Module EA4 – Éléments d'Algorithmique II

Outils pour l'analyse des algorithmes

Dominique Poulalhon

`dominique.poulalhon@irif.fr`

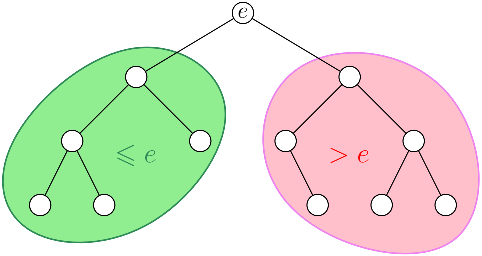
Université de Paris

L2 Informatique & DL Bio-Info, Jap-Info, Math-Info

Année universitaire 2020-2021

Un arbre binaire de recherche (ABR) est un arbre binaire, étiqueté, tel que *l'étiquette de chaque sommet est comprise entre*

- *toutes les étiquettes du sous-arbre gauche (plus petites)* et
- *toutes les étiquettes du sous-arbre droit (plus grandes)*



Théorème

la liste triée des éléments d'un ABR de taille n *peut être obtenue en temps* $\Theta(n)$ *par un parcours en profondeur infixe.*

Théorème

la recherche, l'ajout et la suppression d'un élément dans un ABR de hauteur h *se font en temps* $\Theta(h)$ *au pire.*

Corollaire

la construction d'un ABR de taille n *par insertion successive de ses éléments a un coût* $O(nh)$*, si* h *est la hauteur de l'arbre obtenu.*

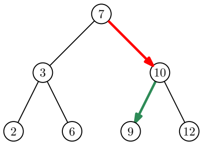
La clé de l'efficacité de ces opérations réside donc dans la ***hauteur*** de l'ABR considéré en fonction de sa taille.

Hauteur d'un ABR

la hauteur $h(A)$ d'un arbre binaire A à n sommets vérifie :
$$\log n \leqslant h(A) \leqslant n - 1$$

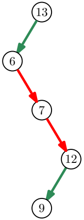
et ces bornes sont atteintes :

Cas sympathique : ABR « parfait »



Hauteur $\log n$, recherche semblable à une recherche dichotomique, modifications efficaces, *i.e.* avantages du tableau trié sans les inconvénients

Cas désagréable : ABR « filiforme »



Hauteur $n - 1$, structure compliquée mais aussi inefficace qu'une liste chaînée non triée

À quoi ressemble un ABR « typique » ? À un arbre binaire parfait ? À un arbre filiforme ? Ou ni l'un ni l'autre ?

Observation : chaque arbre binaire à n sommets admet un unique étiquetage par $\{1, \ldots, n\}$ respectant les contraintes d'un ABR

Observation : chaque arbre binaire à n sommets admet un unique étiquetage par $\{1, \ldots, n\}$ respectant les contraintes d'un ABR

On pourrait donc se dire qu'il « suffit » d'étudier les arbres binaires, et non les ABR. Ce qui est en fait difficile, et donne (malheureusement) le résultat suivant :

Théorème (admis)

la hauteur moyenne d'un arbre binaire choisi uniformément parmi les arbres binaires à n nœuds est en $\Theta(\sqrt{n})$.

Observation : chaque arbre binaire à n sommets admet un unique étiquetage par $\{1, \ldots, n\}$ respectant les contraintes d'un ABR

On pourrait donc se dire qu'il « suffit » d'étudier les arbres binaires, et non les ABR. Ce qui est en fait difficile, et donne (malheureusement) le résultat suivant :

Théorème (admis)

la hauteur moyenne d'un arbre binaire choisi uniformément parmi les arbres binaires à n nœuds est en $\Theta(\sqrt{n})$.

Mais on ne construit pas un ABR en choisissant sa forme au hasard, puis en le remplissant *(et si on choisissait la forme d'abord, on le choisirait (quasi-)parfait)*.

Construction par succession d'insertions et de suppressions

$\implies$ aucune raison de suivre la distribution uniforme sur les arbres binaires

Quelle distribution faut-il considérer ?

Observation : chaque arbre binaire à n sommets admet un unique étiquetage par $\{1,\dots,n\}$ respectant les contraintes d'un ABR

On pourrait donc se dire qu'il « suffit » d'étudier les arbres binaires, et non les ABR. Ce qui est en fait difficile, et donne (malheureusement) le résultat suivant :

Théorème (admis)

la hauteur moyenne d'un arbre binaire choisi uniformément parmi les arbres binaires à n nœuds est en $\Theta(\sqrt{n})$.

