

PLANO INCLINADO

RODRIGO ALCARAZ DE LA OSA¹

¹ CONTACTO: rodri.alcaraz@gmail.com.

La figura 1 muestra las FUERZAS que actúan sobre una masa m que desciende con velocidad \vec{v} y con rozamiento (coeficiente μ) por un plano inclinado un ángulo α con respecto a la horizontal.

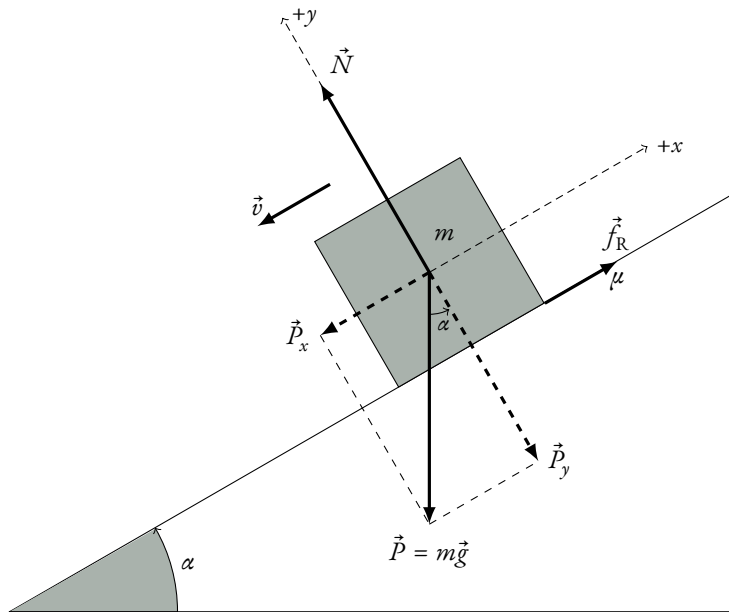


Figura 1: Esquema de una masa m que desciende con velocidad \vec{v} y con rozamiento (coeficiente μ) por un plano inclinado un ángulo α con respecto a la horizontal. La relación entre el espacio recorrido a lo largo del plano, Δx , y la altura h a la que se encuentra la masa viene dada por: $h = \Delta x \sin \alpha$.

2ª LEY DE NEWTON

La aceleración \vec{a} de la masa m es proporcional a la fuerza neta \vec{F}_T aplicada sobre ella:

$$\vec{F}_T = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_T}{m}$$

La masa m se va a mover solo en la dirección x , por lo que $\vec{a} = a\hat{i}$. La fuerza neta \vec{F}_T es el vector suma de todas las FUERZAS² que actúan sobre m :

$$\begin{aligned} \vec{F}_T &= \sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_R = m\vec{a} = ma\hat{i} \\ -P_x\hat{i} - P_y\hat{j} + N\hat{j} + f_R\hat{i} &= ma\hat{i} \end{aligned}$$

de donde sacamos dos ECUACIONES, una para cada COMPONENTE:

$$\text{COMPONENTE } x \rightarrow f_R - P_x = ma \quad (1)$$

$$\text{COMPONENTE } y \rightarrow N - P_y = 0 \quad (2)$$

Despejando $N = P_y = mg \cos \alpha$ de (2) y sustituyendo en (1), utilizando además que $f_R = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ y que $P_x = P \sin \alpha = mg \sin \alpha$:

$$\mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha = ma \rightarrow a = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$$

A partir de aquí se puede estudiar la cinemática de la masa m , suponiendo que se mueve con un MRUV³ cuya aceleración es constante y viene dada por $\vec{a} = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)\hat{i}$.

2 FUERZAS QUE ACTÚAN

- Peso $\vec{P} = -P_x\hat{i} - P_y\hat{j}$
De la figura 1 podemos ver que:

$$P_x = P \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

$$P_y = P \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

- Normal $\vec{N} = N\hat{j}$
- Fuerza de rozamiento $\vec{f}_R = f_R\hat{i} = \mu N\hat{i}$

³ La ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO es por tanto:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Y la ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD es:

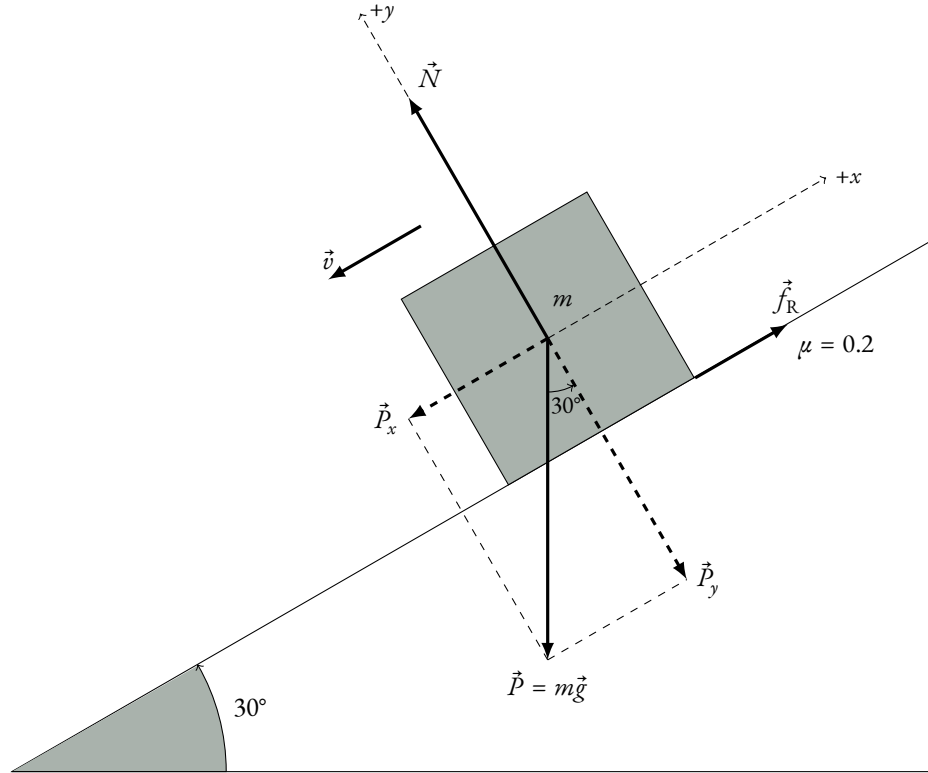
$$v(t) = v_0 + at$$

EJEMPLO

Un cuerpo baja por un plano inclinado 30° con un coeficiente de rozamiento $\mu = 0.2$. Calcula la velocidad que llevará y el espacio recorrido al cabo de 5 s, si inicialmente estaba en reposo.

SOLUCIÓN

Lo primero hacemos un dibujo representando la situación:



Las FUERZAS que actúan son:

- Peso $\vec{P} = -P_x \hat{i} - P_y \hat{j}$, donde (dejamos el resultado en función de m):

$$P_x = mg \sin \alpha = 9.8m \sin 30^\circ = 4.9m \text{ N}$$

$$P_y = mg \cos \alpha = 9.8m \cos 30^\circ = 4.9\sqrt{3}m \text{ N}$$

- Normal $\vec{N} = N \hat{j}$
- Fuerza de rozamiento $\vec{f}_R = \mu N \hat{i} = 0.2N \hat{i} \text{ N}$ (no confundir la normal N con la unidad Newton N)

Escribimos la 2ª LEY DE NEWTON para cada COMPONENTE:

$$\text{COMPONENTE } x \rightarrow f_R - P_x = ma \quad (3)$$

$$\text{COMPONENTE } y \rightarrow N - P_y = 0 \quad (4)$$

Despejando $N = P_y = 4.9\sqrt{3}m$ de (4) y sustituyendo en (3), utilizando además que $f_R = 0.2N$ y que $P_x = 4.9m$:

$$0.2 \cdot 4.9\sqrt{3}m - 4.9m = ma \rightarrow a = -3.2 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a} = -3.2 \hat{i} \text{ m/s}^2$$

La VELOCIDAD que llevará a los 5 s la calculamos con la ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD:

$$v = v_0 + at = 0 - 3.2 \cdot 5 = -16.0 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v} = -16.0 \hat{i} \text{ m/s}$$

Para el ESPACIO RECORRIDO podemos utilizar la ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO:

$$\Delta x = |x - x_0| = \left| v_0 \cdot t + \frac{1}{2} at^2 \right| = \left| 0 - \frac{1}{2} \cdot 3.2 \cdot 5^2 \right| = 40.0 \text{ m}$$