第五章　線性組合與向量空間

最後更新日期：2009 年 2 月 10 日

本章介紹**線性組合**（*linear combination*），探討幾個基本向量可以組合成什麼樣的向量集合，倒過來，某個特定向量集合需要幾個基本向量來表示。這裡提到，組合結果之向量集合的正式名稱是**向量空間**（*vector space*），而這些基本向量集合的名稱爲**基底**(*basis*)，我們比較熟悉的基底是**座標系統**(*coordinate system*)。我們希望某特定基底能組合的向量空間越大越好，所以要討論**拓展**（*span*）的概念；相反的，對某特定向量空間，其基底的元素數目越少越好，因此有必要瞭解**線性獨立**（*linear independence*）的觀念。最後，一個向量空間的座標系統（基底）不是只有唯一的一個，**座標變換**（*change of coordinate*）討論不同基底轉換間衍生的現象。本章的內容安排如下：

5.1　線性組合

我們先從線性系統來看**線性組合**（*linear combination*）的作用。考慮以下線性系統

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \qquad \text{其中} \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}7\\ 9\end{bmatrix}$$

令 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，這個線性系統可以寫成以下型式

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 9\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}x_2=\begin{bmatrix}7\\ 9\end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{A}$ 的兩個行向量 $\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 、$\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 看成裝配的基本元素，決策變數 x_1 、 x_2 是權重；

線性系統的意義是，決定權重 x_1、x_2，好讓這兩個元素的權重和等於右手邊值 $\begin{bmatrix}7 & 9\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。這裡的『權重和』就是線性組合。

定義　（線性組合）

令 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k \in R^n$，若存在 $c_1,c_2,\ldots,c_k \in R$，使

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \in R^n \tag{5-1}$$

則稱 $\mathbf{v}$ 為 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ 之**線性組合**（*linear combination*）。■

題外話　以上(5-1)線性組合的定義中涉及的集合不是 n 階行向量 $\mathbf{M}_{n\times1}$，而是 n 階實數空間 R^n，正式的定義會指定為一般向量空間（vector space）。事實上，$\mathbf{M}_{n\times1}$、R^n 都是向量空間。還沒正式定義向量空間之前，把它想像為一個集合就是了。例如本章中我們大部分的例子都說 $\mathbf{v}\in R^n$，但把它想像為 $\mathbf{v}\in\mathbf{M}_{n\times1}$ 也通。■

題外話　(5-1)的定義涉及兩個運算：**向量和**與**純量積**；這兩個運算在我們熟悉的實數空間所相對的是加法＋與乘法×。如果我們將應用範圍擴展到一般的向量空間，則這兩個運算符號會是⊕與⊙。底下作簡單整理

實數	+	×
行向量	+	純量積
一般向量空間	⊕	⊙

這就是數學的作法：將簡單具體的東西抽象化，希望能涵蓋更廣泛的應用範圍。雖然，再怎麼抽象化，還是不能違反原來的東西。不要被自己唬了，記得回來對應我們已經知道的簡單內容，這樣偶而會發現數學的抽象也是有美感的。■

例題 5-1　（線性組合）

考慮以下兩向量：

$$\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

(1)若權重分別為 $c_1 = 1$ 、 $c_2 = 2$ ，其線性組合為何？

(2)需要什麼權重，其線性組合才會是$\begin{bmatrix} 7 & 9 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ？

【解答】

線性組合為

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

第二部分為求以下線性系統的解

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■

例題 5-2　（線性組合——多重解的情況）

考慮以下兩向量：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

若權重可以為任意值， $c_1, c_2 \in R$ ，其線性組合的結果為何？

【解答】

假設線性組合的結果為$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，則線性組合可以寫成以下線性系統以及其增廣矩陣：

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right]$$

以三種列運算轉換該增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-(1)} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & -3 & z-2x \end{array}\right] \xrightarrow[(3)+3(2)]{(1)-2(2)} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 3x-2y \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z+3y-5x \end{array}\right]$$

此線性系統有解的條件爲

$$z+3y-5x=0$$

亦即，線性組合的結果爲三維空間的平面：

$$\left\{\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, z+3y-5x=0,\ x,y,z\in R\right\}$$

■

例題 5-3　（線性組合——多重解的情況）

考慮以下兩向量：

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

需要什麼權重，其線性組合才會是$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$？

【解答】

假設權重分別爲c_1、c_2，則線性組合可以寫成以下線性系統以及其增廣矩陣：

$$c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

以三種列運算轉換該增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}(1)} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(2)-4(1)} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

該線性系統的解爲

$$c_1+\tfrac{3}{2}c_2=0$$

即滿足本齊次系統的權重爲二維空間的直線：

$$\left\{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, 2c_1+3c_2=0,\ c_1,c_2\in R\right\}$$

■

題外話　例題 5-2 與例題 5-3 是處理線性組合的兩個典型題目。前者給定權重（一般都是任意實數）下找所有可能的線性組合的集合，該動作與該結果，一個動詞一個名詞，都稱爲**拓展**（*span*）；後者則指定線性組合的目標，然後找所有可能的各組權重，這些權重集合稱爲**解空間**（*solution space*）。一般我們指定組合目標是原點，也就是說，我們需求解**齊次系統**（*homogenous system*），這個特殊的（齊次系統）解空間稱爲**零空間**（*null space*）。搞清楚以上幾個術語在線性系統的角色當然重要，然而，不要忘了練習例題 5-2 與例題 5-3 的求解技巧。 ■

5.2　拓展與線性獨立

本節介紹**拓展**（*span*）與**線性獨立**（*linear independence*）的概念。兩者都涉及一組向量 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ ， $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\in R^n$ ，以及線性組合的操作。拓展討論經由對 S 集合內之向量的線性組合，所能產生之最大向量集合（向量空間）。線性獨立討論 S 內之向量能否由其它向量以線性組合的方式表示。

定義　（拓展）

令 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ ， $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\in R^n$ ，則所有可能線性組合的集合

$$\operatorname{span} S=\left\{\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_k\mathbf{v}_k \;\middle|\; \mathbf{v}_i\in S, c_i\in R, i=1,\ldots,n\right\} \tag{5-2}$$

稱 $\operatorname{span} S$ 爲 S 的**拓展**（*span*）。 ■

驗證拓展的程序　當 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ 的拓展涵蓋某向量空間 V ，亦即

$\operatorname{span} S\supseteq V$

我們稱 S **拓展** V （ S *spans* V ）。驗證一個向量集合 S 是否拓展某向量空間 V 是我們常常碰到的工作，其程序如下：

(1)寫出 V 的任意向量 $\mathbf{v}$ ；

(2)測試以下線性系統

$$\left[\begin{array}{cccc|c}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k & \mathbf{v}\end{array}\right]$$

若有解，則 S 可拓展 V ，反之則否。 ■

例題 5-4 （驗證拓展）

驗證以下 S 是否拓展 V 。

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\right\},\qquad V=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\middle|\ z+3y-5x=0,\ x,y,z\in R\right\}$$

【解答】

令 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}r & s & 5r-3s\end{bmatrix}^T\in V, r,s\in R$ 為 V 的任意向量，測試以下線性系統

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&2&r\\1&3&s\\2&1&5r-3s\end{array}\right]\xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-(1)}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&r\\0&1&s-r\\0&-3&3r-3s\end{array}\right]\xrightarrow[(3)+3(2)]{(1)-2(2)}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&3r-s\\0&1&s-r\\0&0&0\end{array}\right]$$

