獨 立 性

課程介紹

接下來我們來看獨立性(independence)。 在機率論裡，獨立是一很重要的概念。 不過這種獨立的概念，是所謂統計的獨立(statistically independent)， 或稱隨機的獨立(stochastically independent)，與日常生活裡的主權獨立，經濟獨立中的"獨立"意義並不相同。

若一事件 A 之發生，對事件 B 之發生的機率並沒有影響。即

$$P(B|A) = P(B), \text{ ---------------------------------(1)}$$

則我們說 A 與 B 相互獨立(mutually independent， 簡稱獨立)。此處需要求 $P(A) > 0$。

再由先前介紹的條件機率知

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A), \text{ --------------------------(2)}$$

因此，由(1)式與(2)式可得

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ 。----------------------------(3)}$$

(3)式對 $P(A)$ 或 $P(B)$ 為0時仍然成立(因此時(3)式左、右均為0)。所以我們就常以(3)式當做 A 與 B 獨立的條件。採用(3)式的好處是將二事件 A 與 B 對稱地對待，且較易推廣到超過兩個事件獨立的情況。

若要計算二獨立事件交集的機率，我們只需將二事件個別的機率相乘即可。若要決定 A 與 B 是否為獨立，只要驗證 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 是否成立，若成立，則 A 與 B 獨立，否則 A 與 B 相依(dependent)。

當事件 A 與 B 獨立時，由 A 之發生，對事件 B 得不到任何推論(inference) 。因此直觀上

A 與 B 獨立，會導致 A^c 與 B 獨立。這是正確的，其推導如下：

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(B)P(A^c) \end{aligned}$$

事實上不難看出，A與B^c、A^c與B^c也都獨立。

最後，我們來看三個事件的獨立要如何定義？

設 A，B，C為樣本空間中的三事件，若滿足

（1） A，B，C兩兩獨立，即

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C),$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

（2） $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C),$

則我們稱A，B，C三事件相互獨立(仍簡稱獨立)。

生活中的實例1

投擲一公正的骰子一次，令A表出現偶數點的事件，B表出現3點或6點的事件。試問A與B是否獨立?

[解]：A={2,4,6}，B={3,6}，$A \cap B$={6}，所以

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A)P(B),$$

所以事件A與B獨立。

隨堂練習1

投擲一骰子二次，令A表第一次為4點的事件，B表第二次為3或6點的事件。試問A與B是否

獨立。

[解]:獨立。

生活中的實例2

設A, B為樣本空間Ω之二事件，若$P(A)=0.4$, $P(A\cup B)=0.7$, $P(B)=x$,

試求滿足下述條件之x之值。

(1) A與B為互斥事件,

(2) A與B為獨立事件。

[解]:

(1) 因A與B為互斥事件，所以 $A\cap B=\emptyset$, 且$P(\emptyset)=0$, 故

$$\begin{aligned} 0 &= P(A\cap B) \\ &= P(A\cup B)-P(A)-P(B) \\ &= 0.7-0.4-x \\ &= 0.3-x \end{aligned}$$

所以$x=0.3$。

(2) 因A與B為獨立事件，故$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ，因此可得

$$\begin{aligned} & P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ \Rightarrow\ & P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B) \\ \Rightarrow\ & 0.7=0.4+x-0.4x \\ \Rightarrow\ & 0.6x=0.3 \\ \Rightarrow\ & x=0.5 \end{aligned}$$

隨堂練習2

甲乙二人平常射擊之命中率分別為0.5, 0.6, 且互不影響，今有一鳥飛入射程內,

二人同時各對他發射一槍，求此鳥被命中之機率為何?

[解]: 0.8。

生活中的實例3

某賣場經理根據過去經驗知道，有80%的顧客在結帳時會使用信用卡，則連續三位顧客皆使用信用卡的機率為何?

[解]：在沒有其他已知的條件下，我們假設此三位顧客使用信用卡的事件為獨立似不為過。因此三人皆使用信用卡的機率為0.8×0.8×0.8=0.512。

隨堂練習3

投擲一公正銅板三次，令 A 表第一次出現正面的事件，B 表第二次出現正面的事件，C 表第三次出現反面的事件，試問 A， B， C 三事件是否相互獨立。

[解]：A， B， C 三事件相互獨立。

生活題材

1. 在梅莉史翠普(Meryl streep)主演的越戰獵鹿人(The Deer Hunter，1978年奧斯卡金像獎最佳影片)那部電影裡，有一描述虐待戰俘的方法。在一可裝6發子彈的左輪手槍(revolver)裡，只放一顆子彈，隨機地一轉後，要二戰俘輪流用手槍向自己的頭部發射，直到一名戰俘中槍，另一名戰俘才逃過一劫。這就是所謂俄羅斯輪盤(Russian roulette)的遊戲。試問

(1) 先發射者是否較不利?

(2) 若改為放兩顆子彈，結果有何不同?

[解答部分]

1. (1) 無論先發射或後發射死亡機率均為0.5。

   (2) 對先發射者較不利。

自我挑戰

1. 某一團體中有4位大一男生，6位大一女生，6 位大二男生，及 x 位大二女生。若自此團體中任取一位學生，其性別與年級獨立，試問此時 x 為何值?

2. 投擲一公正的骰子一次，令 A 表得到偶數， B 表得到奇數， C 表得到7點，試問此三事件是否獨立，為什麼?

3. 投擲一公正的骰子二次，令 A 表第一次得到奇數， B 表第二次得到奇數， C 表兩次之和為奇數。試問此三事件是否獨立，為什麼?

4. 有一道數學題目，甲生能解出之機率為0.5，乙生能解出之機率為0.3，若甲、乙二人同時解此道題目且互不影響，試求下述情況之機率:

   （1）甲、乙二人均解出，

   （2）甲、乙二人恰有一人解出，

   （3）甲、乙二人均未解出，

   （4）此題被解出。

5. 甲乙丙三人平常射擊之命中率分別為0.5，0.6，0.7，且互不影響，今有一鳥飛入射程內，三人同時各對它發射一槍，求此鳥被命中之機率為何?

［解答部分］

1. 9。

2. 不獨立，因 A 與 B 不獨立。

3. 不獨立。

4. （1）0.15，（2)0.5，（3）0.35，（4）0.65。

5. 0.94。