MOVIMIENTO PARABÓLICO

RODRIGO ALCARAZ DE LA OSA[1]

[1] CONTACTO: rodri.alcaraz@gmail.com.

El MOVIMIENTO PARABÓLICO[2] surge de la COMPOSICIÓN de:

- Un MRU HORIZONTAL con velocidad $\vec{v}_x = v_x\,\hat{\imath}$ constante.
- Un MRUV VERTICAL con velocidad inicial $\vec{v}_{0y} = v_{0y}\,\hat{\jmath}$ hacia arriba. La aceleración $\vec{g} = -g\,\hat{\jmath}$ apunta hacia abajo[3].

[2] También conocido como TIRO OBLICUO, este movimiento está estudiado desde la antigüedad. Se recoge en los libros más antiguos de balística para aumentar la precisión en el tiro de un proyectil.

[3] Despreciamos aquí el rozamiento con el aire.

La figura 1 muestra el esquema de un TIRO PARABÓLICO, con un proyectil lanzado desde una altura h con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_x\,\hat{\imath} + v_{0y}\,\hat{\jmath}$ que forma un ángulo α_0 con la horizontal[4].

[4] Como el proyectil se lanza desde una altura h, su POSICIÓN INICIAL viene dada por:

$$\vec{r}_0 = x_0\,\hat{\imath} + y_0\,\hat{\jmath} = 0 + h\,\hat{\jmath} = h\,\hat{\jmath}$$

Las COMPONENTES del vector VELOCIDAD inicial $\vec{v}_0$ están relacionadas con el ángulo α_0, a través de su tangente:

$$\tan\alpha_0 = \frac{v_{0y}}{v_x}$$

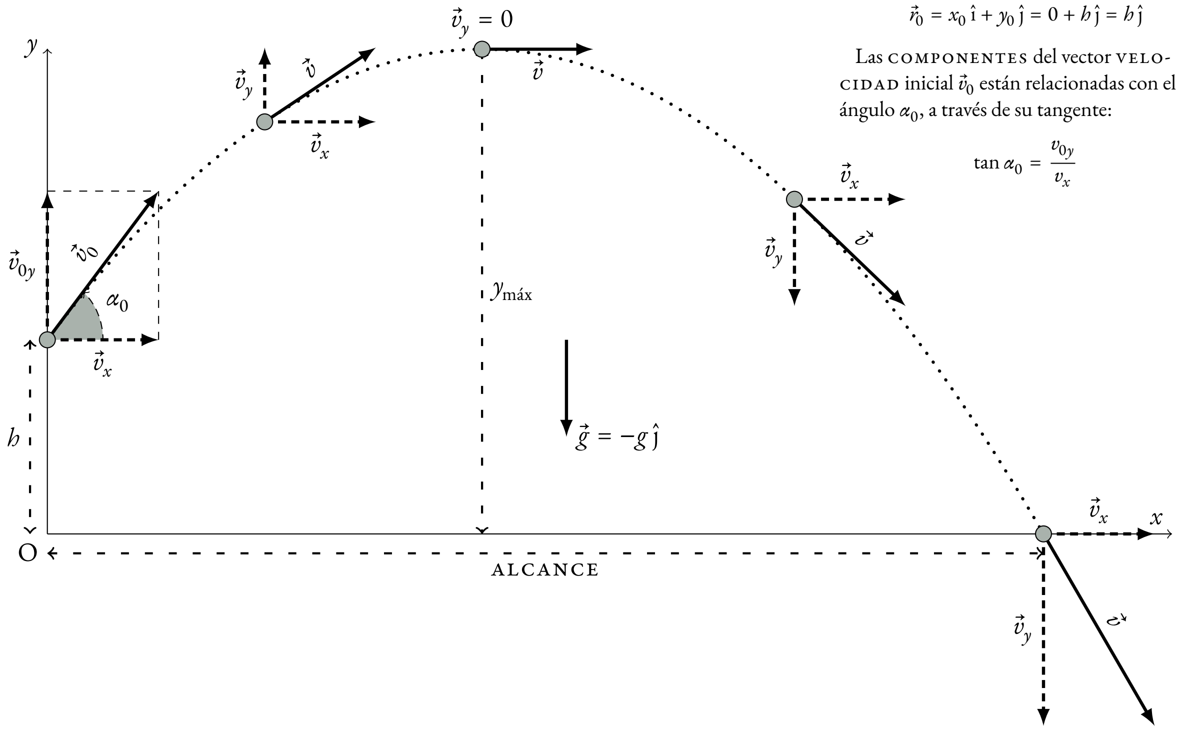


Figura 1: Esquema de un TIRO PARABÓLICO. Un proyectil es lanzado desde una altura h con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ que forma un ángulo α_0 con la horizontal.

