Aufgabe 1

a)

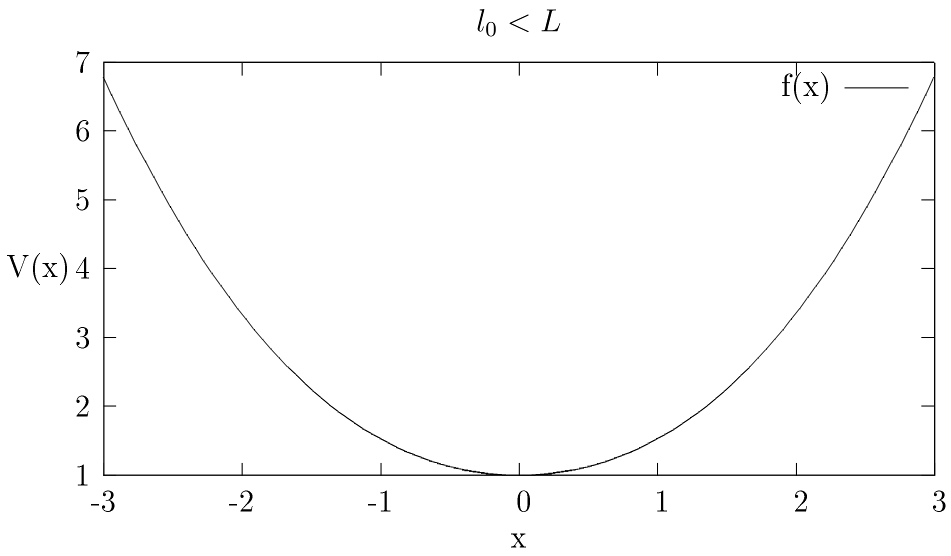
$$F_{Feder}(x) = -ka \tag{1}$$
$$a = \left(\sqrt{L^2 + x^2} - \ell_0\right) \tag{2}$$
$$U(a) = \frac{k}{2}a^2 \tag{3}$$
$$\Leftrightarrow U(x) = \frac{k}{2}\left(\sqrt{L^2 + x^2} - \ell_0\right)^2 \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

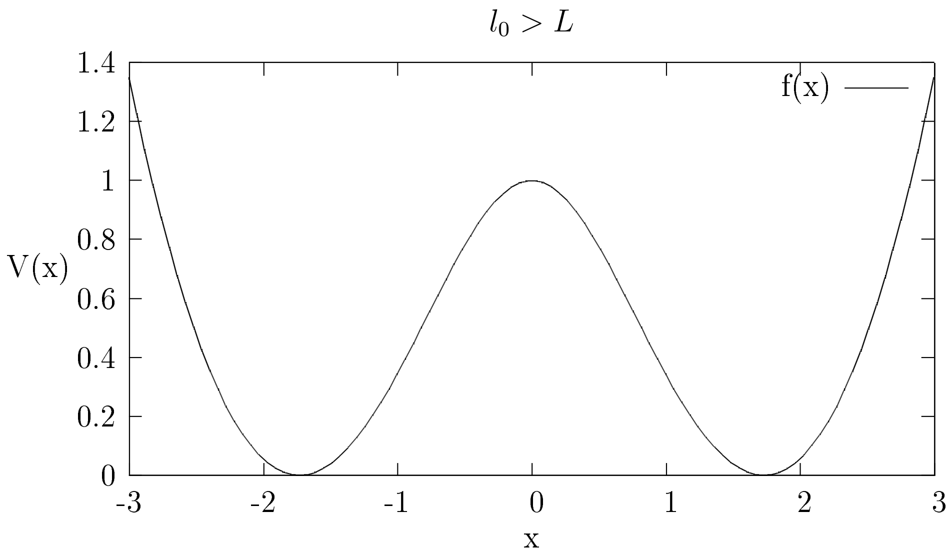
1.0.1 Der Vollständigkeit halber: Erster Fehlschlag.

$$F_{Feder} = -ka = -k\left(b - \ell_0\right) \tag{6}$$
$$b = \sqrt{L^2 + x^2} \tag{7}$$
$$F_{Feder} = -k\left(\sqrt{L^2 + x^2} - \ell_0\right) \tag{8}$$
$$\text{Kraft entlang } \vec{x}\text{: } F_x = F_{Feder} \cdot \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}} \tag{9}$$
$$= -kx\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{L^2 + x^2}}\right) \tag{10}$$
$$V(x) = -\int F(x)\mathrm{d}x \,\Big|\, \text{Annahme: } c = 0 \tag{11}$$
$$= kx\left(\ell_0 \text{asinh}\left(\frac{x}{|L|}\right) - x\right) \tag{12}$$

b)

