

Versuchsprotokoll F3 Fadenpendel

This document to be found in teh internetz!

<https://github.com/jaseg/physik-einf-hrungspraktikum>

Sebastian Götte, 546408

Partner: Erik Lehmann, 546031

und eine weitere Person

12-02-01

A1 feste Fadenlänge

	roh		normalisiert	
Einheit: s	Umkehrpunkt	Nullpunkt	Umkehrpunkt	Nullpunkt
Stoppuhrtoleranz:	20.35	20.85	2.035	2.085
Vernachlässigt.	20.44	20.66	2.044	2.066
N=10	20.68	20.68	2.068	2.068
Fadenlänge: l+0cm	20.56	20.66	2.056	2.066
	20.47	20.68	2.047	2.068
	20.53	20.53	2.053	2.053
	20.59	20.63	2.059	2.063
	20.78	20.66	2.078	2.066
	20.68	20.66	2.068	2.066
	20.72	20.59	2.072	2.059
Mittelwert	20.58	20.66	2.058	2.066
Standardabweichung	0.1363	0.0814	0.01363	0.00814
Vertrauensbereich	0.0027	0.0016	0.00027	0.00016

Hauptunterschied der beiden Verfahren ist, dass im einen Fall (Umkehrpunkt) der Zeitpunkt erwartet wird, zu dem $dx/dt=v=0$ [Pc/a] ist. Bei der Messung anhand des Nullpunktes wird hingegen direkt die Auslenkung mit einem Referenzwert verglichen. Ersteres Verfahren ist wesentlich ungenauer, obschon es geringere Umstände erfordert. Die Erkennung der Nullstellung des Pendels kann durch den Vergleich der Pendelposition mit einer Markierung auf dem Rahmen, der in unserem Versuchsaufbau das Pendel umgab, sehr genau optisch erfolgen. Die Position des Nulldurchganges der Geschwindigkeit und damit des Maximalwertes der Auslenkung hat, wie aus einem Plot der Sinusfunktion ersichtlich ist, eine hohe räumliche, jedoch nur eine geringe zeitliche Auflösung. Dies ist durch die Abflachung der Sinuskurve in der Nähe der Maxima zu erklären.

A2 feste Fadenlänge

	Umkehrpunkt	Nullpunkt	
Einheit: s	1.91	2.06	
Stoppuhrtoleranz:	2.03	2.09	
Vernachlässigt.	2.03	1.97	
N=10	2.09	2.03	
Fadenlänge: l+0cm	2.13	2.00	
	2.13	2.13	
	2.09	2.03	
	2.09	2.09	
	2.16	2.00	
	2.03	2.09	
Mittelwert	2.069	2.049	
Standardabweichung	0.07218	0.05109	
Vertrauensbereich	0.00143	0.00101	
Die Standardabweichungen der Verfahren sind aufgrund des 10-fach größeren Einflusses zufälliger menschlicher Ungenauigkeiten bei der Auslösung der Stoppuhren ca. 5 mal so groß wie die in Aufgabe 1 ermittelten Werte. Die Mittelwerte liegen knapp außerhalb $1 \cdot \sigma$ der Werte aus Aufgabe 1. Die Größe des Vertrauensbereiches ist ebenfalls ein Vielfaches dessen aus Aufgabe 1.			

A3-A4-A5 variable Fadenlänge

	Fadenlänge	roh		normalisiert			quadriert					
	l-x [cm]	Umkehrpunkt	Nullpunkt	Umkehrpunkt	Nullpunkt	Mittelwert	Umkehrpunkt	Nullpunkt	Mittelwert			
Einheit: s	4	20.18	20.28	2.018	2.028	2.023	4.072	4.113	4.093			
Stoppuhrtoleranz:	8	19.91	19.94	1.991	1.994	1.993	3.964	3.976	3.970			
Vernachlässigt.	12	19.47	19.47	1.947	1.947	1.947	3.791	3.791	3.791			
N=10	16	19.03	19.06	1.903	1.906	1.905	3.621	3.633	3.627			
Toleranz der Fadenlänge-Einstellung: Vernachlässigt.	20	18.47	18.68	1.847	1.868	1.858	3.411	3.489	3.450			
	24	18.18	18.22	1.818	1.822	1.820	3.305	3.320	3.312			
	28	17.75	17.85	1.775	1.785	1.780	3.151	3.186	3.168			
	32	17.25	17.32	1.725	1.732	1.729	2.976	3.000	2.988			
	36	16.87	16.78	1.687	1.678	1.683	2.846	2.816	2.831			
	40	16.35	16.32	1.635	1.632	1.634	2.673	2.663	2.668			
										Unsicherheit		
										g nach Gl. (7)	-9.8988	0.0009
										I ₀ nach Gl. (7)	1.0700	0.0024
										T für I ₀ nach Gl. (6)	2.0657	0.0022