Ecuaciones del movimiento

Para obtener las ECUACIONES DEL MOVIMIENTO, separamos el movimiento del proyectil en sus dos COMPONENTES, x (horizontal) e y (vertical):

Componente x En la dirección HORIZONTAL el proyectil describe un MRU, por lo que su ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO vendrá dada por:

$$x(t) = x_0 + v_x t = 0 + v_0\cos\alpha_0\cdot t = v_0\cos\alpha_0\cdot t$$

Componente y En la dirección VERTICAL el proyectil describe un MRUV ($\vec{g} = -g\,\hat{\jmath}$), por lo que su ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO vendrá dada por:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = h + v_0\sin\alpha_0\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

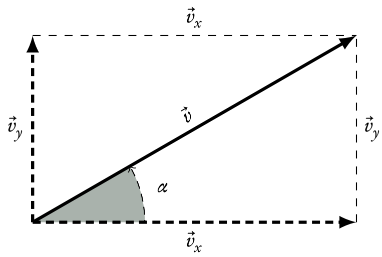


Figura 2: En cualquier momento, las COMPONENTES de la VELOCIDAD $\vec{v}$ son:

$$\vec{v}_x = (v\cos\alpha)\,\hat{\imath}$$
$$\vec{v}_y = (v\sin\alpha)\,\hat{\jmath}$$

Según el TEOREMA DE PITÁGORAS:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ecuaciones vectoriales

MAGNITUD	ECUACIÓN VECTORIAL
POSICIÓN	$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} = \underbrace{(v_0 \cos\alpha_0 \cdot t)}_{x(t)}\,\hat{\imath} + \underbrace{\left(h + v_0 \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right)}_{y(t)}\hat{\jmath}$
VELOCIDAD	$\vec{v}(t) = v_x\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath} = \underbrace{(v_0 \cos\alpha_0)}_{v_x}\,\hat{\imath} + \underbrace{(v_0 \sin\alpha_0 - gt)}_{v_y(t)}\,\hat{\jmath}$
ACELERACIÓN	$\vec{a}(t) = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} = 0 - g\,\hat{\jmath} = -g\,\hat{\jmath}$

Ecuación de la trayectoria

Eliminando el tiempo t se obtiene la ecuación de una PARÁBOLA[5]:

$$y = h + x\tan\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}$$

[5] Tal y como se observa en la figura 1.

Tiempo de vuelo

El TIEMPO DE VUELO t_{vuelo} es el tiempo total que el móvil permanece en el aire. Se obtiene imponiendo $y(t_{\text{vuelo}}) = 0$ y despejando el tiempo[6]:

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{v_0 \sin\alpha_0 + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha_0 + 2gh}}{g}$$

[6] $y(t_{\text{vuelo}}) = 0$ cuando el móvil llega al suelo:

$$0 = h + v_0 \sin\alpha_0 \cdot t_{\text{vuelo}} - \frac{1}{2}gt_{\text{vuelo}}^2$$

Despejando t_{vuelo}:

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{v_0 \sin\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha_0 + 2gh}}{g}$$

, donde nos quedamos únicamente con la opción positiva (+).

Alcance

El ALCANCE es la distancia horizontal que recorre el móvil[7]. Se obtiene sustituyendo en la ecuación de la coordenada x la expresión del tiempo de vuelo, es decir ALCANCE $= x(t_{\text{vuelo}})$.

[7] El alcance máximo se obtiene para un ángulo $\alpha_0 = 45°$, teniendo el mismo valor para $\alpha_0 = 45° + a$ que para $\alpha_0 = 45° - a$.

Altura máxima

La ALTURA MÁXIMA $y_{\text{máx}}$ viene dada por la expresión[8]:

$$y_{\text{máx}} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g}$$

, obteniéndose su valor máximo para $\alpha_0 = 90°$ (lanzamiento vertical).

[8] Se alcanza cuando:

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha_0 - gt = 0$$

Despejando el tiempo:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$$

y sustituyendo en $y(t)$:

$$y_{\text{máx}} = h + v_0 \sin\alpha_0 \cdot \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}\right)^2 = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g}$$

Ángulo de la trayectoria

El ÁNGULO DE LA TRAYECTORIA en un determinado punto coincide con el ángulo que el vector velocidad $\vec{v}$ forma con la horizontal en ese punto. Para su cálculo obtenemos las componentes $\vec{v}_x$ y $\vec{v}_y$ y gracias a la definición trigonométrica de tangente de un ángulo, calculamos α:

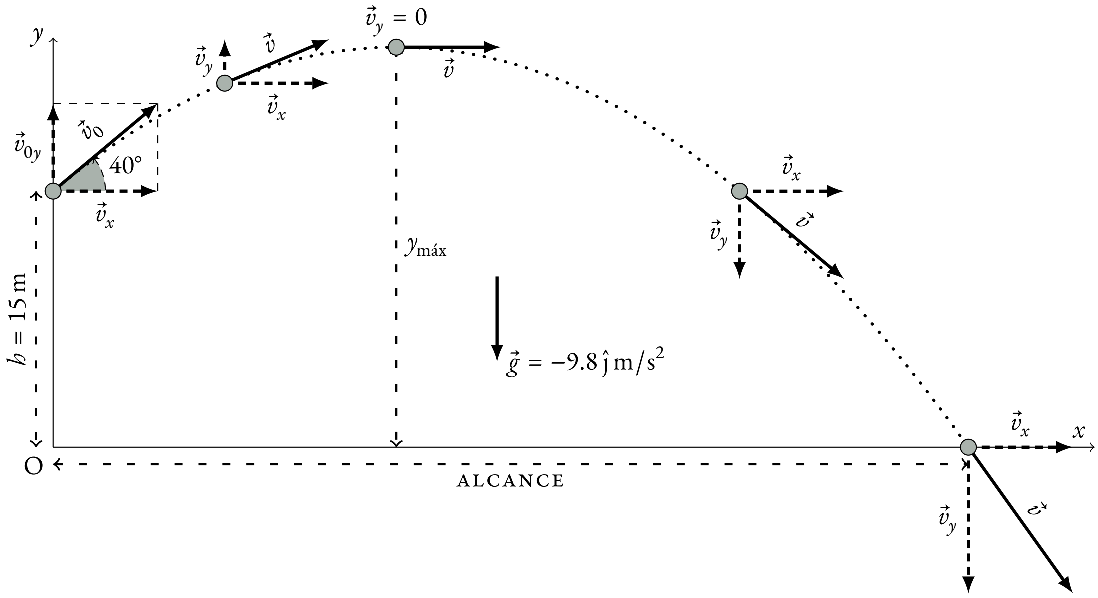
$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \Longrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

EJEMPLO

Desde una ventana de una casa que está a 15 m de altura lanzamos un chorro de agua a 20 m/s con un ángulo de 40°. Calcula la distancia a la que caerá el agua y la velocidad con la que llega.

SOLUCIÓN

Lo primero hacemos un dibujo representando la situación:



Vamos a escribir las ECUACIONES DEL MOVIMIENTO, por COMPONENTES:

$$\text{COMPONENTE } x \longrightarrow x(t) = x_0 + v_x t = 0 + v_0 \cos\alpha_0 \cdot t = (20\cos 40° \cdot t)\ \text{m}$$

$$\text{COMPONENTE } y \longrightarrow y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = h + v_0 \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(15 + 20\sin 40° \cdot t - 4.9t^2\right)\ \text{m}$$

Lo primero que nos piden es la distancia a la que caerá el agua, o lo que es lo mismo, el ALCANCE. Para ello necesitamos calcular primero el TIEMPO DE VUELO t_{vuelo}, por lo que imponemos $y\left(t_{\text{vuelo}}\right) = 0$:

$$0 = 15 + 20\sin 40° \cdot t_{\text{vuelo}} - 4.9t_{\text{vuelo}}^2$$

Despejamos el TIEMPO DE VUELO t_{vuelo} (notar que únicamente nos quedamos con la opción positiva):

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{20\sin 40° \pm \sqrt{20^2\sin^2 40° + 294}}{9.8} = \begin{cases} 3.5\ \text{s} \\ \cancel{-0.9\ \text{s}} \end{cases}$$

Sustituyendo el TIEMPO DE VUELO en la coordenada x obtenemos el ALCANCE:

$$\text{ALCANCE} = x\left(t_{\text{vuelo}}\right) = 20\cos 40° \cdot t_{\text{vuelo}} = 20\cos 40° \cdot 3.5 = 53.6\ \text{m}$$

Para calcular la velocidad con la que llega al suelo, escribimos primero la ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD:

$$\vec{v}(t) = v_x\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath} = (v_0\cos\alpha_0)\,\hat{\imath} + \left(v_0\sin\alpha_0 - gt\right)\hat{\jmath} = \left[(20\cos 40°)\,\hat{\imath} + (20\sin 40° - 9.8t)\,\hat{\jmath}\right]\ \text{m/s}$$

Sustituyendo el TIEMPO DE VUELO obtenemos la VELOCIDAD con la que llega al suelo, $\vec{v}(t_{\text{vuelo}})$:

$$\vec{v}(t_{\text{vuelo}}) = (20\cos 40°)\,\hat{\imath} + \left(20\sin 40° - 9.8 \cdot t_{\text{vuelo}}\right)\hat{\jmath} = 15.3\,\hat{\imath} + \left(20\sin 40° - 9.8 \cdot 3.5\right)\hat{\jmath} = \left(15.3\,\hat{\imath} - 21.4\,\hat{\jmath}\right)\ \text{m/s}$$

, siendo el MÓDULO $v = |\vec{v}| = \sqrt{15.3^2 + (-21.4)^2} = 26.3$ m/s (TEOREMA DE PITÁGORAS).