第六章　線性轉換與特徵值問題

最後更新日期：2009 年 2 月 18 日

本章介紹**線性轉換**（*linear transformation*），將線性系統看成一個函數，探討在不同向量空間裡之向量的對應情形。定義函數時，定義域與值域是重要的元素，在線性轉換中，對應前者的是轉換矩陣的**核**（*kernel*），而對應後者的是轉換矩陣的**值域**（*range*）。**特徵值問題**（*eigenvalue and eigenvector*）是線性轉換的一個重要的應用，而對稱矩陣的**對角化**（*diagonalization*）則是該問題的直接應用。對稱矩陣對角化讓矩陣的運算擴展到指數、三角函數等超越函數。本章的內容安排如下：

6.1　線性轉換

6.2　核心與值域

6.3　轉換矩陣

6.4　特徵值與特徵向量

6.5　矩陣對角化

6.1　線性轉換

對一個線性系統而言，**線性轉換**（*linear transformation*）是以函數的觀點來看線性系統。考慮以下線性系統

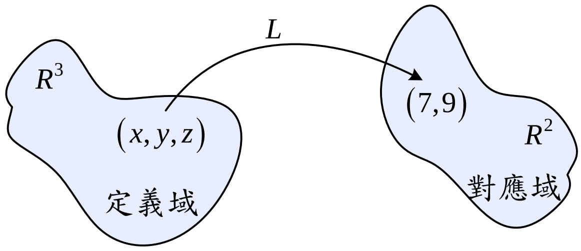
$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \qquad \text{其中} \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}7\\ 9\end{bmatrix}$$

線性轉換如同下圖的黑盒子，我們需決定輸進去的$(x,y,z)\in R^3$，使得經過黑盒子轉換後，產出R^2的$(7,9)$：

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\in R^3$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}7\\ 9\end{bmatrix}\in R^2$$

我們也可以將線性系統看成下圖的函數對應關係，定義域是 R^3 ，而值域是 R^2 ：



以數學符號來表示則為

$$L: R^3 \to R^2 \qquad \text{或} \qquad L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

當然，轉換或函數 L 必須滿足某些條件才可以稱為線性轉換或線性函數。

定義　（線性轉換）

令 V 、 W 為兩向量空間， L 為以 V 為定義域、 W 為值域的函數，若任意 $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ ， $c \in R$ 滿足以下兩性質

(a)　$L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$　(6-1)

(b)　$L(c\mathbf{u}) = cL(\mathbf{u})$　(6-2)

則 L 稱為 V 對應至 W 的**線性轉換**（*linear transformation*），記為 $L: V \to W$ 。 ■

題外話（線性運算子）　若線性轉換 L 的定義域與值域是相同的向量空間，如 $L: V \to V$ ，則我們稱 L 為向量空間 V 的一個**線性運算子**（*linear operator*）。 ■

例題 6-1　（驗證線性轉換）

令 $L: \mathbf{M}_{m\times n} \to \mathbf{M}_{n\times m}$ ，定義如下

$$L(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

試驗證 L 是否為線性轉換。

【解答】

令 $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m\times n}, c \in R$ ，則

(a) $L(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = L(\mathbf{A}) + L(\mathbf{B})$

(b) $L(c\mathbf{A}) = (c\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = c\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = cL(\mathbf{A})$

故 L 是一個線性轉換。 ■

例題 6-2　（驗證線性轉換）

令 $L:\mathbf{M}_{n\times n}\to R$ ，定義如下

$$L(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|$$

試驗證 L 是否爲線性轉換。

【解答】

令 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{n\times n}, c\in R$ ，則

$$(a)\ L(\mathbf{A}+\mathbf{B})=|\mathbf{A}+\mathbf{B}|\neq|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|=L(\mathbf{A})+L(\mathbf{B})$$

故 L 不是一個線性轉換。 ■

例題 6-3　（驗證線性轉換）

令 $L:R^m\to R^n$ ，定義如下

$$L(\mathbf{x})=\mathbf{Ax}$$

其中 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{m\times n}$ 。試驗證 L 是否爲線性轉換。

【解答】

令 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^m, c\in R$ ，則

$$(a)\ L(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{Ax}+\mathbf{Ay}=L(\mathbf{x})+L(\mathbf{y})$$

$$(b)\ L(c\mathbf{x})=\mathbf{A}(c\mathbf{x})=c\mathbf{Ax}=cL(\mathbf{x})$$

故 L 是一個線性轉換。 ■

定理 6-1　(線性轉換之性質)

若 $L:V\to W$ 爲一線性轉換，則

$$(a)\ L(c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_k\mathbf{v}_k)=c_1L(\mathbf{v}_1)+c_2L(\mathbf{v}_2)+\cdots+c_kL(\mathbf{v}_k) \quad (6\text{-}3)$$

$$(b)\ L(\mathbf{0}_V)=L(\mathbf{0}_W)$$

$$(c)\ L(\mathbf{u}-\mathbf{v})=L(\mathbf{u})-L(\mathbf{v})$$

其中， $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ ， $c_1,c_2,\ldots,c_k\in R$ ， $\mathbf{0}_V$ 、 $\mathbf{0}_W$ 分別爲 V 、 W 的加法單位元素，而 $-\mathbf{v}$ 爲 $\mathbf{v}$ 之加法反元素。

【證明】

自行練習吧。

記得使用(6-1)與(6-2)，(b)需加上加法單位元素的定義：$\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$，而$(c)$則需考慮加法反元素的定義：$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$。■

定理 6-2 (以基底轉換表示)

若$L:V\to W$爲線性轉換，$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$爲$V$的基底，且$\mathbf{u}\in V$，則$L(\mathbf{u})$可由$\{L(\mathbf{v}_1),L(\mathbf{v}_2),\ldots,L(\mathbf{v}_n)\}$（以線性組合）來表示。

【證明】

將$\mathbf{u}$表示成$\mathbf{u}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$，則經由(6-3)自然可將$L(\mathbf{u})$表示爲

$$L(\mathbf{u})=c_1L(\mathbf{v}_1)+c_2L(\mathbf{v}_2)+\cdots+c_nL(\mathbf{v}_n)$$。■

題外話（應用定理 6-2）　定理 6-2 告訴我們，只要知道基底向量的轉換結果，即使不知道整個轉換機制，也可以作任何向量的轉換。若$L:V\to W$爲線性轉換，$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$爲$V$的基底。令$\mathbf{u}\in V$，我們使用以下兩個公式來計算$L(\mathbf{u})$：

$$\mathbf{u}=\mathbf{A}_S[\mathbf{u}]_S$$

$$L(\mathbf{u})=\mathbf{A}_{LS}[\mathbf{u}]_S$$

其中

$$\mathbf{A}_S=[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{v}_n]$$

$$\mathbf{A}_{LS}=[L(\mathbf{v}_1)\ \ L(\mathbf{v}_2)\ \ \cdots\ \ L(\mathbf{v}_n)]$$

我們稱$\mathbf{A}_{LS}$爲基底S的**轉換矩陣**（*matrix of a linear transformation*）。■

例題 6-4 （利用基底的線性轉換）

令$L:R^2\to R^3$爲線性轉換，$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$是$R^2$的基底，其中

$$\mathbf{v}_1=(1,2)\text{、}\mathbf{v}_2=(2,1)\quad\text{而且}\quad L(\mathbf{v}_1)=(-1,3,4),\quad L(\mathbf{v}_2)=(1,3,5)$$

試求$L(\mathbf{u}),\mathbf{u}=(5,4)$。

【解答】

先求$[\mathbf{u}]_S$，其爲以下線性系統的解

$$[\mathbf{A}_S\ \vdots\ \mathbf{u}]=\left[\begin{array}{cc|c}1&2&5\\2&1&4\end{array}\right]\xrightarrow{\text{基本列運算}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&2\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\quad[\mathbf{u}]_S=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

