

Hausaufgaben für P1a

Online unter <http://github.com/jaseg/Hausaufgaben>

Jan Sebastian Götte (546408), Paul Scheunemann

Abgabe: 111128

Aufgabe 1

Aufgabe 2

a)

$$L = mr_0 v_0 \quad (1)$$

$$E = T + V \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (3)$$

Zur Berechnung der potentiellen Energie V muss zunächst die Lage des Equilibriums zwischen Zentrifugalkraft und Schwerkraft bestimmt werden. Doch zunächst ist festzustellen:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{0} \quad (4)$$

Dies gilt, da die einzige wirkende Kraft radial ist, und dank ihrer Konstanz ein konservatives

Kraftfeld bildet. Nun:

$$|\vec{L}| = mrv = mr_0v_0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow v(r) = v_0 \frac{r_0}{r} \quad (6)$$

$$F_Z = -F_R \quad \text{per Voraussetzung} \quad (7)$$

$$= -m \frac{v(r_t)^2}{r_t} = -Mg \quad (8)$$

$$= -m \frac{r_0^2 v_0^2}{r_t^3} \quad (9)$$

$$\Rightarrow r_t = \sqrt[3]{\frac{mr_0^2 v_0^2}{Mg}} \quad (10)$$

$$\Rightarrow V = \int_{r_t}^{r_0} F_z dr \quad \left| \dot{F}_Z = 0 \right. \quad (11)$$

$$= F_Z r \Big|_{r_t}^{r_0} \quad (12)$$

$$= Mgr_0 - Mg \sqrt[3]{\frac{mr_0^2 v_0^2}{Mg}} \quad (13)$$

Durch Einsetzen erhält man

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + Mgr_0 - \sqrt[3]{M^2 g^2 m r_0^2 v_0^2} \quad (14)$$

b)

c)

$$F_Z = -F_R = -m\omega^2 r \quad \left| \omega = \frac{v}{r} \right. \quad (15)$$

$$= -\frac{mv_0^2}{r_0} = -Mg \quad (16)$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{M}{m}g \quad (17)$$

Aufgabe 3

$$\vec{F}_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (18)$$

$$\Rightarrow F_G = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (19)$$

$$F_g = m \cdot g \quad (20)$$

$$g = -\gamma \frac{m_E}{r_E^2} \quad (21)$$

$$\left| 1 - \gamma \frac{m_E}{r_E^2} \cdot m \cdot \frac{1}{\gamma \frac{m_E}{R^2} \cdot m} \right| < 10^{-3} = 0.001 \quad (22)$$

$$\Rightarrow \left| 1 - \left[\frac{\frac{1}{r_E^2}}{\frac{1}{R^2}} = \frac{R^2}{r_E^2} \right] \right| < 10^{-3} \quad (23)$$

$$\stackrel{R > r_E}{\Rightarrow} \frac{R^2}{r_E^2} - 1 < 10^{-3} \quad (24)$$

$$\Rightarrow R^2 < r_E \cdot (1 + 10^{-3}) \quad (25)$$

$$\Rightarrow R_{\max} = \sqrt{r_E^2 \cdot (1 + 10^{-3})} \quad (26)$$

$$= 6373 km \quad (27)$$

$$\Rightarrow \Delta R_{\max} = 3 km \quad (28)$$

Aufgabe 5

a)

Energie bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken.

Impuls bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken.

Drehimpuls bezüglich A bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken. \vec{L}_A ist obendrein $\vec{0}$, sofern A auf der gestrichelten Linie liegt.

Drehimpuls bezüglich B bleibt erhalten, da keine Kräfte wirken.

b)

Energie bleibt erhalten, da \vec{F} konservativ ist:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|) \cdot \vec{e}_r \quad (29)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (30)$$

Letzteres folgt daraus, dass f bloß von $|\vec{r}|$ abhängt.

Impuls bleibt nicht erhalten, da Kräfte wirken ($\vec{F} = \dot{\vec{p}} \neq \vec{0}$).

Drehimpuls bezüglich A bleibt nicht erhalten, da $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{x} \times \vec{F}$ nicht verschwindet (\vec{F} ist unabhängig von \vec{x}).

Drehimpuls bezüglich B bleibt erhalten, da $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} = \vec{0}$, da \vec{x} und \vec{F} per Definition kollinear sind.