此系統有解，因此 S 可以拓展 V 。 ■

例題 5-5 （驗證拓展）

驗證以下 S 是否拓展 R^3 。

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\4\\6\end{bmatrix}\right\}$$

【解答】

令 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^T\in R^3, x,y,z\in R$ ，測試以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&x\\2&2&4&y\\4&8&6&z\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&x\\0&-4&2&y-2x\\0&-4&2&z-4x\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}x\\0&0&0&z-y-2x\end{array}\right]$$

此系統無解，因此 S 無法拓展 R^3 。 ■

當一組向量 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ 可以拓展某向量空間 V ，則 S 就具備有成為 V 之座標系統的可能。任意 $\mathbf{v}\in V$ 可以寫成

$$\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_k\mathbf{v}_k,\qquad c_1,\ldots,c_k\in R$$

也就是說，我們可以用$(c_1, c_2, \ldots, c_k)$來**表示**（*represent*）$\mathbf{v}$。現在我們有興趣的是，是否只有唯一的一個$(c_1, c_2, \ldots, c_k)$來陳現$\mathbf{v}$？我們用另外一個角度來看這個問題。若S成爲座標系統，則$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$就是座標軸，座標軸的數目當然越少越好。好了，現在問題是，在可以拓展向量空間V的條件下，我們可不可以縮減S的元素數目？**線性獨立**（*linear independence*）的概念就是討論以上問題的結論。

定義　（線性獨立）

令$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in R^n$，若存在$c_1, c_2, \ldots, c_k \in R$，其中至少有一$c_i \neq 0$，使

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{5-3}$$

則稱S或$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$爲**線性相依**（*linear dependent*）。若S不是線性相依，則稱其爲**線性獨立**（*linear independent*）。也就是說，若S爲線性獨立，則(5-3)成立的唯一條件爲$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$；反之亦然。■

驗證線性獨立的程序　當$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$爲線性獨立，則

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

的唯一解爲$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$。驗證一個向量集合$S$是否線性獨立，主要在測試以下線性系統

$$\left[\begin{array}{cccc:c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

若只有瑣碎解，則S爲線性獨立，反之（有多重解）則爲線性相依。■

例題 5-6　（驗證線性獨立）

驗證以下S是否線性獨立。

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

【解答】

測試以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

此系統有多重解（第三行沒有帶頭一），因此 S 爲線性相依。 ■

題外話　例題 5-6 中因爲第三行沒有帶頭一，因此 S 不是線性獨立，這時，我們知道這 S 中的第三個向量可以表示成其它向量的線性組合

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

驗證這個線性組合是否成立的線性系統如下

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

得到 $c_1 = \frac{5}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}$。怎麼驗證過程與例題 5-6 的一模一樣？本來就是！ ■

例題 5-7　（驗證線性獨立）

驗證以下 S 是否線性獨立。

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

【解答】

測試以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{11}{2} & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

此系統有唯一解（三個變數都有帶頭一），因此 S 爲線性獨立。 ■

5.3 向量空間、基底與維度

本節正式定義**向量空間**（*real vector space*），我們熟悉的 R^n 就是一個向量空間。這裡討論的是 R^n 的一般性質，所以呢，當對向量空間的抽樣意義感到糊塗的時候，將『向量空間』換成 R^n 來想就對了。**基底**（*basis*）用我們熟悉的語言來說，就是座標軸的集合。亦即，基底是向量空間的部分集合，向量空間內的任意元素都可以用唯一的方式**表示**（*represent*）成基底元素的線性組合。

向量空間是一個集合，伴隨著這個集合有兩個運算：$\oplus$、$\odot$（就是實數的$+$、$\times$，或向量的加法、純量積），這兩個運算必須滿足洋洋灑灑的 10 個特性。不要慌，這些特性都是我們耳熟能詳的舊古董：（加法）封閉性、交換率、結合率、單位元素、反元素，（乘法）封閉性、結合率、分配率、單位元素等。

定義　（向量空間）

對於一個集合V，以及有關該集合元素的兩個運算，$\oplus$與$\odot$，若這兩個運算滿足以下性質：（$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$，$c,d\in R$）

(α)　$\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}\in V$　。（封閉性）

(a) $\mathbf{u}\oplus\mathbf{v}=\mathbf{v}\oplus\mathbf{u}$ 。（交換率）

(b) $\mathbf{u}\oplus(\mathbf{v}\oplus\mathbf{w})=(\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})\oplus\mathbf{w}$ 。（結合率）

(c) 存在$\mathbf{0}\in V$，使得$\mathbf{u}\oplus\mathbf{0}=\mathbf{0}\oplus\mathbf{u}=\mathbf{u}$ 。（單位元素存在）

(d) 對任意$\mathbf{u}\in V$，存在$-\mathbf{u}\in V$，使得$\mathbf{u}\oplus-\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 。（反元素存在）

(β)　$c\odot\mathbf{u}\in V$　。（封閉性）

(e) $c\odot(\mathbf{u}\oplus\mathbf{v})=c\odot\mathbf{u}\oplus c\odot\mathbf{v}$ 。（分配率）

(f) $(c+d)\odot\mathbf{u}=c\odot\mathbf{u}\oplus d\odot\mathbf{u}$ 。（分配率）

(g) $c\odot(d\odot\mathbf{u})=(cd)\odot\mathbf{u}$ 。（結合率）

(h) $1\odot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ 。（單位元素存在）

則V與$\oplus$、$\odot$形成一個**向量空間**（*real vector space*）。■

按照定義，實數集R與＋、×形成向量空間，但我們常省略兩個運算，直接稱R是一個向量空間。另外，我們會碰到必須證明某個集合是否爲向量空間的情況，證明過成分成兩個步驟：

(1)好好寫清楚該集合，以及兩個運算的定義；

(2)驗證(α)、(β)以及(a)~(h)等十個性質成立。

例題 5-8　（驗證向量空間）

令$V=\{(x,y,z)|x,y,z\in R\}$，且定義

$$(x,y,z)\oplus(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$$
$$c\odot(x,y,z)=(cx,y,z)$$

請證明V爲一向量空間。

【證明】

由 $(x+x',y+y',z+z')\in V,(cx,y,z)\in V$ 得知(α)、(β)成立。由

$$\begin{aligned}(x,y,z)\oplus(x',y',z')&=(x+x',y+y',z+z')\\&=(x'+x,y'+y,z'+z)=(x',y',z')\oplus(x,y,z)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(x_1,y_1,z_1)\oplus\left[(x_2,y_2,z_2)\oplus(x_3,y_3,z_3)\right]&=(x_1,y_1,z_1)\oplus(x_2+x_3,y_2+y_3,z_2+z_3)\\&=(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3,z_1+z_2+z_3)\\&=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\oplus(x_3,y_3,z_3)\\&=\left[(x_1,y_1,z_1)\oplus(x_2,y_2,z_2)\right]\oplus(x_3,y_3,z_3)\end{aligned}$$

得知(a)、(b)成立。令加法單位元素$\mathbf{0}=(0,0,0)$，反元素$-(x,y,z)=(-x,-y,-z)$，則(c)、(d)成立。由

$$\begin{aligned}c\odot\left[(x,y,z)\oplus(x',y',z')\right]&=c\odot(x+x',y+y',z+z')\\&=(cx'+cx,y'+y,z'+z)\\&=(cx',y',z')\oplus(cx,y,z)\\&=c\odot(x,y,z)\oplus c\odot(x',y',z')\end{aligned}$$

