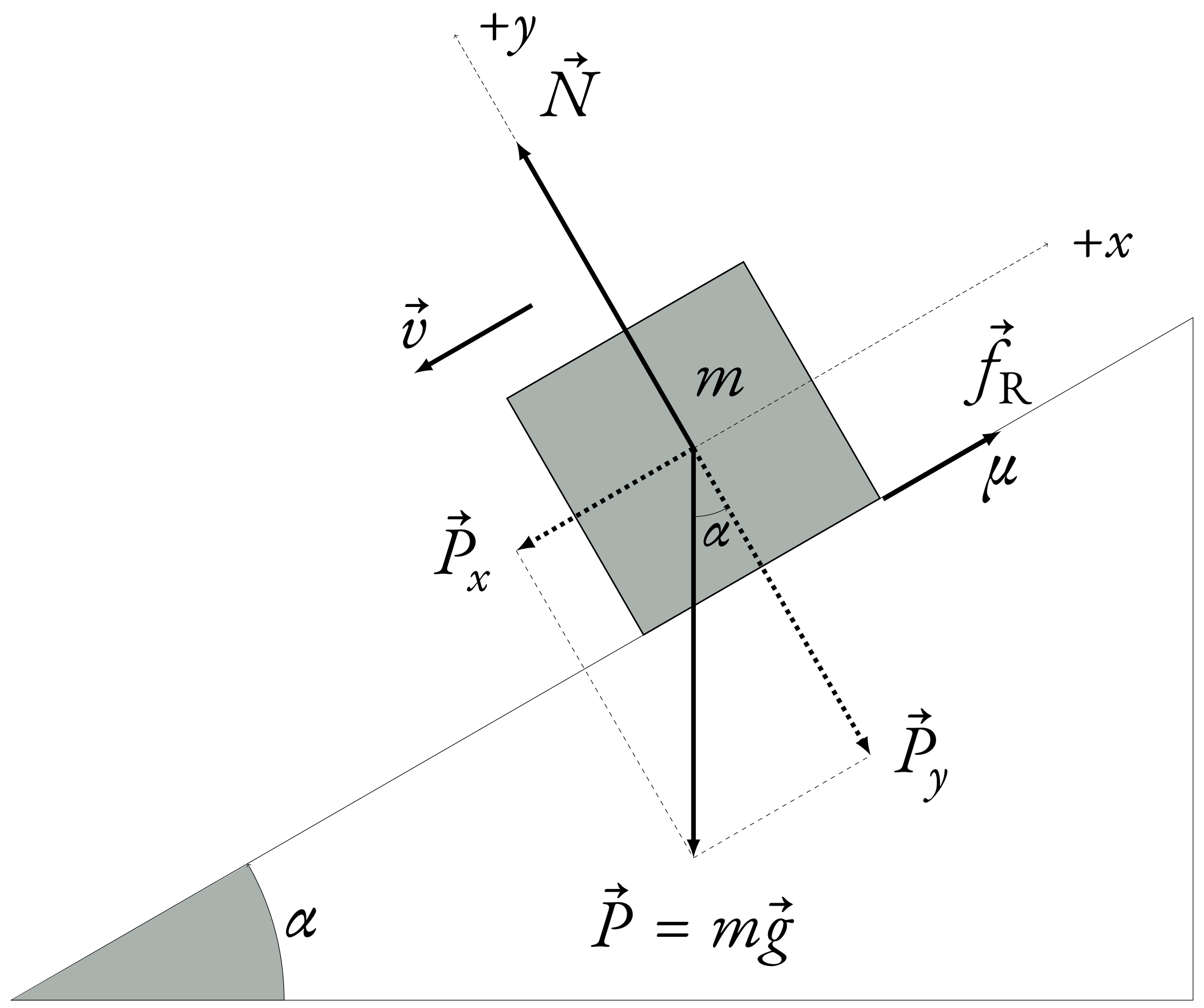
PLANO INCLINADO

Rodrigo Alcaraz de la Osa

La figura muestra las FUERZAS que actúan sobre una masa m que desciende con velocidad $\vec{v}$ y con rozamiento (coeficiente μ) por un plano inclinado un ángulo α con respecto a la horizontal.