Mais on ne construit pas un ABR en choisissant sa forme au hasard, puis en le remplissant *(et si on choisissait la forme d'abord, on le choisirait (quasi-)parfait)*.

Construction par succession d'insertions et de suppressions

$\Longrightarrow$ aucune raison de suivre la distribution uniforme sur les arbres binaires

Quelle distribution faut-il considérer ?

Théorème

*la hauteur moyenne d'un ABR construit par l'insertion successive des entiers $1,\dots,n$ dans un **ordre aléatoire choisi uniformément** est en $\Theta(\log n)$.*

C'est ce qu'on appelle la distibution de probabilité des ABR

On note :

- $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des arbres binaires de taille n,
- $\mathcal{A}(\sigma)$ l'ABR obtenu par insertion successive de $\sigma(1), \sigma(2), \ldots$
- $h(a)$ la hauteur d'un arbre a.

On note :

- $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des arbres binaires de taille n,
- $\mathcal{A}(\sigma)$ l'ABR obtenu par insertion successive de $\sigma(1), \sigma(2), \ldots$
- $h(a)$ la hauteur d'un arbre a.

On veut comparer deux notions de hauteur moyenne des arbres binaires de taille n :

- selon la distribution uniforme : $\displaystyle\frac{1}{\#\mathcal{B}_n} \sum_{a \in \mathcal{B}_n} h(a)$
- et selon la distibution de probabilité des ABR :

$$\frac{1}{\#\mathfrak{S}_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h(\mathcal{A}(\sigma)) = \frac{1}{\#\mathfrak{S}_n} \sum_{a \in \mathcal{B}_n} \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } \mathcal{A}(\sigma) = a\} \cdot h(a)$$

On note :

- $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des arbres binaires de taille n,
- $\mathcal{A}(\sigma)$ l'ABR obtenu par insertion successive de $\sigma(1), \sigma(2), \ldots$
- $h(a)$ la hauteur d'un arbre a.

On veut comparer deux notions de hauteur moyenne des arbres binaires de taille n :

- selon la distribution uniforme : $\dfrac{1}{\#\mathcal{B}_n} \displaystyle\sum_{a \in \mathcal{B}_n} h(a)$
- et selon la distibution de probabilité des ABR :

$$\frac{1}{\#\mathfrak{S}_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h(\mathcal{A}(\sigma)) = \frac{1}{\#\mathfrak{S}_n} \sum_{a \in \mathcal{B}_n} \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } \mathcal{A}(\sigma) = a\} \cdot h(a)$$

d'où l'importance de $\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } \mathcal{A}(\sigma) = a\}$*, i.e. le nombre de permutations différentes telles que l'insertion successive de* $\sigma(1), \sigma(2), \ldots$ *aboutisse à l'arbre* a

On note :

- $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des arbres binaires de taille n,
- $\mathcal{A}(\sigma)$ l'ABR obtenu par insertion successive de $\sigma(1), \sigma(2), \ldots$
- $h(a)$ la hauteur d'un arbre a.

On veut comparer deux notions de hauteur moyenne des arbres binaires de taille n :

- selon la distribution uniforme : $\dfrac{1}{\#\mathcal{B}_n} \displaystyle\sum_{a \in \mathcal{B}_n} h(a)$
- et selon la distibution de probabilité des ABR :

$$\frac{1}{\#\mathfrak{S}_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h(\mathcal{A}(\sigma)) = \frac{1}{\#\mathfrak{S}_n} \sum_{a \in \mathcal{B}_n} \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } \mathcal{A}(\sigma) = a\} \cdot h(a)$$

d'où l'importance de $\#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \textit{ tq } \mathcal{A}(\sigma) = a\}$*, i.e. le nombre de permutations différentes telles que l'insertion successive de* $\sigma(1), \sigma(2), \ldots$ *aboutisse à l'arbre* a

Intuition avec les mains : les arbres de hauteur $\Theta(n)$ peuvent être obtenus de beaucoup moins de manières différentes que les arbres de hauteur $\Theta(\log n)$, donc leur contribution considérablement plus faible dans le cas de la distribution des ABR que dans le cas de la distribution uniforme.

Cas filiforme : c'est le cas le plus simple :

Chacun des 2^{n-1} arbres filiformes de taille n compte seulement pour un poids 1 dans le calcul de la hauteur moyenne des ABR.

