第三章　線性系統

最後更新日期：2009 年 3 月 2 日

本章介紹**線性系統**（*linear systems*），重點是線性系統的求解法，這是線性代數所有計算的核心。我們會複習國中時代已經學會的消去法，並以消去法爲基礎介紹三種基本列運算。最後介紹約化列梯形矩陣。以下是本章的內容安排：

3.1　線性系統

線性系統（*linear systems*）就是線性聯立方程式，一組必須同時成立的線性方程式。**線性函數**（*linear function*）是一個函數值與自變數成相同倍數增加的函數。若

$$(a)\ \ f(cx) = c\,f(x)$$
$$(b)\ \ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

其中 $c \in R$ ，則 $f(x)$ 爲一個線性函數。**線性方程式**（*linear equation*）是線性函數等於某個常數的數學陳述式。所有的線性方程式都可以寫成以下矩陣（向量）型式：

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = b$$

其中 $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbf{M}_{n\times 1}, b \in R$ 。

例題 3-1　（線性方程式）

下列兩函數

$$(a)\ \ f(x) = 2x + 3$$

$(b)\ \ f(y)=2y^2+3y$

請驗證是否為線性函數。

【解答】

(a) 令 $c\neq 1$，則

$$f(cx)=2(cx)+3=c(2x+3)+3(1-c)=c\,f(x)+3(1-c)\neq c\,f(x)$$

(b)

$$\begin{aligned}f(y_1+y_2)&=2(y_1+y_2)^2+3(y_1+y_2)=2y_1^2+4y_1y_2+2y_2^2+3y_1+3y_2\\&=(2y_1^2+3y_1)+(2y_2^2+3y_2)+4y_1y_2\\&=f(y_1)+f(y_2)+4y_1y_2\\&\neq f(y_1)+f(y_2)\end{aligned}$$

故兩者都不是線性函數。 ■

線性系統涉及有相同變數、需同時成立的一組線性方程式。以下是一個線性系統的例子：

$$\begin{cases}x-2y+4z=9\\ x+y+z=6\\ 3x+y-z=2\end{cases}$$

我們用大括號將這些方程式括起，表示它們是一體的。上面的線性系統也可以用矩陣型式來表示：

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},\qquad \text{其中}\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2&4\\1&1&1\\3&1&-1\end{bmatrix},\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}9\\6\\2\end{bmatrix}$$

式中的 **A** 稱為**係數矩陣**（*coefficient matrix*），而 **b** 稱為**右手邊值**（*right-hand side value*）。矩陣型式是我們書寫線性系統常用的方法，同學應該盡快熟悉這種表示方式。

研究線性系統，我們有興趣的是該系統的解。這可以分成兩個層面來說：(1)有能力找出它的解，或指出該線性系統無解；(2)能夠詮釋該解在線性組合或在線性轉換上的意義。本章的內容關於第一部分，第二部分留在以後的章節介紹。

例題 3-2　（驗證線性系統之解）

就下列兩個線性系統：

$$(a)\ \begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 6\\ 2\end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 6\\ 3\end{bmatrix}$$

我們可以驗證，$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$ 為線性系統(a)的解：

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 6\\ 2\end{bmatrix}$$

事實上，這也是(a)唯一的一組解。如何證明？以後會學到。

同時，我們也可以驗證$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ 、$\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\end{bmatrix}^T$ 都滿足線性系統(b)：

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 6\\ 3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 6\\ 3\end{bmatrix}$$

線性系統(b)有一組以上的解，我們稱為多重解的情況。其實，系統(b)不只有兩組解，$\mathbf{x}_2$ 、$\mathbf{x}_3$ 連線上的點都會是它的解（例如$\frac{1}{2}(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)=\begin{bmatrix}4 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}^T$ ），它有無限多組解。這些解可以表示如下：

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}5\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}t, \quad t\in R$$

