

# 不盡相異物直線排列與重複排列



## 課程介紹

在前一單元，我們介紹的完全相異物直線排列，若這些事物中某些是相同的，其排列數要如何求呢？

此即『不盡相異物直線排列』，我們先看一個簡單的問題：

將兩支相同的鉛筆和一支原子筆排成一列，試問共有多少種排法？

解這個問題，若以"A"代表鉛筆，以"B"代表原子筆，則可以很清楚知道共有AAB, ABA, BBA等三種不同的排法。

為了進一步了解一般問題之解法，我們作以下的分析：

第一步：先將兩支鉛筆看成相異，分別編號並以 A1 A2

第二步：將鉛筆與原子筆做『完全相異物直線排列』，共有 $3!=6$ 種，如下：

A1 A2 B	A2 A1 B
A1 B A2	A2 B A1
B A1 A2	B A1 A2

我們可以發現第一列的兩種排列中，鉛筆均在第一及第二個位置，只是編號不同，也正是兩個完全相異物做直線排列的情況，因此如果我們將鉛筆的編號去掉，則第一列的2種排列均是AAB, 同樣地，第二及第三列也分別是ABA, BAA。故對於『不盡相異物』做直線排列時，先將全部視為『完全相異物直線排列』，求出後在去除以相同物做『完全相異物直線排列』的結果，就得到我們要的答案，故本問題可以很快求出 $3!/2!=3$ 種。

我們底下給出一般的作法：

### 不盡相異物直線排列

若有  $n$  個不同的事物，將相同的事物歸為一組，可歸成  $k$  組，且每組有  $m_i$  個事物，其中

$i = 1, 2, \dots, k$ ，且  $\sum_{i=1}^k m_i = n$ ，則此  $n$  個事物做『不盡相異物直線排列』之方法數為

$$\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$$

接下來我們介紹重複排列，先看下面的問題：

從1, 2, 3, 4, 5五個數字中，所構成的四位數有幾種？（其中數字可重複）

解這個問題，只要用到乘法原理就可以。因有四位數，每一位數選法均可從1, 2, 3, 4, 5五個數字中挑一個數字，共有5種方法，故由乘法原理知，共有  $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$  種。

