第四章　反矩陣與行列式

最後更新日期：2009 年 2 月 18 日

本章介紹**反矩陣**（*inverse matrix*，*inverse*）與**行列式**（*determinant*）。反矩陣是一個矩陣的乘法反元素，它可以幫忙做出矩陣除法的效果。反矩陣的求法有兩種：數値解與公式解。數値解用於矩陣元素全部為已知數値的情況；而如果矩陣元素中有不確定數値的符號，那就需要用公式解。行列式是發展反矩陣公式解的產物；我們可以這樣認知，行列式出現的地方，一般都有反矩陣的影子。將反矩陣公式解應用到線性系統的求解過程，其結果為克拉瑪公式。本章的目錄安排如下。

4.1　反矩陣

反矩陣（*inverse matrix*，*inverse*）是矩陣的乘法反元素：若兩矩陣向量積的結果為單位矩陣，則稱此兩矩陣互為反矩陣。我們規定只有方陣才有乘法反元素。

定義　（反矩陣）

令 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ ，若且唯若

$$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$$

則 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 互為**反矩陣**（*inverse matrix*）；寫成 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}$ 。 ■

例題 4-1　（反矩陣例子）

考慮以下兩方陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$$

驗證如下

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$$
$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$$

故知，$\mathbf{A}$ 、$\mathbf{B}$ 互為反矩陣，寫成

$$\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$$

■

由反矩陣的定義，我們知道以下幾件事實：

(1)只有方陣才有反矩陣；

(2)並不是所有方陣都有反矩陣；

(3)若 $\mathbf{A}$ 為 $\mathbf{B}$ 的反矩陣，則 $\mathbf{B}$ 也是 $\mathbf{A}$ 的反矩陣。

另外，我們可以把反矩陣的上標符號『-1』當成一種運算，有些課本將反矩陣寫成 $\mathrm{inv}(\mathbf{A})=\mathbf{A}^{-1}$，則反矩陣（運算）對其它的運算（加法、純量積、向量積、轉置、反矩陣）有以下重要性質（$c\in R,\ \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{n\times n}$）：

反矩陣對加法：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\neq\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$　（不成立）

反矩陣對純量積：$(c\mathbf{A})^{-1}=\dfrac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$　（常數 c 移到分母位置）

反矩陣對向量積：$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$　（前、後乘位置顛倒）

反矩陣對轉置：$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$

反矩陣對反矩陣：$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$

例題 4-2　（**反矩陣性質：**$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$ 、$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$）

考慮以下兩方陣以及其反矩陣：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

驗證如下

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \neq \mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 13 \\ 43 & 31 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \begin{bmatrix} -31 & 13 \\ 43 & -18 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 & -5 \\ 23 & -16 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 & 13 \\ 43 & -18 \end{bmatrix}$$

得知，$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 但 $(\mathbf{AB})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ 。 ■

例題 4-3　（**反矩陣性質證明**）

試證 $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$ 。

【證明】

因

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$$

故知$(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$爲$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$之反矩陣，即$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$ 。 ■

題外話（矩陣除法與反矩陣）　如同純量的運算，矩陣除法是由矩陣乘法反元素（反矩陣）衍生出來的運算。考慮以下等式

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

左右兩邊乘上$\mathbf{A}^{-1}$或$\mathbf{B}^{-1}$，結果如下

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$
$$\mathbf{ABB}^{-1}=\mathbf{CB}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}=\mathbf{CB}^{-1}$$

以上是以反矩陣來進行矩陣除法的作法。矩陣乘法交換率不成立（ $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ ），因此我們需注意反矩陣（ $\mathbf{A}^{-1}$ 、 $\mathbf{B}^{-1}$ ）的位置，前乘（左方）與後乘（右方）的意義不同。所以呢，我們不會有以下除法的表示方式

$$\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}$$

然而，有些課本會以斜線、反斜線表示除法，如

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}=\mathbf{C}/\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}=\mathbf{CB}^{-1}=\mathbf{C}\backslash\mathbf{B}$$

這兩個符號不好記，筆者就常常弄錯方向，因此本書不會用這種符號。知道有這回事就可以了。 ■

例題 4-4 （以反矩陣解線性系統）

考慮以下線性系統

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \qquad \text{其中} \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$$

已知

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$$

因此 線性系統的解爲

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

■

4.2 反矩陣數值解

本節介紹找出反矩陣數值解的方法。這個方法以三個基本列運算與基本列運算矩陣爲基礎，讀者如果有需要，應該複習前面章節的內容。

例題 4-5 （基本列運算矩陣與反矩陣）

考慮以下矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

我們有以下基本列運算矩陣

$$\mathbf{E}_1=\mathbf{I}_{\frac{1}{2}(1)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{（}\tfrac{1}{2}(1)\text{：第一列乘}\tfrac{1}{2}\text{）}$$
$$\mathbf{E}_2=\mathbf{I}_{(2)-(1)}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{（}(2)-(1)\text{：第二列減第一列）}$$
$$\mathbf{E}_3=\mathbf{I}_{(1)-2(2)}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{（}(1)-2(2)\text{：第一列減第二列的 2 倍）}$$

