機率的基本性質

課程介紹

機率的意義究竟是什麼? 在某些條件下我們稱一事件A發生的機率為p, 此處的p含義為何?

不同的書不同的作者, 往往有不同的定義方式, 但大致可分為下述三種:

(1) 將機率的概念以"相同的可能性"(equal possibility)來解釋, 此為古典的定義。

假設所有試驗結果之機率相等, 若有n個試驗結果, 則平均分配機率$1/n$ 至每一試驗結果。

就投擲一公正銅板的試驗而言, 認為兩種試驗結果(正面和反面)有相同的可能性是合理的,因此分配每一試驗結果之機率為0.5, 即觀察到是正面的機率是0.5, 觀察到是反面的機率也是0.5。若是投擲一公正骰子的試驗, 認為六種可能結果有相同的可能性也是合理, 因此分配每一試驗結果之機率為1/6, 即出現1點的機率是1/6, 6點的機率也是1/6, 餘類推。

(2) 以多次重複試驗後, 一事件出現的頻率(frequency)來表示機率, 此即統計的定義, 或客觀的解釋。

由於古典的定義不夠一般性, 因它無法用來描述一有無限可能性的試驗結果。以頻率來解釋機率,

必須針對是可以重複做試驗的事件, 如丟銅板等。由於是實驗的結果, 與觀察者是誰無相關, 因此又稱客觀的解釋。如某公司新產品試賣中, 接觸了400位顧客, 其中100位買該產品而300位沒買。事實上, 可以想像每接觸一位顧客, 相當於做了一次試驗, 重複試驗了400次, 而當中有100次顧客買該產品, 300次顧客沒有買, 因此我們可以說顧客購買該產品的機率為100/400=0.25。同理, 顧客沒有買該產品的機率為300/400=0.75。

(3) 以觀察者對一事件的相信程度來定義機率, 此即主觀的觀點。

當試驗結果相同的可能性之假設不合理, 我們可以採用主觀的觀點。主觀的觀點是根據過去客

觀的事實來決定, 即使有相同的資料, 不同的人對同一事件, 有時也會給出不同的主觀機率。如考慮

中華台北對美國的世界盃棒球賽，中華台北贏的機率是多少？很顯然地，比賽結果輸、贏的可能性不

相等。同時過去中華台北對美國的次數並不多，因此若想估計中華台北獲勝的機率，我們必須用主觀

的觀點，如評量雙方的投手之防禦率，或打擊者之打擊率等，給予一個值以表示中華台北會贏的相信

程度。

當然無論使用那一種的機率的定義方式，都需滿足下列條件：

（i）給予每一試驗結果的機率必須介於0與1之間，

（ii）全部試驗結果之機率和必須等於1

給予每一試驗結果之機率後，我們就可以給出任何事件的機率。任何事件之機率等於該事件所有試驗

結果機率之和。如投擲一公正的骰子，因出現每一點的機率都是1/6，所以若令事件 A 表出現點數為

偶數的事件，即 A={2,4,6}，則事件 A 的機率為出現2點，4點，6點的試驗結果之機率加總，即

1/6+1/6+1/6=1/2，通常以 $P(A)$ 來表示事件 A 之機率，因此 $P(A)$=0.5。

關於機率有一些基本的性質，我們列於下：

設 A、B 為樣本空間 Ω 中的二事件，則

(1) $P(\Omega)=1$，　$P(\emptyset)=0$，

(2) $0\leq P(A)\leq 1$，

(3) 餘事件的機率：$P(A^c)=1-P(A)$，

(4) 機率的加法性：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，

(5) 若 A、B 為互斥事件，則 $P(A\cap B)=0$，且 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，

(6) 單調性：若 $A\subset B$，則 $P(A)\leq P(B)$。

生活中的實例1

投擲一公正的銅板兩次，試求出現兩個正面的機率。

[解]：若以"正反"，表第一次出現正面，第二次出現反面，餘類推。因此樣本空間

Ω={正正，正反，反反，反正}，

我們可以認為這四種試驗結果有相同的可能性，因此分配每一試驗結果的機率為1/4，所以出現兩個正面的機率為1/4。

隨堂練習1

投擲一公正的骰子兩次，試求出現兩個3點的機率。

[解]：1/36。

生活中的實例2

某一醫院X光部門，連續30天記下早上九點鐘等待服務的病人人數，得下列結果：

等待人數	發生的天數
0	5
1	7
2	10
3	5
4	3

試求等待人數為1的機率為何?

