Hausaufgaben für P1a

Online unter `http://github.com/jaseg/Hausaufgaben`

Jan Sebastian Götte (546408), Paul Scheunemann Abgabe: 111128

Aufgabe 1

a

Es kann $v_{0z} = 0$ angenommen werden, da die Bahnkurve des Massepunktes in der Ebene liegen muss, die vom Vektor der Anfangsgeschwindigkeit und vom Vektor der Schwerkraft aufgespannt wird. Durch Rotation und Translation des Koordinatensystems lässt sich somit jede derartige Bewegung auf eine Form bringen, in der $v_{0z} = 0$ gilt.

$$\vec{F}_g = -g\vec{e}_y \tag{1}$$

$$\vec{F}_R = -m\gamma\dot{\vec{x}} = -m\gamma\vec{v} \quad \Big| \vec{v} = \dot{\vec{x}} \tag{2}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \dot{\vec{v}} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot (-g\vec{e}_y - m\gamma\vec{v}) \tag{4}$$

$$= -\frac{g}{m}\vec{e}_y - \gamma\vec{v} = \dot{\vec{v}} \tag{5}$$

$$\frac{g}{m}\vec{e}_y + \gamma\vec{v} + \dot{\vec{v}} = 0 \tag{6}$$

6 ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösung erfolgt im Folgenden über das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen DG mittels Variation

der Konstanten.

$$\gamma\vec{v}+\dot{\vec{v}}=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\gamma v_x+\dot{v}_x=0\\ \gamma v_y+\dot{v}_y=0\\ \gamma v_z+\dot{v}_z=0\end{cases} \tag{7}$$

$$P_{\mathrm{Ch}}: re^{rx}+\gamma e^{rx}=0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow v_i=c_ie^{-\gamma t} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \vec{v}=e^{-\gamma t}\vec{c} \tag{10}$$

$$\vec{v}(t)=e^{-\gamma t}\vec{c}(t);\quad \dot{\vec{v}}=-\gamma e^{-\gamma t}\vec{c}(t)+\dot{\vec{c}}(t)e^{-\gamma t} \tag{11}$$

$$\frac{g}{m}\vec{e}_y=-\dot{\vec{v}}-\gamma\vec{v}=\underline{\gamma e^{-\gamma t}\vec{c}(t)}-\dot{\vec{c}}(t)e^{-\gamma t}\underline{-\gamma e^{-\gamma t}\vec{c}(t)} \tag{12}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{m}\vec{e}_y=-\dot{\vec{c}}(t)e^{-\gamma t} \tag{13}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{c}}(t)=-\frac{g}{m}\vec{e}_ye^{\gamma t} \tag{14}$$

$$\vec{c}(t)=\int -\frac{g}{m}\vec{e}_ye^{\gamma t}\mathrm{d}t \tag{15}$$

$$=-\frac{g}{\gamma m}\vec{e}_ye^{\gamma t}+\vec{q} \tag{16}$$

$$\vec{v}=e^{-\gamma t}\vec{c}(t) \tag{17}$$

$$=\begin{pmatrix}q_1e^{-\gamma t}\\ -\frac{g}{\gamma m}+q_2e^{-\gamma t}\\ q_3e^{-\gamma t}\end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\dot{\vec{v}}=\begin{pmatrix}-\gamma q_1e^{-\gamma t}\\ -\gamma q_2e^{-\gamma t}\\ -\gamma q_3e^{-\gamma t}\end{pmatrix}=-\gamma e^{-\gamma t}\vec{q} \tag{19}$$

$$\vec{x}=\sum\vec{e}_i\int\dot{x}_i\mathrm{d}t \tag{20}$$

$$=\vec{x}_0-\frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix}q_1e^{-\gamma t}\\ \frac{g}{m}t+q_2e^{-\gamma t}\\ q_3e^{-\gamma t}\end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix}=\vec{v}_0 \tag{22}$$

b

...da sie länger fliegen und somit zur Abschätzung der Flugkurve mehr Zeit verbleibt.