依次對 $\mathbf{A}$ 作這三個運算（記得要乘在前面），結果如下

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{E}_1\mathbf{A}==\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}_2=\mathbf{E}_2\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}_3=\mathbf{E}_3\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

將這三個運算寫在一起則爲

$$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$$

也就是 $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ 爲 $\mathbf{A}$ 的反矩陣：

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -2\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

■

找方陣 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ 的數值解有以下三個步驟：

（一）將 $\mathbf{A}$ 與其相同大小的單位矩陣 $\mathbf{I}_{m\times m}$ 寫成下列增廣矩陣 $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G}=\left[\mathbf{A}\ \vdots\ \mathbf{I}\right]$$

（二）以三個基本列運算，將增廣矩陣 $\mathbf{G}$ 之左半邊轉換爲單位矩陣：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_n\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{G}&=\mathbf{E}_n\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\left[\mathbf{A}\ \vdots\ \mathbf{I}\right]\\&=\left[\mathbf{E}_n\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}\ \vdots\ \mathbf{E}_n\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{I}\right]=\left[\mathbf{I}\ \vdots\ \mathbf{E}_n\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\right]\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\cdots,\mathbf{E}_n$ 爲 n 次轉換的基本列運算矩陣。

（三）轉換後之增廣矩陣的右半邊爲 $\mathbf{A}$ 之反矩陣： $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}_n\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ ；

若無法讓左半邊轉換爲單位矩陣，則反矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 不存在。

例題 4-6　（反矩陣的數值解）

考慮以下矩陣，以及其增廣矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{G}=\left[\begin{array}{cc:cc}2 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right]$$

將增廣矩陣左半邊轉換成單位矩陣

$$\left[\begin{array}{cc:cc}2 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}(1)}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{(2)-(1)}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{(1)-2(2)}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & \frac{3}{2} & -2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1\end{array}\right]$$

轉換後之增廣矩陣右半邊爲 $\mathbf{A}$ 的反矩陣：

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -2\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

■

例題 4-7　（反矩陣不存在的情況）

考慮以下矩陣，以及其增廣矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{G}=\left[\begin{array}{cc:cc}2 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right]$$

將增廣矩陣左半邊轉換成單位矩陣

$$\left[\begin{array}{cc:cc}2 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}(1)}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{(2)-(1)}\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 2 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1\end{array}\right]$$

增廣矩陣左半邊無法轉換成單位矩陣（有某列的元素全部爲零），因此 $\mathbf{A}$ 的反矩陣不存在。 ■

4.3　行列式

行列式（*determinant*）的定義很奇怪。談它的定義之前，先要有一個很重要的觀念：『行列式是一個定義於方陣的實數值函數。』也就是說，行列式是一個函數，定義域爲所有方陣所成的集合，值域爲實數。我們標示爲 $\det(\mathbf{A})$ 或 $|\mathbf{A}|$ ，其中，前者是函數的型式，後者共用實數絕對值的符號。在課堂上，筆者喜歡將 $|\mathbf{A}|$ 稱爲**行列式值**，以凸顯它是一個實數不是矩陣。

例題 4-8　（行列式值）

考慮以下矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-6\end{bmatrix}$$

其行列式值分別爲

$$\det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2,\qquad \det(\mathbf{B})=|\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=3,\qquad \det(\mathbf{C})=|\mathbf{C}|=-6$$

請注意矩陣符號（中括號）與行列式符號（絕對值）的差異。讀者會很納悶，這些矩陣的行列式值怎麼來的？請稍安勿躁，下面的內容就會介紹。這裡需要知道的是，純量（只有一個元素的矩陣）的行列式值就是該唯一元素的數值。 ■

例題 4-9 （**行列式的定義域**）

為什麼只有方陣才有行列式？

這問題的答案在反矩陣身上。為了反矩陣的公式解，我們定義行列式；而反矩陣只定義在方陣上，所以，只有方陣才有行列式。好了，現在問題沒解決，只是轉移到反矩陣：為什麼只有方陣才有反矩陣？ ■

定義行列式之前，我們還需要**子行列式**（*minor*）與**餘因子**（*cofactor*）的概念。

將一矩陣 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ 去除第 i 行與第 j 列，$1 \le i \le n, 1 \le j \le n$，後的矩陣稱為 $\mathbf{A}$ 的子矩陣，標示為 $\mathbf{A}_{ij}$，$\mathbf{A}_{ij} \in \mathbf{M}_{(n-1)\times(n-1)}$。$\mathbf{A}_{ij}$ 之行列式值 $\left|\mathbf{A}_{ij}\right|$ 稱為元素 a_{ij} 的子行列式。