[解]：我們可以假設每一天為一次試驗，重複試驗了30次，而等待人數為1，共出現了7次，所以機率為7/30。

隨堂練習2

承實例2，試求等待人數為2的機率。

[解]：1/3。

生活中的實例3

甲先生和乙先生出價買一棟房子，有兩種可能的結果：

A=他們出的價格被接受

B=他們出的價錢被拒絕

甲先生相信他們出價被接受的機率是0.7，因此甲先生設$P(A)$=0.7。乙先生相信他們出價被接受的機率為0.5，因此乙先生設$P(A)$=0.5。我們可以注意到乙先生在出價是否被接受上，較甲先生悲觀。

隨堂練習3

承實例3，在甲乙兩位個人主觀條件下，分別求出他們認為出價被拒絕的機率。

[解]:甲先生相信他們出價被拒絕的機率是0.3；乙先生相信他們出價被拒絕的機率是0.5。

生活中的實例4

一袋中有3個紅球，4個白球，5個黑球，今自袋中任取3球，試求取出3球為同色之機率。

[解]：任取3球的可能結果共有C_3^{12}=220種，所以出現每一種的機率均為1/220。因3球為同色，所以可能情形為：3球皆為紅球有C_3^3=1種，3球皆為白球有C_3^4=4種，3球皆為黑球有C_3^5=10種，故共有15種。因每一種機率皆為1/220，所以15種之機率為15/220=3/44，即取出3球為同色之機率為3/44。

隨堂練習4

承實例4，試求取出3球為不同顏色的機率。

[解]：3/11。

生活中的實例5

設A與B為樣本空間Ω中之二事件，且已知$P(A)$=0.3，$P(B)$=0.4，$P(A\cap B)$=0.1，試求

(1) $P(A\cup B)$，(2) $P(A^c\cap B)$。

[解]:

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$=0.3+0.4-0.1=0.6。

(2) $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$=0.4-0.1=0.3

隨堂練習5

在某一研究發現有30%家庭的先生和20%家庭的太太會定時收看星期日晚上的某一節目。有12%的家庭是夫婦同時收視此節目。試求夫婦中至少有一人會定時收視此節目之機率是多少?

[解]: 0.38

生活題材

1. 設921集集大地震後, 一星期內統計共發生100次餘震, 其層級(取餘震整數部分, 小數部分略去)與次數統計如下表:

層級	2級	3級	4級	5級	6級
次數	30	30	20	15	5

依此數據推測下述問題

(1) 餘震小於4級的機率。

(2) 餘震不小於5級的機率。

(3) 連續兩次平均餘震為4級的機率。

2. 設某人每天上學途中, 總共會遇到五個紅綠燈裝置, 假設該月總共上課20天, 此人記錄該月在上學途中會遇到紅燈的次數與機率如下:

次數	0	1	2	3	4	5
機率	0.05	0.15	0.20	x	0.20	0.10

依此數據試求下述問題:

(1) x之值,

(2) 遇到紅燈在四次以上的天數,

(3) 遇到三次以上紅燈之機率,

(4) 遇到兩次以下紅燈之機率。

[解]

1. (1) 0.5, (2) 0.2, (3) 0.16。

2. (1) 0.30, (2) 6天 (3) 0.6, (4) 0.4。

自我挑戰

1. 若袋中有相同樣式的黑鞋3雙，紅鞋2雙，自袋中任取四隻，若機會均等，則四隻恰有兩雙的機率為何？
2. 同時投擲三顆公正的骰子，試求下述情形之機率
   （1）三顆點數均相異，
   （2）三顆點數均相同，
   （3）出現點數和為8，
   （4）出現點數和為15。
3. 一副撲克牌共52張，試求下列情形之機率
   （1）任取兩張，一紅一黑，
   （2）任取兩張，不同號碼，
   （3）任取五張，同花色。
4. 投擲一個骰子四次，試求下述情形之機率
   （1）恰好出現1點三次，
   （2）至少出現1點三次。
5. 在春節返鄉，設甲買到對號火車票的機率為0.5，而乙是0.6，又兩人同時買到的機率是0.3。試問兩人皆未買到對號火車票的機率為何？

［解答部分］

1. $\dfrac{23}{105}$。

2. （1）$\dfrac{5}{9}$，（2）$\dfrac{1}{30}$，（3）$\dfrac{7}{72}$，（4）$\dfrac{5}{108}$。

3. （1）$\dfrac{26}{51}$，（2）$\dfrac{16}{17}$，（3）$\dfrac{33}{16660}$。

4. （1）$\dfrac{5}{324}$，（2）$\dfrac{7}{732}$。

5. 0.2。