這些解怎麼來的？不要急，我們在後面章節會有介紹。 ■

求解線性系統的過程，我們需要熟悉一個很特殊的線性系統，稱為**齊次系統**（*homogeneous system*）：右手邊值（等號右邊的常數）皆為零的線性系統。

以下是一個齊次系統：

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

我們發現全部為零的向量，$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ ，一定是齊次系統的一組解。這組解得來全不費功夫，而且實在不能為我們帶來多少有用的訊息，因此稱為**瑣碎解**（*trivial solution*）。

我們對非全爲零的解比較有興趣，例如，$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ 也是本齊次系統的一組解，這種非全爲零的解稱爲**非瑣碎解**（*non-trivial solution*）。

在例題 3-2，我們驗證

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \in R \tag{3-1}$$

是線性系統(b)的解。

$$(b) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

現在請驗證以下兩式：

$$(\alpha) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad (\beta) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

這個例子告訴我們一個現象，線性系統的解分成兩部分：(α)與右手邊值有關的**特殊解**（*particular solution*），(β)與右手邊值無關的**齊次解**（*homogeneous solution*）。

$$\text{線性系統之解} = \text{特殊解} + \text{齊次解}$$

如(3-1)中

$$\text{特殊解} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{齊次解} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \in R$$

其中，特殊解會寫成單一向量，而齊次解則寫成向量的倍數。這裡『向量的倍數』正式名詞是**線性組合**（*linear combination*），而齊次解是**維度**（*dimension*）大於零的**向量空間**（*vector space*）。後面章節會介紹線性組合、維度與向量空間的概念。

題外話（特殊解與瑣碎解） 一個線性系統可能有三種狀況：(a)無解，(b)唯一解，(c)多重解。這三種狀況與特殊解、齊次解的關連如下表：

(α) 找特殊解

若找到特殊解，則繼續(β)步驟；否則，該線性系統**無解**。

(β) 找齊次解

若只有瑣碎解，則(α)之特殊解爲該線性系統的**唯一解**；

否則（非瑣碎解存在），該線性系統有**多重解**。

上述過程，表面上涉及兩個動作(α)找特殊解、(β)找齊次解，事實上只有一個動作：『確定**增廣矩陣**之各列都有**帶頭一**』，這是本章剩餘內容的主要課題。 ■

3.2 以消去法解線性聯立方程式

我們在國中時期，第一次接觸線性聯立方程式，當時就已經學會如何求解。那時教的解法有三種：(1)帶入消去法、(2)加減消去法、(3)公式解。本節複習前兩者，公式解與反矩陣有關，將在下一章討論。以下兩個例子分別用帶入消去法與加減消去法求解三個變數的線性系統。

例題 3-3 （帶入法消去法）

就下列線性系統

$$(a)\ \begin{cases} 2x-2y+z=2 \\ x+3y+z=6, \\ x+2y+z=5 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x-2y+4z=9 \\ x+y+z=6, \\ x+4y-2z=3 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x-2y+4z=9 \\ x+y+z=6 \\ x+4y-2z=4 \end{cases}$$

請以帶入消去法求解。

【解答】

(a)

由第 1 等式解 x，

$$x=1+y-\tfrac{1}{2}z$$

帶入第 2、3 等式，

$$\left(1+y-\tfrac{1}{2}z\right)+3y+z=6 \qquad \Rightarrow \qquad 4y+\tfrac{1}{2}z=5$$
$$\left(1+y-\tfrac{1}{2}z\right)+2y+z=5 \qquad \Rightarrow \qquad 3y+\tfrac{1}{2}z=4$$

原方程式變爲

$$(a') \begin{cases} x=1+y-\tfrac{1}{2}z \\ 4y+\tfrac{1}{2}z=5 \\ 3y+\tfrac{1}{2}z=4 \end{cases}$$

繼續第二次反覆。由第 2 等式解 y ，

$$y=\tfrac{5}{4}-\tfrac{1}{8}z$$

帶入第 3 等式，

$$3\left(\tfrac{5}{4}-\tfrac{1}{8}z\right)+\tfrac{1}{2}z=4 \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{1}{8}z=\tfrac{1}{4}$$

