條件機率

課程介紹

在數學裡給定某個數是2，它就一直是2。 但在機率裡，某事件的機率是有可能因情況而變。 這本來是不奇怪的，但因大部分的人受數學的薰陶較久，而數學裡通常是處理"不變"的問題，所以在學習機率時，看到機率值居然會改變，便不易理解。 如假設生男生女的機率各為0.5。 則隨機抽取一個學生會是男或女的機率也就大約是0.5。但若知此學生是高雄女中的學生，則會是女生的機率就是1了，因高雄女中沒有收男學生。 由於獲得資訊，機率隨之而變，其實是合理的，否則就失去收集資訊的目的。

若 A， B 為樣本空間 Ω 中二事件，且 $P(B)>0$。則在給定 B 發生之下， A 之條件機率，以 $P(A|B)$ 表之，定義為

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}。 \quad \text{-----------------------------(1)}$$

在上述條件機率的定義中， B 成為新的樣本空間：$P(B|B)=1$。也就是原先的樣本空間 Ω 修正為 B。 所有事件發生之機率，都要先將其針對與 B 的關係做修正。 例如，若 A 與 B 為互斥事件，且 $P(B)>0$，則因 $P(A\cap B)=0$，故 $P(A|B)=0$；若 $P(A)$ 亦為正，則此時亦有 $P(B|A)=0$。

條件機率也可用來求非條件下的機率。由(1)式得

$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)。\text{-------------------------(2)}$$

故若知道 $P(A|B)$ 及 $P(B)$。 則可得到 $P(A\cap B)$。當然亦有

$$P(A\cap B)=P(B|A)P(A), \quad \text{-------------------------(3)}$$

只要 $P(A)>0$。結合(2)式與(3)式，得

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$ 。-----------------------------(4)

今後即使不特別聲明，上式要成立就隱含著 $P(A)$ 及 $P(B)$ 皆為正。

(4)式為貝氏定理(Baye's Rule)之一特例，這是英國牧師貝斯(Bayes, 1702-1761)所首先提出，因而命名。 不過也有人認為法國的大數學家拉普拉士(Laplace, 1749-1827)才是第一位明確給出此定理者，所以應稱為拉普拉士公式(Laplace's Formula)。

我們已知道 $P(A\cap B)=P(B|A)P(A)$，若樣本空間 Ω 中，還有一個事件 C, 那

$P(A\cap B\cap C)$ 會有什麼樣的形式? 看看底下的推導:

$$\begin{aligned} P(A\cap B\cap C) &= P((A\cap B)\cap C) \\ &= P(C|A\cap B)P(A\cap B) \\ &= P(C|A\cap B)P(B|A)P(A) \\ &= P(A)P(B|A)P(C|A\cap B) \end{aligned}$$ 。

似乎有點規律。 若樣本空間 Ω 中，再加一個事件 D，不難看出 $P(A\cap B\cap C\cap D)$ 有下列形式

$$P(A\cap B\cap C\cap D)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)P(D|A\cap B\cap C)$$ 。

事實上，我們可以給出更一般的形式，設 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 為樣本空間 Ω 中的 r 個事件，且

$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_r)>0$, 則

$$\begin{aligned} &P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_r) \\ &=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_r|A_1\cap A_2\cap\cdots A_{r-1}) \end{aligned}$$

此即條件機率的乘法性質。除此之外，條件機率還有一些基本性質，我們分別列於下:

設 A, B, C 為樣本空間 Ω 中的任意三事件，且設 $P(C)>0$，則有

(1) $P(\emptyset|C)=0$, $P(C|C)=1$,

(2) $0\le P(A|C)\le 1$,

(3) $P(A^c|C) = 1 - P(A|C)$,

(4) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$,

(5) 若 $A \subset B$, 則 $P(A|C) \leq P(B|C)$。

先前我們已給出貝氏定理之一特例, 現在我們給出一般的形式:

設 $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 為樣本空間 Ω 中之一分割(所謂分割就是 $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$,

且 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r = \Omega$)。 則對任意 $i \geq 1$ 及任一事件 B, 只要 $P(B) > 0$,

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{r} P(B|A_j)P(A_j)}。$$

例如, A_1 , A_2 為樣本空間 Ω 中之一分割, 在給定一事件 B, 且 $P(B) > 0$, 則

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}。$$

生活中的實例1

假設生男生女的機率相等。某家庭有兩個小孩, 試問

(1) 已知老大為男孩, 求老二為男孩的機率;

