Hausaufgaben für P1a

Online unter `http://github.com/jaseg/Hausaufgaben`

Jan Sebastian Götte (546408)

Aufgabe 1

$$\rho_L = \frac{1}{V_m} \cdot \sum M_i \cdot r_i \tag{1}$$

$$V_m \propto T \Rightarrow V_m(T = 20°) = V_m(T = 0°) \cdot \frac{293.15\text{K}}{273.15\text{K}} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \rho_L = \frac{1}{V_m(T = 0°) \cdot \frac{293.15\text{K}}{273.15\text{K}}} \cdot \sum M_i \cdot r_i \tag{3}$$

$$= 1.204041 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{4}$$

Aufgabe 2

a)

$$\rho(T_2) = \rho(T_1) \cdot \frac{T_1}{T_2} \tag{5}$$

$$F_A = g\rho V \; F_g = g\rho V = mg \tag{6}$$

$$300\text{kg} \cdot g = g\rho_L V - g\rho_H V \tag{7}$$

$$\Rightarrow 300\text{kg} = (\rho_L - \rho_H) \cdot V \tag{8}$$

$$= 1.2\text{kg/m}^3 \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \cdot V \tag{9}$$

$$V = \frac{\pi}{6} d^3 \tag{10}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 300}{\pi \cdot 1.2 \cdot \left(1 - \frac{393.15}{413.15}\right)}} \tag{11}$$

$$= 21.5\text{m} \tag{12}$$

b)

Die Dichte von Wasserdampf liegt bei ca. $0.6\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, was geringer als die Dichte 40° warmer Luft ist. Der Ballon wird also leichter und steigt somit.

Aufgabe 3

Notiz: Das hier ist alles irgendwie falsch, da Helium ein einatomiges Gas ist und damit nur 3 freiheitsgrade besitzt.

$$
\begin{aligned}
pV &= nRT && (13)\\
n &= \frac{pV}{RT} && (14)\\
p &= \frac{nRT}{V} && (15)\\
n_{\text{ges}} &= \sum_i \frac{p_i V_i}{RT_i} && (16)\\
p_{\text{ges}} &= \frac{n_{\text{ges}} R T_{\text{ges}}}{V} && (17)\\
U_{\text{ges}} &= U_1 + U_2 = \frac{5}{2} R \left(n_1 T_1 + n_2 T_2\right) && (18)\\
&= n_{\text{ges}} T_{\text{ges}} \cdot \frac{5}{2} R && (19)\\
\Rightarrow T_{\text{ges}} &= \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_{\text{ges}}} && (20)\\
&= \frac{\frac{T_1 p_1 V_1}{RT_1} + \frac{T_2 p_2 V_2}{RT_2}}{\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2}} && (21)\\
&= \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2}} && (22)\\
&= \frac{\frac{1}{3} p_1 + \frac{2}{3} p_2}{\frac{p_1}{3T_1} + \frac{2p_2}{3T_2}} && (23)\\
&= 336K && (24)\\
\Rightarrow p_{\text{ges}} &= \frac{R\left(n_1 T_1 + n_2 T_2\right)}{V} && (25)\\
&= \frac{R}{V}\left(\frac{p_1 V_1 T_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2 T_2}{RT_2}\right) && (26)\\
&= \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V} && (27)\\
&= \frac{p_1 \cdot \frac{1}{3} V + p_2 \cdot \frac{2}{3} V}{V} && (28)\\
&= \frac{1}{3} p_1 + \frac{2}{3} p_2 && (29)\\
&= 1.2 \cdot 10^6 \text{Pa} && (30)
\end{aligned}
$$