Siehe unten.





c)

Die Extrema befinden sich an Stellen, an denen $F(x) = 0$ gilt. Dies gilt bei $F_{Feder} = 0$ und bei $x = 0$, wo F_{Feder} senkrecht auf $\vec{x}$ steht.

$$F(x) = 0 \tag{13}$$

$$F_{Feder} = -k\left(\sqrt{L^2 + x^2} - \ell_0\right) \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow L^2 + x^2 = \ell_0^2 \tag{15}$$

$$\ell_0 > L \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt[2]{\ell_0^2 - L^2} \tag{16}$$

Für $\ell_0 > L$ gibt es drei Gleichgewichtslagen: Eine bei $x = 0$ und zwei bei $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - L^2}$. Erstere ist instabil, das sie auf einem Potentialmaximum liegt (siehe Plot). Die anderen beiden sind stabil.

Für $\ell_0 \leq L$ gibt es nur eine Gleichgewichtslage bei $x = 0$, diese ist stabil.

d)

Siehe obiger Paragraph zu b)

e)

$$\begin{aligned} F(x) &= F_{Feder} \cdot \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}} && (17) \\ &= -kx \cdot \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{L^2 + x^2}}\right) && (18) \\ &= kx \cdot \left(\frac{\ell_0}{\sqrt{L^2 + x^2}} - 1\right) && (19) \\ x \ll L \Rightarrow F(x) &= kx \cdot \left(\frac{\ell_0}{\sqrt{L^2}} - 1\right) && (20) \\ &= -\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{L^2}}\right) k \cdot x && (21) \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen eines harmonischen Oszillators in einer Dimension folgt:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k'}{m}} && (22) \\ &= \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{L^2}}\right) k}{m}} && (23) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\alpha}{mx^3} && (24) \\ V(x) &= -\int F(x) \mathrm{d}x && (25) \\ &= \alpha \int \frac{1}{x^3} \mathrm{d}x && (26) \\ &= -\alpha \frac{1}{2x^2} && (27) \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2t + 2x \tag{28}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2t - \sin(x) \tag{29}$$

b)

$$f^{(t)}(x,t) = \left(t^2 + 2ct^2 + \cos(ct)\right)^{(t)} \tag{30}$$
$$= (2+4c)t - c \cdot \sin(ct) \tag{31}$$
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{32}$$
$$= (2t + 2ct) + (2t - \sin(ct)) \cdot c \tag{33}$$
$$= (2+4c)\,t - c \cdot \sin(ct) \tag{34}$$

Aufgabe 4

$$
\begin{align}
F(t) &= m_w(t) \cdot g \tag{35}\\
&= \frac{x}{\ell} mg \tag{36}\\
\ddot{x} &= \frac{F(t)}{m} \tag{37}\\
&= \frac{g}{\ell} x \tag{38}\\
x &= ae^{bt} \tag{39}\\
\left(ae^{bt}\right)'' &= \left(abe^{bt}\right)' = ab^2 e^{bt} \tag{40}\\
ab^2 e^{bt} &= \frac{g}{\ell} ae^{bt} \tag{41}\\
\Leftrightarrow b^2 &= \frac{g}{l} \tag{42}\\
\Leftrightarrow x &= ae^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \tag{43}\\
x(0) &= a = x_0 \tag{44}\\
\Rightarrow x &= x_0 e^{\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \tag{45}\\
E_{kin} &= \frac{1}{2} mv^2 \tag{46}\\
&= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \tag{47}\\
&= \frac{1}{2} m x_0^2 \frac{g}{\ell} e^{2\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \tag{48}\\
&= \frac{mg}{2\ell} x_0^2 e^{2\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \tag{49}\\
E_{pot} &= mgh - mg\frac{x}{\ell} h + mg\frac{x}{\ell}\left(h - \frac{x}{2}\right) \tag{50}\\
&= mg \cdot \left(h - \frac{x}{\ell} h + \frac{x}{\ell} h - \frac{x}{2}\frac{x}{\ell}\right) \tag{51}\\
&= mg \cdot \left(h - \frac{x^2}{2\ell}\right) \tag{52}\\
&= mgh - \frac{mg}{2\ell} x_0^2 e^{2\sqrt{\frac{g}{\ell}}t} \tag{53}\\
E &= E_{kin} + E_{pot} \tag{54}\\
&= mgh \tag{55}
\end{align}
$$