故(e)成立。但是

$$\begin{cases}(c+d)\odot(x,y,z)=((c+d)x,y,z)=(cx+dx,y,z)\\c\odot(x,y,z)\oplus d\odot(x,y,z)=(cx,y,z)\oplus(dx,y,z)=(cx+dx,2y,2z)\end{cases}$$
$$\Rightarrow\quad(c+d)\odot(x,y,z)\neq c\odot(x,y,z)\oplus d\odot(x,y,z)$$

故(f)**不成立**，V不是一個向量空間。■

從定義來證明一個集合是否向量空間，需要一一檢驗十個性質，非常麻煩。但是如

果存在另一個相近、已知是向量空間的集合，那麼只要檢驗兩個封閉性性質是否成立，就可以證明該新集合是否爲向量空間。以上是我們討論**次空間**（*subspace*）的用意。

定義　（次空間）

令集合V，以及兩個運算，$\oplus$與$\odot$，爲一向量空間。若V之子集W，$W \subseteq V, W \neq \varnothing$，與運算$\oplus$、$\odot$也是向量空間，則稱$W$爲$V$的**次空間**（*subspace*）。■

定理 5-1　（次空間）

令集合V，以及兩個運算，$\oplus$與$\odot$，爲一向量空間，又令W爲V之子集，$W \subseteq V$，且$W \neq \varnothing$，若以下兩性質成立

(α) $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$　　　　(β) $c \odot \mathbf{u} \in V$

則W爲V之**次空間**（*subspace*），反之亦然。■

例題 5-9　（驗證向量空間）

令$W = \left\{ (x, y, z) \middle|\ z + 3y - 5x = 0,\ x, y, z \in R \right\}$，請證明$W$爲一向量空間。

【證明】

我們用向量空間R^3來輔助證明。

首先，很容易看出$W = \left\{ (x, y, z) \middle|\ z + 3y - 5x = 0,\ x, y, z \in R \right\} \subseteq R^3$。

其次，令$(x, y, z), (x', y', z') \in W, c \in R$，則

$$
\begin{aligned}
&(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x_2, y + y_2, z + z_2) \\
&(z + z') + 3(y + y') - 5(x + x') = (z + 3y - 5x) + (z' + 3y' - 5x') = 0 + 0 = 0 \\
&\Rightarrow \quad (x, y, z) + (x', y', z') \in W
\end{aligned}
$$

故加法封閉性成立。又

$$
\begin{aligned}
&c(x, y, z) = (cx, cy, cz) \\
&cz + 3cy - 5cx = c(z + 3y - 5x) = c \times 0 = 0 \\
&\Rightarrow \quad c(x, y, z) \in W
\end{aligned}
$$

故純量積封閉性也成立。因爲$W \subseteq R^3$，且加法封閉性與純量積封閉性都成立，故W爲R^3之次空間；亦即，W也是向量空間。■

已經定義向量空間，接下來處理如何描述一個向量空間。我們先選出一組基本

定義　（基底）

令V為一個向量空間，$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}\subseteq V$，若

(a) S拓展V

(b) S為線性獨立

則稱S為向量空間V的一個**基底**（*basis*）。■

例題 5-10　（驗證基底）

令$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$，其中$\mathbf{v}_1=(1,0,1)$、$\mathbf{v}_2=(1,2,2)$、$\mathbf{v}_3=(0,2,2)$，請證明$S$為$R^3$的一個基底。

【證明】

(1)證明S拓展R^3。令R^4的任意元素為$(x,y,z,w),\ x,y,z,w\in R$，測試以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&2&2&y\\1&2&2&z\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&2&2&y\\0&1&2&z-x\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&1&1&\frac{1}{2}y\\0&0&1&z-x-\frac{1}{2}y\end{array}\right]$$

該系統有解，故S拓展R^3。

(2)證明S為線性獨立。測試以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&2&0\\1&2&2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&2&0\\0&1&2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

該系統有唯一的瑣碎解，故S為線性獨立。

綜合(1)S拓展R^3、(2)S為線性獨立，故知S為R^3的一個基底。■

定理 5-2　（基底表示之唯一性）

令$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$為向量空間$V$的一個基底，則任何$V$上的元素都可以由$S$的元素以唯一的線性組合表示。

【證明】

因為S拓展V，故對任意$\mathbf{v}\in V$，存在$c_1,c_2,\ldots,c_n\in R$，使得

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

假設有另外一個表示方式

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n$$

其中 $d_1, d_2, \ldots, d_n \in R$ 。將以上兩式將減，結果如下

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0} = (c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n$$

因 S 爲線性獨立，故 $c_i - d_i = 0, 1 \le i \le n$ ，即 $c_i = d_i, 1 \le i \le n$ ，也就是說 $\mathbf{v}$ 只有唯一的一種表示方式。 ■

定理 5-3 （**建構** $\operatorname{span} S$ **的基底**）

令 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ，其中 $\mathbf{v}_i, 1 \le i \le n$ 不全爲零，且令 $W = \operatorname{sapn} S$ ，則存在某 S 的部分集合 $S' \subseteq S$ 爲 W 的一個基底。 ■

題外話　雖然沒有定理 5-3 的證明，以下我們提供由 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq R^n$ 來建構 $W = \operatorname{sapn} S$ 基底的程序，由該程序可以想像如何證明定理 5-3。

爲了驗證 S 是否線性獨立，我們檢測以下線性系統

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

以三種基本列運算，盡量找出每一列的帶頭一後，若有某變數行沒有帶頭一，表示該系統有多重解，亦即 S 不是線性獨立。現在，刪除 S 中相對於沒有帶頭一之各行位置的元素向量，假設剩下的集合爲 S' ，則 S' 爲 $W = \operatorname{sapn} S$ 的一個基底。（我們可以證明 $\operatorname{span} S' = \operatorname{span} S$ 。） ■

例題 5-11 （**建構基底**）

就以下集合 S ，請找出一個 $\operatorname{span} S$ 的基底。

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\4\\6\end{bmatrix}\right\}$$

【解答】

測試以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&0\\2&2&4&0\\4&8&6&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&0\\0&-4&2&0\\0&-4&2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{5}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

第三行沒有帶頭一，刪除 S 之第三個元素後之集合

$$S'=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\8\end{bmatrix}\right\}$$

爲 $\operatorname{span} S$ 的一個基底。 ■

本節已經介紹向量空間與基底，最後，我們來探討基底的元素數目。我們已經知道一個向量空間可以有一個以上的基底，然而，這些不同基底的元素數目是否相同呢？答案是肯定的，這個相同的數目就是我們熟知的**維度**（*dimension*）。

定理 5-4 （基底與線性獨立集合之元素數目）

令 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 爲向量空間 V 的基底，若 $T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m\}\subseteq V$ 且 T 爲線性獨立，則 $m\le n$ 。