Aufgabe 2

a)

$$L = mr_0 v_0 \tag{23}$$
$$E = T + V \tag{24}$$
$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{25}$$

Zur Berechnung der potentiellen Energie V muss zunächst die Lage des Equilibriums zwischen Zentrifugalkraft und Schwerkraft bestimmt werden. Doch zunächst ist festzustellen:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{0} \tag{26}$$

Dies gilt, da die einzige wirkende Kraft radial ist, und dank ihrer Konstanz ein konservatives Kraftfeld bildet. Nun:

$$\left|\vec{L}\right| = mrv = mr_0 v_0 \tag{27}$$
$$\Rightarrow v(r) = v_0 \frac{r_0}{r} \tag{28}$$
$$F_Z = -F_R \quad \text{per Voraussetzung} \tag{29}$$
$$= -m\frac{v(r_t)^2}{r_t} = -Mg \tag{30}$$
$$= -m\frac{r_0^2 v_0^2}{r_t^3} \tag{31}$$
$$\Rightarrow r_t = \sqrt[3]{\frac{m r_0^2 v_0^2}{Mg}} \tag{32}$$
$$\Rightarrow V = \int_{r_t}^{r_0} F_z \mathrm{d}r \quad \Big| \dot{F}_Z = 0 \tag{33}$$
$$= F_Z r\Big|_{r_t}^{r_0} \tag{34}$$
$$= Mgr_0 - Mg\sqrt[3]{\frac{m r_0^2 v_0^2}{Mg}} \tag{35}$$

Durch Einsetzen erhält man

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + Mgr_0 - \sqrt[3]{M^2 g^2 m r_0^2 v_0^2} \tag{36}$$

Die Einheitenbetrachtung zeigt keine Fehler auf, Platzhalber sei hier bloß die der Wurzel angeführt:

$$[E] = J = \left[\sqrt[3]{M^2 g^2 m r_0^2 v_0^2}\right] = \sqrt[3]{kg^2 \cdot \frac{m^2}{s^4} \cdot kg \cdot m^2 \cdot \frac{m^2}{s^2}} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \tag{37}$$

b)

$$F = F_R - F_G = m' \cdot a \tag{38}$$

$$\Rightarrow a = \frac{F_R - F_G}{m + M} \tag{39}$$

$$= \frac{m v_t^2}{r(M+m)} - \frac{Mg}{M+m} \tag{40}$$

$$= \frac{m r_0^2 v_0^2}{r^2 (M+m)} - \frac{Mg}{M+m} = \ddot{r} \tag{41}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m r_0^2 v_0^2}{M+m} r^{-2} - \ddot{r} = \frac{Mg}{M+m} \tag{42}$$

c)

$$F_Z = -F_R = -m\omega^2 r \quad \Big| \omega = \frac{v}{r} \tag{43}$$

$$= -\frac{m v_0^2}{r_0} = -Mg \tag{44}$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{M}{m} g \tag{45}$$

Aufgabe 3

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \tag{46}$$

$$\Rightarrow F_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{47}$$

$$F_g = m \cdot g \tag{48}$$

$$g = -\gamma \frac{m_E}{r_E^2} \tag{49}$$

$$\left| 1 - \gamma \frac{m_E}{r_E^2} \cdot m \cdot \frac{1}{\gamma \frac{m_E}{R^2} \cdot m} \right| < 10^{-3} = 0.001 \tag{50}$$

$$\Rightarrow \left| 1 - \left[\frac{\frac{1}{r_E^2}}{\frac{1}{R^2}} = \frac{R^2}{r_E^2} \right] \right| < 10^{-3} \tag{51}$$

$$\overset{R > r_E}{\Rightarrow} \frac{R^2}{r_E^2} - 1 < 10^{-3} \tag{52}$$

$$\Rightarrow R^2 < r_E \cdot \left(1 + 10^{-3}\right) \tag{53}$$

$$\Rightarrow R_{\max} = \sqrt{r_E^2 \cdot (1 + 10^{-3})} \tag{54}$$

$$= 6373 km \tag{55}$$

$$\Rightarrow \Delta R_{\max} = 3 km \tag{56}$$

Aufgabe 5

a)

Energie bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken.

Impuls bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken.

Drehimpuls bezüglich A bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken. $\vec{L}_A$ ist obendrein $\vec{0}$, sofern A auf der gestrichelten Linie liegt.

Drehimpuls bezüglich B bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken.

b)

Energie bleibt erhalten, da $\vec{F}$ konservativ ist:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f\left(|\vec{r}|\right) \cdot \vec{e}_r \tag{57}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}\left(\vec{r}\right) = \vec{0} \tag{58}$$

Letzteres folgt daraus, dass f bloß von $|\vec{r}|$ abhängt.

Impuls bleibt nicht erhalten, da Kräfte wirken ($\vec{F} = \dot{\vec{p}} \neq \vec{0}$).

Drehimpuls bezüglich A bleibt nicht erhalten, da $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = \vec{x} \times \vec{F}$ nicht verschwindet ($\vec{F}$ ist unabhängig von $\vec{x}$).

Drehimpuls bezüglich B bleibt erhalten, da $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} = \vec{0}$, da $\vec{x}$ und $\vec{F}$ per Definition kollinear sind.