則

$$L(\mathbf{u})=\mathbf{A}_{LS}[\mathbf{u}]_S=\begin{bmatrix}-1&1\\3&3\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\9\\14\end{bmatrix}$$

■

例題 6-5　（利用基底的線性轉換）

令 $L:R^2\to R^2$ 為線性轉換，且已知 $L(1,1)=(1,2)$ 、 $L(1,-1)=(3,2)$ ，試求

(a) $L(3,4)$ ；

(b) $L(s,t)$ 。

【解答】

令 $S=\{(1,1),(1,-1)\}$ ， $\mathbf{A}_S=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ ， $\mathbf{A}_{LS}=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\end{bmatrix}$ 。

(a) $[(3,4)]_S$ 為以下線性系統的解

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&3\\1&-1&4\end{array}\right]\xrightarrow{\text{基本列運算}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{7}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\quad[(3,4)]_S=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$L(3,4)=\mathbf{A}_{LS}[(3,4)]_S=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$$

(b) 一樣的作法， $[(s,t)]_S$ 為以下線性系統的解

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&s\\1&-1&t\end{array}\right]\xrightarrow{\text{基本列運算}}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{s+t}{2}\\0&1&\frac{s-t}{2}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\quad[(s,t)]_S=\begin{bmatrix}\frac{s+t}{2}\\\frac{s-t}{2}\end{bmatrix}$$

$$L(s,t)=\mathbf{A}_{LS}[(s,t)]_S=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+t}{2}\\\frac{s-t}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2s-t\\2s\end{bmatrix}$$

■

題外話（與座標變換比較）　若 $L:V\to W$ 為線性轉換， $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的基底，依據定理 6-2 的結果， $T=\{L(\mathbf{v}_1),L(\mathbf{v}_2),\ldots,L(\mathbf{v}_n)\}$ 也是一個基底，但不要搞錯了，

它不見得是W的基底！我們會在下一節處理這個問題。現在與上一章的座標變換比較一下，若將L看成座標變換，則L是在相同空間作轉換$L:R^n \to R^n$；這時，T就是R^n的基底了。這也就是我們可以將座標變換視爲一個**運算**的道理。 ■

6.2 核心與值域

對從向量空間V映射至向量空間W的轉換$L:V \to W$，在本節，我們關心V、W的大小（對向量空間應該是**維度**才恰當）。這牽涉到函數的映射是否**一對一**（*one-to-one*）與**映成**（*onto*）的觀念

定義 （一對一）

令$L:V \to W$爲線性轉換，對任意元素$\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$，若

$$\mathbf{u} \neq \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad L(\mathbf{u}) \neq L(\mathbf{v}) \qquad \text{或} \qquad L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

則稱L爲**一對一**（*one-to-0ne*）。 ■

定義 （核心）

令$L:V \to W$爲線性轉換，則V所有映射到$\mathbf{0}_W$之元素所成的集合稱爲L的**核心**（*kernel*），標記爲$\ker L$，

$$\ker L = \left\{ \mathbf{v} \middle| L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W,\, \mathbf{v} \in V \right\}$$ ■

定義 （值域、映成）

令$L:V \to W$爲線性轉換，則所有映射的元素$L(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in V$所成的集合稱爲$L$的**值域**（*range*），標記爲$\operatorname{range} L$，

$$\operatorname{range} L = \left\{ L(\mathbf{v}) \middle| \mathbf{v} \in V \right\}$$

若值域與對應域相等，$\operatorname{range} L = W$，則稱$L$爲**映成**（*onto*）。 ■

定理 6-3 (核心、值域與一對一之性質)

令$L:V \to W$爲線性轉換，則

(a) $\ker L$爲V之次空間。

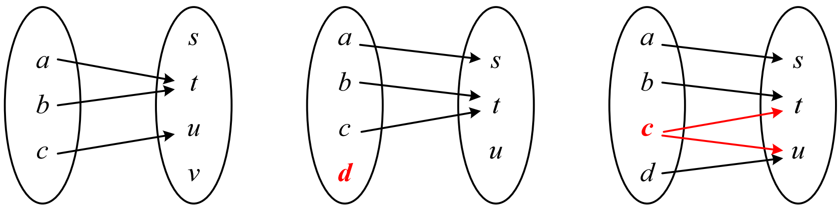
(b) $\operatorname{range} L$ 為 W 之次空間。

(c) 若 $\dim(\ker L)=0$，則 L 為一對一。

(d) 若 $\dim(\operatorname{range} L)=\dim V$，則 L 為一對一。

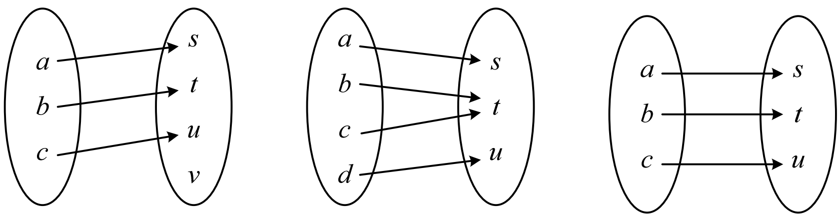
(e) $\dim(\ker L)+\dim(\operatorname{range} L)=\dim V$。 ■

請參考圖 6-1，說明兩種不能成為函數的映射狀況。另外，圖 6-2 呈現一對一、映成、與一對一且映成等三種情況。



(A)一般函數　(B)不是函數　(C)不是函數

圖 6-1



(D)一對一　(E)映成　(F)一對一且映成

圖 6-2

題外話（一對一且映成的重要性）　檢視圖 6-2 之各對應圖，若我們把對應的箭頭倒過來，則只有『一對一且映成』還是一個合法的函數！這個對應箭頭倒過來就是**反函數**（*inverse function*）的意思，因此，正式的說法為，一對一且映成的函數才存在其反函數。 ■

題外話（值域、核心 v.s. 列空間、零空間） 我們一直用線性系統 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 來串連本書的抽象題材，介紹完值域、核心的定義後，當然還是要透過將它們與已經學過的東西結合。若 $L:R^m \to R^n$ ， $L(\mathbf{x})=\mathbf{Ax}$ ，則

(a) $\text{range}\,L=\mathbf{A}$ 之行空間

(b) $\ker L=\mathbf{A}$ 之零空間

既然我們將 $\text{range}\,L$ 、 $\ker L$ 比擬爲矩陣的行空間、零空間，則線性轉換 L 有零度、秩的概念也是理所當然的了。

(c) $\dim(\text{range}\,L)$ 稱爲 L 之**秩**（*rank of* L），即 $\dim(\text{range}\,L)=rank\ \mathbf{A}$ ；

(d) $\dim(\ker L)$ 稱爲 L 之**零度**（*nullity of* L），即 $\dim(\ker L)=nullity\ \mathbf{A}$ 。

將以上 (a) 至 (d) 放在心裡，並結合定理 6-3 的各性質，我們可以用簡單求解本章的題目。 ■

例題 6-6 （值域、核心）

令 $L:R^4 \to R^3$ 爲線性轉換，其中

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x+y+z \\ y+z+w \\ x-z \end{bmatrix}$$

試求 (a) $\text{range}\,L$ ； (b) $\ker L$ ； (c) L 是否一對一 ； (d) L 是否映成 。

【解答】

首先，改寫函數

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x+y+z \\ y+z+w \\ x-z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{基本列運算}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $\text{range}\,L$ （ $\mathbf{A}$ 的行空間）

$$\text{range}\,L=\text{span}\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$$ （基底爲 $\mathbf{A}$ 中帶頭一相對行之行向量）