事實上，我們可以寫成更一般，即所謂的『重複排列』

### 重複排列

若由有  $n$  種不同的事物，任選  $m$  個作重複排列。因每次選取均有  $n$  種不同的取法，共取  $m$  個，

則有  $n^m$  種取法。



### 生活中的實例1

將兩支相同的鉛筆和兩支相同的原子筆排成一行，試問共有多少種排法？

[解]：此為『不盡相異物直線排列』問題，其方法數為：

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6^{(\text{種})}。$$

### 隨堂練習1

將4個相同的黑球、3個相同的白球、2個相同的紅球排成一行，試問共有幾種不同的排法？

[解]：1260種。

### 生活中的實例2

將"一寸光陰一寸金" 七字排成一行，試問共有幾種排法？

[解]：先將"一寸光陰一寸金" 重排為" 一一寸寸光金陰" 故此為『不盡相異物直線排列』，其方法數為

$$\frac{7!}{2!2!} = 1260 \text{ (種)}。$$

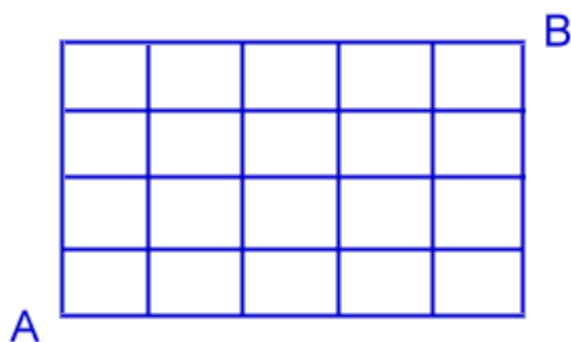
### 隨堂練習1

將"庭院深深深幾許"七字排成一列，試問共有幾種排法？

[解]: 840種

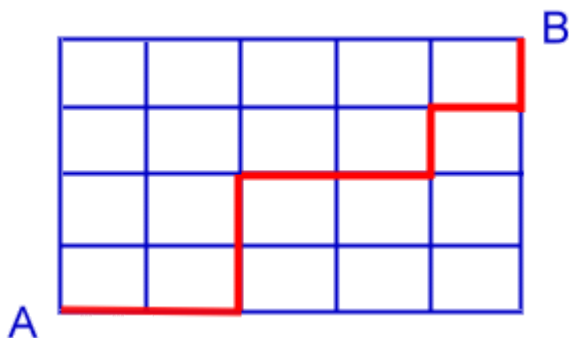
### 生活中的實例3

如下之街道圖，某人欲從A走捷徑至B，試問共有幾種走法？



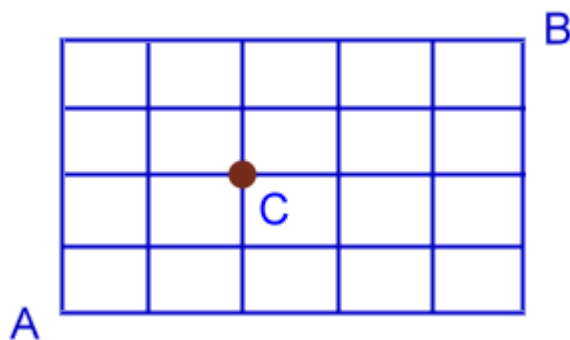
[解]: 我們以"東"表示向東走一小段，以"北"表示向北走一小段，則每一種從A走捷徑至B的走法都是由5個"東"及4個"北"排列而成，例如，下圖紅色部分即為其中一種走法，此走法為"東東北北東東北東北"，因此共有

$$\frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126 \text{ 種走法。}$$



### 隨堂練習3

如下之街道圖，某人欲從A走捷徑至B但不經過C，試問共有幾種走法？



[解]:66種。

#### 生活中的實例4

將5種不同的酒倒入4個不同杯子中，若酒只能倒一次，且每個杯子可有多種酒。試問共有幾種倒法？

[解]:將酒依序倒入杯子中，因每種酒只能從4個不同的杯子中選一杯子倒，均有四種可能的倒法，故共有  $4^5 = 1024$  種。

#### 隨堂練習4

將5種不同的酒倒入4個不同杯子中，每個杯子只能裝一種酒，酒可以重複倒。試問共有幾種倒法？

[解]:625種。



1. 某餐廳有旋轉小火車壽司，該小火車繞圓形餐桌行駛，現設有3位顧客在此餐桌用餐，小火車可擺12種不同的壽司，每種一個。當小火車行駛到顧客面前時，顧客可挑選一種壽司，亦可不挑選，小火車每繞完一圈後，廚師會將小火車上缺的壽司補齊。試問

- (1) 當小火車行駛一圈後，若每個顧客各選一種壽司，共有幾種選法？
- (2) 當小火車行駛一圈後，若有一個顧客未選擇壽司，則共有幾種選法？
- (3) 當小火車行駛兩圈後，若每個顧客均各選兩種不同的壽司，共有幾種選法？

[解答部分]

- (1) 1320種,
- (2) 396種,
- (3) 5793480種



1. 將相同的鉛筆3枝，原子筆2枝，鋼筆2枝，分給兒童，每人最多一支，試求下述情況之方法數：
  - (1) 分給7個兒童，
  - (2) 分給9個兒童。
2. 有二個高三生，二個高二生，二個高一生排成一列，同年級不相鄰，試問共有多少種排法？
3. 由1至1000的正整數中，含數字3的數有幾個？
4. 三位正整數中，不含數字0及8者共有幾個？
5. 5件不同的玩具，全部分給甲乙丙丁四人。試求下述之方法數。
  - (1) 甲生恰得一件，
  - (2) 甲生至少得一件。

[解答部分]

1. (1) 210, (2) 7560。
2. 240。
3. 271。
4. 512。
5. (1) 405, (2) 781。