【證明】

因 S 是基底， T 中元素 $\mathbf{w}_i\in T, 1\le i\le m$ 可以表示成

$$\mathbf{w}_i=c_{1i}\mathbf{v}_1+c_{2i}\mathbf{v}_2+\cdots+c_{ni}\mathbf{v}_n$$

考慮以下線性系統

$$d_1\mathbf{w}_1+d_2\mathbf{w}_2+\cdots+d_m\mathbf{w}_m=\mathbf{0}$$

將 $\mathbf{w}_i$ 代入替換

$$\Rightarrow\quad d_1\left(\sum_{i=1}^{n}c_{i1}\mathbf{v}_i\right)+d_2\left(\sum_{i=1}^{n}c_{i2}\mathbf{v}_i\right)+\cdots+d_m\left(\sum_{i=1}^{n}c_{im}\mathbf{v}_i\right)=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{m} d_j c_{1j}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\sum_{j=1}^{m} d_j c_{2j}\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{m} d_j c_{nj}\right)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

因$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$線性獨立，故

$$\left(\sum_{j=1}^{m} d_j c_{1j}\right) = \left(\sum_{j=1}^{m} d_j c_{2j}\right) = \cdots = \left(\sum_{j=1}^{m} d_j c_{nj}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad d_1\mathbf{c}_1 + d_2\mathbf{c}_2 + \cdots + d_m\mathbf{c}_m = \mathbf{0} \tag{5-4}$$

其中，$\mathbf{c}_j=\left(c_{1j},c_{2j},\ldots,c_{nj}\right)^{\mathrm{T}},1\le j\le m$。(5-4)中有$m$個變數、$n$個等式，若$m>n$，則該線性系統一定為多重解，亦即$T$為線性相依。這違反$T$為線性獨立的假設，因此得證$m\le n$。 ■

定理 5-5　（基底有相同元素數目）

令$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$與$T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m\}$皆為向量空間$V$的基底，則$n=m$。

【證明】

利用定理 5-4，若S為基底、T為線性獨立，則$m\le n$；若T為基底、S為線性獨立，則$n\le m$。現在兩者同時成立，故$m=n$。 ■

定義　（維度）

一個向量空間V的**維度**（*dimension*）為其基底之元素數目，標示為$\dim V$。若$V=\{\mathbf{0}\}$，則其維度為零，亦即$\dim\{\mathbf{0}\}=0$。 ■

例題 5-12　（維度）

就以下集合S，若$W=\operatorname{span}S$，請計算向量空間W之維度$\dim W$。

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\4\\6\end{bmatrix}\right\}$$

【解答】

測試以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

第三行沒有帶頭一，刪除 S 之第三個元素後之集合

$$S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

爲 $\operatorname{span} S$ 的一個基底。故 $\dim W = 2$ 。 ■

5.4 矩陣的秩

本節我們將焦點轉回到我們一直關心的線性系統：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \qquad \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}, \mathbf{x} \in \mathbf{M}_{n\times 1}, \mathbf{b} \in \mathbf{M}_{m\times 1} \tag{5-5}$$

當然，我們是用向量空間的觀點來看(5-5)。與(5-5)之係數矩陣 $\mathbf{A}$ 有關的向量空間有三個：**列空間**（*row space*）、**行空間**（*column space*）、與**零空間**（*null space*）。我們對這些空間的維度有興趣。

定義　（列空間、行空間）

令 $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \in \mathbf{M}_{m\times n}$ ， $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ 爲 $\mathbf{A}$ 之列向量， $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ 爲 $\mathbf{A}$ 之行向量，則 $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subseteq R^n$ 稱爲 $\mathbf{A}$ 之**列空間**（*row space*），而 $\operatorname{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\} \subseteq R^m$ 稱爲 $\mathbf{A}$ 之**行空間**（*column space*）。 ■

定義　（解空間、零空間）

令 $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \in \mathbf{M}_{m\times n}$ 、 $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_{n\times 1}$ 、 $\mathbf{b} \in \mathbf{M}_{m\times 1}$ ，則線性系統 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 之解 $V = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ 稱爲 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 之**解空間**（*solution space*），而齊次系統 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 之解 $W = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$ 稱爲 $\mathbf{A}$ 之**零空間**（*null space*）。 ■

定義　（秩、零度）

令 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ，V 、W 、N 分別爲 $\mathbf{A}$ 之列空間、行空間、與零空間，則前兩者的維度 $\dim V$ 、$\dim W$ 分別稱爲 $\mathbf{A}$ 之**列秩**（*row rank*）、**行秩**（*column rank*），統稱爲 $\mathbf{A}$ 之**秩**（*rank*），記爲 $rank\,\mathbf{A}$ ；後者的維度 $\dim N$ 稱爲 $\mathbf{A}$ 之**零度**（*nullity*），記爲 $nullity\,\mathbf{A}$ 。 ■

定理 5-6　（列秩與行秩相等）

令 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ，則 $\mathbf{A}$ 的列秩與行秩相等。

【證明】

尋找 $\mathbf{A}$ 列空間之基底的過程，爲以三種基本列運算，轉換下列增廣矩陣

$$\left[\mathbf{A}\;\middle|\;\mathbf{0}\right] \tag{5-6}$$

至約化列梯形矩陣（事實上，盡量找出每列的帶頭一即可）。$\mathbf{A}$ 中有帶頭一的各列即形成 $\mathbf{A}$ 列空間之基底。而尋找 $\mathbf{A}$ 行空間之基底的過程也是轉換(5-6)，這次，$\mathbf{A}$ 中有帶頭一的各行即形成 $\mathbf{A}$ 行空間之基底。我們發現，列空間的基底與行空間的基底都是來自相同的帶頭一，因此這兩個空間有相同的維度。 ■

例題 5-13　（列空間與行空間的基底、秩）

就以下矩陣 $\mathbf{A}$ ，請寫出列空間基底、行空間基底、列秩、與行秩。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&2&4\\4&8&6\end{bmatrix}$$

【解答】

以三種基本列運算，轉換以下增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&0\\2&2&4&0\\4&8&6&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&0\\0&-4&2&0\\0&-4&2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{5}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

有帶頭一者爲第一、二列，或第一、二行，故其列空間與行空間分別爲

$$\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 2 & 4\end{bmatrix}\right\},\qquad \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\8\end{bmatrix}\right\}$$

其秩爲 $rank\,\mathbf{A}=2$ 。 ■

例題 5-14　（零空間與零度）

就以下矩陣 $\mathbf{A}$ ，請寫出其零空間與零度。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 2 & 4\\4 & 8 & 6\end{bmatrix}$$

【解答】

以三種基本列運算，轉換以下增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 0\\2 & 2 & 4 & 0\\4 & 8 & 6 & 0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 1 & 0\\0 & -4 & 2 & 0\\0 & -4 & 2 & 0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{5}{2} & 0\\0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

其解爲

$$x_3=t,\ x_1=-\tfrac{5}{2}t,\ x_2=\tfrac{1}{2}t\quad\Rightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}t,\quad t\in R\quad\Rightarrow\quad\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-5\\1\\2\end{bmatrix}s,\quad s\in R$$

故零空間爲

$$\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-5\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

其零度爲 $nullity\,\mathbf{A}=1$ 。 ■

定理 5-7　（矩陣秩與零度之和與行數相等）

令 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ，則 $rank\,\mathbf{A}+nullity\,\mathbf{A}=n$ 。

【證明】

我們檢視增廣矩陣$\left[\mathbf{A} \mid \mathbf{0}\right]$之約化列梯形矩陣，然後由有帶頭一之列來形成行空間基底，由沒有帶頭一之行來決定零空間的基底。因此，行空間的維度加上零空間的維度應等於 $\mathbf{A}$ 之行數，亦即，$rank\,\mathbf{A} + nullity\,\mathbf{A} = n$ 。 ■