一個矩陣的餘因子由其子行列式定義，元素 a_{ij} 的餘因子 f_{ij} 定義為

$$f_{ij} = (-1)^{i+j}\left|\mathbf{A}_{ij}\right|$$

可以這樣想，餘因子是子矩陣的行列式值加上一個正負號。這個正負號是行列式最詭異的地方。以下是各元素位置的正負號情況：

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

由左上角開始為『＋』，然後每換行或列則『－』、『＋』互換。

例題 4-10 （**子矩陣與餘因子**）

考慮以下矩陣：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

各元素 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 的子矩陣分別為

$$a_{11}=2:\quad \mathbf{A}_{11}=\begin{bmatrix}\cancel{2} & \cancel{4}\\ \cancel{1} & 3\end{bmatrix}=[3]$$

$$a_{12}=4:\quad \mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix}\cancel{2} & \cancel{4}\\ 1 & \cancel{3}\end{bmatrix}=[1]$$

$$a_{21}=1:\quad \mathbf{A}_{21}=\begin{bmatrix}\cancel{2} & 4\\ \cancel{1} & \cancel{3}\end{bmatrix}=[4]$$

$$a_{22}=3:\quad \mathbf{A}_{22}=\begin{bmatrix}2 & \cancel{4}\\ \cancel{1} & \cancel{3}\end{bmatrix}=[2]$$

而其餘因子分別爲

$$f_{11}=(-1)^{1+1}|\mathbf{A}_{11}|=+|\mathbf{A}_{11}|=+3,\qquad f_{12}=(-1)^{1+2}|\mathbf{A}_{12}|=-|\mathbf{A}_{12}|=-1$$
$$f_{21}=(-1)^{2+1}|\mathbf{A}_{21}|=-|\mathbf{A}_{21}|=-4,\qquad f_{22}=(-1)^{2+2}|\mathbf{A}_{22}|=+|\mathbf{A}_{22}|=+2$$

■

到這裡，好奇心重的讀者或許已經有疑問：『既然我們需要餘因子的概念來定義行列式，怎麼餘因子的定義裡頭也有行列式呢？』放心吧，我們不會有循環定義的問題。我們是以**遞迴法**（*recursive method*）來定義行列式。我們先定義一階方陣（$\mathbf{M}_{1\times 1}$）的行列式，其次，n階方陣（$\mathbf{M}_{n\times n}, n\geq 2$）的行列式由低一階（$n-1$階）的餘因子來表示，這時$m-1$階的行列式已經定義，當然它的餘因子也就沒問題了。

定義　（行列式）

令方陣$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]\in\mathbf{M}_{n\times n}$，$\mathbf{A}_{ij}$，$1\leq i,j\leq n$，爲$\mathbf{A}$刪除$i$列與$j$行的子矩陣，則方陣$\mathbf{A}$的行列式定義如下：

$$\det(\mathbf{A})=|\mathbf{A}|=\begin{cases}a_{11} & 若\ n=1\\ a_{11}f_{11}+a_{12}f_{12}+\cdots+a_{1n}f_{1n} & 若\ n\geq 2\end{cases}\qquad (4\text{-}1)$$

其中，$f_{ij}=(-1)^{i+j}\left|\mathbf{A}_{ij}\right|$爲元素$a_{ij}$，$1\leq i,j\leq n$，之餘因子。 ■

題外話　一般線性代數的課本不會以(4-1)來定義行列式，我們這樣作可以避開很難理解的**排列**（*permutation*）概念。在這些課本裡頭，(4-1)稱爲**餘因子展開**（*cofactor expansion*），是以定理的方式來處理。嚴格說起來，(4-1)是對第一列的餘因子展開，該定理說，對任何列或任何行的餘因子展開都會等於其行列式值。■

例題 4-11　（以定義求行列式值）

考慮以下矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

而其餘因子分別爲

$$f_{11}=3,\qquad f_{12}=-1,\qquad f_{21}=-4,\qquad f_{22}=2$$

因此其行列式值爲

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=a_{11}f_{11}+a_{12}f_{12}=2\times3+4\times(-1)=2$$

■

例題 4-12　（二階行列式值的計算）

考慮以下二階行列式的一般式：

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

而其餘因子分別爲

$$f_{11}=a,\qquad f_{12}=-c,\qquad f_{21}=-b,\qquad f_{22}=d$$

因此其行列式值爲

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=a_{11}f_{11}+a_{12}f_{12}=a\times d-b\times c$$

這是我們國中時代學到的二階行列式值的算法。記得下面幫助記憶的圖示嗎？

$$\begin{array}{cc} (+) & (-) \\ a & b \\ c & d \end{array}$$

其中，左上到右下方向（↘）爲正，右上到左下方向（↙）爲負。 ■

例題 4-13　（以定義求行列式值）

考慮以下矩陣：

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其第一列元素的餘因子分別爲

$$f_{11} = +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad f_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad f_{13} = +\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