(b) $\ker L$ （ $\mathbf{A}$ 的零空間）

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t, \quad s,t \in R$$

$$\Rightarrow \quad \ker L = \operatorname{span}\{(-1,1,0,-1),(-1,0,1,-1)\}$$

(c) $\dim(\ker L) = 2 \neq 0$ ，故 L 並非一對一。

(d) $\dim(\operatorname{rnage} L) = 2 \neq \dim R^3$ ，故 L 並非映成。 ■

例題 6-7　（值域、核心）

令 $L: R^4 \to R^3$ 爲線性轉換，其中

$$L(x,y,z,w) = (x+y, z+w, x+z)$$

試求：(a) $\operatorname{range} L$ 之基底；(b) $\ker L$ 之基底；(c) L 是否一對一 ；(d) L 是否映成 。

【解答】

首先，改寫函數

$$L(x,y,z,w) = (x+y, z+w, x+z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{基本列運算}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $\operatorname{range} L$ （ $\mathbf{A}$ 的行空間）

$$\operatorname{range} L = \operatorname{span}\{(1,0,1),(0,1,1),(0,1,0)\}$$

基底爲 $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,1,0)\}$ 。

(b) $\ker L$ （ $\mathbf{A}$ 的零空間）

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} s, \quad s \in R$$

$$\Rightarrow \quad \ker L = \operatorname{span}\{(-1,1,1,-1)\}$$

基底爲$\{(-1,1,1,-1)\}$。

(c) $\dim(\ker L) = 1 \neq 0$，故 L 並非一對一。

(d) $\dim(\operatorname{rnage} L) = 3 = \dim R^3$，故 L 爲映成。

6.3 轉換矩陣

本節整合線性轉換與上一章介紹的座標變換。首先，請牢記以下基本觀念：

座標變換，兩個基底（座標系統）間的座標變換，只涉及一個向量空間；

線性轉換，兩個向量空間之間的座標變換，可能涉及不同基底。

另外，我們會與一堆數學符號周旋，這是沒有辦法的事；請先參考圖 6-3。

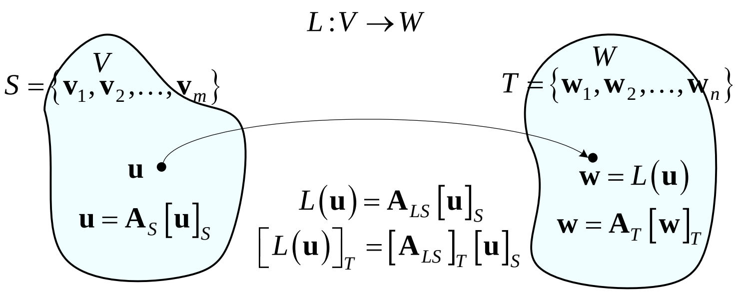


圖 6-3

首先，我們將符號歸成五類，向量空間、向量、基底、座標、轉換矩陣：

向量空間：V 、W ；

向量：$\mathbf{u}$ 、$\mathbf{w}$ 、$L(\mathbf{u})$ ；

基底：$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m\}$ 、$T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n\}$ ；

座標：$[\mathbf{u}]_S$ 、$[\mathbf{w}]_T$ 、$[L(\mathbf{u})]_T$ ；

轉換矩陣：$\mathbf{A}_S$ 、$\mathbf{A}_T$ 、$\mathbf{A}_{LS}$ 、$[\mathbf{A}_{LS}]_T$ 、$\mathbf{A}_S^{-1}$ 、$\mathbf{A}_T^{-1}$ 。

其中，轉換矩陣要特別注意，依據不同內容間的轉換，又分成好幾類：

向量←座標：$\mathbf{u}=\mathbf{A}_S[\mathbf{u}]_S$ 、$L(\mathbf{u})=\mathbf{A}_T[L(\mathbf{u})]_T$ 、$L(\mathbf{u})=\mathbf{A}_{LS}[\mathbf{u}]_S$ ；

座標←向量：$[\mathbf{u}]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{u}$ 、$[L(\mathbf{u})]_T=\mathbf{A}_T^{-1}L(\mathbf{u})$ ；

座標←座標：$[L(\mathbf{u})]_T=[\mathbf{A}_{LS}]_T[\mathbf{u}]_S$ 。

請注意，轉換矩陣並不見得都存在反矩陣！$\mathbf{A}_S$ 、$\mathbf{A}_T$ 可以有反矩陣，但 $\mathbf{A}_{LS}$ 、$[\mathbf{A}_{LS}]_T$ 就不一定有，爲什麼？動點腦筋想想吧。最後，要熟記這些轉換矩陣如何以及由哪些向量（座標）所組成：

$\mathbf{A}_S=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m\end{bmatrix}$ ；

$\mathbf{A}_T=\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n\end{bmatrix}$ ；

$\mathbf{A}_{LS}=\begin{bmatrix}L(\mathbf{v}_1) & L(\mathbf{v}_2) & \cdots & L(\mathbf{v}_m)\end{bmatrix}$ ；

好了，我們已經介紹完座標變換與線性轉換的符號與基本關係式。剩下來的就是眼睛放亮一點，發揮創意由這些基本關係式組成我們要的東西。

題外話（轉換矩陣之符號意義）　　我們來解讀一下 $[\mathbf{A}_{LS}]_T$ 符號的意義。$\mathbf{A}$ 表示這是一個轉換矩陣，下標的 L 表示這是一個線性轉換（若沒有 L 則爲座標變換），下標的 S 表示輸入端是 S 基底的座標，$[\bullet]_T$ 表示轉換成 T 基底的座標。若沒有座標符號，如 $\mathbf{A}_{LS}$ 則表示轉換的結果是一個向量。

好了，我們練習一下沒有出現的符號：$[\mathbf{A}_S]_T$ 。看出來了嗎？這是一個將 S 座標轉換成 T 座標的座標變換矩陣，關係式寫出來應如 $[\mathbf{u}]_T=[\mathbf{A}_S]_T[\mathbf{u}]_S$ 。 ■

定義　（表示 L 之轉換矩陣）

令 $L:V\to W$ 爲線性轉換，$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m\}$ 、$T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n\}$ 分別爲 V 、W 之

基底，任意$\mathbf{u}\in V$，若

$$\left[L(\mathbf{u})\right]_T=\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_T\left[\mathbf{u}\right]_S$$

則稱$\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_T$爲**表示線性轉換**$L$**之轉換矩陣**（*matrix representing* L with respect to the bases S and T）。■

題外話（推導$\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_T$） 在上面的關係式，沒有提供$\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_T$，它可以由基本轉換矩陣（$\mathbf{A}_S$、$\mathbf{A}_T$、$\mathbf{A}_{LS}$）組合而來。以下是推導過程：

$$\left[L(\mathbf{u})\right]_T=\mathbf{A}_T^{-1}L(\mathbf{u})=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_{LS}\left[\mathbf{u}\right]_S \quad\Rightarrow\quad \left[\mathbf{A}_{LS}\right]_T=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_{LS}$$

可以這樣想，$\mathbf{A}_{LS}$轉換後的結果是向量（把$\mathbf{A}_{LS}$看成向量），而$\mathbf{A}_T^{-1}$則進一步將向量（$\mathbf{A}_{LS}$）轉換成T之座標：$\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_{LS}$。相同道理，若$S$、$T$爲在同一個向量空間上的基底，則$\left[\mathbf{A}_S\right]_T$的推導如下

$$\left[\mathbf{u}\right]_T=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{u}=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_S\left[\mathbf{u}\right]_S \quad\Rightarrow\quad \left[\mathbf{A}_S\right]_T=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_S$$

上一章，我們將這個座標變換矩陣$\left[\mathbf{A}_S\right]_T$標記爲$\mathbf{P}_{T\leftarrow S}$。■

題外話（計算課題：不要直接找$\mathbf{A}^{-1}$） 在座標變換或線性轉換的計算，我們常常有面臨反矩陣的場合，不要真的直接去找反矩陣，那會煩死人。以下是建議作法：

