排容原理與完全相異物直線排列

課程介紹

在說明排容原理之前，我們先考慮下面的問題：

試問1至150的整數中，是3或5的倍數有幾個？

要解這個問題，我們首先求1至150的整數中3的倍數之個數：

$$3, 6, 9, 12, 15, \cdots, 144, 147, 150,$$

共有50個，其次我們在求5的倍數之個數：

$$5, 10, 15, 20, \cdots, 140, 145, 150\ ,$$

共有30個。將3的倍數之個數與5的倍數之個數相加，即50+30=80個，但此時我們將同時為3與5的倍數，即15的倍數算了兩次，因此我們要扣除，而在1至150的整數中為15的倍數之個數：

$$15, 30, 45, \cdots, 135, 150,$$

共有10個，故3或5的倍數為 (3的倍數)+(5的倍數)-(15的倍數)=50+30-10=70個。

上述問題可用集合符號來表示，令

A 為1至150的整數中3的倍數之集合，

B 為1至150的整數中5的倍數之集合，

$A \cap B$ 為1至150的整數中15的倍數之集合，

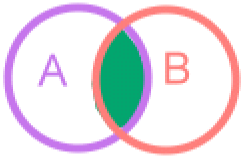
$A \cup B$ 為1至150的整數中3或5的倍數之集合，

|・|：表集合・之個數，

由上面問題討論中，我們可以得知

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|。$$

我們亦可以下面的圖形來說明，圓 A 表3的倍數之集合，圓 B 表5的倍數之集合，而重疊部分(綠色部分)就是15的倍數之集合。



事實上，我們可以將其寫成一般式：若 A, B 為兩有限集合，則

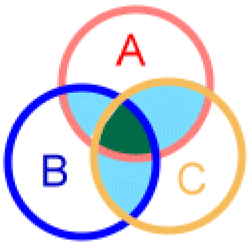
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$ 。

同理，若 A, B, C 為三有限集合，則

$$\begin{aligned}
&|A \cup B \cup C| \\
&= |A \cup (B \cup C)| \\
&= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}$$,

若以圖形方式來看(如下圖)，對圓 A，圓 B，圓 C 分別表集合 A，B，C，要求 $|A \cup B \cup C|$，可先求出 $|A| + |B| + |C|$，此時藍色部分，我們算了二次，而綠色部分，算了三次，因此必須將重複的扣除。我們將($|A| + |B| + |C|$)扣除($|A \cap B|$+$|B \cap C|$+$|A \cap C|$)後，可以發現藍色部分被扣掉一次，而綠色部分被扣掉三次，因此要求 $|A \cup B \cup C|$ 之值少了綠色部分，，即 $|A \cap B \cap C|$ 之值，所以需加回去才是 $|A \cup B \cup C|$ 真正之值。因此

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$



我們可以發現，三個有限集合，計算起來就有點難算，更不用說四個或更多的有限集合。底下，我們給出一般有限個之‘有限集合，計算其個數之基本原理，此原理稱為排容原理。可以利用數學歸納法證之

排容原理

設 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 為n個有限集合，則 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$之個數為

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= \sum_{i=1} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\ &\quad +(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n|\end{aligned}$$

接下來，我們介紹『完全相異物直線排列』，事實上，我們在前一單元，已有用到其中一個特例，只是沒有介紹一般形式，回憶之前有一個例子：『假設某教室有四張椅子，甲、乙、丙、丁四位學生依序選擇座位，試問共有幾種不同的選法?』，我們可以很快求出共有4!=24種。 此例子是椅子數與學生人數相同時，我們可以很快利用階乘概念求出。那當椅子數大於學生人數時，那該如何做呢？其實也不難，只要了解乘法原理，就可以很輕易求出，我們用一個問題來解說：

假設某教室有n張椅子，有m位學生依序選擇座位，試問有幾種不同的選法。(其中$n \geq m$)