La relación entre el espacio recorrido a lo largo del plano, Δx, y la altura h a la que se encuentra la masa viene dada por: $h = \Delta x \sin \alpha$.

Fuerzas que actúan

- Peso $\vec{P} = -P_x\,\hat{\imath} - P_y\,\hat{\jmath}$.
  De la figura podemos ver que:
  $$P_x = P \sin \alpha = mg \sin \alpha$$
  $$P_y = P \cos \alpha = mg \cos \alpha$$
- Normal $\vec{N} = N\,\hat{\jmath}$
- Fuerza de rozamiento $\vec{f}_\text{R} = f_\text{R}\,\hat{\imath} = \mu N\,\hat{\imath}$

2ª ley de Newton

La aceleración $\vec{a}$ de la masa m es proporcional a la fuerza neta $\vec{F}_\text{T}$ aplicada sobre ella:

$$\vec{F}_\text{T} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_\text{T}}{m}$$

La masa m se va a mover solo en la dirección x, por lo que $\vec{a} = a\,\hat{\imath}$. La fuerza neta $\vec{F}_\text{T}$ es el vector suma de todas las FUERZAS que actúan sobre m:

$$\vec{F}_\text{T} = \sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_\text{R} = m\vec{a} = ma\,\hat{\imath}$$
$$-P_x\,\hat{\imath} - P_y\,\hat{\jmath} + N\,\hat{\jmath} + f_\text{R}\,\hat{\imath} = ma\,\hat{\imath}$$

de donde sacamos dos ECUACIONES, una para cada COMPONENTE:

$$\text{COMPONENTE } x \rightarrow f_\text{R} - P_x = ma \qquad (1)$$
$$\text{COMPONENTE } y \rightarrow N - P_y = 0 \qquad (2)$$

Despejando $N = P_y = mg \cos \alpha$ de (2) y sustituyendo en (1), utilizando además que

$$f_\text{R} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$
$$P_x = P \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

$$\mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha = ma$$
$$\boxed{a = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}$$

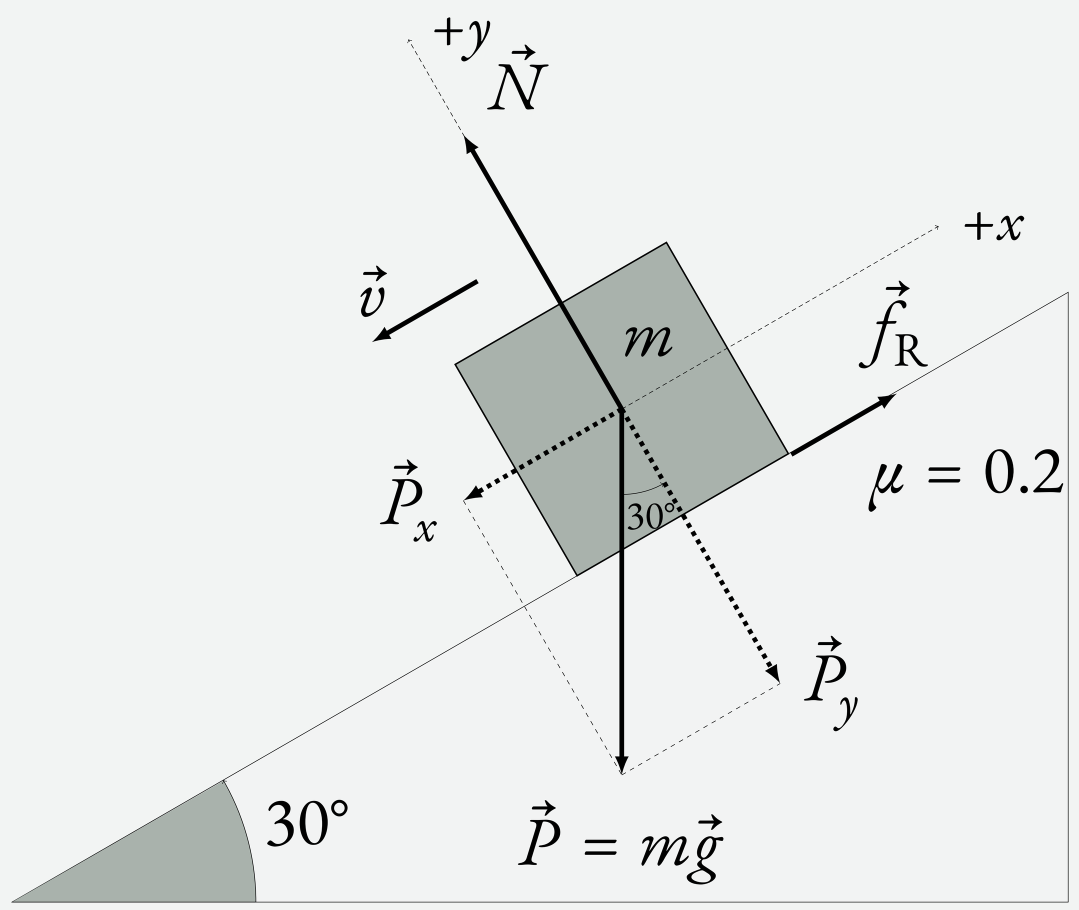
A partir de aquí se puede estudiar la cinemática de la masa m, suponiendo que se mueve con un MRUV cuya aceleración es constante y viene dada por $\vec{a} = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)\,\hat{\imath}$.