A3-A4-A5 variable Fadenlänge

[illegible]

A5 Vergleich der Messwerte

Die Ergebnisse für T aus Aufgabe 4 und Aufgabe 1 stimmen unter Einbeziehung der Unsicherheiten gut überein. Dabei ist das Ergebnis aus Aufgabe 4 das präzisere, da es auf einer größeren Zahl von Messwerten basiert (ca. 20).

Fehler durch Kleinwinkelnäherung

Bei einem Winkel kleiner oder gleich 5° ist der durch die Kleinwinkelnäherung induzierte Fehler kleiner als 1,3‰ (siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Kleinwinkelnäherung>) und damit hinreichend weit jenseits der Messgenauigkeit. Der nach Gl. 8 berechnete relative Fehler liegt für einen Winkel von 5° bei 0.48‰.

Fehler durch Auftrieb des Probekörpers in Luft

Der Fehler, der durch den Auftrieb des Probekörpers in Luft entsteht, ist kleiner als 0.1‰ und damit ebenfalls weit jenseits einer möglichen Beeinträchtigung der Messergebnisse, da er im Rauschen der Messdaten durchaus untergeht. Der genaue Wert ist 0.05‰.

Fehler durch Missachtung der Ausdehnung des Körpers

Der Fehler, der durch die Missachtung der Ausdehnung des Pendels entsteht, ist kleiner als 1‰ und hat damit auch keinen Einfluss auf das Ergebnis der Rechnungen. Der genaue Wert beträgt 0.42‰. Zur Berechnung dieses Wertes habe ich für h (Höhe des Zylinders) und R (Radius des Zylinders) großzügige Schätzungen von 10cm und 5mm gewählt, da wir die Aufnahme dieser Maße versäumt haben.

Das Maxima-Protokoll zu den o.g. Werten:

```
(%i5) 1/4*(sin(5/360*3.141592654))^2+1/4*9/16*(sin(5/360*3.141592654))^4;
(%o5) 4.7617181249807463E-4
(%i6) -1+sqrt(11340/11338.8);
(%o6) 5.2914252490987579E-5
[...]
(%i8) -1+sqrt(1+(3*0.005^3+0.1^2)/12);
(%o8) 4.1659551575490283E-4
```

F3 FADENPENDEL

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Wichtige physikalische Grundbegriffe: Massenpunktmodell, mathematisches und physikalisches Pendel, Bewegungsgleichung, Schwerkraft, Newtonsche Axiome, Schwingungsdifferentialgleichung

Ein an einem Faden aufgehängter Körper stellt aufgrund der auf ihn wirkenden Schwerkraft und seiner Trägheit ein schwingungsfähiges System dar. Betrachtet man (idealisiert) einen punktförmigen Körper der Masse m , der an einem Faden der Länge l hängt und lenkt ihn um einen Winkel φ (Abb. 1) aus der Senkrechten aus, dann führt der Körper nach dem Loslassen Schwingungen um die Senkrechte aus.

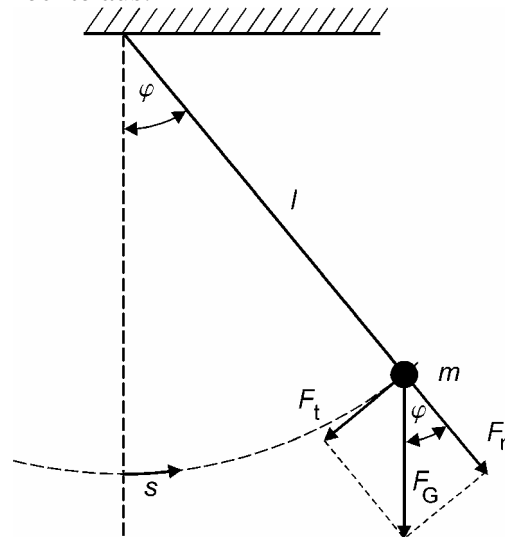


Abbildung 1: Fadenpendel

Bei Vernachlässigung der Masse des Fadens und der Luftreibung wirkt auf den Körper in jedem Punkt der Bahn senkrecht nach unten die Gewichtskraft

