MOVIMIENTOS

RODRIGO ALCARAZ DE LA OSA[1]

[1] CONTACTO: rodri.alcaraz@gmail.com.

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Las CARACTERÍSTICAS del MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU) son:

- Trayectoria rectilínea.
- Velocidad v constante (aceleración $a = 0$).

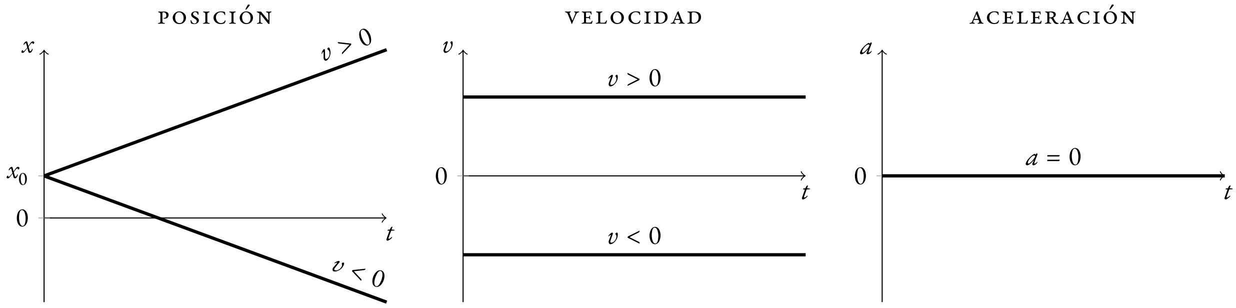
La ECUACIÓN PRINCIPAL[2] del MRU es:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0),$$

donde x es la posición final, x_0 la posición inicial, v la velocidad, t el tiempo final y t_0 el tiempo inicial.

[2] Esta es la llamada ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO O ECUACIÓN DE LA POSICIÓN, pues nos da la posición x en función del tiempo t.

Gráficas MRU



EJEMPLO

Un caracol recorre en línea recta una distancia de 10.8 m en 1.5 h. ¿Qué distancia recorrerá en 5 min?

SOLUCIÓN

Escribimos la ecuación del movimiento del caracol:

$$x(t) = x_0 + vt,$$

donde $x = 10.8$ m, $x_0 = 0$, v es la velocidad del caracol (desconocida) y $t = 1.5$ h.
Como nos preguntan la distancia que recorrerá, $\Delta x = x - x_0$, en 5 min, podemos pasar las 1.5 h a minutos:

$$1.5\,\cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\,\text{min}}{1\,\cancel{\text{h}}} = 90\,\text{min}$$

y así calcular la velocidad en m/min:

$$10.8\,\text{m} = 0 + v \cdot 90\,\text{min} \rightarrow v = 0.12\,\text{m/min}$$

La distancia recorrida en 5 min será por tanto:

$$\Delta x(5\,\text{min}) = x(5\,\text{min}) - x_0 = 0.12\,\text{m}/\cancel{\text{min}} \cdot 5\,\cancel{\text{min}} = 0.6\,\text{m}$$

Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Las CARACTERÍSTICAS del MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV) son:

- Trayectoria rectilínea.
- Aceleración a constante (velocidad v variable).

La ECUACIONES PRINCIPALES del MRUV son:

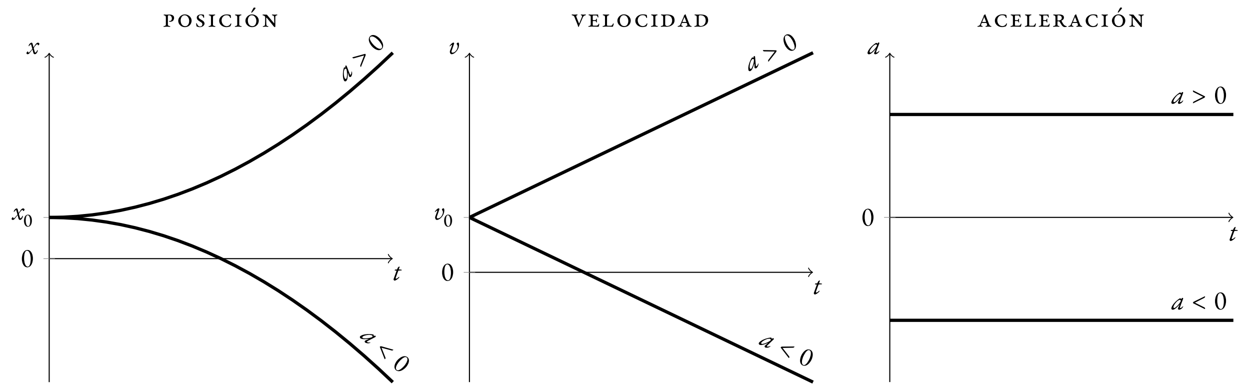
$$\text{ECUACIÓN DE LA POSICIÓN: } x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (1)$$

$$\text{ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD: } v(t) = v_0 + a(t - t_0) \quad (2)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \quad (3)$$

donde x es la posición final, x_0 la posición inicial, v_0 la velocidad inicial, a la aceleración, t el tiempo final, t_0 el tiempo inicial y $\Delta x = x - x_0$ es la distancia o espacio recorrido.