因此其行列式值爲

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_{11} f_{11} + b_{12} f_{12} + b_{13} f_{13} = 2 \times 3 + (-1) \times 3 + 0 \times (-6) = 3$$

■

例題 4-14　（三階行列式值的計算）

考慮以下三階行列式的一般式：

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其餘因子分別爲

$$f_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad f_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad f_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

其行列式值為

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right) \\
&= +a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}$$

這根本記不住，還是國中時代三階行列式值的計算圖示好用：

$$\begin{array}{cccccc}
(+) & (+) & (+) & (-) & (-) & (-) \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}$$

或

$$\begin{array}{ccccc}
 & (+) & (+) & & \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
(+) & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\
 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} \\
 & & & a_{13} &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & (-) & (-) & \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & (-) \\
a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\
 & a_{11} & & &
\end{array}$$

其中，左上到右下方向（↘）為正，右上到左下方向（↙）為負。請注意，這種圖示記憶法只有二階與三階行列式可以用，也就是說，四階或四階以上就沒有這麼方便的記憶法了。 ■

題外話　一個 n 階行列式寫成其元素相乘型式，應該有 $n!=n\times(n-1)\times\cdots\times 1$ 項，而且每一項為 n 個元素的乘積。例如，一階行列式有 $1!=1$ 項，二階行列式有 $2!=2\times 1=2$ 項：

$$\left|\left[a_{11}\right]\right|=a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

三階行列式有$3!=3\times 2\times 1=6$項：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

同理，四階行列式有$4!=4\times 3\times 2\times 1=24$項，根本不可能有幫助記憶的平面圖。所以呢，高階的行列式只好乖乖的用定義慢慢算。 ■

定理 4-1 （餘因子展開）

令方陣$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]\in\mathbf{M}_{n\times n}$， f_{ij} 爲元素a_{ij} ，$1\le i,j\le n$ ，之餘因子，則對任一i列，$1\le i\le n$ ，以下展開成立

$$\det\left(\mathbf{A}\right)=\left|\mathbf{A}\right|=\begin{cases} a_{11} & \text{若 } n=1 \\ a_{i1}f_{i1}+a_{i2}f_{i2}+\cdots+a_{in}f_{in} & \text{若 } n\ge 2 \end{cases}$$

【證明】

先證明$i=2$的情況：$\left|\mathbf{A}\right|=a_{21}f_{21}+a_{22}f_{22}+\cdots+a_{2n}f_{2n}$ 。

根據行列式的定義（對第一列作餘因子展開），我們有

$$\left|\mathbf{A}\right|=a_{11}f_{11}+a_{12}f_{12}+\cdots+a_{1n}f_{1n}=\sum_{j=1}^{n}\left(-1\right)^{1+j}a_{1j}\left|\mathbf{A}_{1j}\right|$$

其中，$n\ge 2$ 。我們忽略$n=1$的情況。令$\mathbf{A}_{12,jk}$爲$\mathbf{A}$刪除第 1、2 列與刪除第 j 、k 行後的子矩陣。繼續對子行列式$\left|\mathbf{A}_{1j}\right|$展開：

$$\left|\mathbf{A}_{1j}\right|=\sum_{k=1}^{j-1}\left(-1\right)^{1+k}a_{2k}\left|\mathbf{A}_{12,kj}\right| + \sum_{k=j+1}^{n}\left(-1\right)^{1+k-1}a_{2k}\left|\mathbf{A}_{12,jk}\right|$$

其中，等號右邊第一項爲行數小於j的情況（$k<j$），第二項則爲$k>j$的情況。請注意，第二項中a_{2k}爲$\mathbf{A}_{1j}$的第 1 列、第$k-1$行元素。將以上兩式寫在一起，得到以下初步結果

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left|\mathbf{A}_{1j}\right| \\
&= \sum_{j=1,n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left[\sum_{k=1,\, j-1} (-1)^{1+k} a_{2k} \left|\mathbf{A}_{12,kj}\right| + \sum_{k=j+1,n} (-1)^{1+k-1} a_{2k} \left|\mathbf{A}_{12,\,jk}\right| \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{(1+j)+(1+k)} a_{1j} a_{2k} \left|\mathbf{A}_{12,kj}\right| + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{(1+j)+(1+k-1)} a_{1j} a_{2k} \left|\mathbf{A}_{12,\,jk}\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+j} a_{1j} a_{2k} \left|\mathbf{A}_{12,kj}\right| + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{j+k+1} a_{1j} a_{2k} \left|\mathbf{A}_{12,\,jk}\right| \\
&= \sum_{1\le j<k\le n} (-1)^{j+k} \left(a_{1k} a_{2j} - a_{1j} a_{2k} \right) \left|\mathbf{A}_{12,\,jk}\right|
\end{aligned}
$$