Cas filiforme : c'est le cas le plus simple :

> *Chacun des 2^{n-1} arbres filiformes de taille n compte seulement pour un poids 1 dans le calcul de la hauteur moyenne des ABR.*

Plus généralement,

Lemme

Soit a un ABR, de racine r, et de sous-arbres g et d. Si $a = \mathcal{A}(\sigma)$, alors :

- *r a été inséré en premier :* $\sigma(1) = r$
- *soit* γ *l'ordre d'insertion des éléments de g (dans a) ; alors* $\mathcal{A}(\gamma) = g$
- *soit* δ *l'ordre d'insertion des éléments de d (dans a) ; alors* $\mathcal{A}(\delta) = d$
- γ *et* δ *s'intercalent de manière quelconque dans* σ

Par exemple : pour $\sigma = 3\ 1\ 2\ 4$, on a $r = 3$, $\gamma = 1\ 2$ et $\delta = 4$.
Les seules permutations qui produisent le même ABR sont $3\ 1\ 4\ 2$ et $3\ 4\ 1\ 2$.

Combien de permutations produisent le même ABR ?

Calcul récursif du nombre de permutations qui produisent un arbre donné :

1. calcul du nombre de possibilités pour g et pour d,
2. calcul du nombre de manières d'intercaler les éléments de g et ceux de d, *i.e.* colorier # g positions en vert et #d en rouge,
3. produit de ces 3 valeurs.

Calcul récursif du nombre de permutations qui produisent un arbre donné :

1. calcul du nombre de possibilités pour g et pour d,
2. calcul du nombre de manières d'intercaler les éléments de g et ceux de d, *i.e.* colorier # g positions en vert et #d en rouge,
3. produit de ces 3 valeurs.

Le mélange donne un facteur multiplicatif : $\binom{\#g + \#d}{\#g} = \frac{(\#g + \#d)!}{\#g!\ \#d!}$

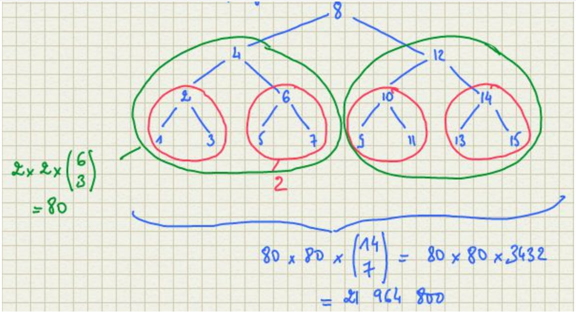
(beaucoup) plus grand quand #g *et* #d *sont du même ordre de grandeur que lorsque le partage est déséquilibré*

Calcul récursif du nombre de permutations qui produisent un arbre donné :

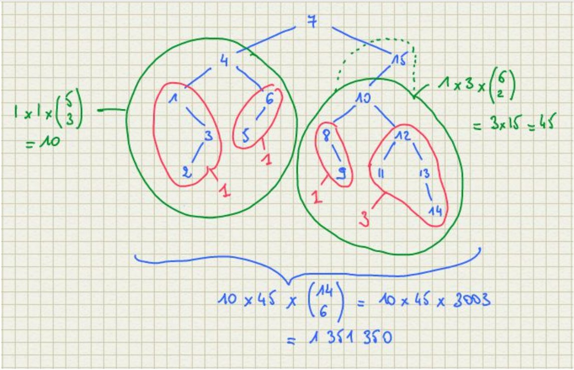
1. calcul du nombre de possibilités pour g et pour d,
2. calcul du nombre de manières d'intercaler les éléments de g et ceux de d, *i.e.* colorier # g positions en vert et #d en rouge,
3. produit de ces 3 valeurs.

Le mélange donne un facteur multiplicatif : $\binom{\#g + \#d}{\#g} = \frac{(\#g + \#d)!}{\#g!\ \#d!}$

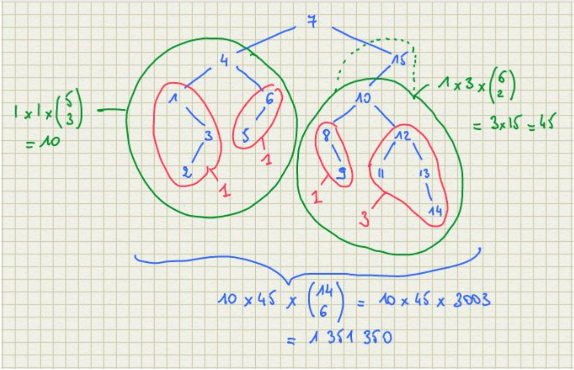
Exemple : cas de l'ABR parfait de taille 15



Un cas un peu moins équilibré



Un cas un peu moins équilibré



Moralité : la contribution des arbres est d'autant plus importante qu'ils sont équilibrés, et la différence d'ordre de grandeur est énorme entre les arbres relativement équilibrés et les arbres dégénérés comme les arbres filiformes.

