樣本空間與事件

課程介紹

我們要探討的機率通常是由一真正或假想的試驗而來，而對於每一次的試驗，我們往往事先不知道試驗結果會如何， 如投擲一公正的銅板一次，我們事先不知試驗結果會出現正面還是反面。 對於這種每次可能產生不一定相同的試驗結果，我們稱之為『隨機試驗』(random experiment)。下面均為隨機試驗：

(1) 投擲一公正的骰子10次。

(2) 不斷地擲一公正的骰子，每次記錄其出現的點數，直到累積點數之和超過50才停止。

(3) 從一副52張撲克牌中，任意抽取5張。

一隨機試驗，其所有可能的結果 (outcome)之集合，稱為樣本空間(sample space)，通常以大寫希臘字母Ω來表示樣本空間。如，丟一銅板一次，觀測所得的結果，則樣本空間包含正面與反面，即

$$\Omega=\{正面，反面\}。$$

又如，投擲一公正的骰子一次，觀察所得的點數，則

$$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

若觀測某班學生數學段考成績，假設成績皆為整數，且最低為0分，最高為100分，則Ω可取0至100的整數集合，即

$$\Omega=\{0,1,2,\ldots,100\}。$$

如果是觀測某城市一年之車禍次數，則 Ω可取非負整數的集合，即

$$\Omega=\{0,1,2,\ldots\}。$$

對於樣本空間Ω中的每一個元素，便稱為一樣本點(sample point)，通常以 Ω 的小寫ω表之。

目前我們將只針對樣本空間Ω有限集合或無限集合且與自然數有一對一的對應，進行討論。

一旦樣本空間決定了，便可以考慮事件(event)。樣本空間 Ω的任何一子集合皆為事件，亦即樣

本點所構成之集合。通常以大寫英文字母A、B⋯等來表示一事件。如，投擲一公正的骰子一次，觀察其出現之點數，則樣本空間 Ω={1,2,3,4,5,6}，若令A表點數大於3之事件，則A={4,5,6}；同理，若令B表得到偶數之事件，則B={2,4,6}。當樣本空間有n個樣本點，可形成2^n個子集合(因每個樣本點均有"取"與"不取"兩種情況)，因此就有2^n個事件。

一事件可依包含樣本點多寡，區分為

(1) 簡單事件(simple event)：又稱基本事件，表事件只包含一個樣本點

(2) 複合事件(composite event)：事件含有兩個或兩個以上之樣本點

如投擲一公正的骰子，令A表出現偶數之事件，B表出現點數為4之事件，則A={2,4,6}為一複合事件，而B={4}為一簡單事件。此外也有兩個特別的事件:

(i) 必然事件：又稱全事件，表樣本空間Ω本身。 因試驗的結果必定在Ω中，所以事件Ω必然發生。

(ii) 不可能事件：又稱空事件，表空集合$\emptyset$。因它不包含任何元素，所以試驗結果也一定不屬於$\emptyset$，也就是事件$\emptyset$永遠不會發生，因此稱之為不可能事件。

因事件為一集合，故事件的聯集(union)、交集(intersection)和餘集(complement)仍然是一事件。設A、B為樣本空間兩個事件，則可定義出下述事件:

(1) 事件A與事件B的聯集，稱為A與B的和事件(sum event)，以$A \cup B$表示。即二事件A、B至少有一事件會發生的事件。

(2) 事件A與事件B的交集，稱為A與B的積事件(product event)，以$A \cap B$表示。即二事件A、B同時發生的事件。

(3) 在樣本空間Ω內，但不在事件A中之事件，稱為A在Ω中的餘事件(complement event)，以A^c表示。即發生事件A以外的事件。

(4) 當$A \cap B=\emptyset$，則稱A與B為互斥事件(mutually exclusive events)。即二事件A、B不會同時發生。

由於事件就是集合，所以關於事件的很多性質，皆可對應集合中的性質，我們列出一些常見的性

質，證明則略去。

設 A，B，C 為定義於某樣本空間的三事件。則下述各性質成立：

(i) 交換律：$A \cup B = B \cup A$，　$A \cap B = B \cap A$

(ii) 結合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，　$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(iii) 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iv) 棣莫根法則：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，　$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