原方程式變爲

$$(a'') \begin{cases} x=1+y-\tfrac{1}{2}z \\ y=\tfrac{5}{4}-\tfrac{1}{8}z \\ \tfrac{1}{8}z=\tfrac{1}{4} \end{cases}$$

現在，逆向由第 3 等式開始寫出解答：

$$\tfrac{1}{8}z=\tfrac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad z=2$$
$$\Rightarrow \qquad y=\tfrac{5}{4}-\tfrac{1}{8}z=\tfrac{5}{4}-\tfrac{1}{8}\times 2=1$$
$$\Rightarrow \qquad x=1+y-\tfrac{1}{2}z=1+1-\tfrac{1}{2}\times 2=1$$

故 (a) 有唯一解，其解爲 $(x,y,z)=(1,1,2)$ 。

(b)

相同的過程，由第 1 等式解出 $x=9+2y-4z$ ，帶入第 2、3 等式後得

$$(b') \begin{cases} x=9+2y-4z \\ 3y-3z=-3 \\ 6y-6z=-6 \end{cases}$$

繼續由第 2 等式解出 $y=-1+z$，帶入第 3 等式後得

$$(b'')\ \begin{cases} x=9+2y-4z \\ y=-1+z \\ 0=0 \end{cases}$$

逆向疊代過程，由第 2 等式開始，z 必須指定爲任意值：

$$y=-1+z \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} z=t, \quad t\in R \\ y=-1+z=-1+t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad x=9+2y-4z=9+2(-1+t)-4t=7-2t$$

故 (b) 有多重解

$$\begin{cases} x=7-2t \\ y=-1+t, \quad t\in R \\ z=t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}t, \quad t\in R$$

(c)

與 (b) 過程相似，得

$$(c'')\ \begin{cases} x=9+2y-4z \\ y=-1+z \\ 0=1 \end{cases}$$

由不合理的第 3 等式：$0=1$，得知 (c) 無解。 ■

例題 3-4　（加減法消去法）

就下列線性系統

$$(a)\ \begin{cases} 2x-2y+z=2 \\ x+3y+z=6, \\ x+2y+z=5 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x-2y+4z=9 \\ x+y+z=6, \\ x+4y-2z=3 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} x-2y+4z=9 \\ x+y+z=6 \\ x+4y-2z=4 \end{cases}$$

請以加減消去法求解。

【解答】

加減消去法和帶入消去法有相同的目的：每一次讓一個變數在排序比較後面的等式內消失。雖然邏輯與外觀有些差異，這兩個方法會得到一模一樣的結果。

(a)

由第 1 等式開始，選定變數 x，將該等式除以 x 的係數 2，

$$x-y+\tfrac{1}{2}z=1 \tag{3-2}$$

以(3-2)消去第 2、3 等式的 x 變數。第 2、3 等式分別減去(3-2)：

$$x+3y+z-\left(x-y+\tfrac{1}{2}z\right)=6-1 \quad\Rightarrow\quad 4y+\tfrac{1}{2}z=5$$
$$x+2y+z-\left(x-y+\tfrac{1}{2}z\right)=5-1 \quad\Rightarrow\quad 3y+\tfrac{1}{2}z=4$$

原方程式變爲

$$(a')\begin{cases} x-y+\tfrac{1}{2}z=1 \\ \quad 4y+\tfrac{1}{2}z=5 \\ \quad 3y+\tfrac{1}{2}z=4 \end{cases}$$

由第 2 等式開始，選定變數 y，將該等式除以 y 的係數 4，

$$y+\tfrac{1}{8}z=\tfrac{5}{4} \tag{3-3}$$

以(3-3)消去第 3 等式的 y 變數。第 3 等式減去(3-2)的 3 倍：

$$3y+\tfrac{1}{2}z-3\left(y+\tfrac{1}{8}z\right)=4-3\times\tfrac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{8}z=\tfrac{1}{4}$$