相同的方式，所證對第二列展開

$$
a_{21} f_{21} + a_{22} f_{22} + \cdots + a_{2n} f_{2n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2+j} a_{2j} \left|\mathbf{A}_{2j}\right|
$$

再對$\left|\mathbf{A}_{2j}\right|$展開

$$
\left|\mathbf{A}_{2j}\right| = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{1+k} a_{1k} \left|\mathbf{A}_{12,kj}\right| + \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{1+k-1} a_{1k} \left|\mathbf{A}_{12,\,jk}\right|
$$

合併的結果

$$
\begin{aligned}
a_{21} f_{21} + a_{22} f_{22} + \cdots + a_{2n} f_{2n} &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{2+j} a_{2j} \left|\mathbf{A}_{2j}\right| \\
&= \sum_{j=1,n} (-1)^{2+j} a_{2j} \left[\sum_{k=1,\, j-1} (-1)^{1+k} a_{1k} \left|\mathbf{A}_{12,kj}\right| + \sum_{k=j+1,n} (-1)^{1+k-1} a_{1k} \left|\mathbf{A}_{12,\,jk}\right| \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{(2+j)+(1+k)} a_{2j} a_{1k} \left|\mathbf{A}_{12,kj}\right| + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{(2+j)+(1+k-1)} a_{2j} a_{1k} \left|\mathbf{A}_{12,\,jk}\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+j+1} a_{2j} a_{1k} \left|\mathbf{A}_{12,kj}\right| + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{j+k} a_{2j} a_{1k} \left|\mathbf{A}_{12,\,jk}\right| \\
&= \sum_{1\le j<k\le n} (-1)^{j+k} \left(-a_{2j} a_{1k} + a_{2k} a_{1j} \right) \left|\mathbf{A}_{12,\,jk}\right| \\
&= |\mathbf{A}|
\end{aligned}
$$

得證$a_{21} f_{21} + a_{22} f_{22} + \cdots + a_{2n} f_{2n} = |\mathbf{A}|$。

利用相同連續兩列展開的技巧，我們可以由已知$a_{21} f_{21} + a_{22} f_{22} + \cdots + a_{2n} f_{2n} = |\mathbf{A}|$來證明第三列展開$a_{31} f_{31} + a_{32} f_{32} + \cdots + a_{3n} f_{3n} = |\mathbf{A}|$，並依序證明所有$i$皆成立。 ■

行列式的性質

由定義直接計算行列式值很繁瑣，更討厭的是，計算錯誤的機會很大。本小節討論一些行列式的性質，這些性質分成兩大類：(1)特殊矩陣之行列式，可以直接看出或很容易計算該行列式值；(2)矩陣運算前後之兩行列式的關係，可以由已知行列式值簡單推算未知的行列式值。後者的運算包括：三種基本列運算、轉置、乘法、反矩陣等。其中需特別注意三個基本列運算；我們可以經由三個基本列運算將任何行列式轉換成特殊行列式，如此就可以簡單計算出行列式值。

三種基本列運算前後之行列式關係　令 $\mathbf{A}_{(i)=(j)}$ 為 $\mathbf{A}$ 作第一種基本列運算（i 、 j 兩列互換）的結果， $\mathbf{A}_{c(i)}$ 為 $\mathbf{A}$ 作第二種基本列運算（i 列乘常數 c ）的結果， $\mathbf{A}_{(i)-c(j)}$ 為 $\mathbf{A}$ 作第三種基本列運算（i 列減 j 列的 c 倍）的結果，則運算前後的行列式值有以下關係：

(性質 1)　$|\mathbf{A}| = -\left|\mathbf{A}_{(i)=(j)}\right|$

(性質 2)　$|\mathbf{A}| = \dfrac{1}{c}\left|\mathbf{A}_{c(i)}\right|$

(性質 3)　$|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}_{(i)-c(j)}\right|$

也就是，第一種基本列運算會讓行列式值變號，第二種基本列運算會讓行列式值改變為所乘的相同倍數，而第三種基本列運算並不會對行列式值作任何改變。

定理 4-2　（第一種基本列運算前後行列式之關係）

令方陣 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n \times n}$ ， $\mathbf{A}_{(i)=(j)}$ 為 $\mathbf{A}$ 之 i 列與 j 列互換的結果，$1 \le i, j \le n$ ， $i \ne j$ ，則

$$|\mathbf{A}| = -\left|\mathbf{A}_{(i)=(j)}\right|$$

【證明】

先證明 i 、 j 為相鄰兩列的情況。

令方陣 $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right] \in \mathbf{M}_{n \times n}$ 為 $\mathbf{A}$ 之 i 列與 $i+1$ 列互換的結果，即

$$b_{ij} = a_{(i+1)j},\quad b_{(i+1)j} = a_{ij},\quad b_{kj} = a_{kj},\quad 1 \le j,k \le n,\ k \ne i, k \ne i+1$$

