

期望值



課程介紹

對一隨機現象，我們常想粗略地知道其值究竟多大？期望值(expectation, 或稱expected value, mean)，就是常被拿來扮演這種以一單一的值，來代表一隨機現象中之變數大小的角色。

設 X 為一離散型的隨機變數，且可能取值為 x_1, x_2, \dots, x_k ，則 X 之期望值定義為

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots + x_k P(X = x_k) = \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i),$$

其中 $P(X = x_i)$ 表隨機變數 X 取值在 x_i 之機率值，對 $i = 1, 2, \dots, k$ 。

例如，投擲一公正的骰子，也就是1, 2, 3, 4, 5, 6每個面出現的機率皆為1/6，令隨機變數 X 表所出現之點數，則 $P(X = x_i) = 1/6$ ， $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，因此 X 之期望值為

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5。$$

對一隨機變數而言，因無法掌握隨機的量之大小，我們才想要有一代表值，而期望值就是常被拿來

當做隨機變數之代表值，期望值像是隨機變數分佈的一核心，隨機變數的可能值，散佈在期望值的左右。其他亦常被拿來當做隨機變數之代表值的尚有中位數(median)及眾數(mode)。目前我們只討論期望值。



生活中的實例1

某商人在夜市擺一種遊戲，袋中有紅球5個，白球3個，藍球2個，抽獎者自袋中抽出一球，若抽中紅球可得10元，抽中白球可得100元，抽中藍球可得200元，試問抽獎者可獲獎金的期望值。

[解]：令隨機變數 X = 抽獎者獲得的獎金，所以取值為10, 100, 200。則

$P(X = 10)$: 表抽中紅球的事件之機率 = $5/10 = 0.5$,

$P(X = 100)$: 表抽中白球的事件之機率 $=3/10=0.3$,

$P(X = 200)$: 表抽中黑球的事件之機率 $=2/10=0.2$,

因此 X 之期望值為

$$E(X) = 10 \cdot 0.5 + 100 \cdot 0.3 + 200 \cdot 0.2 = 75,$$

所以抽獎者可獲得獎金的期望值為75元

隨堂練習1

投擲一公正的骰子一次，若出現點數為偶數，則可獲得與點數相同的錢數，若出現點數為奇數，須賠與點數相同的錢數，試求可獲得錢數的期望值。

[解]: 0.5元

生活中的實例2

甲、乙二人玩一遊戲，由甲先付給乙10元，然後自一袋裝有2白球及3黑球之袋中抽取一球，若取出白球，則乙付給甲25元，否則乙不付給甲任何錢。試求甲所淨得的錢之期望值。

[解]: 因抽出一球，不是白球就是黑球，所以樣本空間

$$\Omega = \{\text{白球}, \text{黑球}\}。$$

當甲抽出白球時，甲自乙那邊獲得25元，扣去原先給乙的10元，則甲淨得15元；

當甲抽出黑球時，甲自乙那邊獲得0元，扣去原先給乙的10元，則甲淨得-10元(即虧10元)。

令隨機變數 X = 甲所淨得的錢。則 X 取值為15, -10, 則

$P(X = 15)$: 表甲抽出白球事件之機率 $=2/5=0.4$,

$P(X = -10)$: 表甲抽出黑球事件之機率 $=3/5=0.6$,

因此 X 之期望值為

$$E(X) = 15 \cdot 0.4 + (-10) \cdot 0.6 = 0$$

所以甲所淨得的錢之期望值為0，表示此遊戲對甲乙雙方均是公平的遊戲。

隨堂練習2

承上例，若把袋中的球換成4個白球與1個黑球，試求甲所淨得的錢之期望值。

[解]: 10元。

生活中的實例3

有五個選項的單選題，每題答對給8分，則答錯應倒扣幾分才公平。

[解]: 令隨機變數 X = 所得之分數，並設答錯得 $-y$ 分(即倒扣 y 分)，則

$P(X = 8)$: 表答對的事件之機率 $= 1/5 = 0.2$,

$P(X = -y)$: 表答錯的事件之機率 $= 4/5 = 0.8$,

因此， X 之期望值要等於0，才合理，所以

$$E(X) = 8 \cdot 0.2 + (-y) \cdot 0.8 = 0$$

可得 $y = 2$ ，所以要倒扣2分才合理。

隨堂練習3

有5個選擇像的複選題(至少要選一個)，每題答對給12分，則答錯應倒扣幾分才合理。

[解]: 0.4分



1. 某地攤有一遊戲，玩一次要付10元。攤主放8個白棋子及8個黑棋子在一袋中。玩者自袋中摸出五個棋子。若拿到5個白的可得200元，拿到4個白的可得20元，拿到3個白的可得5元。試問您是否願意玩此遊戲？

2. 設生男生女的機率均為0.5。某國由於國情的關係，每一家庭皆希望有男孩，但政府為抑制人口的成長，規定每一家庭只能有一男孩，若前幾胎皆為女孩，則可繼續生，直至生出一男孩，便須停止。問這種政策執行的結果，是否會造成社會上女多於男？並給出理由。

[解答部分]:

1. 不願意。因期望值小於10。
2. 不見得，因平均而言，每個家庭生兩胎，會有一男一女。



1. 五個骰子投擲一次，若五個骰子同點，則可得1200元，若恰四個骰子同點，則可得600元，則投擲一次之期望值為何？
2. 投擲一公正的硬幣三次，每出現一個正面得5元，一個反面賠2元，則所得總額之期望值為何？
3. 設某人站在數線原點位置上擲一顆骰子，得1點或2點朝正方向前進一單位，得其餘點數，朝負方向前進一單位。此人連擲四次骰子，求此人所在位置之坐標期望值為何？
4. 某人擲二個公正的骰子，若擲出點數之和為7時，可得200元，並得繼續投擲的權利，直到未擲出點數之和為7才停止，試求此人所得之期望值。

[解答部分]:

1. $25/2$ 。
2. $9/2$ 。
3. $-4/3$ 。
4. 40元。