原方程式變爲

$$(a'')\begin{cases} x-y+\tfrac{1}{2}z=1 \\ \quad y+\tfrac{1}{8}z=\tfrac{5}{4} \\ \quad\quad \tfrac{1}{8}z=\tfrac{1}{4} \end{cases}$$

其解爲 $(x,y,z)=(1,1,2)$。

(b)、(c)

相同的過程，聯立方程組作以下兩次轉換：

$$(b')\begin{cases} x-2y+4z=9 \\ \quad 3y-3z=-3, \\ \quad 6y-6z=-6 \end{cases}\qquad (b'')\begin{cases} x-2y+4z=9 \\ \qquad y-z=-1 \\ \qquad\quad 0=0 \end{cases}$$

$$(c')\begin{cases} x-2y+4z=9 \\ \quad 3y-3z=-3, \\ \quad 6y-6z=-5 \end{cases}\qquad (c'')\begin{cases} x-2y+4z=9 \\ \qquad y-z=-1 \\ \qquad\quad 0=1 \end{cases}$$

加減消去法的優點在於，維持變數在等號左手邊，常數在等號右手邊的方程式習慣寫法。 ■

題外話（高斯消去法） 例題 3-4 的作法稱爲**高斯消去法**（*Gaussian elimination*）。若在每一次同時消去排序在前以及排序在後之等式的變數，則稱爲**高斯-喬丹消去法**（*Gaussian-Jordan elimination*）。

例如例題 3-4 中，我們會以(3-3)同時消去第 1、3 等式中的 y ，其中，第 1 等式減去(3-3)的 −1倍，第 3 等式減去(3-3)的 3 倍：

$$x-y+\tfrac{1}{2}z-(-1)\left(y+\tfrac{1}{8}z\right)=1-(-1)\times\tfrac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad x+\tfrac{5}{8}z=\tfrac{9}{4}$$
$$3y+\tfrac{1}{2}z-3\left(y+\tfrac{1}{8}z\right)=4-3\times\tfrac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{8}z=\tfrac{1}{4}$$

原方程式(a')變爲

$$(a'')\begin{cases} x \quad +\tfrac{5}{8}z=\tfrac{9}{4} \\ \quad y+\tfrac{1}{8}z=\tfrac{5}{4} \\ \qquad\ \tfrac{1}{8}z=\tfrac{1}{4} \end{cases}$$

再進一步。由(a'')的第 3 等式，解 $z=2$ ，以同樣以此消去第 1、2 等式中的 z ：

$$(a''')\begin{cases} x \qquad =1 \\ \quad y \quad =1 \\ \qquad z=2 \end{cases}$$

高斯-喬丹消去法的結果直接就可以寫出聯立方程式的解答。 ■

在例題 3-3、例題 3-4 之帶入消去法、加減消去法，以及高斯-喬丹消去法，這三個消去法有一個共同的特徵：持續改變線性系統的外觀。例如從(a)轉變到(a') 、(a'') ，

然後到(a''')。因爲等式中變數的減少，這些線性系統越來越容易求解。(a''')是其中的極致，線性系統本身就是答案。

最後，我們將從(a''')得到的解答，當成原始問題(a)的解答！在這裡，我們作了一個非常強烈的假設：『(a)與(a''')有相同的解答。』這種外觀不同，但解答相同的線性系統稱爲**等價系統**（*equivalent system*）。

我們可以證明，下列三種操作不會改變線性系統的解答：

(1)將兩等式互換位置；

(2)將某等式之等號兩邊乘上相同的非零常數；

(3)將某等式減去另一等式的某個實數倍數後，以新等式取代原等式。

這些操作稱爲**基本等式運算**（正式名稱是下一小節所定義的**基本列運算**）。也就是說，三種基本等式操作前後的線性系統互爲等價系統。

例題 3-5　（基本等式運算）

考慮以下系統：

$$(\alpha)\quad \begin{cases} x-2y+4z=9 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$$

