# Aufgabe 1

## a)

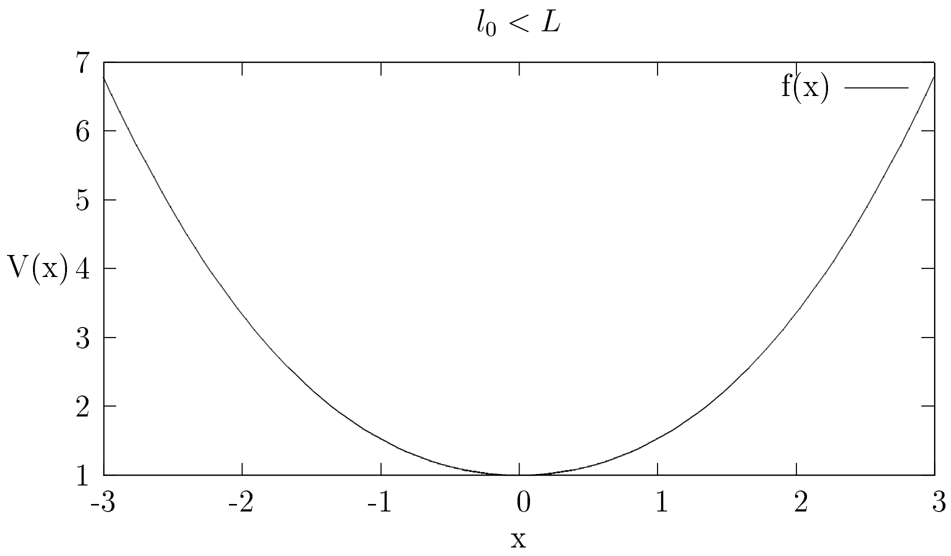
$$F_{Feder}(x) = -ka \tag{1}$$
$$a = \left(\sqrt{L^2 + x^2} - \ell_0\right) \tag{2}$$
$$U(a) = \frac{k}{2}a^2 \tag{3}$$
$$\Leftrightarrow U(x) = \frac{k}{2}\left(\sqrt{L^2 + x^2} - \ell_0\right)^2 \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

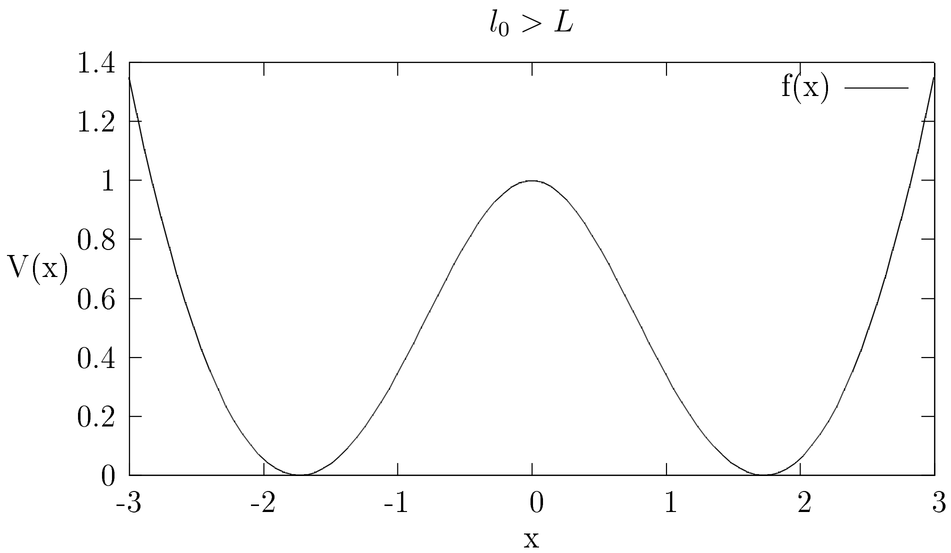
### 1.0.1 Der Vollständigkeit halber: Erster Fehlschlag.

$$F_{Feder} = -ka = -k\left(b - \ell_0\right) \tag{6}$$
$$b = \sqrt{L^2 + x^2} \tag{7}$$
$$F_{Feder} = -k\left(\sqrt{L^2 + x^2} - \ell_0\right) \tag{8}$$
$$\text{Kraft entlang } \vec{x}\text{: } F_x = F_{Feder} \cdot \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}} \tag{9}$$
$$= -kx\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{L^2 + x^2}}\right) \tag{10}$$
$$V(x) = -\int F(x)\mathrm{d}x \,\Big|\text{Annahme: } c = 0 \tag{11}$$
$$= kx\left(\ell_0 \text{asinh}\left(\frac{x}{|L|}\right) - x\right) \tag{12}$$

## b)

Siehe unten.