Il est donc moralement raisonnable que la hauteur moyenne des ABR soit nettement plus faible que celle des arbres binaires uniformes... mais ce n'est pas une preuve !

Hauteur moyenne des ABR (démonstration)

Pour étudier la hauteur moyenne des ABR, nous disposons essentiellement de la définition de la hauteur :

$h(a) =$ hauteur de l'arbre a ; si g et d sont les sous-arbres de a :

$$h(a) = 1 + \max(h(g), h(d))$$

Hauteur moyenne des ABR (démonstration)

Pour étudier la hauteur moyenne des ABR, nous disposons essentiellement de la définition de la hauteur :

$h(a) =$ hauteur de l'arbre a ; si g et d sont les sous-arbres de a :

$$h(a) = 1 + \max(h(g), h(d))$$

Malheureusement, la seule majoration raisonnable de cette égalité est $h(a) \leqslant 1 + h(g) + h(d)$, trop grossière pour espérer montrer mieux que $h(a) \leqslant n$...

Hauteur moyenne des ABR (démonstration)

Pour étudier la hauteur moyenne des ABR, nous disposons essentiellement de la définition de la hauteur :

$h(a) =$ hauteur de l'arbre a ; si g et d sont les sous-arbres de a :

$$h(a) = 1 + \max(h(g), h(d))$$

Malheureusement, la seule majoration raisonnable de cette égalité est $h(a) \leqslant 1 + h(g) + h(d)$, trop grossière pour espérer montrer mieux que $h(a) \leqslant n$...

On introduit une grandeur plus sensible aux petites modifications en passant à l'exponentielle – en quelque sorte la « capacité » d'un arbre de même hauteur :

Soit $H(a) = 2^{h(a)}$. On obtient alors une majoration plus fine :

$$H(a) = 2\max(H(g), H(d)) \leqslant 2(H(g) + H(d))$$

Hauteur moyenne des ABR (démonstration)

Pour étudier la hauteur moyenne des ABR, nous disposons essentiellement de la définition de la hauteur :

$h(a)$ = hauteur de l'arbre a ; si g et d sont les sous-arbres de a :

$$h(a) = 1 + \max(h(g), h(d))$$

Malheureusement, la seule majoration raisonnable de cette égalité est $h(a) \leqslant 1 + h(g) + h(d)$, trop grossière pour espérer montrer mieux que $h(a) \leqslant n$...

On introduit une grandeur plus sensible aux petites modifications en passant à l'exponentielle – en quelque sorte la « capacité » d'un arbre de même hauteur :

Soit $H(a) = 2^{h(a)}$. On obtient alors une majoration plus fine :

$$H(a) = 2\max(H(g), H(d)) \leqslant 2(H(g) + H(d))$$

Soit $\overline{h}(n) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h(\mathcal{A}(\sigma))$ et $\overline{H}(n) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} H(\mathcal{A}(\sigma))$

But : montrer que $\overline{h}(n) \in \Theta(\log n)$

Hauteur moyenne d'un ABR (démonstration)

par convexité de l'exponentielle, $\overline{H}(n) \geqslant 2^{\overline{h}(n)}$, donc $\overline{h}(n) \leqslant \log \overline{H}(n)$

Hauteur moyenne d'un ABR (démonstration)

par convexité de l'exponentielle, $\overline{H}(n) \geqslant 2^{\overline{h}(n)}$, donc $\overline{h}(n) \leqslant \log \overline{H}(n)$

$\Longrightarrow$ il suffit de montrer que $\overline{H}(n)$ est polynomiale (de degré quelconque, pas forcément linéaire : on a gagné une vraie marge de manœuvre en passant de h à H)

Hauteur moyenne d'un ABR (démonstration)

par convexité de l'exponentielle, $\overline{H}(n) \geqslant 2^{\overline{h}(n)}$, donc $\overline{h}(n) \leqslant \log \overline{H}(n)$

$\Longrightarrow$ il suffit de montrer que $\overline{H}(n)$ est polynomiale (de degré quelconque, pas forcément linéaire : on a gagné une vraie marge de manœuvre en passant de h à H)

on découpe $\mathfrak{S}_n$ en n parties : $\mathfrak{S}_{n,i} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = i\}$