Neuer Ansatz unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Freiheitsgrade:

$$pV = nRT \tag{31}$$

$$n = \frac{pV}{RT} \tag{32}$$

$$p = \frac{nRT}{V} \tag{33}$$

$$n_{\text{ges}} = \sum_i \frac{p_i V_i}{RT_i} \tag{34}$$

$$p_{\text{ges}} = \frac{n_{\text{ges}} R T_{\text{ges}}}{V} \tag{35}$$

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 = \frac{R}{2}\left(f_1 n_1 T_1 + f_2 n_2 T_2\right) \tag{36}$$

$$= n_{\text{ges}} T_{\text{ges}} \cdot \frac{f_{\text{ges}}}{2} R \tag{37}$$

$$\Rightarrow T_{\text{ges}} = \left(\frac{f_1}{f_{\text{ges}}} n_1 T_1 + \frac{f_2}{f_{\text{ges}}} n_2 T_2\right) \cdot \frac{1}{n_{\text{ges}}} \tag{38}$$

$$\text{Vermutung:} \quad f_{\text{ges}} = \frac{f_1 n_1}{n_{\text{ges}}} + \frac{f_2 n_2}{n_{\text{ges}}} \tag{39}$$

$$\text{Damit ergibt sich: } T_{\text{ges}} = \left(\frac{f_1 n_{\text{ges}}}{f_1 n_1 + f_2 n_2} n_1 T_1 + \frac{f_2 n_{\text{ges}}}{f_1 n_1 + f_2 n_2} n_2 T_2\right) \cdot \frac{1}{n_{\text{ges}}} \tag{40}$$

$$= \frac{n_1 T_1}{n_1 + \frac{f_2}{f_1} n_2} + \frac{n_2 T_2}{\frac{f_1}{f_2} n_1 + n_2} \tag{41}$$

$$= \frac{T_1}{1 + \frac{f_2 n_2}{f_1 n_1}} + \frac{T_2}{1 + \frac{f_1 n_1}{f_2 n_2}} \tag{42}$$

$$\text{Ergebnis aus Maixma: } T_{\text{ges}} = \tag{43}$$

$$\Rightarrow p_{\text{ges}} = \frac{R\left(n_1 T_1 + n_2 T_2\right)}{V} \tag{44}$$

Hier hat sich nix geändert... kommt mir auch irgendwie komisch vor.

$$= \frac{R}{V}\left(\frac{p_1 V_1 T_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2 T_2}{RT_2}\right) \tag{45}$$

$$= \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V} \tag{46}$$

$$= \frac{p_1 \cdot \frac{1}{3} V + p_2 \cdot \frac{2}{3} V}{V} \tag{47}$$

$$= \frac{1}{3} p_1 + \frac{2}{3} p_2 \tag{48}$$

$$= 1.2 \cdot 10^6 \text{Pa} \tag{49}$$

Aufgabe 4

a)

$$F(V) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{MV^2}{2RT}\right) \tag{50}$$

$$k := \frac{M}{2RT} \tag{51}$$

$$\Rightarrow F(v) = 4\pi \left(\frac{k}{1}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-kv^2\right) \tag{52}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v} = 8\pi \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} v \exp\left(-kv^2\right) - 8\pi k \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} v^3 \exp\left(-kv^2\right) \tag{53}$$

$$= \left(v - kv^3\right) \underbrace{\left(8\pi \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\right)}_{\neq 0} \underbrace{\exp\left(-kv^2\right)}_{>0 \forall v} \tag{54}$$

$$\Rightarrow v = kv^3 \tag{55}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{k}} \text{ da } v > 0 \tag{56}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \tag{57}$$

Ist vielleicht der eindimensionale Fall gemeint?

$$F(v) = \sqrt{\frac{m_M}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{m_M v^2}{2k_B T}\right) \tag{58}$$

$$\mathrm{Var}(F) = \frac{m_M}{2\pi k_B T} \mathrm{Var}\left(\exp\left(-\frac{m_M v^2}{2k_B T}\right)\right) \tag{59}$$

Für eine Normalverteilung gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \tag{60}$$

Demzufolge ist die Varianz der in Gl. 57 beschriebenen gleich der einer Normalverteilung, deren Exponent gleich dem Exponent der Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist. Sie kann nun durch

