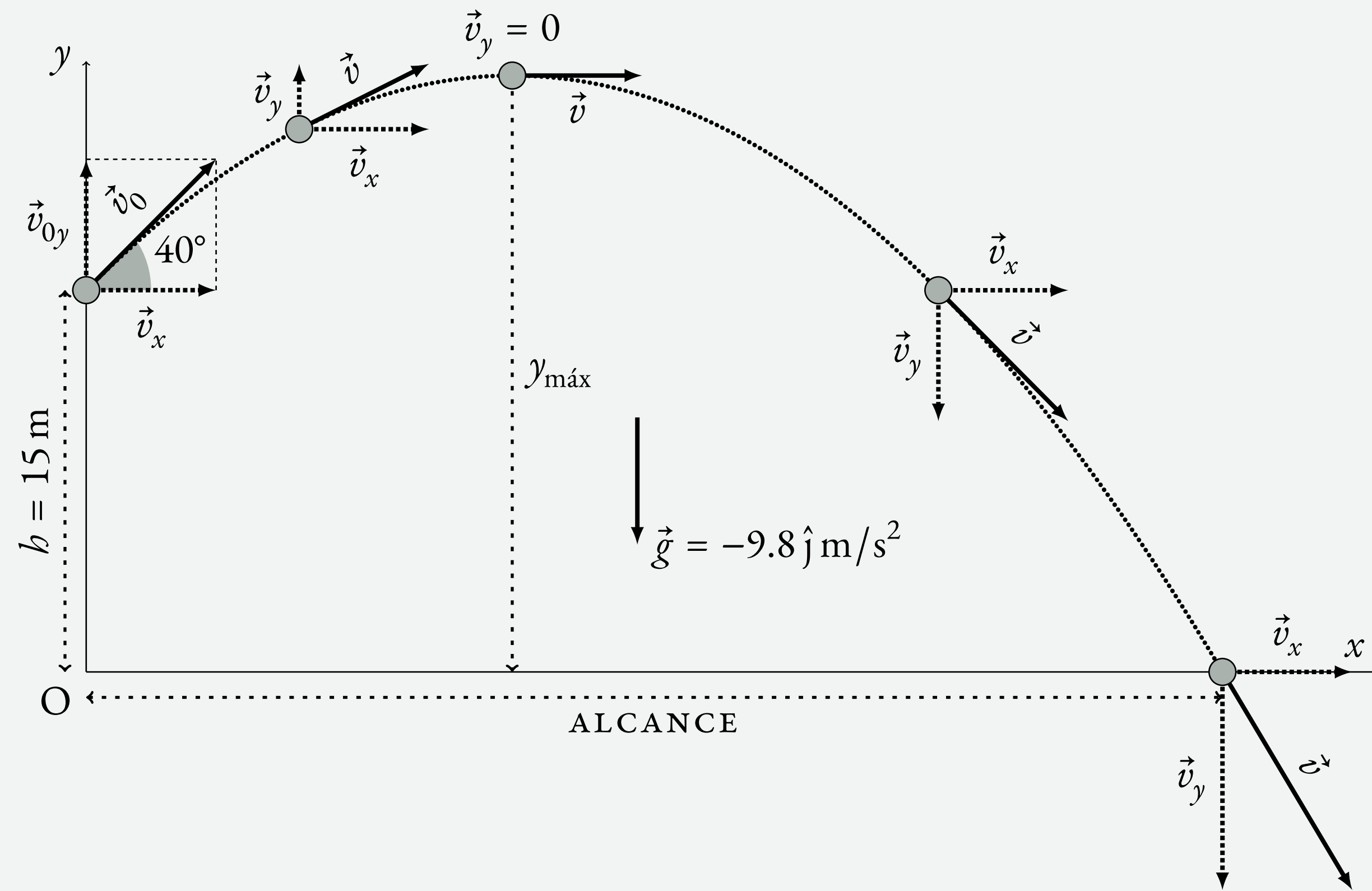
$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha = \arctan \left( \frac{v_y}{v_x} \right)$$

## Ejemplo

Desde una ventana de una casa que está a 15 m de altura lanzamos un chorro de agua a 20 m/s con un ángulo de  $40^\circ$ . Calcula la distancia a la que caerá el agua y la velocidad con la que llega.

### Solución

Lo primero hacemos un dibujo representando la situación:



Vamos a escribir las **ecuaciones del movimiento**:

**componente  $x$**   $\rightarrow x(t) = 0 + v_0 \cos \alpha_0 \cdot t = (20 \cos 40^\circ \cdot t) \text{ m}$

**componente  $y$**   $\rightarrow y(t) = h + v_0 \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$   
 $= (15 + 20 \sin 40^\circ \cdot t - 4.9 t^2) \text{ m}$

Lo primero que nos piden es la distancia a la que caerá el agua, el **alcance**. Para ello necesitamos calcular primero el **tiempo de vuelo**  $t_{\text{vuelo}}$ , por lo que imponemos  $y(t_{\text{vuelo}}) = 0$ :

$$0 = 15 + 20 \sin 40^\circ \cdot t_{\text{vuelo}} - 4.9 t_{\text{vuelo}}^2$$

Despejamos el **tiempo de vuelo**  $t_{\text{vuelo}}$  (notar que únicamente nos quedamos con la opción positiva):

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{20 \sin 40^\circ \pm \sqrt{20^2 \sin^2 40^\circ + 294}}{9.8} = \begin{cases} 3.5 \text{ s} \\ \approx 0.9 \text{ s} \end{cases}$$

Sustituyendo el **tiempo de vuelo** en la coordenada  $x$  obtenemos el **alcance**:

$$\text{alcance} = x(t_{\text{vuelo}}) = 20 \cos 40^\circ \cdot t_{\text{vuelo}} = 20 \cos 40^\circ \cdot 3.5 = 53.6 \text{ m}$$

Para calcular la velocidad con la que llega al suelo, escribimos primero la **ecuación de la velocidad**:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= v_x \hat{i} + v_y(t) \hat{j} = (v_0 \cos \alpha_0) \hat{i} + (v_0 \sin \alpha_0 - g t) \hat{j} \\ &= [(20 \cos 40^\circ) \hat{i} + (20 \sin 40^\circ - 9.8 t) \hat{j}] \text{ m/s}\end{aligned}$$

Sustituyendo el **tiempo de vuelo** obtenemos la **velocidad** con la que llega al suelo,  $\vec{v}(t_{\text{vuelo}})$ :

$$\begin{aligned}\vec{v}(t_{\text{vuelo}}) &= (20 \cos 40^\circ) \hat{i} + (20 \sin 40^\circ - 9.8 \cdot t_{\text{vuelo}}) \hat{j} \\ &= 15.3 \hat{i} + (20 \sin 40^\circ - 9.8 \cdot 3.5) \hat{j} = (15.3 \hat{i} - 21.4 \hat{j}) \text{ m/s}\end{aligned}$$

siendo el **módulo**  $v = |\vec{v}| = \sqrt{15.3^2 + (-21.4)^2} = 26.3 \text{ m/s}$  (**teorema de Pitágoras**).