將 $|\mathbf{A}|$ 對 i 列展開，並與 $|\mathbf{B}|$ 對 $i+1$ 列展開比較

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|$$

$$|\mathbf{B}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+1+j} b_{(i+1)j} |\mathbf{B}_{(i+1)j}|$$

因 $a_{ij} = b_{(i+1)j}$ 且 $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{B}_{(i+1)j}$ ，故得

$$|\mathbf{A}| = -|\mathbf{B}|$$

即『相鄰兩列互換，其行列式值正負相反』。

現在考慮 i 、 j 相鄰 m 列的情況（ $j = i + m, m \geq 2$ ）。將 i 列以相鄰列互換的方式換到 j 列需要 m 次操作；這時原來的 j 列在 $j-1$ 列的位置，將其換到 i 列的位置需要 $m-1$ 次操作。亦即

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{m+m-1} |\mathbf{A}_{(i)=(j)}| = -|\mathbf{A}_{(i)=(j)}|$$

■

例題 4-15　（三種基本列運算與行列式值）

考慮以下行列式：

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

第一、二種列運算的結果：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \xrightarrow{(1)=(2)} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \xrightarrow{3(2)} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -15$$

第三種列運算的結果：

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -15 \xrightarrow{(2)-2(1)} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -15$$

■

例題 4-16　（以三種基本列運算化簡行列式）

考慮以下行列式：

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

以第三種基本列運算依次將 b_{21} 、 b_{31} 、 b_{32} 轉換爲零：

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = 2 \times 5 \times \tfrac{1}{5} = 2$$

■

特殊矩陣之行列式　有三個特殊矩陣値得注意：

(1)矩陣中有某列元素全部爲零，

(2)對角矩陣，

(3)矩陣中有兩列成比例；

其中，(1)、(3)的行列式值爲零，(2)的行列式值爲其對角元素的乘積。這三個性質以行列式表達如下。

(性質 4) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

(性質 5) $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$$

(性質 6) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = 0, \quad c \in R$$

由餘因子展開定理，很容易證明(性質 4)與(性質 5)；而(性質 6)可以由第三種基本列運算來證明。另外，與(性質 5)類似，三角矩陣的行列式值亦爲零。

(性質 5') $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$$

例題 4-17　（特殊矩陣之行列式值）

考慮以下矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&6&8\\0&0&0\\7&3&5\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}3&6&4\\1&7&8\\6&12&8\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}4&0&0\\3&1&0\\5&7&6\end{bmatrix}$$

其行列式值分別爲

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}2&6&8\\0&0&0\\7&3&5\end{vmatrix}=0 \qquad \text{（第二列元素全爲零）}$$

$$|\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{vmatrix}=2\times3\times4=24 \qquad \text{（對角矩陣）}$$

$$|\mathbf{C}|=\begin{vmatrix}3&6&4\\1&7&8\\6&12&8\end{vmatrix}=0 \qquad \text{（第三列元素爲第一列的兩倍）}$$

$$|\mathbf{D}|=\begin{vmatrix}4&0&0\\3&1&0\\5&7&6\end{vmatrix}=4\times1\times7=28 \qquad \text{（三角矩陣）}$$

■

乘法、反矩陣、轉置　以下是有關矩陣乘法、反矩陣與轉置前後之行列式的關係：

(性質 7)　$|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|=|\mathbf{A}|$

(性質 8)　$|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}|\times|\mathbf{B}|$

(性質 9)　$|\mathbf{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}$

其中，轉置不會影響行列式值最值得注意，性質 7 的成立，隱含著，性質 1、性質 2、性質 3、性質 4、性質 6 中的『列』換成『行』仍然成立。

定理 4-3　（矩陣轉置之行列式）

令方陣 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$，則

$$|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|=|\mathbf{A}|$$

【證明】

令 $\mathbf{I}_{(i)=(j)}$、$\mathbf{I}_{c(i)}$、$\mathbf{I}_{(i)-c(j)}$ 分別為三種的基本列運算矩陣，因為 $|\mathbf{I}|=1$（性質 5），故我們有（性質 1、2、3）：

$$\left|\mathbf{I}_{(i)=(j)}\right|=-1,\qquad \left|\mathbf{I}_{c(i)}\right|=c,\qquad \left|\mathbf{I}_{(i)-c(j)}\right|=1$$

現在檢視這三個基本列運算矩陣的反矩陣，有以下關係

$$\left(\mathbf{I}_{(i)=(j)}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}_{(i)=(j)},\qquad \left(\mathbf{I}_{c(i)}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}_{c(i)},\qquad \left(\mathbf{I}_{(i)-c(j)}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}_{(j)-c(j)}$$

