

乘法原理與加法原理



課程介紹

在說明乘法原理之前，我們首先考慮下述問題：

設有三名男生(甲、乙、丙)及三名女生(丁、戊、己)參加聯誼活動，某遊戲需男女配對一同進行，

試問共有幾種不同的配對方式？

首先，我們先將可能的配對方式一一列出：

甲丁、甲戊、甲己、乙丁、乙戊、乙己、丙丁、丙戊、丙己

可以發現共有9種配對方式。但若人數太多，一一列出可能很繁雜，因此我們用另一方式來解這個問題。我們將此問題分成兩個步驟：第一個步驟：先從3名男生中選一名，共有3種選法，第二個步驟由3名女生中選一名，也有3種選法。因第一個步驟中每選一名男生，都有3名女生可供選擇，故共有 $3 \times 3 = 9$ 種選法。

如果將上面配對過程看做完成某一件事的過程，將選擇男生看做完成此事的第一個步驟，而完成將選擇女生看做完成此事的第二步驟，並且分別將3名男生，與3名女生看成完成第一步有 m_1 種方法，

第二步有 m_2 種方法，則完成這件事共有 $m_1 \times m_2$ 種方法。事實上，我們可以推廣至更一般的形式，

即所謂的乘法原理。

乘法原理

如果完成某件事情可依序分成 k 個步驟，而第 $j(j = 1, 2, \dots, k)$ 個步驟有 m_j 種方法可以完成它，

那麼完成這件事的方法共有 $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ 種。

有了乘法原理後，接下來我們看看下面問題：

假設某教室內有 n 張椅子，有 n 位學生依序選擇座位，試問共有幾種不同的選法？

解這個問題可分 n 個步驟，

第一步：第一位學生先從 n 張椅子任選一張，共有 n 種選法，

第二步：第二位學生從剩下的 $n - 1$ 張椅子任選一張，共有 $n - 1$ 種選法，

第三步：第三位學生從剩下的 $n - 2$ 張椅子任選一張，共有 $n - 2$ 種選法，

至第 $n - 1$ 步：第 $n - 1$ 只能剩下的2張椅子任選一張，共有2種選法，

至第 n 步：第 n 位學生只能選剩下的一張椅子，故只有1種選法。

由乘法原理知：共有 $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 種選法。

我們通常會將 $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 用 $n!$ 來表示。讀做" n 階乘"。即

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

其中 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ，通常會將 $0!$ 定義為1。

底下是一些常用的階乘值。

$1! = 1,$	$2! = 2 \times 1 = 2,$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 2! = 6,$	$4! = 4 \times 3! = 24,$
$5! = 5 \times 4! = 120,$	$6! = 6 \times 5! = 720,$
$7! = 7 \times 6! = 5040,$	$8! = 8 \times 7! = 40320,$
$9! = 9 \times 8! = 362880,$	$10! = 10 \times 9! = 3628800。$

除了乘法原理外，尚有一重要的加法原理：

加法原理

如果完成某件事的方法可區分成 k 個類別，而第 $j(j = 1, 2, \cdots, k)$ 個類別有 m_j 種方法，且每個

類別互不相干，那麼完成這件事的方法共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 種。

例如，從甲地到乙地有飛機、火車與巴士等三種交通工具可到達，其中飛機每天有3班，火車每天

有15班，巴士每天25班，若A先生欲從甲地至乙地，很明顯地，可看出此問題的A先生只能選擇一種交

通工具的某個班次，故共有 $3+15+25=43$ 個交通班次可選擇。



生活中的實例1

某兔穴有進出口四處，一兔由不同一口進出的方法共有幾種？

[解]：第一個步驟：進→4種選法。

第二個步驟：出→3種選法。

由乘法原理知，共有 $4 \times 3 = 12$ 種方法。

生活中的實例2

假設某教室有四張椅子，甲、乙、丙、丁四位學生依序選擇座位，試問共有幾種不同的選法？

[解]：

第一步：甲生從四張椅子任選一張 \Rightarrow 4種選法；

第二步：在甲生選定後，乙生從剩下三張椅子任選一張 \Rightarrow 3種選法；

第三步：在甲乙二人選定後，丙生從剩下二張椅子任選一張 \Rightarrow 2種選法；

第四步：在甲乙丙三人選定後，丁生只能選擇剩下的一張椅子 \Rightarrow 1種選法；

由乘法原理知，共有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 種選法。

隨堂練習1

某速食店舉辦週年慶，提供主餐5種，副餐4種，飲料6種，任選主餐、副餐與飲料各一種，特價70元，

試問顧客有多少種選擇的方式？

[解]：120種。

隨堂練習2

甲、乙兩人在排成一系列的8個座位中相鄰而坐，試問共幾種不同的坐法？

[解]：14種。

生活中的實例3

試求下列各值。

$$(1) \frac{5!}{3!}, (2) \frac{3! \times 4!}{1! + 2!}.$$

[解]:

$$(1) \text{原式} = \frac{120}{6} = 20.$$

$$(2) \text{原式} = \frac{6 \times 24}{1 + 2} = 48.$$

生活中的實例4

假設某期刊室內，有5種週刊，4種月刊，3種季刊供民眾閱讀，今甲生從這些期刊中任選一種，試問共有幾種不同的選法。

[解]: 因總共期刊數有 $5+4+3=12$ 種，所以甲生從這12種中選一種，故共有12種不同的選法。

隨堂練習3

試求 $\frac{12! \times 8!}{10! \times 6!}$ 之值。

[解]: 7392

隨堂練習4

某校想了解學生對法律常識的認識，想從該校高三有20班，高二有19班，高一有18班，任選一班進行

法律常識測驗，試問共有幾種不同的選法？

[解]: 57種。



- 今有一列火車，共有十節車廂，每節車廂有52個座位，每排4個座位，共13排。每節車廂的座位號碼由1至52號編排。其中1號靠左窗，2號靠右窗，3號靠走道左側，4號靠走道右側，餘此類推。今有甲、乙、丙三位學生分別購買一張火車票，若三人皆坐在第二節車廂的同一行，且甲生的座位號碼為42，試問

- (1) 此三人座位是靠左窗、靠右窗、靠走道左側還是靠走道右側？

- (2) 此三人共有多少種不同的坐法？
- (3) 若此三人前後緊鄰而坐，有幾種不同的坐法？
- (4) 若三人之座位號碼和為3的倍數，共有多少種不同的坐法？
- (5) 若三人之座位號碼和為90，共有多少種不同的坐法？

2. 某高中舉行班際盃籃球賽，若有24個班級參與比賽，將其分成4組，每組6個班，每組再分兩小組(各三班)，進行單淘汰比賽(每小組首輪有一班輪空)，產生分組冠軍後，4隊再進行單循環比賽，以決定前四名名次。試問

- (1) 共需安排多少場比賽？
- (2) 若該校共有4個球場，每天只有二個時段能安排賽程，且每班每天最多賽一場，則學校最少需安排多少天的賽程？

[解答]

1. (1) 靠右窗, (2) 132種, (3) 2種, (3) 46種, (4) 10種。
2. (1) 26場, (2) 6天。



1. 試求下述各值。

(1) $8! + 3! - 5!$, (2) $\frac{(10!)^2 - (8!)^2}{8! \times 8099}$ 。

2. 設由山腳至山頂有三條山路，甲、乙兩人上山後返回山腳。

- (1) 若二人上山可同路，下山不同路，則有幾種方法？
- (2) 若兩人上山不同路，下山亦不同路，則有幾種方法？

3. 將100元換成5元、10元或50元銅板，共有幾種換法？

4. 將42個彈珠分成三份，每份個數各別為 a 、 b 、 c

- (1) 若 a 、 b 、 c 成等差數列，則有幾種情形？
- (2) 若 a 、 b 、 c 成等比數列且公比為整數，則有幾種情形？

5. 設有相同的紅、白、黑色襪子各1雙，及相同的箱子3個，若限制每個箱子各放兩隻不同顏色

的襪子，則有幾種不同的放法？

6. 每次用20根相同的火柴圍成一個三角形，共可圍成多少個不全等的三角形。

7. 某國自用小汽車的牌照號碼，前兩位為大寫英文字母，後四位為數字，例如 **AB - 0950**,

若最後一位數字不能為4，且後四位數字沒有0000這個號碼，那麼該國可能有的自用小汽車的牌照號碼有多少個？

8. 有趣的階乘：

$$1 = 1!, 2 = 2!, 40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!,$$

只要一數等於其各位數字之階乘和，便稱此數為"階乘數"。總共只有四個階乘數，試找最後一個(提示：位數不超過3位)。

[解答]

1. (1) 40206, (2) 40320。

2. (1) 54, (2) 36。

3. 18。

4. (1) 27, (2) 3。

5. 6。

6. 8種。

7. $26 \times 26 \times (9000 - 1)$ 種。

8. 145。