隨 機 變 數

課程介紹

樣本空間中的元素，不一定是數字，可以是紅球、白球，或正面、反面等。 做民意調查，想了解民眾對某議題的看法，選項可能有極力贊成、贊成、不贊成、極不贊成、沒意見等。我們一向比較喜歡處理數字的問題。 對上述情況，可將紅球視為1，白球視為0；正面視為1，反面視為0；極力贊成視為5，贊成視為4，不贊成視為3，極不贊成視為2，沒意見視為0。也就是將實驗的結果數量化。

調查選民對某候選人支持與否，以1表支持，0表不支持。 雖是數量化了，但若調查一千位，則樣本空間共有 2^{1000} 個元素，每一元素為一長串有1000個的0或1的數字，其中第 i 個數字為1，表第 i 個人為支持，0表不支持。 這麼大的樣本空間不但難以掌握，也顯得累贅。因我們可能只對其中共有多少人支持感到興趣。 因此可令

$$X = \text{數字中1的個數。}$$

則對 X，樣本空間成為{0, 1, 2, ⋯1000}，減小許多。

由於以上這些原因，隨機變數(random variable)的概念便自然地產生了。 所謂隨機變數，就是一個定義在樣本空間 Ω 的實函數。 若以 X 表一隨機變數，則此函數的定義域為 Ω，對應域是實數 R，值域則為 R 的一個子集合。 換句話說對 $\forall\omega\in\Omega$， $X(\omega)\in R$。即對一個隨機變數 X，可以想成原先觀測到 ω，再轉換至 $X(\omega)$，樣本空間由 Ω 轉為 R。我們先看一個例子。

考慮擲一公正銅板二次，用H表出現正面，T表出現反面，則此試驗的樣本空間是

$$\Omega=\{HH, HT, TH, TT\},$$

其中HT表第一次出現正面，第二次出現反面，餘類推。我們令隨機變數 X =出現正面的次數，所以可以很清楚知道：

X(HH): 表出現兩個正面，所以 X(HH)=2;

X(HT)與X(TH): 均表出現一個正面，所以 X(HT)=X(TH)=1;

X(TT): 表沒有出現正面，所以 X(TT)=0;

因此隨機變數取值在0,1和2。

若我們對樣本空間很清楚，通常會將$X(\omega)$,寫成X，省略ω。如上例，若寫成X=2，就表示出現兩個正面，即樣本點為HH。

隨機變數常以大寫的英文字母表示，而它的觀察值則以對應的小寫字母表示，即$X=x$，我們通常會把這個形式說為"隨機變數X取值x"。

隨機變數依其取值的形式，區分為兩種，第一種若取值為有限或無限且與自然數有一對一的對應，，則稱之為離散型隨機變數(discrete random variable)。如不良品的數目、某一營業日進入銀行的顧客數

皆是離散型隨機變數。而第二種就是連續型隨機變數(continuous random variable) , 此取值在某一區間或

區間集合的所有數值，如重量、時間、溫度等。目前我們只針對離散型的隨機變數進行討論。

在前面單元，我們常會求某事件的機率，如投擲一公正銅板兩次，求出現一正一反的機率?

那將其用隨機變數表示後，機率要如何求呢?就以這個例子為例，令隨機變數X表出現正面的次數，

則$P(X=1)$，就是要求"出現一個正面"的事件之機率，就回到之前學過的事件的機率。通常我們

以$P(X=x)$表示"$X=x$之機率", 作法就是先找出$X=x$中, 有哪些事件符合，再去求出這些事

件的機率值。

生活中的實例1

投擲一公正銅板三次，令隨機變數X=出現之正面數，試求

(1) 隨機變數所有可能的取值範圍;

(2) $P(X=1)$之值。

[解]: 用H表出現正面，T表出現反面，則樣本空間為

Ω={HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH}

其中HTH表第一次出現正面，第二次出現反面，第三次出現正面，所以

X=0: 表沒有出現正面，即事件{TTT},

X=1：表出現一個正面，即事件{HTT、THT、TTH}，

X=2：表出現二個正面，即事件{THH, HTH, HHT}，

X=3：表出現三個正面，即事件{HHH}

所以隨機變數取值在0, 1, 2, 3。

而$P(X=1)$就是"出現一個正面"的事件之機率，即事件{HTT、THT、TTH}的機率，所以為3/8。

隨堂練習1

承實例1，試求$P(X=2)$之值。

[解]：3/8。

生活中的實例2

投擲一公正的銅板5次，令隨機變數X=出現之正面數，試求$P(X=2)$之值。

[解]：因每次出現不是正面就是反面，所以樣本空間中共有2^5=32個樣本點，每個樣本點之機率為1/32，因X=2，表示"5次投擲中出現2次正面"之事件，由組合概念知，共有C_2^5=10個樣本點，因每個樣本點出現機率相同，所以5次投擲中出現2次正面之機率為10×1/32=5/16，即 $P(X=2)$ =5/16。

隨堂練習2

投擲一骰子2次，令隨機變數X=出現點數之和，試求$P(X=7)$之值。

[解]：1/6。

自我挑戰

1. 試判斷下列每一隨機變數敘述，決定它是離散的還是連續的：

(1) 擲一銅板100次反面出現的次數，

(2) 結婚開始至第一胎嬰兒出生的時間，

（3）在5分鐘內打電話至某一航空公司訂位的顧客數,

（4）一份20道問題的考卷，所答對的題數,

（5）一個人的重量。

2. 三位學生已約好暑假到麥當勞打工之面試的時間。對每位學生來說，面試的結果不是錄用就是未錄用。若樣本空間為三個人面試的結果。

（1）列出此樣本空間,

（2）令隨機變數 X 表示錄用人數，列出每一試驗結果所對應的隨機變數的取值。

3. 為了做某種血液分析，檢驗技師必須執行兩個程序。第一個程序需要1個或2個步驟，第二個程序則需要1個、2個或3個步驟。假如感興趣的隨機變數是完成血液分析所需步驟的總數，試列出每一試驗結果的隨機變數的取值。

［解答部分］

1.（1）離散,（2）連續,（3）離散,（4）離散,（5）連續。

2.（1）設錄取為Y，未錄取為N，則樣本空間 Ω={YYY, YYN, YNY, YNN, NYY, NYN, NNY, NNN}。

（2）YYY-->3, YYN-->2, YNY-->2, YNN-->1, NYY-->2, NYN-->1, NNY-->1, NNN-->0。

3. 設A1表第一個程序需1個步驟，B2表第二個程序需2個餘類推，則樣本空間

Ω={(A1,B1), (A1,B2), (A1,B3), (A2,B1), (A2,B2), (A2,B3)},

所以每一試驗結果的隨機變數的取值分別為

(A1,B1)-->2, (A1,B2)-->3, (A1,B3)-->4, (A2,B1)-->3, (A2,B2)-->4, (A2,A3)-->5。