重複組合與二項式定理

課程介紹

接下來，介紹『重複組合』，我們先看一個例子。

將4支相同的鉛筆分給甲乙兩人，試問共有幾種方法?

解這個問題，我們先用列表方式來解，很清楚可以看到甲乙二人得到的鉛筆數如下:

甲	0	1	2	3	4
乙	4	3	2	1	0

共5種。事實上此問題可以簡化為『解方程式$x+y=4$的非負整數解』的問題。我們可以

想像成有4個|，有1個+號做不盡相異物直線排列,

故共有

$$\frac{(1+4)!}{4!1!}=\frac{(2+4-1)}{4!(2-1)!}=C_4^{2+4-1}$$

種。

如下所示 。

甲	乙	想像圖示
0	4	+ | | | |
1	3	| + | | |
2	2	| | + | |
3	1	| | | + |
4	0	| | | | +

如果多了一位學生丙，則有3人要分4支鉛筆，可簡化為『解方程式$x+y+z=4$的非負整

數解』的問題，就可以想像有4個|，有2個+號做不盡相異物直線排列,

則有

$$\frac{(2+4)!}{4!2!}=\frac{(3+4-1)}{4!(3-1)!}=C_4^{3+4-1}$$

種。

推廣至有n位學生要分m支鉛筆，可簡化為『解方程式$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$的非負整數解』的問題， 就可以想像有m個|，$n-1$個+號做不盡相異物直線排列，則有

$$\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}=C_m^{n+m-1}$$

種。

我們將此問題寫成一般的形式，即所謂『重複組合』。

重複組合

設有n類不同之物品，每類皆不少於m件，由其中任取m件(相同與否均可)之組合，稱為n中取m的重複組合，以符號H_m^n來表之。其中

$$H_m^n=C_m^{n+m-1}$$

[說明]： 對於『解方程式$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$的非負整數解』的問題，其解的個數就是H_m^n。

接下來我們給出二項式定理的形式：

二項式定理

設任二實數x,y及正整數n，則

$$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}C_r^n x^{n-r}y^r$$

[說明]：考慮$(x+y)^3$之情況，可以將其視為3個$(x+y)$的連乘積，即

$$(x+y)^3=(x+y)\times(x+y)\times(x+y)\text{--(1)}$$

上式展開之結果為$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$，共有4項，分別為x^3， x^2y ， xy^2，y^3 ， 故一般項的可寫成$x^{3-k}y^k$的形式，其中$k=0,1,2,3$ ，底下我們看看各項係數是如何產生的：

x^3項之係數為(1)式等號的右邊每一項都出x，所以只有一種可能。

x^2y 項之係數為(1)式等號右邊，有兩項出 x，一項出 y，所以可能的情形有 $C_1^3=3$ 種。

xy^2 項之係數為(1)式等號右邊，有一項出 x，兩項出 y，所以可能的情形有 $C_2^3=3$ 種。

y^3 項之係數：(1)式等號右邊每一項都出 y，所有只有一種可能。

因此若將 $(x+y)^3$ 的展式寫成組合的形式為：

$$(x+y)^3=C_0^3x^3y^0+C_1^3x^2y^1+C_2^3x^1y^2+C_3^3x^0y^3 \text{。}$$

底下給一特例：

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^r \\ &= C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n\end{aligned}$$

最後，我們給出『多項式定理』的一個特例。

多項式定理之一特例

在 $(x+y+z)^n$ 展式中 $x^py^qz^r$ 之係數為 $\dfrac{n!}{p!q!r!}$，其中 $p+q+r=n$，且

$0\le p,q,r\le n$，所以

$$(x+y+z)^n=\sum_{p+q+r=n}\frac{n!}{p!q!r!}x^py^qz^r$$

生佸中的實例1

有4位學生，他們總共收藏了15套相同的紀念郵票，試問可能的情形有幾種?

[解]:可將問題轉為,解方程式 $x+y+z+w=15$ 的非負整數解之個數，所以其解共有

$$H_{15}^4=C_{15}^{18}=816,$$

因此可能情形有816種。

隨堂練習1

有一個三層的小書櫃，欲放了20本『哈利波特-神秘的魔法石』一書，試問共有幾種可能的放法?

[解]：231種。

生活中的實例2

設有相同的鉛筆5支,原子筆6支，彩色筆7支，從中任意抽出5支，試問共有幾種取法?