Gleichsetzen der Exponenten bestimmt werden (μ ist offenbar 0):

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot v^2 = -\frac{m_M}{2k_B T}\cdot v^2 \tag{61}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} = \frac{m_M}{k_B T} \tag{62}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{m_M}} \tag{63}$$

Falls die mehrdimensionale Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung gemeint ist: Die Stanardabweichung einer Maxwell-Verteilung mit Parameter $a = \sqrt{\frac{RT}{M}}$ ist lt. Wikipedia

$$\sigma_V = a\sqrt{\frac{3\pi - 8}{\pi}} = \sqrt{\frac{RT}{M}\cdot\left(3 - \frac{8}{\pi}\right)} \tag{64}$$

Eine Herleitung mit Maxima findet sich im Maxima-Log im Anhang.

b)

Da es ziemlich müßig ist, die kumulative Verteilungsfunktion händisch herzuleiten, habe ich meinen Computer gefragt, und der hat mir erzählt, dass diese für die Maxwell-Verteilung

$$F(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{a^3}\exp\left(\frac{-x^2}{2a^2}\right) \text{ mit } a = \sqrt{\frac{k_B T}{m_M}} = \sqrt{\frac{RT}{M}} \tag{65}$$

$$D_V(v) = \operatorname{erf}\left(\frac{v}{\sqrt{2}a}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{v}{a}\exp\left(\frac{-v^2}{2a^2}\right) \tag{66}$$

$$\tag{67}$$

ist, was für die Wahrscheinlichkeit, ein Stickstoffmolekül im Intervall $[400, 500]\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ anzutreffen folgendes ergibt:

$$\Pr_{N_2, T=300\mathrm{K}}(v \mid v \in [400, 500]\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) = D_{V(M,T)}(500) - D_{V(M,T)}(400) \tag{68}$$

$$= \operatorname{erf}\left(\frac{500\mathrm{m}}{\sqrt{2}a\mathrm{s}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{500\mathrm{m}}{a\mathrm{s}}\exp\left(\frac{-500^2\mathrm{m}^2}{2a^2\mathrm{s}^2}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{400\mathrm{m}}{\sqrt{2}a\mathrm{s}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{400\mathrm{m}}{a\mathrm{s}}\exp\left(\frac{-400^2\mathrm{m}^2}{2a^2\mathrm{s}^2}\right) \tag{69}$$

$$[a] = \sqrt{\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}\cdot\mathrm{mol}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{mol}\cdot\mathrm{kg}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{70}$$

$$a = \sqrt{\frac{R\cdot 300\mathrm{K}\cdot\mathrm{mol}}{0.0280134\mathrm{kg}}} \tag{71}$$

$$\Pr_{N_2, T=300\mathrm{K}}(v \mid v \in [400, 500]\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) = 0.376 \tag{72}$$

Der genaue Rechenweg steht im angehängten maxima-log. Die mittlere Geschwindigkeit ist μ der o. g. Verteilung, lt. Wikipedia (Englisch) ist das

$$\mu_V = 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 476\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{73}$$

Aufgabe 5

a)

$$\rho_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{74}$$

b)

$$\langle x \rangle = \int x \rho_X(x) \mathrm{d}x = \frac{x}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \tag{75}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sigma_X &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} && (76)\\
\mathrm{Var}(X) &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 && (77)\\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 \mathrm{d}x - \frac{(a+b)^2}{4} && (78)\\
&= \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} && (79)\\
&= \frac{1}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right) - \frac{(a+b)^2}{4} && (80)\\
&= \frac{1}{12}\left(4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2\right) && (81)\\
&= \frac{1}{12}\left(a^2 - 2ab + b^2\right) && (82)\\
&= \frac{(b-a)^2}{12} && (83)\\
\Rightarrow \sigma_X &= \frac{b-a}{2\sqrt{3}} && (84)
\end{aligned}$$