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}, \quad (1)$$

wobei g die Fallbeschleunigung ist. Die Normalkomponente (normal zur Bahn des Körpers) $F_n = m \cdot g \cdot \cos \varphi$ dieser Kraft findet ihre Gegenkraft in der in der Aufhängung auftretenden Kraft und beeinflusst die Bewegung des Körpers nicht. Dagegen erzeugt die Tangentialkomponente $F_t = m \cdot g \cdot \sin \varphi$ der Gewichtskraft entsprechend der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = m \cdot \ddot{s} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

eine Beschleunigung des Körpers längs der kreisförmigen Bahnkurve. Zwischen dem Auslenkwinkel φ und der Bahnkurvenkoordinate s auf der Bahnkurve besteht die Beziehung $s = l \cdot \varphi$. Bei (zeitlich) konstanter Fadenlänge l folgt daraus unmittelbar

$$\frac{ds}{dt} = l \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (3)$$

Für kleine Auslenkwinkel φ gilt die bekannte Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$, die ebenso wie (3) in die Bewegungsgleichung (2) eingesetzt werden kann. Daraus erhält man die Newtonsche Bewegungsgleichung für das mathematische Pendel mit

$$l \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g \cdot \varphi = 0. \quad (4)$$

Diese Schwingungsdifferentialgleichung einfachster Form kann mit dem Ansatz

F3 FADENPENDEL

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5)$$

gelöst werden. Die hier zunächst willkürlich erscheinenden Konstanten heißen Amplitude φ_0 bzw. Phasenkonstante ψ und sind durch die konkreten Anfangsbedingungen für $t = 0$ festgelegt. Das mathematische Pendel vollführt demnach bei Auslenkung um kleine Winkel harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω und der Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (6)$$

die unabhängig von der Masse m und der Amplitude φ_0 ist.

Die Beziehung (6) erlaubt prinzipiell bei bekannter Pendellänge l durch Messung der Periodendauer T eine Bestimmung der Fallbeschleunigung g . Allerdings ist die Pendellänge l nur sehr ungenau zu bestimmen. Deshalb bedient man sich hier zweckmäßig eines einfachen Tricks: Die Länge l kann um genau einstellbare Beträge l_i verändert werden und setzt sich gemäß $l = l_0 + l_i$ zusammen. Damit wird aus (6) durch entsprechende Umformung

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2 l}{g} = \frac{4\pi^2}{g} \cdot (l_0 + l_i). \quad (7)$$

Misst man nun die Periodendauern T_i für die entsprechenden l_i und stellt die Abhängigkeit $T_i^2(l_i)$ dar, so ergibt sich eine Gerade mit dem Anstieg $\frac{4\pi^2}{g}$ und dem Achsenabschnitt

$\frac{4\pi^2}{g} \cdot l_0$. Damit werden die Größen g und l_0 bestimmbar.

Die oben vorgenommenen Vereinfachungen, die zur Herleitung der Beziehung (6) verwendet wurden, bedürfen noch einer weiteren Diskussion.

Betrachtung beliebiger Winkel: Ohne die obige Beschränkung auf kleine Winkel φ liefert die Lösung der sog. elliptischen Differentialgleichung (2) für die Periodendauer das (exaktere) Ergebnis

$$T_\varphi = T \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) + \dots \right\}, \quad (8)$$

wobei T durch die Beziehung (6) gegeben ist.

Berücksichtigung des Auftriebs in Luft: Der Massekörper aus Blei mit der Dichte von $\rho_K = 11340 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ und dem Volumen V_K erfährt in Luft der Dichte $\rho_L \approx 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ eine Auftriebskraft $F_A = \rho_L \cdot V_K \cdot g$, die der Gewichtskraft $F_G = m \cdot g = \rho_K \cdot V_K \cdot g$ entgegengerichtet ist. Unter Berücksichtigung dieses Auftriebs in Luft erhält man schließlich für die Periodendauer

$$T_A = T \cdot \sqrt{\frac{\rho_K}{\rho_K - \rho_L}}. \quad (9)$$

Betrachtung für ausgedehnten Massekörper: Die Ausdehnung des schwingenden Körpers kann man berücksichtigen, wenn man von der Bewegungsgleichung des sog. physikalischen Pendels (vgl. Versuch „M9 Reversionspendel“) ausgeht. Die genaue Betrachtung bzw. Herleitung wird hier bewusst nicht angegeben, sondern nur das Ergebnis. Mit bekannten Abmessungen des Bleizylinders (Radius R und Höhe h) am Faden der Länge l bestimmt sich die Periodendauer zu