將第一與第二個等式互換（第 1 種基本等式運算），系統轉換成以下型式

$$(\beta)\quad \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+4z=9 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$$

將第二等式減去第一等式，並取代第二等式（第 3 種基本等式運算），結果爲

$$(\gamma)\quad \begin{cases} x+y+z=6 \\ -3y+3z=3 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$$

將第二等式乘上$-\frac{1}{3}$（除以-3）（第 2 種基本等式運算），結果爲

$$(\delta)\quad \begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad\ \ y-z=-1 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$$

將第三等式減去第一等式的 3 倍（第 3b 種基本等式運算），結果為

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} x\ +y\ \ +z=6 \\ \quad\ \ y\ \ -z=-1 \\ \ \ -2y-4z=-16 \end{cases}$$

以上(α)、(β)、(γ)、(δ)、(ε)互為等價。當然，我們會比較喜歡(ε)，看起來比較容易找到解答！ ■

3.3　增廣矩陣與三種基本列運算

本節重複上一節的內容，只是這次用矩陣符號來表達；雖然沒有新的花樣，但矩陣符號可以作比較精確，且更有效率的溝通。

用矩陣符號來表示線性聯立方程式，看起來精簡，寫起來有比較容易，如

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

聯立方程式的變數可以指定為任意變數符號，而且變數的數目可以由$\mathbf{A}$的行數得知，因此變數向量$\mathbf{x}$並不是必要的資訊。這裡，更精簡地將係數矩陣（$\mathbf{A}$）與右手邊值向量（$\mathbf{b}$）寫在一矩陣裡頭，如

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$$

稱為**增廣矩陣**（*augmented matrix*）。上面這個增廣矩陣代表一個線性系統，其中縱向虛點線代表等號的位置。

例題 3-6　（增廣矩陣）

以下線性系統：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \qquad \text{其中} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

寫成增廣矩陣的型式則爲

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] \qquad \text{或} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

習慣上，我們會在係數矩陣與右手邊值間劃上一條虛點線。

在增廣矩陣中，雖然變數的符號已經被省略，變數的數目倒可以由增廣矩陣的行數減去一來得到；例如，上面增廣矩陣有 4 行，因此其所代表的線性系統應該有 3 個變數。這些變數符號可以任意給，x, y, z 或 x_1, x_2, x_3 皆可。一旦給了變數符號（如 x, y, z ），則其所代表的線性系統（線性聯立方程式）：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x - 2y + 4z = 9 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

應隨時浮現在我們眼前。 ■

增廣矩陣的每一列代表著線性聯立方程式中的一個等式。因此，上一節的**等式運算**，在這裡成爲**列運算**（*row operation*）。三種基本等式運算（維持系統等價的運算），就成爲三種**基本列運算**（*elementary row operation*）：

第一種基本列運算：兩列互換；

第二種基本列運算：某列乘以非零實數；

第三種基本列運算：某列減去另一列之常數倍數，並以新列取代原列。

經基本列運算的前、後兩個增廣矩陣，其所代表的線性系統爲等價系統，這增廣矩陣稱爲**列等價矩陣**（*row equivalent matrix*）。

題外話（列等價矩陣）　我們知道矩陣的行、列一直都是相對的。矩陣既然有列等價的概念，那麼是不是應該也有行等價呢？

答案是，我們可以作行運算，也可以有行等價的概念，但是沒有什麼意義。爲什麼？因爲在地球上，方程式（等式）是橫者寫，增廣矩陣的每一列代表一個等式。列運算才是等式的運算，也才能保證增廣矩陣持續維持解答相同的關係。■

例題 3-7　（三種基本列運算）

考慮以下系統：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

將第一列與第二列互換（標記爲$(1)=(2)$），系統轉換成以下型式

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(1)=(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

