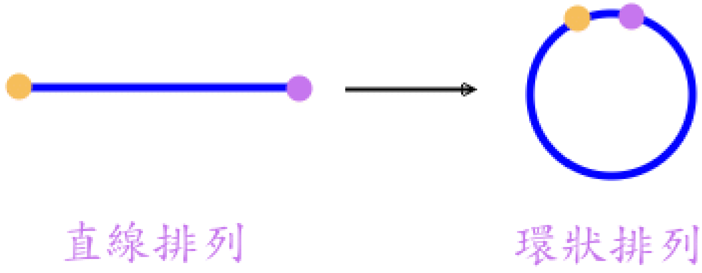
環狀排列

課程介紹

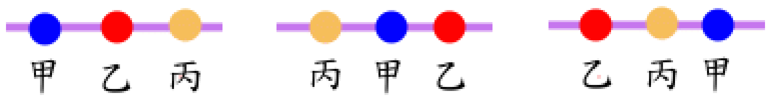
在前面兩單元，我們介紹了直線排列，若將直線的首尾相接，變成一個圓，稱之為"環狀"，如下圖：



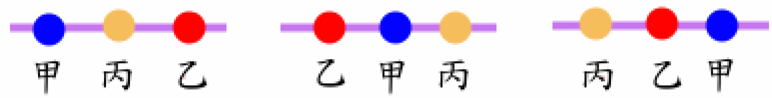
環狀排列：又稱圓排列，是將事物沿著一圓周來作排列，只考慮事物的相對位置，而不計較各物件所在的實際位置。 此排列可旋轉，但不可翻轉。底下先看一個問題：

甲乙丙三人圍一圓桌而坐，共有幾種坐法？

解這個問題，我們先考慮甲乙丙三人做直線排列的狀況：

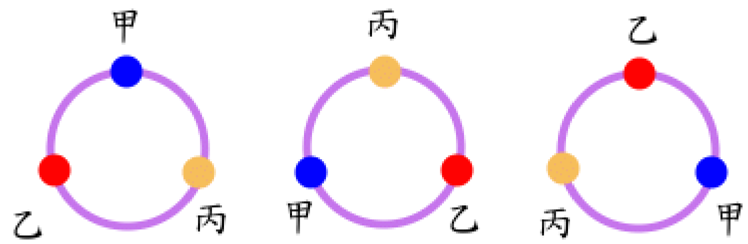


(圖1)



(圖2)

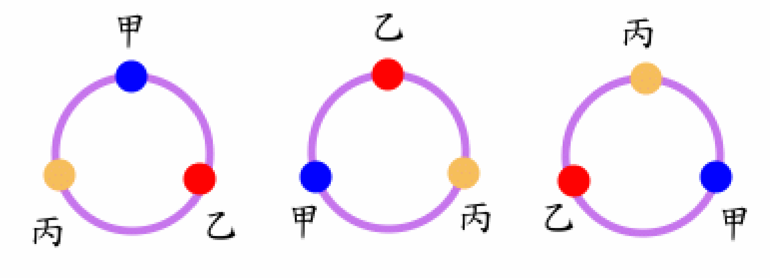
共計6種情形。若將(圖1)的直線排列首尾相接，成為一圈，如(圖3)



（圖3）

我們可以發現(圖3)的中間與右邊兩圓，都是左邊的圓逆時針旋轉的結果，所以應屬於同一類。

同理，若將(圖2)的直線排列首尾相接，成為一圓，如(圖4)，也可發現此三個也屬於同一類。



故共有 $\frac{3!}{3}=(3-1)!=2$種排列方式。

所以若n個不同事物在做環狀排列時，先求其直線排列，因每n個排列方式中，在環狀排列均視為同

一種。故環狀排列數為 直線排列數/排列之個數。底下我們給出『環狀排列』的公式：

環狀排列

（1） n 個不同物件的環狀排列數為 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

（2） n 個不同物件中，任取m 個的環狀排列數為 $\frac{P_m^n}{m}$。

接下來我們介紹『項鍊排列』，因項鍊沒有正反面之分，所以項鍊排列數就是環狀排列數除以2。

生活中的實例1

五對夫婦圍圓桌而坐，試問男女相間坐的方法數為何？

[解]:

先直線排列：$5! \times 5! \times 2$

故環狀排列數為 $\dfrac{5! \times 5! \times 2}{10} = 4! \times 5! = 2880$。

生活中的實例2

五對夫婦圍圓桌而坐，試問每對夫妻相鄰而坐的方法數為何?

[解]:

先直線排列：$5! \times 2^5$

故環狀排列數為 $\dfrac{5! \times 2^5}{5} = 4! \times 2^5$。

隨堂練習1

有三男三女圍一圓桌相隔而坐, 試問共有幾種不同的坐法。

[解]：12種。

隨堂練習2

甲、乙、丙、丁、戊、己六人圍一圓桌而坐, 若甲、乙、丙三人相鄰而坐，試問共有幾種不同的坐法。

[解]：36種。

生活中的實例3

有8個不同顏色的珠子，全部串成一項圈，試問其方法數有多少種?

[解]:

先將其想像成8個不同的物品做環狀排列，故其方法數有 $8!/8 = 7! = 5040$,

其次因項鍊沒有正反面之分，故須除以2，所以共有 $5040/2 = 2520$種。

隨堂練習3

有8個不同顏色的珠子，取6個串成一項鍊，試問其方法數有多少種？

[解]:1680種。

自我挑戰

1. 四對夫妻圍圓桌而坐，下列各情況，各有幾種坐法?

(1) 男女相隔且夫妻相鄰,

(2) 每對夫妻相對,

(3) 恰有三對夫妻相鄰,

(4) 夫妻不相鄰且男女相間隔。

1. (1) 12, (2) 48, (3) 384, (4) 12。