

Hausaufgaben für P1a

Online unter <http://github.com/jaseg/Hausaufgaben>

Jan Sebastian Götte (546408)

Aufgabe 1

$$\rho_L = \frac{1}{V_m} \cdot \sum M_i \cdot r_i \quad (1)$$

$$V_m \propto T \Rightarrow V_m(T = 20^\circ) = V_m(T = 0^\circ) \cdot \frac{293.15\text{K}}{273.15\text{K}} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \rho_L = \frac{1}{V_m(T = 0^\circ) \cdot \frac{293.15\text{K}}{273.15\text{K}}} \cdot \sum M_i \cdot r_i \quad (3)$$

$$= 1.204041 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4)$$

Aufgabe 2

a)

$$\rho(T_2) = \rho(T_1) \cdot \frac{T_1}{T_2} \quad (5)$$

$$F_A = g\rho V \quad F_g = g\rho V = mg \quad (6)$$

$$300\text{kg} \cdot g = g\rho_L V - g\rho_H V \quad (7)$$

$$\Rightarrow 300\text{kg} = (\rho_L - \rho_H) \cdot V \quad (8)$$

$$= 1.2\text{kg/m}^3 \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \cdot V \quad (9)$$

$$V = \frac{\pi}{6} d^3 \quad (10)$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 300}{\pi \cdot 1.2 \cdot \left(1 - \frac{393.15}{413.15}\right)}} \quad (11)$$

$$= 21.5\text{m} \quad (12)$$

b)

Die Dichte von Wasserdampf liegt bei ca. $0.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, was geringer als die Dichte 40° warmer Luft ist. Der Ballon wird also leichter und steigt somit.

Aufgabe 3

$$pV = nRT \quad (13)$$

$$n = \frac{pV}{RT} \quad (14)$$

$$p = \frac{nRT}{V} \quad (15)$$

$$n_{\text{ges}} = \sum_i \frac{p_i V_i}{RT_i} \quad (16)$$

$$p_{\text{ges}} = \frac{n_{\text{ges}} RT_{\text{ges}}}{V} \quad (17)$$

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 = \frac{5}{2} R (n_1 T_1 + n_2 T_2) \quad (18)$$

$$= n_{\text{ges}} T_{\text{ges}} \cdot \frac{5}{2} R \quad (19)$$

$$\Rightarrow T_{\text{ges}} = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_{\text{ges}}} \quad (20)$$

$$= \frac{\frac{T_1 p_1 V_1}{RT_1} + \frac{T_2 p_2 V_2}{RT_2}}{\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2}} \quad (21)$$

$$= \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2}} \quad (22)$$

$$= \frac{\frac{1}{3} p_1 + \frac{2}{3} p_2}{\frac{p_1}{3T_1} + \frac{2p_2}{3T_2}} \quad (23)$$

$$= 336K \quad (24)$$

$$\Rightarrow p_{\text{ges}} = \frac{R (n_1 T_1 + n_2 T_2)}{V} \quad (25)$$

$$= \frac{R}{V} \left(\frac{p_1 V_1 T_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2 T_2}{RT_2} \right) \quad (26)$$

$$= \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V} \quad (27)$$

$$= \frac{p_1 \cdot \frac{1}{3} V + p_2 \cdot \frac{2}{3} V}{V} \quad (28)$$

$$= \frac{1}{3} p_1 + \frac{2}{3} p_2 \quad (29)$$

$$= 1.2 \cdot 10^6 \text{Pa} \quad (30)$$

Aufgabe 4

a)

$$F(V) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left(-\frac{MV^2}{2RT} \right) \quad (31)$$

$$k := \frac{M}{2RT} \quad (32)$$

$$\Rightarrow F(v) = 4\pi \left(\frac{k}{1} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp(-kv^2) \quad (33)$$

$$0 = \frac{dF}{dv} = 8\pi \left(\frac{k}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} v \exp(-kv^2) - 8\pi k \left(\frac{k}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} v^3 \exp(-kv^2) \quad (34)$$

$$= (v - kv^3) \underbrace{\left(8\pi \left(\frac{k}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right)}_{\neq 0} \underbrace{\exp(-kv^2)}_{>0 \forall v} \quad (35)$$

$$\Rightarrow v = kv^3 \quad (36)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{k}} \text{ da } v > 0 \quad (37)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad (38)$$