例題 5-15 （零空間與零度）

就以下矩陣 $\mathbf{A}$ ，請寫出其零空間與零度。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

【解答】

以三種基本列運算，轉換以下增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{11}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

其解為

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad s, t \in R \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} v, \quad u, v \in R$$

故零空間為

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

其零度為 $nullity\,\mathbf{A} = 2$ 。 ■

題外話（解空間的維度）　　一般線性系統（非齊次系統）

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},\quad \mathbf{b}\neq\mathbf{0}$$

可能會有多重解、唯一解、或無解。判斷這些狀況的依據爲以下兩矩陣的秩

錯誤! 物件無法用編輯功能變數代碼來建立。

以及**錯誤! 物件無法用編輯功能變數代碼來建立。**之行數 n 間的互相關係：

$(1)\ r_{[\mathbf{A}\,\mathbf{b}]}>r_{\mathbf{A}}$ ：無解
$(2)\ r_{[\mathbf{A}\,\mathbf{b}]}=r_{\mathbf{A}}=n$ ：唯一解
$(3)\ r_{[\mathbf{A}\,\mathbf{b}]}=r_{\mathbf{A}}<n$ ：多重解

當然，我們由定義知道 (1) 、(2) 之解空間的維度爲零。 ■

例題 5-16　（線性系統無解之情況）

請驗證下列線性系統無解。

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&2\\2&2&4&5\\4&8&6&8\end{array}\right]$$

【解答】

以三種基本列運算，轉換以下增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&2\\2&2&4&5\\4&8&6&8\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&2\\0&-4&2&1\\0&-4&2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{5}{2}&\frac{11}{4}\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&-1\end{array}\right]$$

即 $r_{[\mathbf{A}\,\mathbf{b}]}=3>r_{\mathbf{A}}=2$ ，故此系統無解。 ■

例題 5-17　（線性系統無解之特殊解與齊次解）

請寫出下列線性系統的一般解。

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

【解答】

以三種基本列運算，轉換以下增廣矩陣

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

齊次系統的解爲

$$\mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} s, \quad s \in R$$

我們也可以驗證

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

是線性系統的一個解。我們稱 $\mathbf{x}_h$ 爲**齊次解**（*homogeneous solution*）， $\mathbf{x}_p$ 爲**特殊解**（*particular solution*）。一個線性系統若有解，其一般解可以寫成齊次解加上特殊解，如下所示

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} s, \quad s \in R$$

以上特殊解、齊次解都不是唯一的，各任取一個就可以了。列如

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \in R$$

請驗證 $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 也是一個特殊解。 ■

題外話（計算技巧） 綜合以上本章的幾個例題，以下整理我們應付本章的課題的計算（驗證線性獨立、拓展，寫出列空間、行空間、零空間，計算維度、秩、與零度等等）該有的技巧：(1)三種基本列運算（找出每列的帶頭一）；(2)寫出增廣矩陣（線性系統）的一般解。不要懷疑，真的只要第三章的計算技巧就夠了！雖然如此，同學們熟練這兩個計算技巧了嗎？ ■

題外話（兩種線性系統） 到目前爲止，我們將線性系統寫成

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \tag{5-7}$$

也就是，行向量$\mathbf{b}$是矩陣$\mathbf{A}$行向量的線性組合，$\mathbf{x}$是各行的權重。我們以行向量爲主，因此(5-7)是常見的型式。有時（必要的時候），也可以見到以下線性系統

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$$

這個時候，列向量$\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$是矩陣$\mathbf{A}$列向量的線性組合。（還記得『**前列後行**』的口訣嗎？決策變數$\mathbf{x}$在前應寫成列向量，其值爲矩陣$\mathbf{A}$各列的權重；$\mathbf{x}$在後則爲行向量，其值爲矩陣$\mathbf{A}$各行的權重。） ■

5.5 座標系統與座標變換

本節我們繼續討論線性系統(5-7)：

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

在$\mathbf{A}$之行空間的觀點下，現在我們關心的是，該系統之決策變數$\mathbf{x}$的意義。令$S=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n\}$爲$\mathbf{A}$之行向量所成的集合，若$S$爲$\mathbf{A}$之行空間的一個基底，則稱$\mathbf{x}$爲$\mathbf{b}$在$S$基底下的**座標**（*coordinate*），記爲

$$[\mathbf{b}]_S=\mathbf{x} \tag{5-8}$$

請再看一次(5-8)的符號，S是某向量空間的一個基底，$\mathbf{b}$是該空間上的一點，而$[\mathbf{b}]_S$爲$\mathbf{b}$的座標。

例題 5-18 （座標）

以下S爲向量空間V的一個基底，且$\mathbf{v}\in V$，試求座標$[\mathbf{v}]_S$。

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\2\\8\end{bmatrix}\right\},\qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$$

【解答】

令$[\mathbf{v}]_S=\mathbf{x}$，則$[\mathbf{v}]_S$以下線性系統之解

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},\qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\\4&8\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$$

即求解以下線性系統

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&3&-1\\2&2&2\\4&8&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&3&-1\\0&-4&4\\0&-4&4\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right]$$

其解爲

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow[\mathbf{v}]_S=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

■

例題 5-19　（座標）

令$S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$、$T=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$皆爲$R^4$的基底，其中

$$\mathbf{v}_1=(1,1,0,0),\quad \mathbf{v}_2=(0,0,2,1),\quad \mathbf{v}_3=(-1,0,2,0),\quad \mathbf{v}_4=(0,1,0,1)$$

$$\mathbf{e}_1=(1,0,0,0),\quad \mathbf{e}_2=(0,1,0,0),\quad \mathbf{e}_3=(0,0,1,0),\quad \mathbf{e}_4=(0,0,0,1)$$

若$\mathbf{v}=(2,3,-1,2)$，試求$[\mathbf{v}]_S$與$[\mathbf{v}]_T$。

【解答】

(1) $[\mathbf{v}]_S$爲以下線性系統之解

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&2\\1&0&0&1&3\\0&2&2&0&-1\\0&1&0&1&2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&2\\0&0&1&1&1\\0&2&2&0&-1\\0&1&0&1&2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&3\\0&0&1&1&1\\0&2&0&-2&-3\\0&1&0&1&2\end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{7}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{4} \end{array}\right]$$

其解爲

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

(2) $[\mathbf{v}]_T$ 爲以下線性系統之解

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

其解爲

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

■

例題 5-20　（座標）

令 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ 爲 R^4 的基底，其中

$$\mathbf{v}_1=(1,1,0,0),\quad \mathbf{v}_2=(0,0,2,1),\quad \mathbf{v}_3=(-1,0,2,0),\quad \mathbf{v}_4=(0,1,0,1)$$

試求 $[\mathbf{v}_1]_S$ 、 $[\mathbf{v}_2]_S$ 、 $[\mathbf{v}_3]_S$ 、 $[\mathbf{v}_4]_S$ 。

【解答】

$[\mathbf{v}_i]_S, 1\le i\le 4$ 爲以下線性系統之解

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c|c|c}1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c|c|c|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

其解爲

$$[\mathbf{v}_1]_S = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{v}_2]_S = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{v}_3]_S = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad [\mathbf{v}_4]_S = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

■

題外話（自然基底） 我們喜歡$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\cdots)$、$\mathbf{e}_2 = (0,1,0,\cdots)$、$\mathbf{e}_3 = (0,0,1,\cdots)$等等這些向量之集合作爲$R^n$的基底，稱爲**自然基底**（*natural basis*）。如例題 5-19 與例題 5-20 所示，自然基底的每一個向量都自然有帶頭一，計算自然基底下的座標非常容易。 ■