Gráficas MRUV



EJEMPLO

Un coche que circula a 70.2 km/h disminuye su velocidad a razón de 3 m/s cada segundo. ¿Qué distancia recorrerá hasta detenerse?

SOLUCIÓN

Lo primero pasamos la VELOCIDAD INICIAL v_0 a m/s:

$$v_0 = 70.2\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 19.5\ \text{m/s}$$

La frase "*disminuye su velocidad a razón de* 3 m/s *cada segundo*" la tenemos que interpretar como que su ACELERACIÓN $a = -3\ \text{m/s}^2$ (el signo − es porque su velocidad disminuye, y la velocidad la tomamos positiva). Como no me dan información sobre tiempo ni me piden ningún tiempo (sino distancia recorrida Δx), utilizo la ecuación (3):

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x, \quad (3)$$

de donde despejo la distancia recorrida Δx:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0^2 - 19.5^2}{2 \cdot (-3)} = 63.375\ \text{m}$$

Caída libre/lanzamiento vertical

La CAÍDA LIBRE O LANZAMIENTO VERTICAL es un caso especial de MRUV en el que la aceleración es igual a la aceleración de la GRAVEDAD[3]. En el caso de la Tierra, $a = -g = -9.8\,\mathrm{m/s^2}$ (el signo − indica que la aceleración de la gravedad apunta, siempre, hacia abajo).

[3] Valores de la aceleración de la GRAVEDAD en los astros del Sistema Solar:

ASTRO	g	$\mathrm{m/s^2}$
Sol ☉	28.02	274.8
Júpiter ♃	2.53	24.8
Neptuno ♆	1.14	11.2
Saturno ♄	1.07	10.4
Tierra ♁	1	9.8
Venus ♀	0.90	8.9
Urano ♅	0.89	8.7
Marte ♂	0.38	3.7
Mercurio ☿	0.38	3.7
Luna ☽	0.17	1.6

EJEMPLO

Desde la azotea de un rascacielos de 120 m de altura se lanza una piedra con velocidad de 5 m/s, hacia abajo. Calcular: a) Tiempo que tarda en llegar al suelo, b) velocidad con que choca contra el suelo.

SOLUCIÓN

Escribimos la ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO (1) de la piedra:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \qquad (1)$$

donde $y_0 = 120\,\mathrm{m}$, $v_0 = -5\,\mathrm{m/s}$ (hacia abajo) y $a = -g = -9.8\,\mathrm{m/s^2}$, de forma que la ecuación particularizada queda:

$$y(t) = 120 - 5t + \frac{1}{2} \cdot (-9.8) \cdot t^2 = 120 - 5t - 4.9t^2$$

a) De la ecuación (1) podemos despejar el tiempo que tarda en llegar al suelo, sabiendo que cuando llega al suelo, $y = 0$:

$$0 = 120 - 5t - 4.9t^2$$
$$4.9t^2 + 5t - 120 = 0$$
$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4.9 \cdot (-120)}}{2 \cdot 4.9} = \frac{-5 \pm \sqrt{2377}}{9.8} = \begin{cases} 4.5\text{ s} \\ \cancel{-5.5\text{ s}} \end{cases}$$

b) Para calcular la velocidad con que choca contra el suelo podemos utilizar la ecuación (2) o la (3):

Utilizando la ecuación (2) Sustituyendo el tiempo por el tiempo de llegada al suelo:

$$v(t) = v_0 + at = -5 - 9.8t = -5 - 9.8 \cdot 4.5 = -48.8\,\mathrm{m/s}$$

Utilizando la ecuación (3) Teniendo cuidado al calcular $\Delta x = x - x_0 = 0 - 120 = -120\,\mathrm{m}$ e imponiendo el signo − al despejar v:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \qquad (3)$$
$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2a\Delta x} = -\sqrt{(-5)^2 + 2 \cdot (-9.8) \cdot (0 - 250)} = -48.8\,\mathrm{m/s}$$

