Aufgabe 1

a)

$$n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \tag{1}$$

b)

$2^4 \not> 5^2, 2^5 > 5^2$, n^a wächst schneller als a^n. Also gilt:

$$n \in \mathbb{N}; n > 4 \Leftrightarrow 2^n > n^2 \tag{2}$$

c)

$2^{2+1} \not> (2+1)^2, 3^{3+1} > (3+1)^3$, n^{n+1} wächst schneller als $(n+1)^n$. Also gilt:

$$n \in \mathbb{N}; n > 2 \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n \tag{3}$$

Aufgabe 2

a)

Wahr. $(A \times B) \cap (C \times D) = (x_a \in A, x_b \in B) \cap (Y_a \in C, Y_b \in D)$. Der $\cap$-Operator erfordert nun, dass ein Paar, das in der Ergebnismenge ist, sowohl in der rechten, als auch in der linken Menge auftaucht. Diese ist somit: $(x_a \in A, x_b \in B) \cap (x_a \in C, x_b \in D) = (x_a \in A$ und $x_a \in C, x_b \in B$ und $x_b \in D)$

b)

Unwahr. Ein $(x \in A, y \in D)$ wäre nur in der linken Menge enthalten.

Aufgabe 4

Reflexivität Per Definition gegeben, da $mn = mn$.

Symmetrie Gegeben, da $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow (m_2, n_2) \sim (m_1, n_1)$ heißt, dass $m_1 n_2 = m_2 n_1 \Leftrightarrow m_2 n_1 = m_1 n_2$, was offenbar wahr ist.

Transitivität

$$m_1 n_2 = m_2 n_1, m_2 n_3 = m_3 n_2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Beidseitige Multiplikation der} \\ \text{rechten mit der linken Gleichung} \end{array} \right. \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow m_1 n_2 m_2 n_3 = m_2 n_1 m_3 n_2 \quad \Big| \text{Beidseitiges Teilen durch } m_2 n_2 \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow m_1 n_3 = m_3 n_1 \quad \square \tag{6}$$

Folglich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

$$M = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \tag{7}$$

$$[(1,1)]_\sim = \{a \in \mathbb{N} : (a, a)\} \subseteq M \tag{8}$$

$$[(1,2)]_\sim = \{a \in \mathbb{N} : (2a, a)\} \tag{9}$$

Aufgabe 0

Ja. z.B.:

$$A = [0, 1] \tag{10}$$

$$B =]0, [\tag{11}$$

$$A \to B := b(a) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{a}+1} & \text{falls } \frac{1}{a} \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\frac{1}{a}-1} & \text{falls } -\frac{1}{a} \in \mathbb{N} \\ a & \text{sonst.} \end{cases} \tag{12}$$

$$B \to A := a(b) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{b}-1} & \text{falls } \frac{1}{b} \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\frac{1}{b}+1} & \text{falls } -\frac{1}{b} \in \mathbb{N} \\ b & \text{sonst.} \end{cases} \tag{13}$$