(1) 已知$\mathbf{u}=\mathbf{A}_S\left[\mathbf{u}\right]_S$、$\mathbf{u}$、$\mathbf{A}_S$，求$\left[\mathbf{u}\right]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{u}$。

作法爲處理以下增廣矩陣

$$\left[\mathbf{A}_S \mid \mathbf{u}\right]\xrightarrow{\text{基本列運算}}\left[\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_S \mid \mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{u}\right]=\left[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{u}\right]$$

以基本列運算將左方轉換爲單位矩陣，則右方即爲所求之$\left[\mathbf{u}\right]_S$。

(2) 已知$\mathbf{A}_T$、$\mathbf{A}_{LS}$，求$\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_T=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_{LS}$。

處理以下增廣矩陣

$$\left[\mathbf{A}_T \mid \mathbf{A}_{LS}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_T \mid \mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_{LS}\right]=\left[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_{LS}\right]$$

有沒有捉到重點？將需要求反矩陣的矩陣（如$\mathbf{A}_S$ 、 $\mathbf{A}_T$ ）擺在增廣矩陣的左方，其它部分擺在右方，然後以基本列運算將左方轉換成單位矩陣即可。 ■

例題 6-8　（避開直接找反矩陣）

令$L:V\to W$為線性轉換， $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ 、 $T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$ 分別為V 、 W 基底，其中

$$\mathbf{v}_1=(1,1,0),\quad \mathbf{v}_2=(0,1,1),\quad \mathbf{v}_3=(0,0,1),$$

$$\mathbf{w}_1=(1,2),\quad \mathbf{w}_2=(1,3)$$

而且已知

$$L(\mathbf{v}_1)=(2,3),\quad L(\mathbf{v}_2)=(2,1),\quad L(\mathbf{v}_3)=(1,3)$$

試求S座標與T座標間的轉換矩陣$\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_T$ 。

【解答】

我們知道$\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_T=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_{LS}$ 。

由題目資訊，我們有

$$\mathbf{A}_T=\left[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_1\right]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}_{LS}=\left[L(\mathbf{v}_1)\quad L(\mathbf{v}_1)\quad L(\mathbf{v}_1)\right]=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

處理以下增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3\end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \left[\mathbf{A}_{LS}\right]_T=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

還記得反矩陣的數值解過程嗎？是不是與這裡處理的增廣矩陣有所雷同。所以呢，事實上，我們是有求反矩陣，間接的啦。 ■

向量空間內的線性轉換

本小節討論線性轉換$L:V\to V$（定義域與對應域的空間相同）的轉換矩陣。這時，基底$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m\}$ 、 $T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m\}$ 在相同的向量空間，因此有座標變換的可能性。我們將討論相同基底座標間的線性轉換矩陣，$\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_S$ 與$\left[\mathbf{A}_{LT}\right]_T$ ，並建立這兩個

轉換矩陣的關係式。

定理 6-4 (線性轉換矩陣之座標變換)

令 $L:V\to V$ 爲線性轉換，$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m\}$ 、$T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m\}$ 爲 V 之基底，若轉換矩陣 $\mathbf{A}_{LS}$ 已知如下

$$\mathbf{A}_{LS}=\begin{bmatrix} L(\mathbf{v}_1) & L(\mathbf{v}_2) & \cdots & L(\mathbf{v}_m)\end{bmatrix}$$

則對任意 $\mathbf{u}\in V$ ，

(a) $[\mathbf{A}_{LS}]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_{LS}$

(b) $[\mathbf{A}_{LT}]_T=[\mathbf{A}_T]_S^{-1}[\mathbf{A}_{LS}]_S[\mathbf{A}_T]_S$

其中，

$$\mathbf{A}_S=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_m\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_T=\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n\end{bmatrix},\quad [\mathbf{A}_T]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T$$

【證明】

(a)

由定義 $L(\mathbf{u})=\mathbf{A}_{LS}[\mathbf{u}]_S$ 、$L(\mathbf{u})=\mathbf{A}_S\left[L(\mathbf{u})\right]_S$ ，故

$$L(\mathbf{u})=\mathbf{A}_{LS}[\mathbf{u}]_S=\mathbf{A}_S\left[L(\mathbf{u})\right]_S \quad\Rightarrow\quad \left[L(\mathbf{u})\right]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_{LS}[\mathbf{u}]_S \tag{6-4}$$

可得到

$$[\mathbf{A}_{LS}]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_{LS} \tag{6-5}$$

(b)

由定義 $\mathbf{u}=\mathbf{A}_S[\mathbf{u}]_S=\mathbf{A}_T[\mathbf{u}]_T$ 、$L(\mathbf{u})=\mathbf{A}_S\left[L(\mathbf{u})\right]_S=\mathbf{A}_T\left[L(\mathbf{u})\right]_T$ ，故

$$[\mathbf{u}]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T[\mathbf{u}]_T$$
$$\left[L(\mathbf{u})\right]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T\left[L(\mathbf{u})\right]_T$$

將這兩式代入(6-4)，可得

$$\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T\left[L(\mathbf{u})\right]_T=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_{LS}\left(\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T[\mathbf{u}]_T\right)$$
$$\Rightarrow\quad \left[L(\mathbf{u})\right]_T=\left(\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T\right)^{-1}\left(\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_{LS}\right)\left(\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T\right)[\mathbf{u}]_T=[\mathbf{A}_T]_S^{-1}[\mathbf{A}_{LS}]_S[\mathbf{A}_T]_S[\mathbf{u}]_T$$

也就是

$$\left[\mathbf{A}_{LT}\right]_T=\left[\mathbf{A}_T\right]_S^{-1}\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_S\left[\mathbf{A}_T\right]_S \tag{6-6}$$

■

題外話　(6-6)的意義爲，我們在向量空間V的基底S上已經（辛苦地）建立一個表示L的線性轉換矩陣$\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_S$。現在，假如我們在$V$上定義一個新的基底$T$，那麼可不可以利用已知的$\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_S$資訊，來建立新基底上來表示$L$的線性轉換矩陣$\left[\mathbf{A}_{LT}\right]_T$？當然答案是肯定的，我們只要先（簡單）建立$T$座標到$S$座標的座標變換矩陣$\left[\mathbf{A}_T\right]_S$，再利用(6-6)就可以了。■

例題 6-9　（驗證轉換矩陣）

令$L:R^2\to R^2$爲線性轉換，

$$L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+y\\x-2y\end{bmatrix};$$

又令

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right\},\quad T=\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

爲R^2的基底。則

(1)基本轉換矩陣如下

$$\mathbf{A}_S=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_T=\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}_{LS}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&4\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}_{LT}=\begin{bmatrix}0&3\\3&-3\end{bmatrix}$$

其中

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix},\quad L\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix},\qquad L\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix},\quad L\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}$$

(2)求 $\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_{LS}$，處理以下增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&2&1\\1&-1&-1&4\end{array}\right]\xrightarrow{\text{基本列運算}}\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&3\\0&1&1&-1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \left[\mathbf{A}_{LS}\right]_S=\begin{bmatrix}0&3\\1&-1\end{bmatrix}$$

(3)求 $\left[\mathbf{A}_{LT}\right]_T=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_{LT}$，處理以下增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \ \left[\mathbf{A}_{LT}\right]_T = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4)求 $\left[\mathbf{A}_T\right]_S = \mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T$ ，處理以下增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \ \left[\mathbf{A}_T\right]_S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(5)求 $\left[\mathbf{A}_{LT}\right]_T = \left[\mathbf{A}_T\right]_S^{-1}\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_S\left[\mathbf{A}_T\right]_S$

$$\left[\mathbf{A}_{LS}\right]_S\left[\mathbf{A}_T\right]_S = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

處理以下增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 2 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \ \left[\mathbf{A}_{LT}\right]_T = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3)與(5)求到的$\left[\mathbf{A}_{LT}\right]_T$ 相同。 ■