[解]：因每一種筆的數目都大於5，所以此為重複組合，因此可假設鉛筆被抽出 x 支，原枝筆被抽出 y 支，彩色筆抽出 z 支，則原題可簡化為『解方程式 $x+y+z=5$ 的非負整數解個數』，因此共有

$$H_5^3=C_5^7=21 ,$$

故共有21種取法。

隨堂練習2

設一袋中有紅、藍、白三種顏色的球各10個，從中抽取6個球，試問共有幾種取法?

[解]：28種。

生活中的實例3

同時投擲兩個公正且相同的骰子，試問有幾種可能的結果(花色)?

[解]：我們可以令 x_i 表骰子出現 i 的次數，其中 $i=1,2,3,4,5,6$，總共的出現次數為2。

則原題可改寫為『解方程式 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=2$ 的非負整數解之個數』，因此共有

$$H_2^6=C_2^7=21$$

故共有21種可能的結果。

隨堂練習3

5個人猜拳，試問會出現多少種結果?

[解]:21種。

生活中的實例4

試求方程式$x+y+z+w=12$之正整數解之個數。

[解]: 因為是求正整數解的個數，所以令

$$x^{'}=x-1, y^{'}=y-1,$$
$$z^{'}=z-1, w^{'}=w-1,$$

則原問題改寫為『解方程式 $x^{'}+y^{'}+z^{'}+w^{'}=8$中非負整數解之個數』。故共有

$$H_8^4=C_8^{12}=165,$$

故非負整數解共有165個。

隨堂練習4

試求方程式$x+y+z=10$之正整數解的個數。

[解]: 36個

生活中的實例5

試求 $(x^2-\dfrac{3}{x})^8$展開式中，x^7之係數。

[解]:

展開式之通項為

$$C_r^8(x^2)^{8-r}(-\frac{3}{x})^r=C_r^8(-3)^r x^{16-3r}$$

令 $16-3r=7 \Rightarrow r=3$

故x^7之係數為 $C_3^8(-3)^3=-1512$。

隨堂練習5

試求 $(x^2-\frac{3}{x})^8$展開式中，x^5之係數。

[解]:0。

生活中的實例6

試求 $(1.1)^8$ 的近似值至小數點後第二位。

[解]:

$$
\begin{aligned}
(1.1)^8 &= (1+0.1)^8 \\
&= 1+C_1^8\times 0.1+C_2^8\times 0.1^2+C_3^8\times 0.1^3 \\
&\quad +\cdots+C_8^8\times 0.1^8 \\
&= 1+0.8+28\times 0.01+56\times 0.01+\cdots \\
&\doteq 1.8+0.28+0.056=2.14
\end{aligned}
$$

隨堂練習6

試求 $(1.02)^{10}$ 的近似值至小數點後第二位。

[解]:1.22。

生活中的實例7

試求 $(x-2y+3z)^7$ 展開式中, $x^3y^2z^2$ 項的係數

[解]:

$$(-2)^2\cdot 3^2\cdot\frac{7!}{3!2!2!}=7560$$ 。

隨堂練習7

試求 $(2x-3y+z)^7$ 展開式中, $x^3y^2z^2$ 項的係數。

[解]:

$$2^3\cdot(-3)^2\cdot\frac{7!}{3!2!2!}=15120$$

生活題材

1. 某公司招待員工10男5女去旅遊, 今住進某旅館之客房, 各客房之價目表如下

房間種類	價格	房間數

單人房	2500元	10
雙人房	3500元	5
三人房	5000元	5

該旅館亦提供每間可加一張床之服務，費用為600元。 若男女不同房，且女生不住單人房，試問

（1）共有幾種分配床位的方式。

（2）如何安排房間及床位，該公司之總花費才最少?

自我挑戰

1. 方程式 $xyz=144$ 的正整數解有幾組?

2. 由1至1000000間的整數中，數字和為13的有多少個?

3. 設 $x+y+z+w=12$，試求 x,y,z,u 均為正奇數之解的個數。

4. 設 n 為正整數，若 $30H_3^{n-1}+5P_4^{n+1}=72C_3^{n+1}$。 試求 n 值。

5. 試化簡 $(C_0^n)^2+(C_1^n)^2+(C_2^n)^2+\cdots+(C_n^n)^2$。

6. 試化簡 $C_0^mC_l^n+C_1^mC_{l-1}^n+\cdots+C_l^mC_0^n$。

7. 試求 11^{15} 除以1000的餘數。

8. 試求 $(1+x+x^2+x^3)^6$ 的展開式中 x^6 項的係數。

［解答部分］

1. 90組。

2. 8232個。

3. 35。

4. 4。

5. C_n^{2n}。

6. C_r^{m+n}
7. 651。
8. 336。