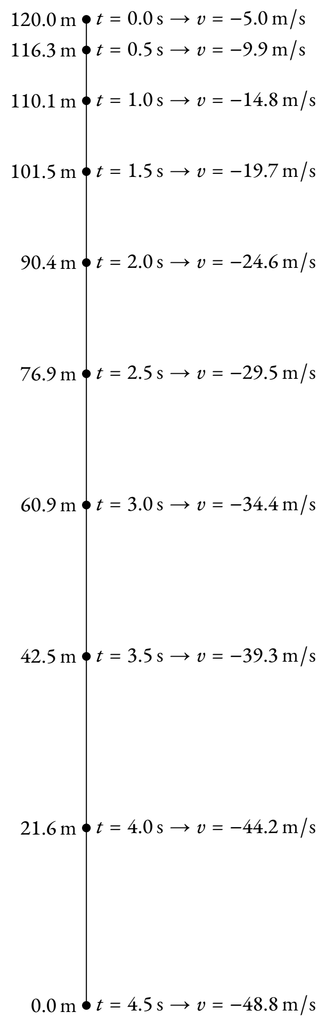


Figura 1: Representación gráfica del lanzamiento vertical del ejemplo, donde se observa cómo en los primeros intervalos de tiempo la distancia recorrida es menor que en los intervalos finales, debido al incremento de la velocidad.

Encuentros

Se trata de situaciones en las que dos cuerpos[4] comienzan en posiciones distintas y acaban encontrándose al cabo de un cierto tiempo.

[4] Típicamente los cuerpos se moverán con un MRU o un MRUV.

Seguimos estos 3 PASOS:

1. **Escribir** las ECUACIONES DE LA POSICIÓN de cada cuerpo.
2. **Imponer** la condición de ENCUENTRO, es decir, que ambas posiciones coinciden cuando se encuentran ($x_A = x_B$).
3. **DESPEJAR** la magnitud que me pidan.

EJEMPLO

Un coche se desplaza por una carretera que es paralela a la vía de un tren. El coche se detiene ante un semáforo que está con luz roja en el mismo instante que pasa un tren con una rapidez constante de 12 m/s. El coche permanece detenido durante 6 s y luego arranca con una aceleración constante de 2 m/s^2. Determinar:

a) El tiempo que emplea el coche en alcanzar al tren, medido desde el instante en que se detuvo ante el semáforo.

b) La distancia que recorrió el coche desde el semáforo hasta que alcanzó al tren.

c) La rapidez del coche en el instante que alcanza al tren.

SOLUCIÓN

a) Lo primero que hacemos es escribir las ECUACIONES DEL MOVIMIENTO de cada móvil:

$$\text{COCHE (MRUV)}: x_c = x_{0c} + v_{0c}(t - t_{0c}) + \frac{1}{2}a_c(t - t_{0c})^2$$
$$\text{TREN (MRU)}: x_t = x_{0t} + v_t(t - t_{0t})$$

PARTICULARIZAMOS para nuestro caso:

$$x_{0c} = x_{0t} = 0$$
$$v_{0c} = 0; \quad v_t = 12\,\text{m/s}$$
$$a_c = 2\,\text{m/s}^2$$
$$t_{0c} = 6\,\text{s}; \quad t_{0t} = 0$$

$$\text{COCHE (MRUV)}: x_c = 0 + 0 \cdot (t - 6) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (t - 6)^2 = (t - 6)^2 = t^2 - 12t + 36$$
$$\text{TREN (MRU)}: x_t = 0 + 12 \cdot (t - 0) = 12t$$

A continuación imponemos la CONDICIÓN DE ENCUENTRO:

$$x_c = x_t$$
$$t^2 - 12t + 36 = 12t$$
$$t^2 - 24t + 36 = 0$$

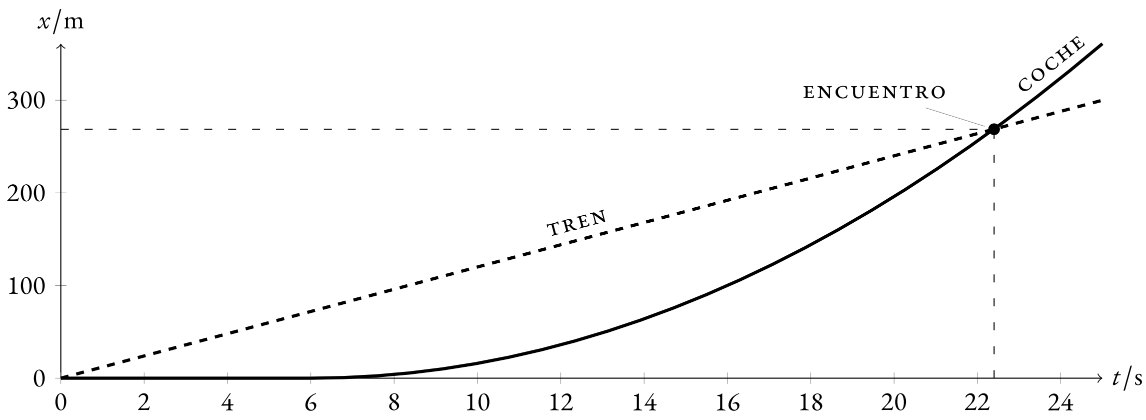
Despejamos el TIEMPO DE ENCUENTRO t^*:

$$t^* = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{432}}{2} = \begin{cases} 22.4\,\text{s} \\ \cancel{1.6\,\text{s}} \end{cases}$$

donde descartamos la solución $t = 1.6$ s por ser menor que los 6 s que está parado el coche en el semáforo.

SOLUCIÓN (CONT.)

Podemos comprobar esto representando la gráfica de posición frente a tiempo ($x - t$) para cada móvil:



donde se ve claramente cómo el coche está parado los primeros 6 s para después arrancar acelerando (parábola) y alcanzando al tren a los 22.4 s.

b) Para calcular la DISTANCIA RECORRIDA por el coche solo tenemos que sustituir el tiempo de encuentro, $t^* = 22.4$ s, en su ecuación de posición, ya que comienza en $x_0 = 0$:

$$x_c(t^*) = t^{*2} - 12t^* + 36 = 22.4^2 - 12 \cdot 22.4 + 36 = 268.7 \text{ m} = x_t(t^*) = 12 \cdot 22.4$$

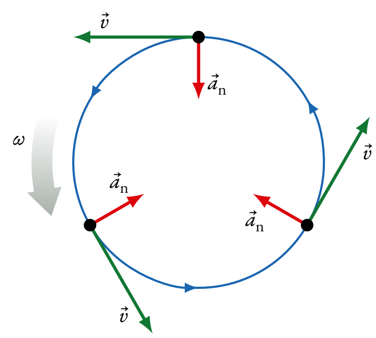
c) La RAPIDEZ del coche cuando alcanza al tren la podemos calcular utilizando la ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD del coche, sustituyendo $t = t^*$:

$$v_c(t^*) = v_{0c} + a_c(t^* - t_0) = 0 + 2 \cdot (22.4 - 6) = 32.8 \text{ m/s}$$

Movimiento circular uniforme (MCU)

Las CARACTERÍSTICAS del MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU) son:

- Trayectoria circular.
- Módulo de la velocidad constante (aceleración tangencial $a_t = 0$).



La ECUACIÓN PRINCIPAL del MCU es:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0),$$

donde φ es la posición angular final, φ_0 la posición angular inicial, ω la frecuencia o velocidad angular, t el tiempo final y t_0 el tiempo inicial.

Periodo T El tiempo que tarda el móvil en completar una vuelta completa se llama PERIODO, T.

Frecuencia f El número de vueltas que da el móvil en 1 s es la FRECUENCIA, f, y está relacionada con el periodo:

$$f = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1} = \text{Hz}\right]$$

La frecuencia o velocidad angular, ω, está relacionada con el periodo y la frecuencia a través de las expresiones:

$$\omega = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Las magnitudes lineales y las angulares se relacionan a través del radio R:

$$e = \varphi R$$
$$v = \omega R$$

EJEMPLO

Las aspas de un ventilador giran uniformemente a razón de 90 vueltas por minuto (rpm). Determina: a) su velocidad angular, en rad/s; b) la velocidad lineal de un punto situado a 30 cm del centro; c) el número de vueltas que darán las aspas en 5 min.

SOLUCIÓN

a) Utilizamos factores de conversión:

$$\omega = 90 \text{ rpm} = 90 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 3\pi \text{ rad/s} \approx 9.4 \text{ rad/s}$$

b) Utilizamos la relación entre las velocidades lineal y angular, con $R = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$:

$$v = \omega R = 3\pi \text{ rad/s} \cdot 0.3 \text{ m} = 0.9\pi \text{ m/s} \approx 2.8 \text{ m/s}$$

c) Escribimos la ecuación del movimiento de las aspas:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0),$$

donde $\varphi_0 = 0$, $\omega = 90$ rpm y $t_0 = 0$, es decir:

$$\varphi(t) = 90t \text{ [rev]}$$

Sustituyendo el tiempo por $t = 5$ min, obtenemos el espacio angular en vueltas:

$$\varphi(5 \text{ min}) = 90 \text{ rev}/\cancel{\text{min}} \cdot 5 \cancel{\text{min}} = 450 \text{ rev}$$