6.4 特徵值與特徵向量

本節介紹同向量空間的一個非常特殊的線性轉換： $L:V \to V$ ，

$$L(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u} \tag{6-7}$$

其中，$\mathbf{u} \in V, \lambda \in R$ 。線性轉換的結果沒有改變向量的方向，只是將它的大小作比例λ之改變。若持續作相同的線性轉換，如

$$L^2(\mathbf{u}) = L(L(\mathbf{u})) = \lambda^2 \mathbf{u}$$
$$\vdots$$
$$L^n(\mathbf{u}) = \lambda^n \mathbf{u}$$

則向量的大小會趨近於 0 或∞：

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L^n(\mathbf{u}) \right\| = \begin{cases} 0 & 若 |\lambda| < 1 \\ \|\mathbf{u}\| & 若 |\lambda| = 1 \\ \infty & 若 |\lambda| > 1 \end{cases}$$

上面（會使向量大小並爲無限大的）性質應用在許多領域，例如，工程建物的共振。

並不是所有向量空間V中的向量都有(6-7)的性質，事實上，最多只有$\dim V$個向量滿足(6-7)。沒有錯，就是與V的維度有關。還有更有趣的，這些向量都伴隨著特定的λ值。我們稱這些特殊向量爲**特徵向量**（*eigenvector*，*characteristic vector*），而這些伴隨著的λ值爲**特徵值**（*eigenvalue*，*characteristic value*）。

根據上一節的結果，若$V = R^n$，則存在一表示L之轉換矩陣$\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$，使得(6-7)變成如下的線性系統：

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{6-8}$$

我們的興趣是，找出方陣$\mathbf{A}$的特徵值與特徵向量。一共最多有n對，還記得？

例題 6-10　（驗證特徵向量、特徵值）

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

試驗證(a) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$，$(b)$ $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$爲$\mathbf{A}$之特徵向量。

【解答】

驗證如下

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}_1, \qquad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\mathbf{v}_2$$

故$\mathbf{v}_1$、$\mathbf{v}_2$爲$\mathbf{A}$之特徵向量，且其特徵值分別爲$\lambda_1 = 3$、$\lambda_2 = -1$。 ■

定理 6-5　(特徵向量的非零倍數仍為特徵向量)

令 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ ，$\mathbf{u}\in R^{n}$ ，$\lambda\in R$ ，使得 $\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}$ 。

若 $\mathbf{w}=c\mathbf{u}, c\neq 0$ ，則 $\mathbf{Aw}=\lambda\mathbf{w}$ 。

【證明】

$$\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u} \quad\Rightarrow\quad c(\mathbf{Au})=c(\lambda\mathbf{u}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}(c\mathbf{u})=\lambda(c\mathbf{u}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Aw}=\lambda\mathbf{w}$$ 。 ■

題外話（特徵向量不可以為零向量）　　決定特徵向量的是以下齊次系統：

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

這個系統一定有 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 這個瑣碎解，在這個情況下，特徵值 λ 可以爲任何實數值，並沒有爲我們帶來任何有意義的訊息。因此，特徵值不能爲 $\mathbf{0}$ 。考慮以下矩陣與向量：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} \qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{Ax}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

這個情況，我們認定特徵值 $\lambda=0$ 。也就是說，特徵值可以爲零，但特徵向量不可以爲零向量。 ■

例題 6-11　（驗證特徵向量、特徵值）

令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7&-2&-1\\-2&10&2\\-1&2&7\end{bmatrix}$$

試驗證 (a) $\lambda_1=12$ ，(b) $\lambda_2=6$ 爲 $\mathbf{A}$ 之特徵值。

【解答】

我們需將 λ 代入，並檢測下列線性系統（齊次系統）的解：

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Ax}-\lambda\mathbf{x}=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

若只有瑣碎解 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ，則該 λ 不是特徵值；反之若有非瑣碎解，則 λ 爲特徵值，而且該非瑣碎解爲特徵向量。

(a) $\lambda_1=12$，處理以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7-12 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 10-12 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 7-12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} s, \quad s \in R$$

故 $\lambda_1=12$ 爲特徵值，而其特徵向量爲 $\mathbf{x}_{\lambda_1}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ 。

(b) $\lambda_2=6$，處理以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7-6 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 10-6 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 7-6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad s,t \in R$$

故 $\lambda_2=6$ 爲特徵值，而其特徵向量有許多，上式的 $\mathbf{x}$ 都是。 ■

題外話（特徵值空間） 在例題 6-11 的 (b) $\lambda_2=6$，以下向量空間的向量都是 $\lambda_2=6$ 的特徵向量

$$W=\left\{\mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad s,t \in R\right\}$$

一般我們會以該空間的基底的向量來代表，如

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

我們已經知道，一個向量空間會有許許多多的基底。現在問題來了，哪一個基底比較好呢？答案很明顯，就是**單模正交基底**。以下是將一般基底轉換爲單模正交基底的 Gram-Schmidt 程序，正交步驟：

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

正規化步驟：

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

若與(a) $\lambda_1 = 12$ 得到的特徵向量 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ 比較，我們可以發現，$\mathbf{x}_1$ 也正交於 $\mathbf{w}_1$ 、 $\mathbf{w}_2$ 。它的門道在於 $\mathbf{A}$ 爲**對稱矩陣**（*symmetric matrix*），我們在下一節會討論這個課題。 ■

找特徵值與特徵向量

方陣 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ 的特徵向量，爲下列線性系統的解

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

亦即，特徵向量爲下列齊次系統的非瑣碎解

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{6-9}$$

而(6-9)有非瑣碎解的條件爲

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \tag{6-10}$$

其中，多項式 $f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ 稱爲 $\mathbf{A}$ 的**特徵多項式**（*characteristic polynomial*），而方程式 $f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ 稱爲 $\mathbf{A}$ 的**特徵方程式**（*characteristic equation*）。也就是說，$\mathbf{A}$

之特徵方程式的根即爲其特徵值。$f(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$ 爲 $n=\dim\mathbf{A}$ 階的多項方程式，最多有 n 個實數根，所以呢，$\mathbf{A}$ 最多有 n 個特徵值。

找方陣 $\mathbf{A}$ 之特徵值、特徵向量的步驟如下：

步驟一：找出特徵值

解特徵方程式

$$f(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$$

其實數根，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,\ k\le n$，即爲特徵值。

步驟二：找特徵向量

將步驟一得到的特徵值 $\lambda_i,\ i=1,\ldots,k$ 分別代入(6-9)：

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

以上齊次系統的非瑣碎解（基底向量）即爲 λ_i 的特徵向量。

若有基底向量數目多於一，則以 Gram-Schmidt 程序找正交基底。

例題 6-12　（找特徵值、特徵向量）

令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$$

試求其特徵值、特徵向量。

【解答】

求解特徵方程式：

$$\left|\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad(1-\lambda)(1-\lambda)-4=0$$

$$\Rightarrow\quad\lambda_1=3,\quad\lambda_2=-1$$

(1)令 $\lambda_1=3$，處理以下線性系統：

$$\left[\begin{array}{cc|c}1-3&2&0\\2&1-3&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{基本列運算}}\left[\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right]\quad\Rightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}t,\quad t\in R$$

$$\Rightarrow\quad\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

(2)令 $\lambda_2=-1$，處理以下線性系統：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-(-1) & 2 & 0 \\ 2 & 1-(-1) & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \in R$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故其特徵值爲 $\lambda_1 = 3$、$\lambda_2 = -1$，特徵向量爲 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$、$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$。 ■

例題 6-13　（找特徵值、特徵向量）

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

試求其特徵值、特徵向量。

【解答】

求解特徵方程式：

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 10-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{基本列運算}} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 6-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -12+2\lambda \\ -1 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 6-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -12+2\lambda \\ -1 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{基本行運算}} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 12-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 12, 6, 6$$