將第二列減去第一列並取代第二列（標記爲$r2-r1$），結果爲

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r2-r1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

將第二列乘上$-\frac{1}{3}$（標記爲$-\frac{1}{3}(2)$），結果爲

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

將第三列減去第一列的 3 倍（標記爲$(3)-3(1)$），結果爲

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)-3(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -16 \end{array}\right]$$

■

將單位矩陣作基本列運算後的列等價矩陣，稱爲**基本列運算矩陣**。將基本列運算矩陣前乘一個矩陣，則其結果爲該矩陣作相同的基本列運算。請注意，在這裡『**前列後行**』的意義爲，前乘則作相同的列運算。

例題 3-8　（基本列運算矩陣）

基本列運算矩陣由單位矩陣產生，對單位矩陣作基本列運算，則其結果成爲基本列運算矩陣。例如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)=(2)} \mathbf{R}_{(1)=(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

驗證如下

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

或有人會抗議，爲什麼不把 $\mathbf{R}_{(1)=(2)}$ 看成第一行與第二行互換的結果？這也對。只是，第一，行運算沒什麼意義；第二，要乘在後面才有行運算的效果。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

就是第一、二行互換了。又例如第三種基本列運算

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-3(1)} \mathbf{R}_{(3)-3(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

驗證如下

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & -2 & -4 & -16 \end{array}\right]$$

結果就是第三列減去第一列的 3 倍。 ■

3.4 約化列梯形矩陣與線性系統之解

我們已經有**增廣矩陣**來簡化線性系統的書寫，也有**三種基本列運算**來將增廣矩陣轉換到我們喜歡的、容易求解的等價系統。現在問題來了，哪種型式的線性系統比較容易求解呢？答案是本節要介紹的**約化列梯形矩陣**（*reduced row echelon form*）。

例題 3-9 （約化列梯形矩陣）

以下是一個約化列梯形矩陣：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

不要忘了，它是一個增廣矩陣（腦中要浮現一個線性系統）。更重要的，它是一個最容易看出解答的等價系統！

將該增廣矩陣還原成線性系統（變數爲 x, y, z, w）：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x \qquad + 3w = 9 \\ \quad y \quad + 2w = 8 \\ \qquad z - 2w = 4 \end{cases}$$

三個等式來解四個變數，有一個變數需指定爲任意值（當然是 w 囉）。令 $w = t$，則其它變數的解馬上可以寫出來：

$$\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 8 - 2t \\ z = 4 + 2t \\ w = 0 + t \end{cases}, \quad t \in R \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \in R$$

有沒有發現，約化列梯行矩陣最有用的就是那三個一？這稱爲帶頭一。 ■

約化列梯行矩陣的特徵有四：

(1)若有全爲零之列需在矩陣的下方；

(2)每列第一個非零元素之數値爲一，稱爲**帶頭一**（*leading one*）；

(3)第 i 列的帶頭一會在第 $i+1$ 列帶頭一的前面（左方）。

(4)帶頭一元素爲該行唯一的非零數值；

若將第(4)特徵改爲

(4’)帶頭一元素所在行，帶頭一下方的元素皆爲零

則稱爲**列梯形矩陣**（*row echelon form*）。可以這樣想，以高斯消去法得到的是列梯形矩陣，而以高斯-喬丹消去法得到的是約化列梯形矩陣。

例題 3-10　（列梯形矩陣）

以下是列梯形矩陣的例子：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad y-z=-1 \\ \qquad z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-y-z \\ y=-1+z \\ z=3 \end{cases}$$

這種情況用**逆向疊代**（*reverse substitution*）的方式，也很容易找出它的解：

$z=3$

$y=-1+z=-1+3=2$

$x=6-y-z=6-2-3=1$

其解爲 $(x,y,z)=(1,2,3)$ 。 ■

題外話（帶頭一）　帶頭一因爲翻譯的不同，中文、英文都有好幾個說法，中文如**帶頭一**、**領導一**、**領導元素**，英文有 *leading one*、*leading entry*。