(2) 已知有一男孩之下, 求兩個小孩均為男孩的機率。

[解]: 令 A 表老大是男孩的事件, B 表老二是男孩的事件, 所以

$A \cap B$ 表兩個小孩都是男孩的機率,

$A \cup B$ 表至少有一小孩為男孩的機率,

故

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4}。$$

因此

（1）已知老大為男孩，老二為男孩的機率為

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}。$$

（2）已知有一男孩之下，兩個小孩均為男孩的機率為

$$P(A\cap B|A\cup B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}。$$

隨堂練習1

投擲一公正的硬幣四次，令A表第一次為正面的事件，B表四次中至少出現三次正面的事件，試求$P(B|A)$及$P(A|B)$。

[解]：$P(B|A)$=0.5，$P(A|B)$=0.8。

生活中的實例2

將$aabbcd$排成一列，令A表b排末的事件，B表兩個a相鄰的事件，試求$P(B|A)$。

[解]:

$$P(A)=\frac{\frac{5!}{2!}}{\frac{6!}{2!\times 2!}}=\frac{60}{180}=\frac{1}{3},$$

因$A\cap B$表兩個a相鄰且b排末的事件，所以

$$P(A\cap B)=\frac{4!}{180}=\frac{2}{15},$$

故

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2/15}{1/3}=\frac{2}{5}$$

隨堂練習2

承實例2，試求$P(A|B)$之值。

[解]:0.4。

生活中的實例3

甲生打算投擲一公正的銅板來決定要選修的課，若出現正面則選修日文課，若出現反面則選修德文課。從過去之資料得知選日文課有0.6的機率會得到90分以上，而選德文課只有0.4的機率會得到90分以上。試求甲生選修日文課會得到90分以上的機率為何?

[**解**]: 令

A表示選修日文課的事件，

B 表示所選的課得到90分以上的事件，所以

$A \cap B$表選日文課得到90分以上的事件，

故

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0.6 \times 0.5 = 0.3。$$

因此甲生選修日文課會得到90分以上的機率為0.3。

隨堂練習3

承實例3，試求甲生選修德文課會得到90分以上的機率為何?

[解]:0.2。

生活中的實例4

A袋中有紅球5個，白球3個，B袋中有紅球3個，白球2個，先隨機地選出一袋，再自選出的袋中取出一球，試求取出白球的機率。

[**解**]:

令W表取出白球，則

$$P(W) = P(A)P(W|A) + P(B)P(W|B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{31}{80}$$

隨堂練習4

承實例4，求取出的白球為來自A袋的條件機率。

[解]:15/31。

生活題材

1. 衛生局至某大學免費檢驗某疾病，此檢驗之可靠度為90%。 即若真有病，則有0.9之機率呈正反應(假設檢驗只有正負反應)；若無病亦有0.05的機率呈正反應。 過去的資料顯示平均每100人有一人會有此病。此檢驗迅速且無害，若檢驗呈正反應，則"須"至醫院住院一週做進一步檢查。 試問你是否願意接受此檢驗?

2. 設甲，乙二人在賭博，甲投擲二公正銅板且不讓乙看到結果。此時丙從旁經過，忍不住說他看見有一銅板朝上。甲聞言對丙說:你破壞了我們的賭局，我的朋友乙正要猜兩個銅板朝上的面是相同還是相異。試問丙提供的資訊是否對乙有幫助?

[解]:

1. 不願意。

2. 有幫助。

自我挑戰

1. 擲出兩顆骰子，出現點數和為6時，求其中一顆骰子為2點的機率

2. 1-9號的卡片各一張，從中任取2張發現點數和為偶數，求此2張均為奇數的機率。

3. 設 A，B 為樣本空間 Ω 中的二事件，若 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B^c)=\dfrac{3}{5}$，

   $P(A\cup B)=\dfrac{9}{20}$，試求 $P(B^c|A)$ 之值。

4. 某生參加考試，題目均為選擇題，每題有5個選擇，其中70%的題目該生會做答，而對於不會的題目，該生會任選一個答案

   (1) 求任一題目答對的機率。

   (2) 某一題答對，求此題是猜中的機率。

5. 投擲一公正的銅板10次，且得到5個正面，求下述二條件機率

   (1) 第一次得到正面。

   (2) 首五次恰得到3個正面。

［解答部分］

1. $\frac{2}{5}$。

2. $\frac{5}{8}$。

3. $\frac{1}{5}$。

4. （1）$\frac{19}{25}$，（2）$\frac{3}{38}$。

5. （1）$\frac{1}{2}$，（2）$\frac{25}{63}$。