題外話（$[\bullet]_S$ 是一個線性函數） 令S爲向量空間V的一個基底，$\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$，$c \in R$，我們可以很容易驗證以下有關座標的關係式成立

$$[\mathbf{v}+\mathbf{w}]_S = [\mathbf{v}]_S + [\mathbf{w}]_S \tag{5-9}$$

$$[c\mathbf{v}]_S = c[\mathbf{v}]_S \tag{5-10}$$

由(5-9)與(5-10)的結果，我們可以將座標$[\bullet]_S$看成一個線性函數，也就是說，以下線性組合的關係也成立

$$[c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n]_S = c_1[\mathbf{v}_1]_S + c_2[\mathbf{v}_2]_S + \cdots + c_n[\mathbf{v}_n]_S$$

其中，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$，$c_1,c_2,\ldots,c_n \in R$。 ■

座標變換

向量空間可以有一個以上的基底，造成空間內的同一個向量會許的不同的座標。這

些不同基底的座標之間當然有一定的關係，我們可以用已知的座標與這些關係，來推算未知的座標，此程序稱為**座標變換**（*change of coordinates*）。

令 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 、 $T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n\}$ 皆為向量空間 V 的基底， $\mathbf{v}\in V$ ，則依據座標的定義，我們有以下關係式

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n][\mathbf{v}]_S=\mathbf{v}=[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_n][\mathbf{v}]_T$$

若令

$$\mathbf{A}_S=[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n], \qquad \mathbf{A}_T=[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_n]$$

則以上關係式可以寫成

$$\mathbf{A}_S[\mathbf{v}]_S=\mathbf{A}_T[\mathbf{v}]_T \tag{5-11}$$

因 S 、 T 為基底，故 $\mathbf{A}_S^{-1}$ 、 $\mathbf{A}_T^{-1}$ 皆存在，(5-11)改寫成

$$[\mathbf{v}]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T[\mathbf{v}]_T=\mathbf{P}_{S\leftarrow T}[\mathbf{v}]_T$$
$$[\mathbf{v}]_T=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_S[\mathbf{v}]_S=\mathbf{P}_{T\leftarrow S}[\mathbf{v}]_S$$

其中， $\mathbf{P}_{S\leftarrow T}=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T$ 稱為由 T 基底到 S 基底之**變換矩陣**（*transition matrix*），同樣的， $\mathbf{P}_{T\leftarrow S}=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_S$ 稱為由 S 基底到 T 基底之變換矩陣。這兩個變換矩陣互為反矩陣

$$\mathbf{P}_{S\leftarrow T}\mathbf{P}_{T\leftarrow S}=\mathbf{I}$$

瞭解並記得(5-11)最重要，所有座標變換問題都從該式出發。

例題 5-21　（變換矩陣與座標變換）

令 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ 、 $T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\}$ 皆為 R^3 的基底，其中

$$\mathbf{v}_1=(2,0,1), \quad \mathbf{v}_2=(1,2,0), \quad \mathbf{v}_3=(1,1,1)$$
$$\mathbf{w}_1=(6,3,3), \quad \mathbf{w}_2=(4,-1,3), \quad \mathbf{w}_3=(5,5,2)$$

(1)試求變換矩陣 $\mathbf{P}_{S\leftarrow T}$ ；(2)若 $[\mathbf{v}]_T=[1 \quad 2 \quad -2]^{\mathrm{T}}$ ，試求 $[\mathbf{v}]_S$ 。

【解答】

基本係數矩陣如下

$$\mathbf{A}_S=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}_T=\begin{bmatrix}6&4&5\\3&-1&5\\3&3&2\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathbf{P}_{S\leftarrow T}$

用基本列運算轉換以下增廣矩陣

$$\left[\mathbf{A}_S \mid \mathbf{A}_T\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_S \mid \mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T\right]=\left[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T\right]$$

當左半邊轉換爲單位矩陣時，右半邊即爲 $\mathbf{P}_{S\leftarrow T}=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&6&4&5\\0&2&1&3&-1&5\\1&0&1&3&3&2\end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&2&1\\0&1&0&1&-1&2\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{P}_{S\leftarrow T}=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&-1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$$

(2) 求 $[\mathbf{v}]_S$

$$\mathbf{A}_S[\mathbf{v}]_S=\mathbf{A}_T[\mathbf{v}]_T \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}2&1&1\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix}[\mathbf{v}]_S=\begin{bmatrix}6&4&5\\3&-1&5\\3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-9\\5\end{bmatrix}$$

亦即，$[\mathbf{v}]_S$ 爲以下線性系統的解

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&1&1&4\\0&2&1&-9\\1&0&1&5\end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&4\\0&1&0&-5\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow [\mathbf{v}]_S=\begin{bmatrix}4\\-5\\1\end{bmatrix}$$

當然，$[\mathbf{v}]_S$ 也可以從 $\mathbf{P}_{S\leftarrow T}$ 來算

$$[\mathbf{v}]_S=\mathbf{P}_{S\leftarrow T}[\mathbf{v}]_T=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&-1&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-5\\1\end{bmatrix}$$

■

題外話（線性轉換） 理論上，座標變換屬於下一章**線性轉換**（*linear transformation*）的範圍。以線性轉換的觀點，線性系統 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 是一個線性函數： $f(\mathbf{x})=\mathbf{b}$ ，係數矩陣 $\mathbf{A}$ 是將向量 $\mathbf{x}$ **轉換**（*transform*）成向量 $\mathbf{b}$ 的**轉換矩陣**（*transformation matrix*）。這裡談座標變換，都是從『$[\bullet]_S$ **可以視為一個線性函數**』而來，我們處理的就是如下的線性系統與線性函數：$[\mathbf{v}]_S=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T[\mathbf{v}]_T \Rightarrow f([\mathbf{v}]_T)=[\mathbf{v}]_S$ ，轉換矩陣是將 T 基底座標變換爲 S 基底座標的變換矩陣 $\mathbf{P}_{S\leftarrow T}=\mathbf{A}_S^{-1}\mathbf{A}_T$ 。 ■

正交座標系統

到目前爲止，我們已經學會找出向量空間 V 之任意向量 $\mathbf{v}$ ，在任意基底 S 下的座標 $[\mathbf{v}]_S$ ；也會在不同座標系統（基底）之座標間互相轉換。既然向量 $\mathbf{v}$ 可以表示成不同座標系統的座標，那麼，這些座標系統中哪一個比較好？或者我們應該這樣問，我們喜歡座標系統的那些特質？答案是底下介紹的**單範正交基底**（*orthonormal basis*）。

定義 （正交基底與單範正交基底）

令 $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\}\subseteq R^n$ ，若 $\mathbf{u}_i\bullet\mathbf{u}_j=0, i\neq j, 1\leq i,j\leq k$ ，則稱 S **正交**（*orthogonal*），又若 $\mathbf{u}_i$ 皆爲單位向量，即 $\mathbf{u}_i\bullet\mathbf{u}_i=1, 1\leq i\leq k$ ，則稱 S **單範正交**（*orthonomal*）。若 S 爲 R^n 之基底且正交，則稱之爲**正交基底**（*orthogonal basis*）；同理，若 S 爲 R^n 之基底且單範正交，則稱之爲**單範正交基底**（*orthonormal basis*）。 ■

