PLANO INCLINADO

RODRIGO ALCARAZ DE LA OSA[1]

[1] CONTACTO: rodri.alcaraz@gmail.com.

La figura 1 muestra las FUERZAS que actúan sobre una masa m que desciende con velocidad $\vec{v}$ y con rozamiento (coeficiente μ) por un plano inclinado un ángulo α con respecto a la horizontal.

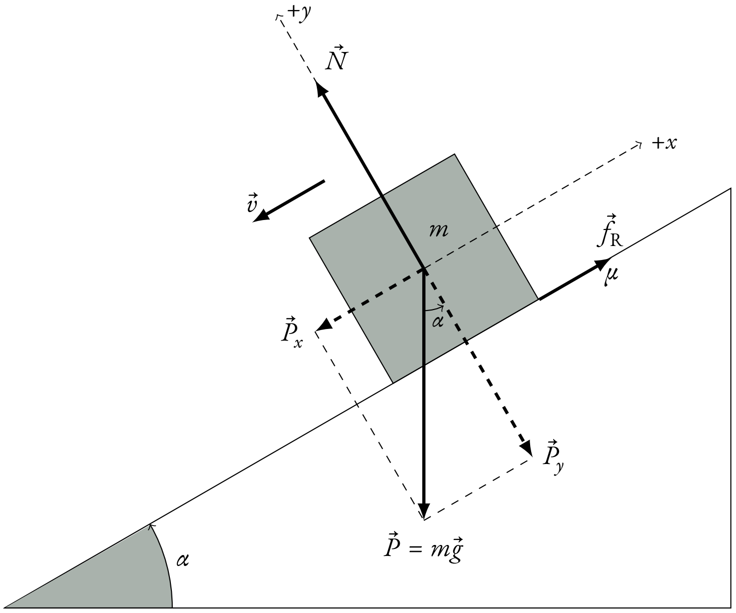


Figura 1: Esquema de una masa m que desciende con velocidad $\vec{v}$ y con rozamiento (coeficiente μ) por un plano inclinado un ángulo α con respecto a la horizontal. La relación entre el espacio recorrido a lo largo del plano, Δx, y la altura h a la que se encuentra la masa viene dada por: $h = \Delta x \sin\alpha$.

2ª LEY DE NEWTON

La aceleración $\vec{a}$ de la masa m es proporcional a la fuerza neta $\vec{F}_\mathrm{T}$ aplicada sobre ella:

$$\vec{F}_\mathrm{T} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_\mathrm{T}}{m}$$

La masa m se va a mover solo en la dirección x, por lo que $\vec{a} = a\,\hat{\imath}$. La fuerza neta $\vec{F}_\mathrm{T}$ es el vector suma de todas las FUERZAS[2] que actúan sobre m:

$$\vec{F}_\mathrm{T} = \sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_\mathrm{R} = m\vec{a} = ma\,\hat{\imath}$$
$$-P_x\,\hat{\imath} - P_y\,\hat{\jmath} + N\,\hat{\jmath} + f_\mathrm{R}\,\hat{\imath} = ma\,\hat{\imath}$$

de donde sacamos dos ECUACIONES, una para cada COMPONENTE:

$$\text{COMPONENTE } x \longrightarrow f_\mathrm{R} - P_x = ma \tag{1}$$
$$\text{COMPONENTE } y \longrightarrow N - P_y = 0 \tag{2}$$

Despejando $N = P_y = mg\cos\alpha$ de (2) y sustituyendo en (1), utilizando además que $f_\mathrm{R} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$ y que $P_x = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$:

$$\mu \cancel{m}g\cos\alpha - \cancel{m}g\sin\alpha = \cancel{m}a \longrightarrow \boxed{a = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

A partir de aquí se puede estudiar la cinemática de la masa m, suponiendo que se mueve con un MRUV[3] cuya aceleración es constante y viene dada por $\vec{a} = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\,\hat{\imath}$.

[2] FUERZAS QUE ACTÚAN

- Peso $\vec{P} = -P_x\,\hat{\imath} - P_y\,\hat{\jmath}$
  De la figura 1 podemos ver que:
  $$P_x = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$$
  $$P_y = P\cos\alpha = mg\cos\alpha$$
- Normal $\vec{N} = N\,\hat{\jmath}$
- Fuerza de rozamiento $\vec{f}_\mathrm{R} = f_\mathrm{R}\,\hat{\imath} = \mu N\,\hat{\imath}$