就容易求解的觀點來看，約化列梯形矩陣的四個特徵中，真正有用的是『(4)帶頭一元素爲該行唯一的非零數值』。在本書，帶頭一的定義爲：

它的數值是一，而且它是該行唯一的非零數值。

增廣矩陣的每一列最多只能有一個帶頭一。而

以三種基本列運算，將任意指定之非零元素轉換爲帶頭一。

是線性代數計算方面必須熟練的最重要技術。 ■

例題 3-11　（將指定非零元素轉換為帶頭一）

考慮下列矩陣

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 & 6 \\ 3 & 12 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

若目標爲讓 $a_{21}=3$ 轉換爲帶頭一，其步驟有二。

步驟一：以第二種基本列運算，將 a_{21} 轉換爲一。

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 & 6 \\ \boxed{3} & 12 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}(2)} \begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

步驟二：以第三種列運算，將 a_{21} 上下元素轉換爲零。

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)-(2)]{(1)-2(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

實際操作上，會將兩步驟合而爲一。 ■

例題 3-12　（以三種基本列運算找約化列梯形矩陣）

考慮以下增廣矩陣：

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & -4 & 6 \\ 3 & 12 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

將其轉換爲約化列梯形矩陣有兩大步驟：

(1)以第二、第三種基本列運算，依序找出每列的帶頭一；

(2)以第一種基本列運算，將帶頭一排成梯行。

轉換過程如下。步驟(1)-1，指定 $a_{11}=2$ 爲第一列的帶頭一：

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 8 & -4 & 6 \\ 3 & 12 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 12 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

步驟(1)-2，指定 $a_{32}=-6$ 爲第三列的帶頭一：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-6} & 6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{6}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-4(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

步驟(2)-1，將全爲零之第二列轉換到最後一列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\leftrightarrows(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

這已經是約化列梯形矩陣。 ■

例題 3-13　（避免計算錯誤的小技巧）

依據筆者的經驗，懂得三種基本列運算的操作原理是一回事，考試紙筆計算的場合，能把它算對可不容易。尤其是需要同時操作乘法與減法的第三種基本列運算，出錯的機會更大。這裡提供一個將第三種基本列運算中乘法與減法分開，以避免計算錯誤的小技巧。

考慮以下增廣矩陣：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

選定 $a_{11}=2$ 爲帶頭一位置，我們計算的過程如下：

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(1)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3_{\,3\times 1} & 3_{\,3\times\frac{1}{2}} & 2_{\,3\times 0} & 4_{\,3\times\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-3(1)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

重點是我們在第三列右下角寫下第一列的三倍，這樣，作減法運算是會覺得輕鬆、沒有負擔。以下是找出另外兩個帶頭一的過程：

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1_{\,\frac{1}{2}\times 0} & \frac{1}{2}_{\,\frac{1}{2}\times 1} & 0_{\,\frac{1}{2}\times 4} & \frac{3}{2}_{\,\frac{1}{2}\times 1} \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0_{\,\frac{3}{2}\times 0} & \frac{3}{2}_{\,\frac{3}{2}\times 1} & 2_{\,\frac{3}{2}\times 4} & \frac{-1}{2}_{\,\frac{3}{2}\times 1} \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)-\frac{3}{2}(2)]{(1)-\frac{1}{2}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}(3)} \begin{bmatrix} 1_{\,-2\times 0} & 0_{\,-2\times 0} & -2_{\,-2\times 1} & 1_{\,-2\times\frac{1}{2}} \\ 0_{\,4\times 0} & 1_{\,4\times 0} & 4_{\,4\times 1} & 1_{\,4\times\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[(2)-4(3)]{(1)-(-2)(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