題外話（單範正交基底的性質） 單範正交基底就是單範、正交的基底。因此，若 $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\}\subseteq R^n$ 爲向量空間 V （ $\dim V=k\leq n$ ）之一個單範正交基底，則 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k$ 滿足下列兩個條件：

(1) $rank[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\cdots\mathbf{u}_k]=k$

(2) $\mathbf{u}_i\bullet\mathbf{u}_j=\begin{cases}1 & 若\ i=j\\ 0 & 若\ i\neq j\end{cases}$

還記得怎麼驗證(1)嗎？以基本列運算轉換 $[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\cdots\mathbf{u}_k]$ ，能找到最多帶頭一的數目就是矩陣秩。 ■

以單範正交基底來表示向量，其座標非常容易得到。令 $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\}\subseteq R^n$ 爲向量空間 V 之單範正交基底，則任意 $\mathbf{v}\in V$ 可以表示爲

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$$

其中

$$c_i = \mathbf{v}\bullet\mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le k \qquad (5\text{-}12)$$

不用大費周章地去解線性系統$\left[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k \mid \mathbf{v}\right]$。

例題 5-22　（單範正交基底之座標）

令$S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$皆爲$R^3$的基底，其中

$$\mathbf{u}_1=\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \mathbf{u}_2=\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right),\quad \mathbf{u}_3=\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(1)試驗證S爲單範正交基底。

(2)若$\mathbf{v}=(2,1,3)$，試求$[\mathbf{v}]_S$。

【解答】

(1) 先驗證$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$間的正交性質，再驗證是否正規劃：

$$\mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_2=\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\bullet\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=0$$
$$\mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_3=\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\bullet\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$$
$$\mathbf{u}_2\bullet\mathbf{u}_3=\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\bullet\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$$

故$S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$爲正交基底，又

$$\|\mathbf{u}_1\|=\left\|\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\|=\sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$
$$\|\mathbf{u}_2\|=\left\|\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\|=\sqrt{\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}=1$$
$$\|\mathbf{u}_3\|=\left\|\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\|=\sqrt{\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1$$

故$S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$爲單範正交基底。

(2) 把S當成一般基底，直接求解以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(2’) 利用單範正交基底的性質：

$$c_1 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1 = (2,1,3) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$
$$c_2 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_2 = (2,1,3) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$
$$c_3 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_3 = (2,1,3) \bullet \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \quad [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

利用單範正交基底性質的計算比較簡單。 ■

題外話（正交基底之座標） 若我們手上有的只是正交基底 $R = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$，而還是需要找向量 $\mathbf{u}$ 的座標 $[\mathbf{u}]_R$，有沒有類似(5-12)的方便公式呢？回答這問題前，先看看以下作法。

將 $R = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ 轉換爲單範正交基底 $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$，其中

$$\mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}, \quad 1 \le i \le m \tag{5-13}$$

則 $\mathbf{u}$ 可以表示成

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_m\mathbf{w}_m = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} \bullet \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{u} \bullet \mathbf{w}_m)\mathbf{w}_m$$

以(5-13)將 $\mathbf{w}_i, 1 \le i \le m$ 代換

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \left(\mathbf{u}\bullet\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}\right)\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} + \left(\mathbf{u}\bullet\frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}\right)\frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} + \cdots + \left(\mathbf{u}\bullet\frac{\mathbf{v}_m}{\|\mathbf{v}_m\|}\right)\frac{\mathbf{v}_m}{\|\mathbf{v}_m\|} \\ &= \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\bullet\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_m + \cdots + \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}_m}{\mathbf{v}_m\bullet\mathbf{v}_m}\mathbf{v}_m\end{aligned}$$

好了，答案如下。若 $R = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ 爲正交基底，則

$$[\mathbf{u}]_R = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } d_i = \frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\bullet\mathbf{v}_i}, \ i = 1, \ldots, m$$

與單範正交基底比較，多除一個 $\mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_i = \|\mathbf{v}_i\|^2$ 。■

例題 5-23 （正交基底之座標）

令 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 爲 R^3 的正交基底，其中

$$\mathbf{u}_1 = (1,0,1), \quad \mathbf{u}_2 = (1,2,-1), \quad \mathbf{u}_3 = (-1,1,1)$$

若 $\mathbf{v} = (2,1,3)$ ，試求 $[\mathbf{v}]_S$ 。

【解答】

利用正交基底的性質：

$$c_1 = \frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\bullet\mathbf{u}_1} = \frac{(2,1,3)\bullet(1,0,1)}{(1,0,1)\bullet(1,0,1)} = \frac{5}{2}$$

$$c_2 = \frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2\bullet\mathbf{u}_2} = \frac{(2,1,3)\bullet(1,2,-1)}{(1,2,-1)\bullet(1,2,-1)} = \frac{1}{6}$$

$$c_3 = \frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3\bullet\mathbf{u}_3} = \frac{(2,1,3)\bullet(-1,1,1)}{(-1,1,1)\bullet(-1,1,1)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

或者， $\mathbf{v} = \frac{5}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{u}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{u}_3$ 。■

定理 5-8　（單範正交基底存在性、Gram-Schmidt 程序）

令 W 為 R^n 的次空間（$W \neq \{\mathbf{0}\}$），$S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_m\}$ 是 W 的基底，則 W 存在一個單範正交基底 $T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m\}$ 。

【證明】

我們用建構法來證明：將 $S=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_m\}$ 轉換為正交基底 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m\}$ ，再轉換為單換正交基底 $T=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m\}$ 。

首先，令 $\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1$ 。

接下來找 $\mathbf{v}_2$ ，其條件為 $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}=\operatorname{span}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}=\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\}$ 且 $\mathbf{v}_2\bullet\mathbf{v}_1=0$ ：

$$\mathbf{v}_2=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{u}_2,\quad \mathbf{v}_2\bullet\mathbf{v}_1=c_1\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{u}_2\bullet\mathbf{v}_1=0$$

可以指定任意非零值給 c_2 ，令 $c_2=1$，則

$$c_1=-\frac{\mathbf{u}_2\bullet\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_1}$$
$$\Rightarrow\quad \mathbf{v}_2=c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_2-\frac{\mathbf{u}_2\bullet\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

其次找 $\mathbf{v}_i, 3\le i\le m$ ，其條件為 $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_i\}=\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_{i-1},\mathbf{u}_i\}$ 且 $\mathbf{v}_i\bullet\mathbf{v}_k=0, k=1,\ldots,i-1$ ：

$$\mathbf{v}_i=d_1\mathbf{v}_1+d_2\mathbf{v}_2+\cdots+d_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}+d_i\mathbf{u}_i$$
$$\mathbf{v}_i\bullet\mathbf{v}_k=\left(d_1\mathbf{v}_1+d_2\mathbf{v}_2+\cdots+d_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}+d_i\mathbf{u}_i\right)\bullet\mathbf{v}_k=0,\quad k=1,\ldots,i-1 \tag{5-14}$$

因 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_{i-1}$ 相互正交，即 $\mathbf{v}_j\bullet\mathbf{v}_k=0, 1\le j,k\le i-1, j\neq k$ ，故(5-14)只剩下兩項

$$d_k\mathbf{v}_k\bullet\mathbf{v}_k+d_i\mathbf{u}_i\bullet\mathbf{v}_k=0,\quad k=1,\ldots,i-1$$

