第一章　線性代數概論

最後更新日期：2009 年 2 月 18 日

本章簡單介紹線性代數，以及我們在這門課所要討論的內容，並說明這些內容如何圍繞著兩個重點：矩陣與線性代數。本章有兩個部分：

1.1　線性代數的兩個重點

1.2　本書的結構

1.1　線性代數的兩個重點

線性代數（*Linear Algebra*）是**代數**（*Algebra*）的分枝。就運算的角度來看，線性代數將一群相關數值結合爲一個單位來處理，這些成群的相關數值稱爲**向量**（*vector*）或**矩陣**（*matrix*）。也就是說，線性代數是研究向量或矩陣運算的學科。

題外話　我們用這種『**題外話**』的獨立單元，來補充背景知識、建立與其它課題的關係、引伸數學背後的意涵、或者以比較輕鬆的文字來談主題。所謂題外話，是說跳過這些內容也沒有關係。■

題外話（代數與算數）　我們在小學時期就已經學到的，有關數值的計算，如

$$3+4=7$$

稱爲**算數**（*Arithmetic*）。將某些數值換成未知數（變數），以上式子成爲方程式

$$3+x=7$$

這就進入了**代數**（*Algebra*）的領域。筆者上學的那個年代，國中才開始教代數；原因是代數需要比較多的抽象思考，頭腦還單純的小孩學不來。

算數注重的是計算能力，從整數的四則運算，一路到小數、分數的計算，學生被要求多作練習，務必訓練到算得既快速且正確。代數則注重變數與方程式意義的解釋，以及方程式的求解（找出變數所代表的數值）。爲了讓寫出來的方程式都可以找到解答，我們建立**數系**（*number system*）的觀念，並一再擴充數系的範圍，以涵蓋各式各樣的方程式。以下由小到大列出一些數系的名稱與數學符號，第三欄是迫

使它們擴充的方程式：

自然數	$\mathbb{N}$	
整數	$\mathbb{Z}$	$7+x=4$
有理數	$\mathbb{Q}$	$2x=3$
實數	$\mathbb{R}$	$x^2=5$
複數	$\mathbb{C}$	$x^2=-3$

在線性代數領域，方程式之變數所屬的集合不再稱爲數系，而改稱爲**空間**（*space*）或**向量空間**（*vector space*）。名稱或許不同，但基本精神沒有兩樣。 ■

題外話（線性） 線性原本是用來形容函數的形容詞。若函數 f 滿足以下兩個性質：

$(a)\ f(x+y)=f(x)+f(y)$

$(b)\ f(cx)=c\,f(x),\qquad c$ 爲任意常數

則稱 f 爲**線性函數**（*linear function*）。仔細思考一下線性的定義，我們會發現，只有一個變數的線性函數非常單調。單一變數的線性函數就只有兩項：

$$f(x)=ax+b$$

其中 $a,b\in R$。讓一個線性函數等於某個數值（零是最常見的），如 $f(x)=0$，這樣產生的方程式稱爲**線性方程式**（*linear equation*）。以下是一個線性方程式

$$2x+5=0$$

這門課的名稱『線性代數』，看起來就是以『線性』來形容『代數』。就字面來說，它的意義是，**線性代數是研究線性方程式的學科**。好單調的學科。 ■

題外話（線性聯立方程式） 我們說線性代數研究線性方程式有點單調、乏味，原因是像這樣的方程式

$$2x+5=0$$

有什麼好研究的，國中時代就全搞定了。雖然，一個線性方程式沒搞頭，多幾個湊在一起就有看頭了：

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=6 \\ 6x-7y-2z=3 \\ 4x+y-3z=9 \end{cases}$$

上面線性聯立方程式除了方程式變多，變數也變多了。這才是線性代數要處理的線性方程式，我們給它取一個看起來比較有學問的名稱：**線性系統**（*linear system*）。現在可以換個說法來定義我們的主題：**線性代數是研究線性系統的學科**。嗯，好多了，是不是。 ■

題外話（向量、矩陣） 線性聯立方程式隨著方程式數目與變數的增加，除了看起來複雜，寫起來也很繁瑣。聰明的數學家當然會想到解決的好辦法。拿下列線性聯立方程式為例：

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=6 \\ 6x-7y-2z=3 \\ 4x+y-3z=9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & -7 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

將等號左邊與右邊的係數各別整理在一起，並分別用符號 $\mathbf{A}$ 、$\mathbf{b}$ 來代表，也把三個變數湊成 $\mathbf{x}$ 。那麼，線性聯立方程式可以作如下的簡寫：

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=6 \\ 6x-7y-2z=3 \\ 4x+y-3z=9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

結果看起來又回到簡單的單變數線性方程式：$ax=b$ ，厲害吧！我們將上面 $\mathbf{A}$ 那樣子的矩形數值群稱為**矩陣**（*matrix*），而 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{x}$ 那樣只有一行的稱為**向量**（*vector*）。這就是我們說:『線性代數是研究向量或矩陣運算的學科。』的道理。 ■

學習線性代數有兩個重點：(1)矩陣，(2)線性系統。前者包括矩陣四則運算定義的瞭解，並熟練其操作。後者在於認識線性系統的兩個意義：**線性組合**（*linear combination*）與**線性轉換**(*linear transformation*)，當然，學會求解線性系統，並會解讀這些解在線性組合或線性轉換上的意義也很重要。

題外話（矩陣四則運算之符號） 矩陣的加、減法很單純，與實數的加、減法一模一樣，只是一群數值同步運算就是了。然而，矩陣乘法花樣就多了。

實數乘法只有一個意思，但有許多符號，例如 a 、 b 兩個實數，以下各式都對：

$$a \times b = a \bullet b = ab$$

對於矩陣，這三個符號有不同的意思。『×』與『・』用於向量，如 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 、 $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ ，前者稱爲**外積**或**叉積**（*cross product*），後者稱爲**內積**或**點積**（*dot product*）。矩陣乘法不用任何符號，但兩個矩陣相乘稱爲**向量積**（*vector product*），如 $\mathbf{AB}$ ；矩陣與實數相乘則稱爲**純量積**（*scalar product*），如 $c\mathbf{A}$ 。

如同乘法，實數除法雖然只有一個意思，但也有幾個不同的符號：

$$a \div b = \frac{a}{b} = ab^{-1}, \qquad b \neq 0$$

矩陣除法不用前兩個符號，只用乘上反元素的方式來標示，如 $\mathbf{AB}^{-1}$ 。

會這麼複雜的原因很其實很簡單，在矩陣運算的世界裡，乘法交換率不一定會成立： $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ 、 $\mathbf{AB}^{-1} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ！ ■

1.2 本書的結構

本書章節安排主要因循(1)矩陣、(2)線性系統兩個重點，第二章至第六章內容如下：

第二章：矩陣基本運算

第三章：線性系統

第四章：反矩陣與行列式

第五章：線性組合與向量空間

第六章：線性轉換與特徵值問題

其中，第三章也涵蓋線性系統的求解方法，第四章則介紹線性系統的公式解。這五章是線性代數的基礎部分。本書線性代數應用的第二部分，分成三章，各章主要內容爲

第七章：應用 1—向量微分與最小平方法

第八章：應用 2—線性規劃

第九章：應用 3

其中第九章包含繪圖理論、馬可夫鏈、線性經濟模型、賽局理論等四個應用領域。