$\mathfrak{S}_{n,i}$ est donc l'ensemble des σ t.q. $\mathcal{A}(\sigma)$ a i à la racine et donc

- un sous-arbre gauche g de taille $i-1$,
- un sous-arbre droit d de taille $n-i$.

par convexité de l'exponentielle, $\overline{H}(n) \geqslant 2^{\overline{h}(n)}$, donc $\overline{h}(n) \leqslant \log \overline{H}(n)$

$\Longrightarrow$ il suffit de montrer que $\overline{H}(n)$ est polynomiale (de degré quelconque, pas forcément linéaire : on a gagné une vraie marge de manœuvre en passant de h à H)

on découpe $\mathfrak{S}_n$ en n parties : $\mathfrak{S}_{n,i} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = i\}$

$\mathfrak{S}_{n,i}$ est donc l'ensemble des σ t.q. $\mathcal{A}(\sigma)$ a i à la racine et donc

- un sous-arbre gauche g de taille $i-1$,
- un sous-arbre droit d de taille $n-i$.

Pour chaque arbre, $H(a) \leqslant 2(H(g) + H(d))$, donc en faisant la moyenne sur $\mathfrak{S}_{n,i}$:

$$\overline{H}(n,i) \leqslant 2\left[\overline{H}(i-1) + \overline{H}(n-i)\right]$$

Hauteur moyenne d'un ABR (démonstration)

par convexité de l'exponentielle, $\overline{H}(n) \geqslant 2^{\overline{h}(n)}$, donc $\overline{h}(n) \leqslant \log \overline{H}(n)$

$\Longrightarrow$ il suffit de montrer que $\overline{H}(n)$ est polynomiale (de degré quelconque, pas forcément linéaire : on a gagné une vraie marge de manœuvre en passant de h à H)

on découpe $\mathfrak{S}_n$ en n parties : $\mathfrak{S}_{n,i} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = i\}$

$\mathfrak{S}_{n,i}$ est donc l'ensemble des σ t.q. $\mathcal{A}(\sigma)$ a i à la racine et donc

- un sous-arbre gauche g de taille $i-1$,
- un sous-arbre droit d de taille $n-i$.

Pour chaque arbre, $H(a) \leqslant 2(H(g) + H(d))$, donc en faisant la moyenne sur $\mathfrak{S}_{n,i}$:

$$\overline{H}(n,i) \leqslant 2\left[\overline{H}(i-1) + \overline{H}(n-i)\right]$$

pour tout i, $\mathfrak{S}_{n,i}$ a le même cardinal $(n-1)!$, donc $\overline{H}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{H}(n,i)$, donc :

$$\overline{H}(n) \leqslant \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{H}(i-1) + \overline{H}(n-i) = \frac{4}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \overline{H}(i)$$

par convexité de l'exponentielle, $\overline{H}(n) \geqslant 2^{\overline{h}(n)}$, donc $\overline{h}(n) \leqslant \log \overline{H}(n)$

$\Longrightarrow$ il suffit de montrer que $\overline{H}(n)$ est polynomiale (de degré quelconque, pas forcément linéaire : on a gagné une vraie marge de manœuvre en passant de h à H)

on découpe $\mathfrak{S}_n$ en n parties : $\mathfrak{S}_{n,i} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = i\}$

$\mathfrak{S}_{n,i}$ est donc l'ensemble des σ t.q. $\mathcal{A}(\sigma)$ a i à la racine et donc

- un sous-arbre gauche g de taille $i-1$,
- un sous-arbre droit d de taille $n-i$.

Pour chaque arbre, $H(a) \leqslant 2(H(g) + H(d))$, donc en faisant la moyenne sur $\mathfrak{S}_{n,i}$:

$$\overline{H}(n,i) \leqslant 2\left[\overline{H}(i-1) + \overline{H}(n-i)\right]$$

pour tout i, $\mathfrak{S}_{n,i}$ a le même cardinal $(n-1)!$, donc $\overline{H}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{H}(n,i)$, donc :

$$\overline{H}(n) \leqslant \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{H}(i-1) + \overline{H}(n-i) = \frac{4}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{H}(i)$$

on peut alors vérifier par récurrence que $\frac{1}{4}\binom{n+3}{3}$ (qui est un polynôme de degré 3) est une majoration de $\overline{H}(n)$. $\square$