可以指定任意非零值給 d_i ，令 $d_i=1$，則

$$d_k=-\frac{\mathbf{u}_i\bullet\mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k\bullet\mathbf{v}_k},\quad k=1,\ldots,i-1$$
$$\Rightarrow\quad \mathbf{v}_i=\mathbf{u}_i-\frac{\mathbf{u}_i\bullet\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\bullet\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1-\frac{\mathbf{u}_i\bullet\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\bullet\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2-\cdots-\frac{\mathbf{u}_i\bullet\mathbf{v}_{i-1}}{\mathbf{v}_{i-1}\bullet\mathbf{v}_{i-1}}\mathbf{v}_{i-1}$$

最後，將 $\mathbf{v}_i, 1\le i\le m$ 正規化

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i, \quad 1 \le i \le m$$

則 $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ 為 W 之單範正交基底。 ■

Gram-Schmidt 程序　（轉換已知基底為單範正交基底）

令 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ 是 W 的基底（W 為 R^n 的次空間，$W \neq \{\mathbf{0}\}$），以下三步驟可以將 S 轉換為 W 之單範正交基底：

步驟一：

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

步驟二：

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i - \frac{\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{v}_{i-1}}{\mathbf{v}_{i-1} \bullet \mathbf{v}_{i-1}}\mathbf{v}_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, m$$

步驟三：（正規化）

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

則步驟一、二得到的 $R = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ 為 W 之正交基底，而 $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ 則為 W 之單範正交基底。 ■

例題 5-24　（單範正交基底）

令 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 皆為 R^3 的基底，其中

$$\mathbf{u}_1 = (2,0,1), \quad \mathbf{u}_2 = (1,2,0), \quad \mathbf{u}_3 = (1,1,1)$$

試將 S 轉換為 R^3 之單範正交基底。

【解答】

(1) $\mathbf{v}_1 = (2,0,1)$

(2) $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = (1,2,0) - \dfrac{2}{5}(2,0,1) = \left(\tfrac{1}{5}, 2, -\tfrac{2}{5}\right)$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \bullet \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \bullet \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = (1,1,1) - \frac{3}{5}(2,0,1) - \frac{\frac{9}{5}}{\frac{21}{5}}\left(\tfrac{1}{5}, 2, -\tfrac{2}{5}\right) = \left(-\tfrac{2}{7}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{4}{7}\right)$$

(3) $\mathbf{w}_1 = \dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1) = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{21/5}}\left(\tfrac{1}{5}, 2, -\tfrac{2}{5}\right) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{105}}, \tfrac{10}{\sqrt{105}}, -\tfrac{2}{\sqrt{105}}\right)$$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3/7}}\left(-\tfrac{2}{7}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{4}{7}\right) = \left(-\tfrac{2}{\sqrt{21}}, \tfrac{1}{\sqrt{21}}, \tfrac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

轉換後之單範正交基底為$\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{105}},\frac{10}{\sqrt{105}},-\frac{2}{\sqrt{105}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}}\right)\right\}$。 ■

正交補集

我們可以將一個集合分割成兩個集合，例如，$A=\{1,2,3,4\}$可以分割成$A_1=\{1,3\}$與$A_2=\{2,4\}$，其中$A_1\cap A_2=\varnothing$且$A_1\cup A_2=A$，而A_1、A_2則互稱為**補集**（*complement*）。這一小節，我們討論如何讓一個向量空間V有類似集合分割的操作。

令W為向量空間V的一個次空間，我們將V中不屬於W的部分稱為W的**正交補集**（*orthogonal complement*），標記為$W^{\perp}$（這符號讀成『W perp』），其中$W\cap W^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$且$W+W^{\perp}=V$。請特別注意，這裡的**正交補集**是一個**向量空間**，而**補集**則是一個**集合**。以下我們定義正交補集$W^{\perp}$並解釋$W+W^{\perp}=V$是什麼意思。

定義　（正交補集）

令W為R^n的一個次空間，$\mathbf{u}\in R^n$，若$\mathbf{u}$正交於對所有$\mathbf{w}\in W$，即$\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}=0,\forall\,\mathbf{w}\in W$，則稱$\mathbf{u}$ **正交於**W。所有正交於W之向量所成的集合稱為W之**正交補集**（*orthogonal complement*），標記為$W^{\perp}$，$W^{\perp}=\{\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}=0,\forall\,\mathbf{w}\in W\}$。 ■

定義　（向量空間之和　W_1+W_2）

令W_1、W_2分別為R^n的一個次空間，則W_1+W_2為所有$\mathbf{u}=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2$所成的集合，其中$\mathbf{w}_1\in W_1$，$\mathbf{w}_2\in W_2$。亦即，$W_1+W_2=\{\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_1\in W_1,\mathbf{w}_2\in W_2\}$。 ■

定理 5-9

令W為R^n的一個次空間，則

(a) $W^{\perp}$是R^n的次空間；

(b) $W\cap W^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$；

(c) $W+W^{\perp}=R^n$；

(d) $\left(W^{\perp}\right)^{\perp}=W$。 ■

例題 5-25　（正交補集）

令W為R^4的一個次空間，$S=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$為$W$的一個基底，其中

$$\mathbf{w}_1=(1,1,0,1),\quad \mathbf{w}_2=(0,-1,1,1)$$

試求$W^{\perp}$的一個基底。

【解答】

令$(x,y,z,w)\in W^{\perp}$，則

$$\begin{cases}(x,y,z,w)\bullet(1,1,0,1)=0\\(x,y,z,w)\bullet(0,-1,1,1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1x+1y+0z+1w=0\\0x-1y+1z+1w=0\end{cases}$$

即(x,y,z,w)爲以下線性系統的解

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&0\\0&-1&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{基本列運算}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&1&2&0\\0&1&-1&-1&0\end{array}\right]$$

其一般解爲

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}t,\quad s,t\in R$$

得到$\{(-1,1,1,0),(-2,1,0,1)\}$爲$W^{\perp}$的一個基底。 ■

定理 5-10 (方陣之零空間與列空間互為正交補集)

令$\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$，則

(a) $\mathbf{A}$的零空間爲$\mathbf{A}$之列空間的正交補集；

(b) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的零空間爲$\mathbf{A}$之行空間的正交補集。 ■

例題 5-26 （正交補集：列空間與零空間）

令$W=\operatorname{span}\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3,\mathbf{w}_4,\mathbf{w}_5\}$爲$R^5$的一個次空間，其中

$$\mathbf{w}_1=(2,-1,0,1,2),\quad \mathbf{w}_2=(1,3,1,-2,-4),\quad \mathbf{w}_3=(3,2,1,-1,-2),$$
$$\mathbf{w}_4=(7,7,3,-4,-8),\quad \mathbf{w}_5=(1,-4,-1,-1,-2)$$

試求$W^{\perp}$的一個基底。

【解答】

驗證以下線性系統

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 7 & 7 & 3 & -4 & -8 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{2}{7} & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

其一般解為

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad s, t \in R$$

零空間的基底即為 $W^{\perp}$ 的基底：$\left\{\left(-\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}, 1, 0, 0\right), \left(0, 0, 0, -2, 1\right)\right\}$ 。

列空間的基底即為 W 的基底：$\left\{\left(0, 1, \frac{2}{7}, 0, 2\right), \left(1, 0, \frac{1}{7}, 0, 0\right), \left(0, 0, 0, 1, 2\right)\right\}$ 。 ■