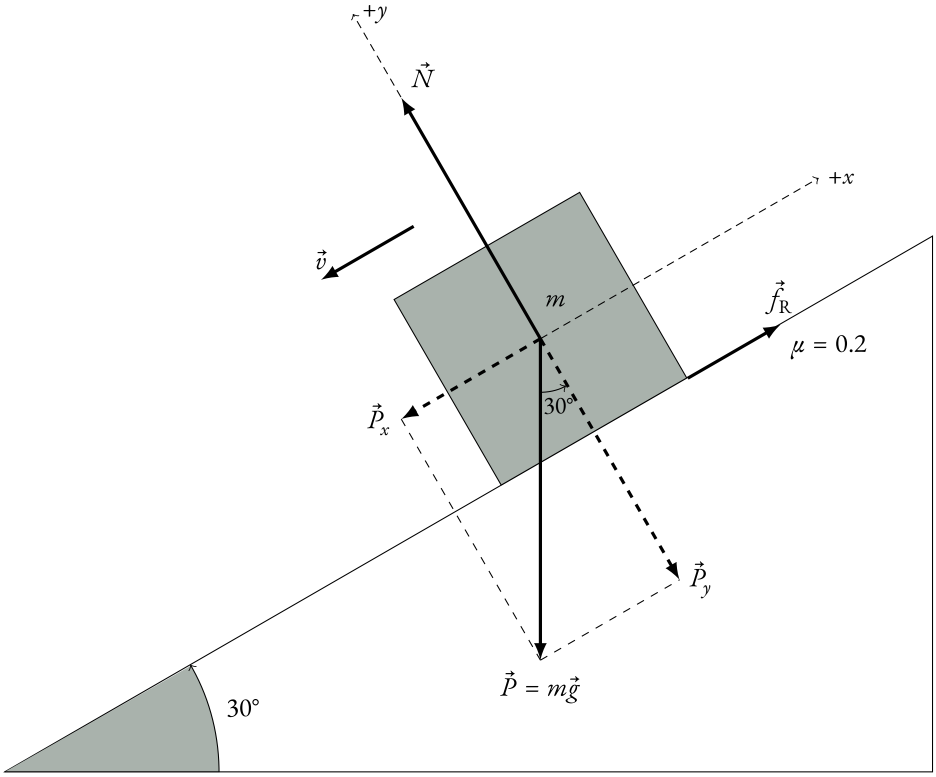
[3] La ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO es por tanto:
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
Y la ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD es:
$$v(t) = v_0 + at$$

EJEMPLO

Un cuerpo baja por un plano inclinado 30° con un coeficiente de rozamiento $\mu = 0.2$. Calcula la velocidad que llevará y el espacio recorrido al cabo de 5 s, si inicialmente estaba en reposo.

SOLUCIÓN

Lo primero hacemos un dibujo representando la situación:



Las FUERZAS que actúan son:

- Peso $\vec{P} = -P_x\,\hat{\imath} - P_y\,\hat{\jmath}$, donde (dejamos el resultado en función de m):

$$P_x = mg\sin\alpha = 9.8m\sin 30° = 4.9m\,\mathrm{N}$$
$$P_y = mg\cos\alpha = 9.8m\cos 30° = 4.9\sqrt{3}m\,\mathrm{N}$$

- Normal $\vec{N} = N\,\hat{\jmath}$
- Fuerza de rozamiento $\vec{f}_R = \mu N\,\hat{\imath} = 0.2N\,\hat{\imath}\,\mathrm{N}$ (no confundir la normal N con la unidad Newton N)

Escribimos la 2ª LEY DE NEWTON para cada COMPONENTE:

$$\text{COMPONENTE } x \longrightarrow f_R - P_x = ma \tag{3}$$
$$\text{COMPONENTE } y \longrightarrow N - P_y = 0 \tag{4}$$

Despejando $N = P_y = 4.9\sqrt{3}m$ de (4) y sustituyendo en (3), utilizando además que $f_R = 0.2N$ y que $P_x = 4.9m$:

$$0.2 \cdot 4.9\sqrt{3}\cancel{m} - 4.9\cancel{m} = \cancel{m}a \longrightarrow a = -3.2\,\mathrm{m/s^2} \Longrightarrow \vec{a} = -3.2\,\hat{\imath}\,\mathrm{m/s^2}$$

La VELOCIDAD que llevará a los 5 s la calculamos con la ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD:

$$v = v_0 + at = 0 - 3.2 \cdot 5 = -16.0\,\mathrm{m/s} \Longrightarrow \vec{v} = -16.0\,\hat{\imath}\,\mathrm{m/s}$$

Para el ESPACIO RECORRIDO podemos utilizar la ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO:

$$\Delta x = |x - x_0| = \left|v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2\right| = \left|0 - \frac{1}{2} \cdot 3.2 \cdot 5^2\right| = 40.0\,\mathrm{m}$$