註：棣莫根(De Morgan，1806-1871)，為英國數學家。

生活中的實例1：

一袋內有白球7個，紅球3個，試問

(1) 若取出一球觀察其顏色，則樣本空間為何？

(2) 若依序抽出三球，取後不置回，則樣本空間為何？

[解]：

(1) 因袋內只有白球與紅球兩種，故樣本空間 Ω={白球，紅球}

(2) 若以RWR表依序抽出紅球、白球、紅球，餘類推，則樣本空間為

Ω={RRR, RRW, RWR, RWW, WRR, WRW, WWR, WWW}

隨堂練習1：

一袋內有白球8個，紅球2個，若依序抽出三球，取後不置回，試問樣本空間中有多少個樣本點？

[解]：7個

生活中的實例2：

某人投擲一公正的銅板一次，觀察其出現的情形，試寫出所有可能的事件。

[解]：

因銅板只有正面與反面，所以樣本空間 Ω={正面，反面}，又樣空間中有2個樣本點，因此

共有4種不同的事件，即Ω， $\emptyset$，{正面}，{反面}。

隨堂練習2

某人投擲一公正的骰子一次，觀察其出現的點數，則樣本空間中共有多少個事件。

[解]：64個

生活中的實例3

一盒中有10個球，球上分別印有號碼1至10，今由盒中抽出一球，令A表抽出球的號碼為偶數的事件，

B表抽出球的號碼大於7的事件，試寫出

(1) 樣本空間Ω (2) 事件A (3) 事件B (4) A與B的和事件 $A\cup B$ (5) A與B的積事件$A\cap B$ (6) A的餘事件A^c。

[解]:

(1) 樣本空間為其所有可能出現的號碼，即Ω={1,2,3,…,10}。

(2) A={2,4,6,8,10}。

(3) B={8,9,10}。

(4) $A\cup B$={2,4,6,8,9,10}。

(5) $A\cap B$={8,10}。

(6) A的餘事件即抽出球的號碼為奇數的事件，故A^c={1,3,5,7,9}。

隨堂練習3:

(1) 投擲一公正的骰子，令A表出現點數為偶數的事件，B表出現點數不超過4的事件，試問A、B二事件是否互斥?

(2) 一袋中有3個紅球，2個黑球，1個白球，從袋中任取一球，令 A表抽出紅球的事件，B表抽出黑球的事件， 試問A、B二事件是否互斥?

[解]: (1)不互斥，(2)互斥。

生活題材

設有一列北上的火車，已知停靠的站由南至北分別為S1, S2, …S10等10站。若甲在S3站買票，乙在S6站買票。設樣本空間Ω表火車所有可能停靠的站，令事件A表甲可能到達的站，事件B表乙可能到達的站。試問

(1) 樣本空間Ω為何?

(2) A與B的和事件為何?

(3) A, B二事件是否互斥?

(4) 鐵路局共需準備多少種北上的車票?

[解答]

(1) Ω={S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,S8,S9,S10}。

(2) $A\cup B$={S4,S5,S6,S7,S8,S9,S10}。

(3) 不互斥

(4) 45種

自我挑戰

1. 設本週值日生由三男(甲、乙、丙)及二女(丁、戊)所組成。若規定本週5個上課日中，每天兩名

   值日生中至少需有一名男生。試問此樣本空間共有多少個樣本點。

2. 設樣本空間Ω={1,2,3,4,5,6,7} ，試問

   (1) Ω中共有多少種不同的事件?

   (2) 含三個樣本點之事件有多少個?

   (3) 含五個樣本點之事件有多少個?

3. 有三位學生各出剪刀、石頭、布猜拳，若樣本空間表每位學生出的拳，試問

   (1) 樣本空間Ω共有多少個樣本點?

   (2) 三人彼此不分勝負的事件有多少個?

4. 設樣本空間Ω={1, 2, 3}，若有一事件A={1}， 試求在Ω中與A互斥的事件有多少個?

5. 假設有一特製的骰子，其六個面的點數分別為2, 3, 4, 5, 6, 7。 現在同時投擲公正的這種骰

子兩個。 若樣本空間Ω表兩個骰子出現之點數，A表示兩個骰子和為9的事件，B表示骰子和大於10的事件。試問

（1）樣本空間Ω中有多少個不同的樣本點，

（2）A與B的和事件共有多少個樣本點，

（3）A與B是否為互斥事件。

［解答部分］

1. 9個。

2. （1）128，（2）35，（3）21。

3. （1）27，（2）9。

4. 4個。

5. （1）36，（2）21，（3）是。