Corollaire

les opérations de recherche, d'insertion et de suppression ont une complexité (en temps) $\Theta(\log n)$ *(dans le pire cas de chaque ABR, en moyenne sur tous les ABR, considérés selon la distribution précédente)*

Corollaire

les opérations de recherche, d'insertion et de suppression ont une complexité (en temps) $\Theta(\log n)$ *(dans le pire cas de chaque ABR, en moyenne sur tous les ABR, considérés selon la distribution précédente)*

Corollaire

la construction d'un ABR par insertion successive de n *valeurs a une complexité* $\Theta(n \log n)$ ***en moyenne***

Corollaire

les opérations de recherche, d'insertion et de suppression ont une complexité (en temps) $\Theta(\log n)$ *(dans le pire cas de chaque ABR, en moyenne sur tous les ABR, considérés selon la distribution précédente)*

Corollaire

la construction d'un ABR par insertion successive de n *valeurs a une complexité* $\Theta(n \log n)$ ***en moyenne***

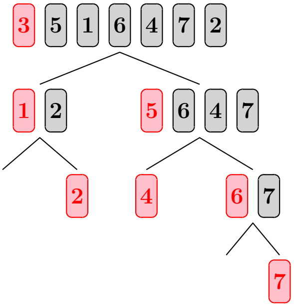
Corollaire

trier une liste par construction d'un ABR a une complexité $\Theta(n \log n)$ ***en moyenne***

Lemme

l'arbre de récursion de QuickSort, étiqueté par les pivots, est précisément l'ABR obtenu par insertion successive des pivots

Exemple : `T = [3, 5, 1, 6, 4, 7, 2]`



+ le cumul des complexités par niveau est en $O(n)$, donc :

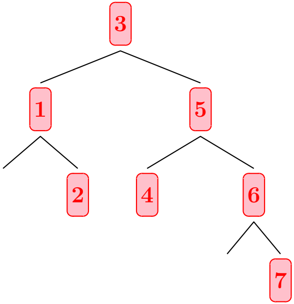
Corollaire

*la complexité de **QuickSort** est également $\Theta(n \log n)$ **en moyenne***

Lemme

l'arbre de récursion de QuickSort, étiqueté par les pivots, est précisément l'ABR obtenu par insertion successive des pivots

Exemple : `T = [3, 5, 1, 6, 4, 7, 2]`



+ le cumul des complexités par niveau est en $O(n)$, donc :

Corollaire

la complexité de ***QuickSort*** *est également* $\Theta(n \log n)$ ***en moyenne***

Question : cette distribution est-elle réaliste ?

Demi-réponse en TP : vous devriez observer les mêmes formes de courbes tant que le nombre de suppressions reste raisonnable (quadratique) par rapport à la taille de l'arbre final

On peut donc compléter le tableau comparatif des complexités, avec une victoire nette des ABR sur les différents types de listes pour le traitement des ensembles dynamiques :

	tableau		liste chaînée		ABR
	non trié	trié	non triée	triée	
recherche	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(h)$
insertion	$+\,\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$+\,\Theta(1)$	$+\,\Theta(1)$	$\Theta(h)$
suppression	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$+\,\Theta(1)$	$+\,\Theta(1)$	$\Theta(h)$
minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(h)$
sélection	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(k)$	$\Theta(\log n)$
union	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$

(pour l'union : c'est faisable en commençant par un (des) parcours infixes ; d'autres méthodes existent sans construire de listes inutiles, mais c'est plus compliqué)
(pour la sélection : pour obtenir une complexité de $\Theta(\log n)$*, il faut enrichir la structure, par exemple en stockant dans chaque nœud la taille du sous-arbre correspondant ; cette information peut être conservée sans surcoût lors des insertions et suppressions)*

On peut donc compléter le tableau comparatif des complexités, avec une victoire nette des ABR sur les différents types de listes pour le traitement des ensembles dynamiques :

	tableau		liste chaînée		ABR
	non trié	trié	non triée	triée	(en moyenne)
recherche	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$
insertion	$+\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$+\Theta(1)$	$+\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$
suppression	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$+\Theta(1)$	$+\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$
minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$
sélection	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(k)$	$\Theta(\log n)$
union	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$

(pour l'union : c'est faisable en commençant par un (des) parcours infixes ; d'autres méthodes existent sans construire de listes inutiles, mais c'est plus compliqué)
(pour la sélection : pour obtenir une complexité de $\Theta(\log n)$*, il faut enrichir la structure, par exemple en stockant dans chaque nœud la taille du sous-arbre correspondant ; cette information peut être conservée sans surcoût lors des insertions et suppressions)*