亦即

$$\left|\left(\mathbf{I}_{(i)=(j)}\right)^{\mathrm{T}}\right|=\left|\mathbf{I}_{(i)=(j)}\right|=-1,\qquad \left|\left(\mathbf{I}_{c(i)}\right)^{\mathrm{T}}\right|=\left|\mathbf{I}_{c(i)}\right|=c,\qquad \left|\left(\mathbf{I}_{(i)-c(j)}\right)^{\mathrm{T}}\right|=\left|\mathbf{I}_{(i)-c(j)}\right|=1$$

我們知道 $\mathbf{A}$ 可以寫成某 m 個基本列運算的乘積

$$\mathbf{A}=\mathbf{E}_m\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_2^{\mathrm{T}}\cdots\mathbf{E}_m^{\mathrm{T}}$$

其中，$\mathbf{E}_1,\cdots,\mathbf{E}_m$ 為基本列運算矩陣。其行列式值也是這些基本列運算矩陣的行列式值之乘積（性質 1~3）

$$\left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right|=\left|\mathbf{E}_1^{\mathrm{T}}\right|\times\left|\mathbf{E}_2^{\mathrm{T}}\right|\times\cdots\times\left|\mathbf{E}_m^{\mathrm{T}}\right|=\left|\mathbf{E}_m\right|\times\cdots\times\left|\mathbf{E}_2\right|\times\left|\mathbf{E}_1\right|=\left|\mathbf{A}\right|$$

■

定理 4-4　（矩陣乘積之行列式）

令方陣 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{n\times n}$，則

$$\left|\mathbf{AB}\right|=\left|\mathbf{A}\right|\times\left|\mathbf{B}\right|$$

【證明】

我們知道 $\mathbf{A}$ 可以寫成某 m 個基本列運算的乘積

$$\mathbf{A}=\mathbf{E}_m\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\quad\Rightarrow\quad \left|\mathbf{A}\right|=\left|\mathbf{E}_m\right|\times\cdots\times\left|\mathbf{E}_2\right|\times\left|\mathbf{E}_1\right|$$

其中，$\mathbf{E}_1,\cdots,\mathbf{E}_m$ 爲基本列運算矩陣。同樣的

$$\mathbf{AB}=\mathbf{E}_m\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{B} \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{AB}|=|\mathbf{E}_m|\times\cdots\times|\mathbf{E}_2|\times|\mathbf{E}_1|\times|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|\times|\mathbf{B}|$$

■

例題 4-18　（餘因子展開）

考慮以下矩陣：

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其第二列元素的餘因子分別爲

$$f_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad f_{22}=+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2,\qquad f_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$$

因此其對第二列餘因子展開之行列式値爲

$$|\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=b_{21}f_{21}+b_{22}f_{22}+b_{23}f_{23}=5\times1+3\times2+4\times(-2)=3$$

而其第三行元素的餘因子分別爲

$$f_{13}=+\begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-6,\qquad f_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2,\qquad f_{33}=+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=11$$

因此其對第三行餘因子展開之行列式値爲

$$|\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=b_{13}f_{13}+b_{23}f_{23}+b_{33}f_{33}=0\times(-6)+4\times(-2)+1\times11=3$$

■

4.4 反矩陣公式解

我們上一節中已經介紹了方陣之行列式（determinant）、子行列式（minor）、餘因子(cofactor)的概念。介紹反矩陣公式之前，我們需要**伴隨矩陣**（*adjoint matrix*）的概念。

定義　（伴隨矩陣）

令 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]\in\mathbf{M}_{n\times n}$， f_{ij} 為元素 a_{ij} 的餘因子，則 $\mathbf{A}$ 之**伴隨矩陣**（*adjoint matrix*）為

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}=\left[f_{ij}\right]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

■

例題 4-19　（伴隨矩陣）

考慮以下矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

而其餘因子分別為

$$f_{11}=3,\qquad f_{12}=-1,\qquad f_{21}=-4,\qquad f_{22}=2$$

因此其伴隨矩陣為

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

■

題外話　請特別注意伴隨矩陣定義中的那個轉置符號『T』！很多同學在這裡吃過虧。或許會問，幹嘛弄個轉置來找麻煩？等一下我們就會看到它的妙處。現在記得寫出一個伴隨矩陣的三部曲：

(1)子矩陣　→　子行列式；

(2)正負號　→　餘因子；

(3)轉置　　→　伴隨矩陣。 ■

反矩陣公式的核心，在一個方陣與自己的伴隨矩陣相乘，如下式

$$\mathbf{A}\,\mathrm{adj}\,\mathbf{A}=\left[z_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \tag{4-2}$$

其中

$$z_{ij}=\begin{cases} a_{i1}f_{i1}+\cdots+a_{in}f_{in}=|\mathbf{A}| & 若\ i=j \\ a_{i1}f_{j1}+\cdots+a_{in}f_{jn}=0 & 若\ i\neq j \end{cases}$$

