Hausaufgaben für P1a

Online unter `http://github.com/jaseg/Hausaufgaben`

Jan Sebastian Götte (546408), Paul Scheunemann Abgabe: 111128

Aufgabe 1

Aufgabe 2

a)

$$L = mr_0v_0 \tag{1}$$

$$E = T + V \tag{2}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{3}$$

Zur Berechnung der potentiellen Energie V muss zunächst die Lage des Equilibriums zwischen Zentrifugalkraft und Schwerkraft bestimmt werden. Doch zunächst ist festzustellen:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{0} \tag{4}$$

Dies gilt, da die einzige wirkende Kraft radial ist, und dank ihrer Konstanz ein konservatives

Kraftfeld bildet. Nun:

$$\left|\vec{L}\right| = mrv = mr_0v_0 \tag{5}$$

$$\Rightarrow v(r) = v_0\frac{r_0}{r} \tag{6}$$

$$F_Z = -F_R \quad \text{per Voraussetzung} \tag{7}$$

$$= -m\frac{v(r_t)^2}{r_t} = -Mg \tag{8}$$

$$= -m\frac{r_0^2v_0^2}{r_t^3} \tag{9}$$

$$\Rightarrow r_t = \sqrt[3]{\frac{mr_0^2v_0^2}{Mg}} \tag{10}$$

$$\Rightarrow V = \int_{r_t}^{r_0} F_z \mathrm{d}r \quad \Big|\dot{F}_Z = 0 \tag{11}$$

$$= F_Z r\Big|_{r_t}^{r_0} \tag{12}$$

$$= Mgr_0 - Mg\sqrt[3]{\frac{mr_0^2v_0^2}{Mg}} \tag{13}$$

Durch Einsetzen erhält man

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + Mgr_0 - \sqrt[3]{M^2g^2mr_0^2v_0^2} \tag{14}$$

Die Einheitenbetrachtung zeigt keine Fehler auf, Platzhalber sei hier bloß die der Wurzel angeführt:

$$[E] = J = \left[\sqrt[3]{M^2g^2mr_0^2v_0^2}\right] = \sqrt[3]{kg^2 \cdot \frac{m^2}{s^4} \cdot kg \cdot m^2 \cdot \frac{m^2}{s^2}} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \tag{15}$$

b)

c)

$$F_Z = -F_R = -m\omega^2 r \quad \Big|\omega = \frac{v}{r} \tag{16}$$

$$= -\frac{mv_0^2}{r_0} = -Mg \tag{17}$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{M}{m}g \tag{18}$$

Aufgabe 3

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{19}$$

$$\Rightarrow F_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{20}$$

$$F_g = m \cdot g \tag{21}$$

$$g = -\gamma \frac{m_E}{r_E^2} \tag{22}$$

$$\left| 1 - \gamma \frac{m_E}{r_E^2} \cdot m \cdot \frac{1}{\gamma \frac{m_E}{R^2} \cdot m} \right| < 10^{-3} = 0.001 \tag{23}$$

$$\Rightarrow \left| 1 - \left[\frac{\frac{1}{r_E^2}}{\frac{1}{R^2}} = \frac{R^2}{r_E^2} \right] \right| < 10^{-3} \tag{24}$$

$$\overset{R > r_E}{\Rightarrow} \frac{R^2}{r_E^2} - 1 < 10^{-3} \tag{25}$$

$$\Rightarrow R^2 < r_E \cdot \left(1 + 10^{-3}\right) \tag{26}$$

$$\Rightarrow R_{\max} = \sqrt{r_E^2 \cdot (1 + 10^{-3})} \tag{27}$$

$$= 6373 km \tag{28}$$

$$\Rightarrow \Delta R_{\max} = 3 km \tag{29}$$

Aufgabe 5

a)

Energie bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken.

Impuls bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken.

Drehimpuls bezüglich A bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken. $\vec{L}_A$ ist obendrein $\vec{0}$, sofern A auf der gestrichelten Linie liegt.

Drehimpuls bezüglich B bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken.

b)

Energie bleibt erhalten, da $\vec{F}$ konservativ ist:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f\left(|\vec{r}|\right) \cdot \vec{e}_r \tag{30}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}\left(\vec{r}\right) = \vec{0} \tag{31}$$

Letzteres folgt daraus, dass f bloß von $|\vec{r}|$ abhängt.

Impuls bleibt nicht erhalten, da Kräfte wirken ($\vec{F} = \dot{\vec{p}} \neq \vec{0}$).

Drehimpuls bezüglich A bleibt nicht erhalten, da $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = \vec{x} \times \vec{F}$ nicht verschwindet ($\vec{F}$ ist unabhängig von $\vec{x}$).

Drehimpuls bezüglich B bleibt erhalten, da $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} = \vec{0}$, da $\vec{x}$ und $\vec{F}$ per Definition kollinear sind.