(1)令 $\lambda_1 = 12$，處理以下線性系統：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7-12 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 10-12 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 7-12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} s, \quad s \in R$$

故其特徵向量爲 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$。

(2)令 $\lambda_2 = 6$，處理以下線性系統：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7-6 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 10-6 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 7-6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t, \quad s,t \in R$$

因 $\lambda_2 = 6$ 爲重根，有兩個特徵向量是正常的。

以 Gram-Schmidt 程序將上式的基底轉換爲正交基底：

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

故其特徵向量爲 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 、 $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ 。

本題特徵值爲 $\lambda_1 = 12$ 、 $\lambda_2 = 6$ 、 $\lambda_3 = 6$ ，其特徵向量分別爲 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ 、 $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 、 $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ 。 ■

題外話（有關特徵方程式 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ 的求解） 找特徵值、特徵向量的過程，求解特徵方程式是必要的、非常令人討厭的步驟。一句箴言：

『不要草率的直接將行列式值乘開！』

乘開後，除了加加減減整理多項式的程序很煩，容易出錯，最要命的是配方，有些時候就是配不出來。筆者建議先用基本列運算、基本行運算，將行列式中弄一些零元素出來，這樣作列展開（或行展開）時會清爽許多。例如

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{列}:(1)+(2)} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{行}:(2)-(1)} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

若所有根都是有理數，以上作法可以一路到底，直接從對角元素看出答案。當然，如果有無理根或虛根來攪局，只好打起精神來，拼配方技巧了。 ■

以下是幾個有關特徵值與特徵向量的重要性質。

定理 6-6

若 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ 爲奇異矩陣，則 $\lambda=0$ 爲 $\mathbf{A}$ 的特徵值；反之亦然。

【證明】

考慮特徵方程式 $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$，將 $\lambda=0$ 代入，則爲 $\det(\mathbf{A})=0$；反之，由 $\det(\mathbf{A})=0$ 可得 $\lambda=0$ 爲 $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$ 之一個解。 ■

定理 6-7

若 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 爲 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ 的 n 個特徵值，則 $\det(\mathbf{A})=\lambda_1\times\lambda_2\times\cdots\times\lambda_n$ 。

【證明】

考慮特徵方程式 $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0$ ，將 $\lambda=0$ 代入，則得到 $\det(\mathbf{A})=\lambda_1\times\lambda_2\times\cdots\times\lambda_n$ 。 ■

定理 6-8

若 λ 爲 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ 之特徵值，且 $\det(\mathbf{A})\neq 0$ ，則 $1/\lambda$ 爲 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特徵值。

【證明】

由已知條件： $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$ ，兩邊乘上 $\mathbf{A}^{-1}$ ： $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}=\mathbf{x}=\lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}=\frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$ 。

$\det(\mathbf{A})\neq 0$ 告訴我們 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，且 $\lambda\neq 0$ 。 ■

定理 6-9

若 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ 爲 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ 之相異特徵值，則其特徵向量 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$ 互相獨立。

【證明】

令

$$\mathbf{x}_k=c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\cdots+c_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} \tag{6-11}$$

其中 $c_1,c_2,\ldots,c_{k-1}\in R$ ，則

$$\begin{aligned}&\mathbf{Ax}_k=c_1\mathbf{Ax}_1+c_2\mathbf{Ax}_2+\cdots+c_{k-1}\mathbf{Ax}_{k-1}\\ \Rightarrow\quad&\lambda_k\mathbf{x}_k=c_1\lambda_1\mathbf{x}_1+c_2\lambda_2\mathbf{x}_2+\cdots+c_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}\end{aligned}$$

將該式與(6-11)的 λ_k 倍，則

$$0=c_1\left(\lambda_1-\lambda_k\right)\mathbf{x}_1+c_2\left(\lambda_2-\lambda_k\right)\mathbf{x}_2+\cdots+c_{k-1}\left(\lambda_{k-1}-\lambda_k\right)\mathbf{x}_{k-1}$$

因 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ 互不相等，故

$$c_1=c_2=\cdots=c_{k-1}$$

即 $\mathbf{x}_k$ 獨立於 $\left\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_{k-1}\right\}$，我們沒有特意排序，故 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$ 互相獨立。 ■

題外話（與 $\det\left(\mathbf{A}\right)\neq 0$ 相關的敘述） 以下有關 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ 的敘述散在各課題的討論，雖然涉及不同名詞，但數學意涵完全一樣：

(1) $\mathbf{A}$ 不是奇異矩陣（*nonsingular*）。

(2) $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有瑣碎解（*trivial solution*）。

(3) $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{I}_n$ 列等價（*row equivalent*）。

(4) $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解。

(5) $\det\left(\mathbf{A}\right)\neq 0$。

(6) *rank* $\mathbf{A}=n$。

(7) *nullity* $\mathbf{A}=0$。

(8) $\mathbf{A}$ 的列向量線性獨立。

(9) $\mathbf{A}$ 的行向量線性獨立。

(10) $\mathbf{A}$ 的特徵值不為零，$\lambda\neq 0$。 ■

6.5 矩陣對角化

本節對一個特殊矩陣有興趣：對角矩陣。就特徵值與特徵向量的觀點，對角矩陣非常優秀：其對角元素就是特徵值：$\lambda_i=a_{ii}, i=1,\ldots,n$，而特徵向量就是自然基底向量：$\mathbf{e}_i$，$\mathbf{e}_i$ 為單位矩陣 $\mathbf{I}_n$ 的第 i 行向量，$i=1,\ldots,n$。

例題 6-14 （對角矩陣的特徵值、特徵向量）

令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

試求其特徵值、特徵向量。

【解答】

求解特徵方程式：

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&4-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (2-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow\quad \lambda=2,4,3$$

(1)令 $\lambda_1=2$，處理以下線性系統：

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2-2&0&0&0\\0&4-2&0&0\\0&0&3-2&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{基本列運算}}\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}s,\quad s\in R$$

故其特徵向量爲 $\mathbf{x}_1=\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}^T$ 。

其它特徵向量分別爲： $\mathbf{x}_2=\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}^T$ 、 $\mathbf{x}_3=\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}^T$ 。 ■

以下討論的定義、性質只有一個目的：將一般矩陣與對角矩陣搭上線，好利用對角矩陣一眼就可以看出特徵值與特徵向量的好特性。

定義 （相似矩陣）

矩陣 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ ，若存在非奇異矩陣 $\mathbf{P}$ ，使得

$$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$$

則稱 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 爲**相似矩陣**（*similar matrix*）。 ■

定義 （可對角化矩陣）

若矩陣 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ 與對角矩陣相似，則稱 $\mathbf{A}$ 爲**可對角化**（*diagonalizable*）。 ■

例題 6-15 （驗證相似矩陣）

令

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

試驗證 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 爲相似矩陣。

【解答】

驗算這些矩陣

$$|\mathbf{P}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

$$\mathbf{AP}=\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{PB}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

我們有

$$\mathbf{PB}=\mathbf{AP}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$$

故 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 相似。且 $\mathbf{A}$ 爲可對角化矩陣。 ■

定理 6-10

若 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ ，且存在非奇異矩陣 $\mathbf{P}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ 使得 $\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ ，則 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 有相同的特徵值，而且 $\mathbf{x}_B=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_A$ ，其中 $\mathbf{x}_A$ 、 $\mathbf{x}_B$ 分別爲 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 之特徵向量。

【證明】

若已知 λ 、 $\mathbf{x}_A$ 爲 $\mathbf{A}$ 之特徵值、特徵向量，即 $\mathbf{Ax}_A=\lambda\mathbf{x}_A$ 。

等號兩邊同乘 $\mathbf{P}^{-1}$ ，並令 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_A=\mathbf{y}$ ，即 $\mathbf{x}_A=\mathbf{Py}$ ，則

$$\mathbf{Ax}_A=\lambda\mathbf{x}_A\quad\Rightarrow\quad\mathbf{P}^{-1}\mathbf{APy}=\lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Py}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{By}=\lambda\mathbf{y}$$