## c)

Die Extrema befinden sich an Stellen, an denen $F(x) = 0$ gilt. Dies gilt bei $F_{Feder} = 0$ und bei $x = 0$, wo $F_{Feder}$ senkrecht auf $\vec{x}$ steht.

$$F(x) = 0 \tag{13}$$

$$F_{Feder} = -k\left(\sqrt{L^2 + x^2} - \ell_0\right) \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow L^2 + x^2 = \ell_0^2 \tag{15}$$

$$\ell_0 > L \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt[2]{\ell_0^2 - L^2} \tag{16}$$

Für $\ell_0 > L$ gibt es drei Gleichgewichtslagen: Eine bei $x = 0$ und zwei bei $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - L^2}$. Erstere ist instabil, das sie auf einem Potentialmaximum liegt (siehe Plot). Die anderen beiden sind stabil.

Für $\ell_0 \leq L$ gibt es nur eine Gleichgewichtslage bei $x = 0$, diese ist stabil.

### d)

Siehe obiger Paragraph zu b)

### e)

## Aufgabe 2

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\alpha}{mx^3} && (17) \\ V(x) &= -\int F(x)\mathrm{d}x && (18) \\ &= \alpha \int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x && (19) \\ &= -\alpha\frac{1}{2x^2} && (20) \end{aligned}$$

## Aufgabe 3

### a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= 2t + 2x && (21) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2t - \sin(x) && (22) \end{aligned}$$

**b)**

$$
\begin{aligned}
f^{(t)}(x,t) &= \left(t^2 + 2ct^2 + \cos\left(ct\right)\right)^{(t)} && (23)\\
&= (2+4c)t - c \cdot \sin\left(ct\right) && (24)\\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} && (25)\\
&= (2t + 2ct) + (2t - \sin(ct)) \cdot c && (26)\\
&= (2+4c)\, t - c \cdot \sin(ct) && (27)
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
F(t) &= m_w(t) \cdot g && (28)\\
&= \frac{x}{\ell} mg && (29)\\
\ddot{x} &= \frac{F(t)}{m} && (30)\\
&= \frac{g}{\ell} x && (31)\\
x &= ae^{bt} && (32)\\
\left(ae^{bt}\right)'' &= \left(abe^{bt}\right)' = ab^2e^{bt} && (33)\\
ab^2e^{bt} &= \frac{g}{\ell} ae^{bt} && (34)\\
\Leftrightarrow b^2 &= \frac{g}{l} && (35)\\
\Leftrightarrow x &= ae^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} && (36)\\
x(0) &= a = x_0 && (37)\\
\Rightarrow x &= x_0 e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} && (38)\\
E_{kin} &= \frac{1}{2} mv^2 && (39)\\
&= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 && (40)\\
&= \frac{1}{2} m x_0^2 \frac{g}{\ell} e^{2\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} && (41)\\
&= \frac{mg}{2\ell} x_0^2 e^{2\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} && (42)\\
E_{pot} &= mgh - mg\frac{x}{\ell} h + mg\frac{x}{\ell}\left(h - \frac{x}{2}\right) && (43)\\
&= mg \cdot \left(h - \frac{x}{\ell} h + \frac{x}{\ell} h - \frac{x}{2}\frac{x}{\ell}\right) && (44)\\
&= mg \cdot \left(h - \frac{x^2}{2\ell}\right) && (45)\\
&= mgh - \frac{mg}{2\ell} x_0^2 e^{2\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} && (46)\\
E &= E_{kin} + E_{pot} && (47)\\
&= mgh && (48)
\end{aligned}$$