Ejemplo

Un cuerpo baja por un plano inclinado 30° con un coeficiente de rozamiento $\mu = 0.2$. Calcula la velocidad que llevará y el espacio recorrido al cabo de 5 s, si inicialmente estaba en reposo.

Solución

Lo primero hacemos un dibujo representando la situación:



Ejemplo (cont.)

Las FUERZAS que actúan son:

- Peso $\vec{P} = -P_x\,\hat{\imath} - P_y\,\hat{\jmath}$, donde:
  $$P_x = mg \sin \alpha = 9.8m \sin 30° = 4.9m \text{ N}$$
  $$P_y = mg \cos \alpha = 9.8m \cos 30° = 4.9\sqrt{3}m \text{ N}$$
- Normal $\vec{N} = N\,\hat{\jmath}$
- Fuerza de rozamiento $\vec{f}_\text{R} = \mu N\,\hat{\imath} = 0.2N\,\hat{\imath}\,\text{N}$

Escribimos la 2ª LEY DE NEWTON para cada COMPONENTE:

$$\text{COMPONENTE } x \rightarrow f_\text{R} - P_x = ma \qquad (3)$$
$$\text{COMPONENTE } y \rightarrow N - P_y = 0 \qquad (4)$$

Despejando $N = P_y = 4.9\sqrt{3}m$ de (4) y sustituyendo en (3), utilizando además que $f_\text{R} = 0.2N$ y que $P_x = 4.9m$:

$$0.2 \cdot 4.9\sqrt{3}m - 4.9m = ma \rightarrow a = -3.2 \text{ m/s}^2$$
$$\vec{a} = -3.2\,\hat{\imath}\,\text{m/s}^2$$

La VELOCIDAD que llevará a los 5 s la calculamos con la ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD:

$$v = v_0 + at = 0 - 3.2 \cdot 5 = -16.0 \text{ m/s}$$
$$\vec{v} = -16.0\,\hat{\imath}\,\text{m/s}$$

Para el ESPACIO RECORRIDO podemos utilizar la ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO:

$$\Delta x = |x - x_0| = \left| v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2 \right|$$
$$= \left| 0 - \frac{1}{2} \cdot 3.2 \cdot 5^2 \right| = 40.0 \text{ m}$$

rodri.alcaraz@gmail.com