故知 λ 也是 $\mathbf{B}$ 之特徵值，且其特徵向量 $\mathbf{x}_B=\mathbf{y}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_A$ 。

倒過來，若已知 λ 、 $\mathbf{x}_B$ 爲 $\mathbf{B}$ 之特徵值、特徵向量，則

$$\mathbf{Bx}_B=\lambda\mathbf{x}_B\quad\Rightarrow\quad\mathbf{P}^{-1}\mathbf{APx}_B=\lambda\mathbf{x}_B\quad\Rightarrow\quad\mathbf{PP}^{-1}\mathbf{APx}_B=\mathbf{APx}_B=\lambda\mathbf{Px}_B$$

故知λ也是$\mathbf{A}$之特徵值，且其特徵向量$\mathbf{x}_A = \mathbf{P}\mathbf{x}_B$。 ■

例題 6-16　（驗證相似矩陣的特徵值、特徵向量）

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

因$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$，故知$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$爲相似矩陣。試驗證$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$特徵值、特徵向量之關係。

【解答】

我們已於例題 6-12 找出$\mathbf{A}$的特徵值與特徵向量：

$$\lambda_A = 3, -1, \qquad \mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$是對角矩陣，其的特徵值與特徵向量可目視而得：

$$\lambda_B = 3, -1, \qquad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

驗證$\mathbf{x}_A = \mathbf{P}\mathbf{x}_B$，$\mathbf{x}_B = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_A$：

$$\mathbf{P}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{X}_A$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}_A = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{X}_B$$

這驗證了定理 6-10 介紹相似矩陣特徵向量的關係。 ■

定理 6-11　(將矩陣對角化的方法)

若$\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$爲可對角化矩陣，則$\mathbf{A}$有$n$個相互獨立的特徵向量，反之亦然。

也就是說，若$\mathbf{A}$爲可對角化，則以下等式成立

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$$

其中，$\mathbf{P}$之行向量爲由$\mathbf{A}$之特徵向量，$\mathbf{D}$爲由$\mathbf{A}$之特徵值爲對角元素的對角矩陣。

【證明】

（若的部分）若 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n \times n}$ 爲可對角化矩陣，則存在 $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2,\ \cdots\ ,\mathbf{p}_n]$，$\det(\mathbf{P}) \neq 0$，使得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{P} \tag{6-12}$$

其中，$\mathbf{p}_i, i = 1, \ldots, n$ 爲 $\mathbf{P}$ 之第 i 行向量，$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ 爲對角矩陣。(6-12) 可以 $\mathbf{P}$ 之各行拆開爲 n 個等式

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{p}_1 &= a_{11}\mathbf{p}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{p}_2 &= a_{22}\mathbf{p}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{p}_n &= a_{nn}\mathbf{p}_n \end{aligned}$$

此證明 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ 爲 $\mathbf{A}$ 之特徵值，$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ 爲 $\mathbf{A}$ 之特徵向量，又 $\det(\mathbf{P}) \neq 0$，故 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ 獨立。

（唯若的部分）令 $\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots\ ,\mathbf{x}_n]$，$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，其中，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ 分別爲 $\mathbf{A}$ 之特徵值、特徵向量。因 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ 獨立故 $\det(\mathbf{P}) \neq 0$，則

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$$

故 $\mathbf{A}$ 爲可對角化矩陣。 ■

例題 6-17　（驗證可對角化矩陣）

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

試驗證 $\mathbf{A}$ 爲可對角化矩陣。

【解答】

求解特徵方程式：

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 6, -1$$

(1)令 $\lambda_1 = 6$，處理以下線性系統：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-6 & 2 & 0 \\ 5 & 4-6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}s, \quad s\in R$$

(2)令 $\lambda_1=-1$，處理以下線性系統：

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-(-1) & 2 & 0 \\ 5 & 4-(-1) & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}s, \quad s\in R$$

得到

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{P}|=\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{3}{5}\neq 0$$

因 $\mathbf{A}$ 有 2 個獨立特徵向量，故 $\mathbf{A}$ 為可對角化矩陣。其實，$\dim\mathbf{A}=2$，且找到 2 個相異實數特徵值，就可以下 $\mathbf{A}$ 為可對角化矩陣的結論。■

題外話（相似矩陣中 P 的前後位置） 在相似矩陣的定義、定理 6-10、以及定理 6-11 中，同學會頭痛：『到底應該是 $\mathbf{P}$ 擺前面，還是 $\mathbf{P}^{-1}$ 擺前面？』以下是筆者學生時代發展的記憶法，滿管用的。記住『$\mathbf{P}\equiv\mathbf{x}\equiv$ 特徵向量』以及『$\mathbf{D}\equiv\lambda\equiv$ 特徵值』，然後回憶以下兩個式子：

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$$
$$\mathbf{AP}=\mathbf{DP}$$

並隨時提醒自己『特徵向量 $\mathbf{x}$ 擺在 $\mathbf{A}$ 的後面』，這就夠了。以下是真正要記的公式

$$\mathbf{AP}=\mathbf{PD}=\mathbf{DP}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{D}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{PDP}^{-1}$$

■

題外話（可對角化矩陣之超越函數） 矩陣的可對角化性質可以豐富矩陣運算：從四則運算擴展到指數、對數、與三角函數等超越函數的運算。所有的這些故事根源於兩個地方：(1)對角矩陣的 n 次方很容易求得，(2)泰勒展開式。

令 $\mathbf{D}=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})\in\mathbf{M}_{n\times n}$ 為對角矩陣，很容易可以驗證，其 $k\in R$ 次方為

$$\mathbf{D}^n = \operatorname{diag}\left(a_{11}^k, a_{22}^k, \ldots, a_{nn}^k\right)$$

另外，以下是我們會用到的**泰勒展開式**（*Taylor expansion*）：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

若 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ 爲可對角化矩陣，即存在對角矩陣 $\mathbf{D} = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$ 與非奇異矩陣 $\mathbf{P}$ 與，使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$$

則

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\right)\mathbf{P}^{-1}$$
$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}\right)\mathbf{P}^{-1}$$
$$\ln \mathbf{A} = \mathbf{P}\left(\ln \mathbf{D}\right)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\operatorname{diag}\left(\ln \lambda_1, \ln \lambda_2, \ldots, \ln \lambda_n\right)\mathbf{P}^{-1}, \qquad \lambda_i > 0, 1 = 1, \ldots, n$$
$$\sin \mathbf{A} = \mathbf{P}\left(\sin \mathbf{D}\right)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\operatorname{diag}\left(\sin \lambda_1, \sin \lambda_2, \ldots, \sin \lambda_n\right)\mathbf{P}^{-1}$$

同學可以自行練習以上各式的詳細推導。基本原則是，所有對 $\mathbf{A}$ 的運算都會直接反應到 $\mathbf{D}$ 上（與 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{P}^{-1}$ 無關），而對 $\mathbf{D}$ 的運算就直接寫在對角元素上即可。 ■

例題 6-18　（可對角化矩陣之超越函數）

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

試求(1) $\mathbf{A}^k$ ；(2) $e^{\mathbf{A}}$ 。

【解答】

求得 $\mathbf{A}$ 之特徵值與特徵向量：

$$\lambda = 6, -1, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$$

(1) $\mathbf{A}^k$

$$\mathbf{A}^k=\mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6^k & 0\\ 0 & (-1)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 5 & 5\end{bmatrix}6^k+\frac{1}{7}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -5 & 2\end{bmatrix}(-1)^k$$

(2) $e^{\mathbf{A}}$

$$e^{\mathbf{A}}=\mathbf{P}e^{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^6 & 0\\ 0 & e^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 5 & 5\end{bmatrix}e^6+\frac{1}{7}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -5 & 2\end{bmatrix}e^{-1}$$