上式 $i=j$ 的情況就是對 i 列的餘因子展開，很容易理解；而 $i\neq j$ 的情況需要一點想像力，試著想像一下 $a_{i1}f_{j1}+\cdots+a_{in}f_{jn}$ 是什麼樣矩陣對第 j 列的餘因子展開？這個矩陣的第 j 列與第 i 列有相同的元素 $a_{i1},\ldots,a_{in}$ ！依據性質 6，其行列式值爲零。好了，(4-2)可以寫成以下型式

$$\mathbf{A}\,\mathrm{adj}\,\mathbf{A}=\left[z_{ij}\right]=\begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}| \end{bmatrix}=|\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

若 $|\mathbf{A}|\neq 0$ ，則有

$$\mathbf{A}\,\mathrm{adj}\,\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}\frac{\mathrm{adj}\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

這就是反矩陣公式：伴隨矩陣除行列式值。

例題 4-20　（反矩陣公式）

考慮以下矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{bmatrix}$$

其行列式值、伴隨矩陣分別爲

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{vmatrix}=2,\qquad \operatorname{adj}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -1\\-4 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3 & -4\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

因此，其反矩陣爲

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -4\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -2\\-\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

■

例題 4-21　（反矩陣公式）

考慮以下矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$$

其行列式值、伴隨矩陣分別爲

$$|\mathbf{A}|=a\times d-b\times c,\qquad \operatorname{adj}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}d & -c\\-b & a\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$$

因此，其反矩陣爲

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\frac{1}{a\times d-b\times c}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$$

■

4.5　線性系統公式解與克拉瑪公式

有了反矩陣公式，如下的線性系統當然也可以寫出其公式解

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

其中，$\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right] \in \mathbf{M}_{n\times n}$ 、 $\mathbf{x} = \left[x_i \right] \in \mathbf{M}_{n\times 1}$ 、 $\mathbf{b} = \left[b_i \right] \in \mathbf{M}_{n\times 1}$ 。若$\left|\mathbf{A}\right| \neq 0$ ，則其解為

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\left|\mathbf{A}\right|}\operatorname{adj}\mathbf{A}\,\mathbf{b}$$

我們對上式的$\operatorname{adj}\mathbf{A}\,\mathbf{b}$有興趣。請比較以下$\operatorname{adj}\mathbf{A}\,\mathbf{b}$與$\left|\mathbf{A}\right|$對第 j 行的餘因子展開式：

$$\operatorname{adj}\mathbf{A}\,\mathbf{b} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{n1} \\ f_{12} & f_{22} & \cdots & f_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad \left|\mathbf{A}\right| = \begin{bmatrix} f_{1j} & f_{2j} & \cdots & f_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

令$\mathbf{A}(j)$， $j = 1,\ldots,n$ ，為$\mathbf{A}$之 j 行元素換成$\mathbf{b}$之矩陣，則

$$\left|\mathbf{A}(j)\right| = \begin{bmatrix} f_{1j} & f_{2j} & \cdots & f_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{adj}\mathbf{A}\,\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \left|\mathbf{A}(1)\right| \\ \left|\mathbf{A}(2)\right| \\ \vdots \\ \left|\mathbf{A}(n)\right| \end{bmatrix}$$

亦即線性系統的公式解可以寫成

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\left|\mathbf{A}\right|}\operatorname{adj}\mathbf{A}\,\mathbf{b} = \frac{1}{\left|\mathbf{A}\right|}\begin{bmatrix} \left|\mathbf{A}(1)\right| \\ \left|\mathbf{A}(2)\right| \\ \vdots \\ \left|\mathbf{A}(n)\right| \end{bmatrix}$$

或

$$x_1 = \frac{\left|\mathbf{A}(1)\right|}{\left|\mathbf{A}\right|}, \quad x_2 = \frac{\left|\mathbf{A}(2)\right|}{\left|\mathbf{A}\right|}, \quad \ldots \quad , x_n = \frac{\left|\mathbf{A}(n)\right|}{\left|\mathbf{A}\right|} \tag{4-3}$$

以上(4-3)即為著名的**克拉瑪公式**（*Cramer's rule*）——線性系統的公式解。

例題 4-22　（克拉瑪公式）

考慮以下線性系統

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \qquad \text{其中} \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$$

依據克拉瑪公式，其解爲

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{vmatrix}}=\frac{-2}{-1}=2, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{vmatrix}}=\frac{1}{-1}=-1$$

■

題外話　請注意當 $|\mathbf{A}|=0$ 時，所衍生的有趣問題。以下是在不同的情況下談完全相同的現象：

(1) $|\mathbf{A}|=0$ ；

(2) $\mathbf{A}$ 是一個**奇異矩陣**（*singular*）；

(3) $\mathbf{A}^{-1}$ 不存在；

(4) 線性系統 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有多重解或無解；

(5) 齊次系統 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有多重解。 ■