$$T_s = T \cdot \sqrt{1 + \frac{3R^2 + h^2}{12 \cdot l^2}}. \quad (10)$$

F3 FADENPENDEL

Der Einfluss des Fadens wurde auch bei diesen Betrachtungen aber ebenso vernachlässigt wie die auftretende Reibung. Es ist sicherlich empirisch einsichtig, dass schwache Reibung zu einer gedämpften Schwingung führen wird: Die Schwingungsamplitude klingt dann exponentiell mit sehr großer Zeitkonstante τ wie $e^{-\frac{t}{\tau}}$ ab.

AUFGABEN

1. Bestimmung der Periodendauer für eine feste Fadenlänge. Die Zeitmessung erfolgt für 10 Schwingungen jeweils *zehnmal* an einem Umkehrpunkt *und* beim Nulldurchgang des Pendels. Berechnung von Mittelwert, Standardabweichung und Vertrauensbereich der Periodendauer und Diskussion der *Unterschiede* zwischen beiden Verfahren.
2. Bestimmung der Periodendauer für *eine* Schwingung beim Nulldurchgang mit zehnfacher Messung, Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung, anschließend Vergleich mit den Ergebnissen der 1. Aufgabe 1 und Diskussion der Unterschiede.
3. Bestimmung der Periodendauer für 10 verschiedene Fadenlängen l_i . Aus jeweils 2 Messungen für 10 Schwingungen sind die Mittelwerte für die Periodendauern $T_i(l_i)$ zu berechnen.
4. Grafische Darstellung der Ergebnisse der 3. Aufgabe in der Form $T_i^2(l_i)$ in einem Diagramm. Verwendung von Gleichung (7) zur Bestimmung von Fallbeschleunigung g und Anfangslänge des Pendels l_0 sowohl durch grafischen Geradenausgleich als auch numerische lineare Regression mit Ermittlung der zugehörigen Unsicherheiten.
5. Aus den Ergebnissen der 4. Aufgabe für l_0 und g ist gemäß Gleichung (6) die Periodendauer T einschließlich ihrer Unsicherheit zu berechnen und mit den Ergebnissen der 1. Aufgabe zu vergleichen.
6. Abschätzung der systematischen Messabweichungen für die Periodendauer gemäß der o.g. drei Gleichungen (8-10) und ihres Einflusses auf die g -Bestimmung. Diskussion der Relevanz entsprechender Korrekturen.

VERSUCHSHINWEISE

Ein gegossener Bleizylinder (Radius $R \approx 23$ mm, Höhe $h \approx 23$ mm, Masse $m \approx 0,8$ kg) hängt an einem dünnen Stahldraht. Die Pendellänge lässt sich durch einen Schieber, in dessen Führung der Draht läuft, verändern. Die Längenänderung kann mit Hilfe von Ringmarken, deren Abstand 2 cm beträgt, eingestellt werden. Bei Auslenkung des Pendels aus seiner Ruhelage führt es Schwingungen aus, deren Periodendauer mit einer von Hand ausgelösten Stoppuhr bestimmt wird.

Für die ersten beiden Aufgaben ist zweckmäßig (warum?) eine möglichst große Fadenlänge zu wählen. Die zugehörige Stellung des Schiebers ist unbedingt zu notieren, da sie später benötigt wird. Für die 3. Aufgabe wird die Anfangsfadenlänge l_0 um die Werte l_i ($i = 1..10$) in Schritten von 4 cm verringert. Für die mit der 4. Aufgabe erforderliche Auswertung sind grafische Mittel (Anstiegsdreieck, grafische Extrapolation auf den Achsenabschnitt) und ein rechentechnisches Verfahren (lineare Regression) einzusetzen. Für Aufgabe 5 ist das bei Aufgabe 4 bestimmte Ergebnis für die Anfangslänge l_0 zu verwenden. Bei Aufgabe 6 muss ermittelt werden, wie sich die Korrekturen der Schwingungsdauer gemäß (8-10) auf die Fallbeschleunigung g auswirken. Beachten Sie hier, dass g aus dem Anstieg der Geraden gemäß der 4. Aufgabe nach Gleichung (7) bestimmt wird! Überlegen Sie, welche zufälligen und welche systematischen Abweichungen die Messunsicherheit der Fallbeschleunigung g wesentlich bestimmen!