■

題外話（有關 $\mathbf{PDP}^{-1}$ 的計算） 在矩陣對角化的課題裡，我們常常需要作 $\mathbf{PDP}^{-1}$ 型式的計算，過程有點煩。以下提供一個徒手計算時比較不會犯錯的方法。

假設我們要算出 $\mathbf{PDQ}$ 的結果，其中，$\mathbf{P}=\left[p_{ij}\right]$、$\mathbf{Q}=\left[q_{ij}\right]$、$\mathbf{D}=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right)$，我們可以將整個結果寫成 n 項（每個 λ_i 一項）之和：

$$\text{第 } i \text{ 項：}\ \lambda_i\begin{bmatrix}p_{1i}\\ p_{2i}\\ \vdots\\ p_{ni}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{i1} & q_{i2} & \cdots & q_{in}\end{bmatrix}$$

例如

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^6 & 0\\ 0 & e^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -5 & 2\end{bmatrix}&=e^6\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}+e^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 5 & 5\end{bmatrix}e^6+\begin{bmatrix}5 & -2\\ -5 & 2\end{bmatrix}e^{-1}\\ &=\begin{bmatrix}2e^6+5e^{-1} & 2e^6-2e^{-1}\\ 5e^6-5e^{-1} & 5e^6+2e^{-1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

多算幾次就可以掌握這是怎麼一回事了。 ■

對稱矩陣的對角化

有關矩陣對角化課題上，**對稱矩陣**（*symmetric matrix*）有一些非常管用的特性：(1)對稱矩陣的特徵方程式全部是實數跟，(2)對稱矩陣一定爲可對角矩陣，(3)對稱矩陣可以找到正交特徵向量，(4)對稱矩陣的 $\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ 。就計算的觀點，第(4)點最帥。

題外話（對稱矩陣） 還是囉唆一點，複習一下對稱矩陣，免得有人快到終點站前，才搔頭、不好意思地問：『什麼是對稱矩陣？』

矩陣 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ ，若 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$ ，則稱 $\mathbf{A}$ 爲**對稱矩陣**（*symmetric matrix*）。

以下都是對稱矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&-3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&-4&7\\-4&2&1\\7&1&5\end{bmatrix}$$

對任何矩陣 $\mathbf{S}\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ， $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}$ 與 $\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ 都是對稱矩陣。證明如下：

$$\left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{S},\qquad \left(\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}=\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$$

例如，

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\2&1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&12\\12&21\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&6\\6&9\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\end{bmatrix}$$

記得這個箴言：『對稱矩陣與轉置有關！』 ■

定理 6-12

若 $\mathbf{A}$ 爲對稱矩陣，則其特徵方程式， $f(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$ ，只有實數根。 ■

定理 6-13

若 $\mathbf{A}$ 爲對稱矩陣，則 $\mathbf{A}$ 爲可對角化矩陣。 ■

定理 6-14 (特徵向量正交)

若 $\mathbf{A}$ 為對稱矩陣，則其相異特徵值之特徵向量互相正交。

【證明】

首先，需瞭解以下算式成立

$$\mathbf{Ax}\bullet\mathbf{y}=\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=\mathbf{x}\bullet\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$$

令 $(\lambda_1,\mathbf{x}_1)$ 、$(\lambda_2,\mathbf{x}_2)$ 為 $\mathbf{A}$ 之兩個特徵值、特徵向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，即以下兩式成立

$$\mathbf{Ax}_1=\lambda_1\mathbf{x}_1,\qquad \mathbf{Ax}_2=\lambda_2\mathbf{x}_2$$

則

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1\bullet\mathbf{x}_2)=(\lambda_1\mathbf{x}_1)\bullet\mathbf{x}_2=(\mathbf{Ax}_1)\bullet\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1\bullet\left(\mathbf{A}^T\mathbf{x}_2\right)=\mathbf{x}_1\bullet(\mathbf{Ax}_2)=\mathbf{x}_1\bullet(\lambda_2\mathbf{x}_2)=\lambda_2(\mathbf{x}_1\bullet\mathbf{x}_2)$$
$$\Rightarrow\quad(\lambda_1-\lambda_2)(\mathbf{x}_1\bullet\mathbf{x}_2)=0$$

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $\mathbf{x}_1\bullet\mathbf{x}_2=0$ ，即該兩特徵向量正交。 ■

題外話（正交向量的好處） 若 $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n\}\subseteq R^n$ 正交，令

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{bmatrix}$$

則

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}=\left[\mathbf{x}_i\bullet\mathbf{x}_j\right]=\mathrm{diag}(\mathbf{x}_1\bullet\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2\bullet\mathbf{x}_2,\ldots,\,\mathbf{x}_n\bullet\mathbf{x}_n)$$

若 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ 也都是正規化後的向量，即 $\|\mathbf{x}_i\|=\sqrt{\mathbf{x}_i\bullet\mathbf{x}_i}=1,\, i=1,\ldots,n$ ，則

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}=\left[\mathbf{x}_i\bullet\mathbf{x}_j\right]=\mathrm{diag}(\mathbf{x}_1\bullet\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2\bullet\mathbf{x}_2,\ldots,\,\mathbf{x}_n\bullet\mathbf{x}_n)=\mathbf{I}_n$$

也就是說，若 $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n\}\subseteq R^n$ 為單模正交基底，則 $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}=\mathbf{P}^{-1}$ 。 ■

定義 （正交矩陣）

矩陣 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ ，若 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{-1}$ ，則稱 $\mathbf{A}$ 為**正交矩陣**（*orthogonal matrix*）。 ■

定義　（可正交對角化矩陣）

矩陣 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ ，若存在正交矩陣 $\mathbf{P}$ 與對角矩陣 $\mathbf{D}$ ，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ ，則稱 $\mathbf{A}$ 爲可正交對角化矩陣（*orthogonally diagonalizable*）。■

定理 6-15　(對稱矩陣為可正交對角化矩陣)

若 $\mathbf{A}$ 爲對稱矩陣，則其爲可正交對角化矩陣，反之亦然。

【證明】

（唯若的部分）若 $\mathbf{A}$ 爲可正交對角化矩陣，則存在正交矩陣 $\mathbf{P}$ 與對角矩陣 $\mathbf{D}$ ，使

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{PDP}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{PDP}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{PDP}^{\mathrm{T}} = \mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{A}$$

得證 $\mathbf{A}$ 爲對稱矩陣。■

例題 6-19　（驗證對稱矩陣為可正交對角化）

令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

試驗證 $\mathbf{A}$ 可正交對角化矩陣。

【解答】

(1)找 $\mathbf{A}$ 之特徵值

求解特徵方程式：

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 10-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{基本列運算}} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 6-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -12+2\lambda \\ -1 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 6-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -12+2\lambda \\ -1 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{基本行運算}} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 12-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 12, 6, 6$$

(2)找正交特徵向量

令 $\lambda_1 = 12$ ，處理以下線性系統：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7-12 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 10-12 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 7-12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} s, \quad s \in R$$

故其特徵向量爲 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ 。

令 $\lambda_2 = 6$，處理以下線性系統：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7-6 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 10-6 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 7-6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t, \quad s,t \in R$$

因 $\lambda_2 = 6$ 爲重根，有兩個特徵向量是正常的。

以 Gram-Schmidt 程序將上式的基底轉換爲正交基底：

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

故其特徵向量爲 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 、 $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ 。

(3)將特徵向量正規劃

$$\|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{(-1,2,1)\bullet(-1,2,1)} = \sqrt{6}$$
$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{(1,0,1)\bullet(1,0,1)} = \sqrt{2}$$
$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{(1,1,-1)\bullet(1,1,-1)} = \sqrt{3}$$

得到

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix},\qquad \mathbf{P}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

驗證

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -2 & -1\\ -2 & 10 & 2\\ -1 & 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

■