Ist vielleicht der eindimensionale Fall gemeint?

$$F(v) = \sqrt{\frac{m_M}{2\pi k_B T}} \exp \left(-\frac{m_M v^2}{2k_B T} \right) \quad (39)$$

$$\text{Var}(F) = \frac{m_M}{2\pi k_B T} \text{Var} \left(\exp \left(-\frac{m_M v^2}{2k_B T} \right) \right) \quad (40)$$

Für eine Normalverteilung gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right) \quad (41)$$

Demzufolge ist die Varianz der in Gl. 39 beschriebenen gleich der einer Normalverteilung, deren Exponent gleich dem Exponent der Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist. Sie kann nun durch

Gleichsetzen der Exponenten bestimmt werden (μ ist offenbar 0):

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot v^2 = -\frac{m_M}{2k_B T} \cdot v^2 \quad (42)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} = \frac{m_M}{k_B T} \quad (43)$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{m_M}} \quad (44)$$

Falls die mehrdimensionale Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung gemeint ist: Die Standardabweichung einer Maxwell-Verteilung mit Parameter $a = \sqrt{\frac{RT}{M}}$ ist lt. Wikipedia

$$\sigma_V = a \sqrt{\frac{3\pi - 8}{\pi}} = \sqrt{\frac{RT}{M}} \cdot \left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \quad (45)$$

Eine Herleitung mit Maxima findet sich im Maxima-Log im Anhang.

b)

Da es ziemlich müßig ist, die kumulative Verteilungsfunktion händisch herzuleiten, habe ich meinen Computer gefragt, und der hat mir erzählt, dass diese für die Maxwell-Verteilung

$$F(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{a^3} \exp\left(\frac{-x^2}{2a^2}\right) \text{ mit } a = \sqrt{\frac{k_B T}{m_M}} = \sqrt{\frac{RT}{M}} \quad (46)$$

$$D_V(v) = \text{erf}\left(\frac{v}{\sqrt{2}a}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v}{a} \exp\left(\frac{-v^2}{2a^2}\right) \quad (47)$$

$$(48)$$

ist, was für die Wahrscheinlichkeit, ein Stickstoffmolekül im Intervall $[400, 500] \frac{\text{m}}{\text{s}}$ anzutreffen folgendes ergibt:

$$\Pr_{N_2, T=300\text{K}}(v \mid v \in [400, 500] \frac{\text{m}}{\text{s}}) = D_{V(M,T)}(500) - D_{V(M,T)}(400) \quad (49)$$

$$= \text{erf}\left(\frac{500\text{m}}{\sqrt{2}as}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{500\text{m}}{as} \exp\left(\frac{-500^2\text{m}^2}{2a^2\text{s}^2}\right) - \text{erf}\left(\frac{400\text{m}}{\sqrt{2}as}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{400\text{m}}{as} \exp\left(\frac{-400^2\text{m}^2}{2a^2\text{s}^2}\right) \quad (50)$$

$$[a] = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{mol} \cdot \text{s}^2}{\text{K} \cdot \text{mol} \cdot \text{kg}}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (51)$$

$$a = \sqrt{\frac{R \cdot 300\text{K} \cdot \text{mol}}{0.0280134\text{kg}}} \quad (52)$$

$$\Pr_{N_2, T=300K}(\nu \mid \nu \in [400, 500] \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 0.376 \quad (53)$$

Der genaue Rechenweg steht im angehängten maxima-log. Die mittlere Geschwindigkeit ist μ der o. g. Verteilung, lt. Wikipedia (Englisch) ist das

$$\mu_V = 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 476 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (54)$$

Aufgabe 5

a)

$$\rho_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (55)$$

b)

$$\langle x \rangle = \int x \rho_X(x) dx = \frac{x}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \quad (56)$$

c)

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (57)$$

$$\text{Var}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \quad (58)$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \frac{(a+b)^2}{4} \quad (59)$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \quad (60)$$

$$= \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2) - \frac{(a+b)^2}{4} \quad (61)$$

$$= \frac{1}{12} (4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2) \quad (62)$$

$$= \frac{1}{12} (a^2 - 2ab + b^2) \quad (63)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12} \quad (64)$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad (65)$$