解這個問題，依然使用乘法原理來解。

第一步：第一位學生先從n張椅子中任選一張，共有n種選法，

第二步：第二位學生從剩下的$n-1=n-2+1$張椅子任選一張，共有$n-1$種選法，

第三步：第三位學生從剩下的$n-2=n-3+1$張椅子任選一張，共有 $n-2$種選法，

至第m步：第m位學生從$n-m+1$張椅子任選一張，共有$n-m+1$種選擇。

故由乘法原理的得知，共有

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1)$$

種選法。

我們通常會將 $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1)$以$P^n_m$來表示。其中$1 \leq m \leq n$。即

$$\begin{aligned}P^n_m &= n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1) \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1) \times (n-m) \times (n-m-1) \times \cdots \times 1}{(n-m) \times (n-m-1) \times \cdots \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!}\end{aligned}$$

我們將此問題推廣至一般情況，稱為『完全相異物直線排列』

完全相異物直線排列

從 n 個完全相異的事物中，任取 m 個排成一列，則排列數目為

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}\ (n \geq m)$$

我們可以很清楚看到 P_m^n 有兩個特別的值，分別為 $P_n^n = n!$，$P_0^n = 1$。

生活中的實例1

試求在1至150的整數中，不為3或5之倍數有幾個?

[解]:(全部個數)-(3或5的倍數)=150-(50+30-10)=80個。

隨堂練習1

某次考試，班上50位學生，已知數學成績不及格者有30人，英文成績不及格者有23人，兩科均及格者

有12人，試求數學成績及格且英文成績不及格者共有多少人?

[解]: 8人

生活中的實例2

假設教室有七張椅子，有四位學生依序選擇座位，試問共有幾種不同的選法?

[解]:共有

$$P_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840\text{(種)}。$$

生活中的實例3

若 $P_3^{2n} = 28P_2^n$，求 n 之值?

[解]:

$$
\begin{aligned}
& P_3^{2n} = 28P_2^n \\
\Rightarrow\ & 2n(2n-1)(2n-2) = 28n(n-1) \\
\Rightarrow\ & 8n^2 - 40n + 32 = 0 \\
\Rightarrow\ & n = 4, n = 1
\end{aligned}
$$

因 $n \geq 2$，故 $n = 1$ 不合，所以 $n = 4$。

隨堂練習2

若 $P_3^{n+1} = 10P_2^{n-1}$，試求 n 之值。

[解]：4或5。

生活中的實例4

甲乙丙...等七人排成一列，若甲排首且乙排末，共有多少種排法?

[解]:在甲乙兩人之間需排5人，故共有 $P_5^5 = 5! = 120$ 種。

隨堂練習3

甲乙丙...等七人排成一列，若甲排首或乙排末，共有多少種排法?

[解]:1320種。

生活題材

1. 設某城市發行公益彩券，每月一期，每張售價100元(產銷成本佔1/5)，彩券上有一個四位數的號碼。 每月底公佈一組得獎號碼。 若每張彩券只能得到一筆獎金(以最高獎金計)，且得獎金額分配如下:

   若彩券上的號碼之末一位與公布的號碼之末一位相同， 則可獲得獎金一百元。

   若彩券上的號碼之末兩位與公佈的號碼之末兩位相同， 則可獲得獎金一千元。

   若彩券上的號碼之末三位與公佈的號碼之末三位相同， 則可獲得獎金一萬元。

   若彩券上的號碼與公佈的號碼完全相同，則可獲得獎金十萬元。

試問

（1）每期最多可有幾張彩券得獎?

（2）若某期彩券全部賣完，試問獲利多少?

［解答部分］

(1) 919張，

（2）438100元。

自我挑戰

1. 若$25P_3^n+P_4^{n+1}=12P_3^{n+1}$，試求$n$之值。

2. 一吧台有一列10個座位，今有男生4人，女生3人，試求下述之坐法數。

（1）任意坐，

（2）4位男生相鄰而坐，3位女生相鄰而坐。

3. 將五個字母$ABCDE$排成一列，若A不在首，且B，C 皆不在尾，共有多少種排法?

4. 用0,1,2,3,4,5組成相異數字的四位數後，然後由小至大排列，求第100個數。

5. 用1,2,4,6,7做相異數字的三位數。試問

（1）3 的倍數共有多少個?

（2）4 的倍數共有多少個?

（3）大於400者共有多少個?

［解答部分］

1. 4。

2. （1）5040，（2）604800。

3. 60。

4. 2410。

5. （1）24，（2）18，(3)36。