Hausaufgaben für P1a

Online unter `http://github.com/jaseg/Hausaufgaben`

Jan Sebastian Götte (546408)

Aufgabe 1

$$\rho_L = \frac{1}{V_m} \cdot \sum M_i \cdot r_i \tag{1}$$

$$V_m \propto T \Rightarrow V_m(T = 20°) = V_m(T = 0°) \cdot \frac{293.15\text{K}}{273.15\text{K}} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \rho_L = \frac{1}{V_m(T = 0°) \cdot \frac{293.15\text{K}}{273.15\text{K}}} \cdot \sum M_i \cdot r_i \tag{3}$$

$$= 1.204041 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{4}$$

Aufgabe 2

a)

$$\rho(T_2) = \rho(T_1) \cdot \frac{T_1}{T_2} \tag{5}$$

$$F_A = g\rho V \; F_g = g\rho V = mg \tag{6}$$

$$300\text{kg} \cdot g = g\rho_L V - g\rho_H V \tag{7}$$

$$\Rightarrow 300\text{kg} = (\rho_L - \rho_H) \cdot V \tag{8}$$

$$= 1.2\text{kg/m}^3 \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \cdot V \tag{9}$$

$$V = \frac{\pi}{6} d^3 \tag{10}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 300}{\pi \cdot 1.2 \cdot \left(1 - \frac{393.15}{413.15}\right)}} \tag{11}$$

$$= 21.5\text{m} \tag{12}$$

b)

Die Dichte von Wasserdampf liegt bei ca. $0.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, was geringer als die Dichte 40° warmer Luft ist. Der Ballon wird also leichter und steigt somit.

Aufgabe 3

$$pV = nRT \tag{13}$$

$$n = \frac{pV}{RT} \tag{14}$$

$$p = \frac{nRT}{V} \tag{15}$$

$$n_{\text{ges}} = \sum_i \frac{p_i V_i}{RT_i} \tag{16}$$

$$p_{\text{ges}} = \frac{n_{\text{ges}} R T_{\text{ges}}}{V} \tag{17}$$

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 = \frac{5}{2} R \left(n_1 T_1 + n_2 T_2\right) \tag{18}$$

$$= n_{\text{ges}} T_{\text{ges}} \cdot \frac{5}{2} R \tag{19}$$

$$\Rightarrow T_{\text{ges}} = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_{\text{ges}}} \tag{20}$$

$$= \frac{\frac{T_1 p_1 V_1}{R T_1} + \frac{T_2 p_2 V_2}{R T_2}}{\frac{p_1 V_1}{R T_1} + \frac{p_2 V_2}{R T_2}} \tag{21}$$

$$= \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2}} \tag{22}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} p_1 + \frac{2}{3} p_2}{\frac{p_1}{3 T_1} + \frac{2 p_2}{3 T_2}} \tag{23}$$

$$= 336 K \tag{24}$$

$$\Rightarrow p_{\text{ges}} = \frac{R \left(n_1 T_1 + n_2 T_2\right)}{V} \tag{25}$$

$$= \frac{R}{V} \left(\frac{p_1 V_1 T_1}{R T_1} + \frac{p_2 V_2 T_2}{R T_2} \right) \tag{26}$$

$$= \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V} \tag{27}$$

$$= \frac{p_1 \cdot \frac{1}{3} V + p_2 \cdot \frac{2}{3} V}{V} \tag{28}$$

$$= \frac{1}{3} p_1 + \frac{2}{3} p_2 \tag{29}$$

$$= 1.2 \cdot 10^6 \text{Pa} \tag{30}$$

Aufgabe 4

a)

$$F(V) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{MV^2}{2RT}\right) \tag{31}$$

$$k := \frac{M}{2RT} \tag{32}$$

$$\Rightarrow F(v) = 4\pi \left(\frac{k}{ß}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-kv^2\right) \tag{33}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v} = 8\pi \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} v \exp\left(-kv^2\right) - 8\pi k \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} v^3 \exp\left(-kv^2\right) \tag{34}$$

$$= \left(v - kv^3\right) \underbrace{\left(8\pi \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\right)}_{\neq 0} \underbrace{\exp\left(-kv^2\right)}_{>0 \forall v} \tag{35}$$

$$\Rightarrow v = kv^3 \tag{36}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{k}} \text{ da } v > 0 \tag{37}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \tag{38}$$

b)

(39)

Aufgabe 5

a)

$$\rho_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{40}$$

b)

$$\langle x \rangle = \int x \rho_X(x) \mathrm{d}x = \frac{x}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \tag{41}$$

c)

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \tag{42}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2 \tag{43}$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \mathrm{d}x - \frac{(a+b)^2}{4} \tag{44}$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \tag{45}$$

$$= \frac{1}{3} \left(a^2 + ab + b^2\right) - \frac{(a+b)^2}{4} \tag{46}$$

$$= \frac{1}{12} \left(4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2\right) \tag{47}$$

$$= \frac{1}{12} \left(a^2 - 2ab + b^2\right) \tag{48}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12} \tag{49}$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \tag{50}$$