一定要熟練這些操作。 ■

有了約化列梯形矩陣（或盡量在每一列找出帶頭一後），我們就可以直接寫出線性系統的解。我們需要變數數目（ n ）與帶頭一數目（ p ）來決定解答的型式：

(1) 無解：帶頭一在最後一行（右手邊値位置）；

(2)唯一解：變數數目等於帶頭一數目（ $n=p$ ）；

(3)多重解：變數數目大於帶頭一數目（ $n>p$ ）。

其中，無解的情況是，在該帶頭一那列出現『 $0=1$ 』的不合理現象。另外，再提醒一次，變數的數目是增廣矩陣的行數減一。

例題 3-14　（由約化列梯形矩陣寫出線性系統之解）

考慮以下約化列梯形矩陣（假設變數符號爲 x,y,z ）：

$$(\alpha)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\beta)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (\gamma)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

系統(α)因第 3 個帶頭一在最後一行（a_{34}位置），故無解。

系統(β)有唯一解：$(x,y,z)=\left(2,-1,\frac{1}{2}\right)$。

系統(γ)有多重解。

將第 2 行與第 3 行沒有帶頭一的**自由變數**（*free variable*），y、z，指定爲任意值，亦即，令

$$y=s,\quad z=t,\qquad s,t\in R$$

帶入第一列，得到

$$x=6-3s-2t$$

該解也可以寫成向量型式：

$$\begin{cases} x=6-3s-2t \\ y=s \\ z=t \end{cases},\quad s,t\in R \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}s+\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}t,\quad s,t\in R$$

將自由變數指定爲零的解稱爲**基解**（*basic solution*）。基解不會只有一個，系統(γ)還有另外兩個基解：$(x,y,z)=(0,2,0)$、$(x,y,z)=(0,0,3)$。（提示：變動帶頭一的位置就可以了。）■

例題 3-15

請解下列線性系統

$$\begin{cases} x+y+2z-5w=3 \\ 2x+5y-z-9w=-3 \\ 2x+y-z+3w=-11 \\ x-3y+2z+7w=-5 \end{cases}$$

【解答】

寫成增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right]$$

依次找出各列的帶頭一

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&2&-5&3\\0&3&-5&1&-9\\0&-1&-5&13&-17\\0&-4&0&12&-8\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&\frac{11}{3}&-\frac{16}{3}&6\\0&1&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}&-3\\0&0&-\frac{20}{3}&\frac{40}{3}&-20\\0&0&-\frac{20}{3}&\frac{40}{3}&-20\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&2&-5\\0&1&0&-3&2\\0&0&1&-2&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

此題有四個變數（$n=4$），三個帶頭一（ $p=3$），沒有帶頭一在右手邊値位置，所以此題有多重解。令 $w=t$ 爲任意值，其解答如下

$$\begin{cases}w=t\\x=-5-2w=-5-2t\\y=2+3w=2+3t\\z=3+2w=3+2t\end{cases},\quad t\in R\qquad\Rightarrow\qquad\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\2\\3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\\2\\1\end{bmatrix}t,\quad t\in R$$

因爲 w 變數的位置（第四行）沒有帶頭一，故指定 w 爲自由變數。若有某些理由，我們想指定 y 爲自由變數，那麼，將 $a_{24}=-3$ 轉換爲帶頭一即可：

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&2&-5\\0&1&0&\boxed{-3}&2\\0&0&1&-2&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&\frac{2}{3}&0&0&-\frac{11}{3}\\0&-\frac{1}{3}&0&1&-\frac{2}{3}\\0&-\frac{2}{3}&1&0&\frac{5}{3}\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

解答如下

$$\begin{cases}x=-\frac{11}{3}-\frac{2}{3}t\\y=t\\z=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}t\\w=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\end{cases},\quad t\in R\qquad\Rightarrow\qquad\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{11}{3}\\0\\\frac{5}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\1\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}t,\quad t\in R$$

請留意，在這裡，w 的解答是由第二列來決定（變數 w 行的帶頭一在第二列）。■